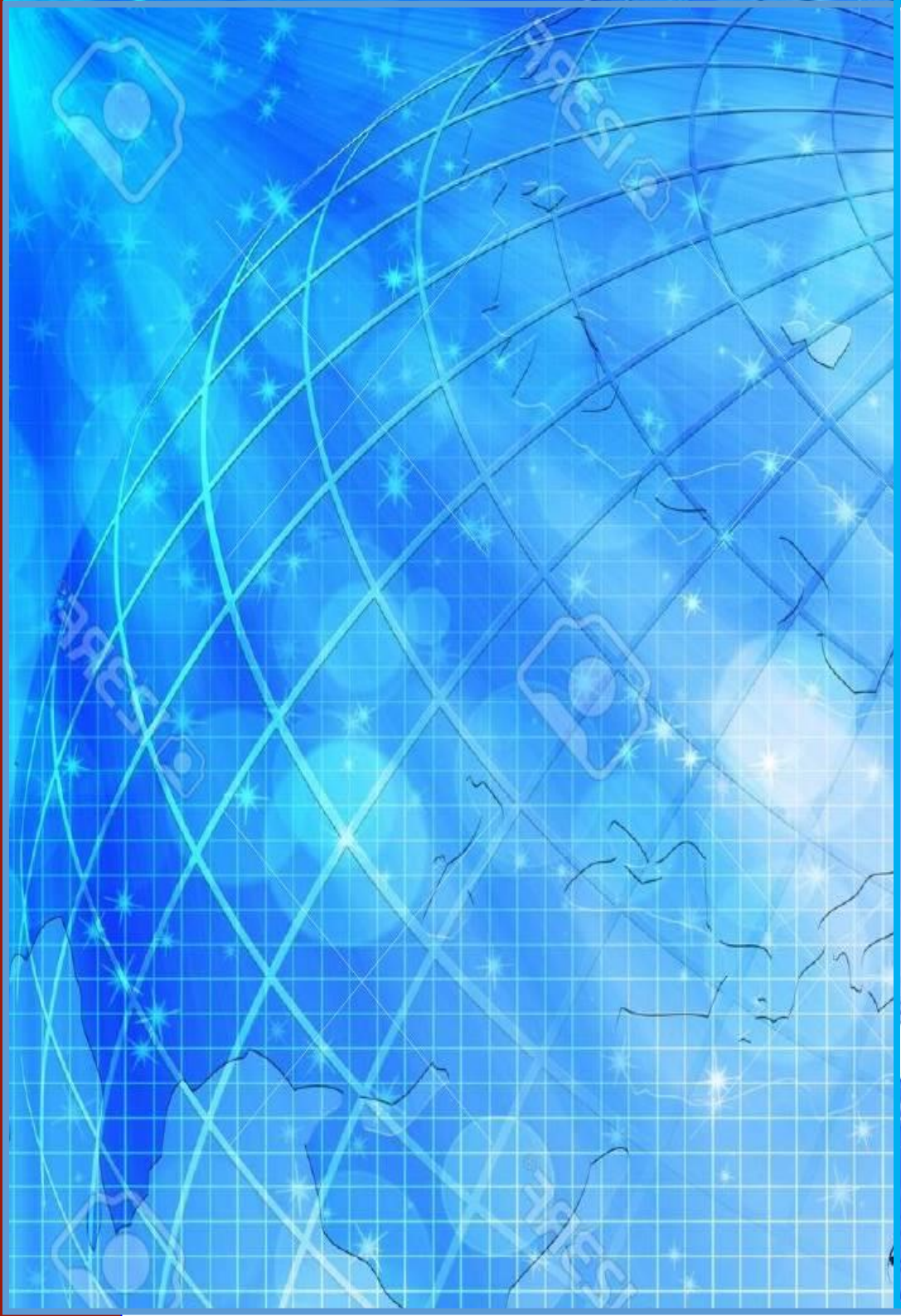


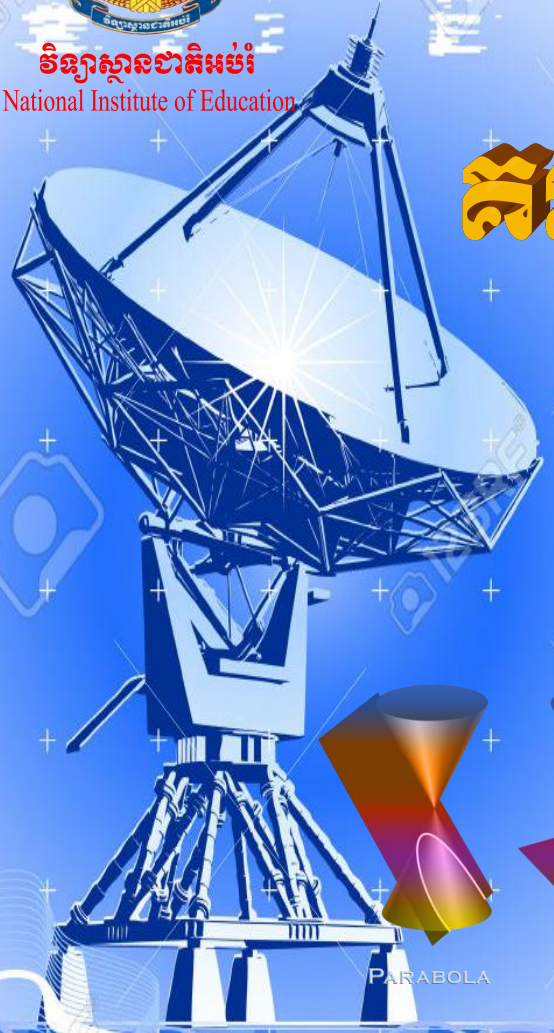
ឆ្នាំ ២០១៦

ឆ្នាំ ២០១៦

ឆ្នាំ ២០១៦

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

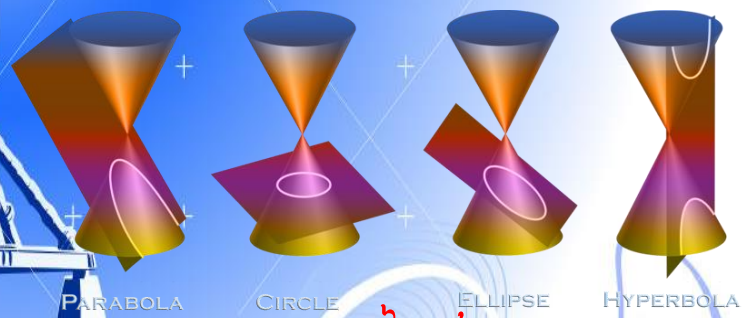
វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
National Institute of Education



គណិតវិទ្យា

កោនិក

Conic



ក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន ៖

- មេរៀនសង្ខេប
- លំហាត់ពាមមេរៀន

រៀបរៀងដោយ : គរុនិសរៀតជំនាន់ទី ២១

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៥ - ២០១៦

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ



វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

National Institute of Educationt

មុខវិជ្ជាឯកទេស៖ គណិតវិទ្យា

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ៖ **ហ្វាន គនហេង**

ប្រធាន៖ ធរណីមាត្រវិភាគ(កោនិច)

រៀបរៀង និងសរសេរដោយគុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម៣ ជំនាន់ទី២១

១. ឆៀម ធារ័ត្ន	092 69 55 99	ស្បៀមរាប
២. យ៉ាត រដ្ឋា	096 788 00 93	ស្បៀមរាប
៣. យ៉ន គីហ្សា	070 24 28 22	ស្បៀមរាប
៤. ស៊ឹប សីហា	088 844 01 63	ពោធិ៍សាត់
៥. ញឹម វិយូឡុង	097 357 57 90	ស្បៀមរាប
៦. ពិន សុគន្ធណារ័ត្ន	069 79 79 56	ស្បៀមរាប

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៥~២០១៦

អារម្ភកថា

សួស្តី មិត្តអ្នកសិក្សាជាទីមេត្រី! សៀវភៅធរណីមាត្រនេះបានចងក្រង និងសំរិតសំរាំងឡើងយ៉ាងពិសេសក្នុងគោលបំណងផ្តល់ជាគំនិត និងវិធីសាស្ត្រ នៃការដោះស្រាយនូវបណ្តាលំហាត់ទាំងឡាយដែលមិត្តអ្នកអានតែងតែជួប ប្រទះជាញឹកញាប់ ហើយក៏ជាជំនួយដល់ ដល់ការសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងផ្សេងៗផងដែរ។

ទោះបីជាយើងខ្ញុំបានខិតខំផ្ទៀងផ្ទាត់ និងពិនិត្យយ៉ាងណាក៏ដោយក៏ កំហុសឆ្គងនៅតែកើតមានអរចេតនា។ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលការរិះគន់ក្នុងន័យ ស្ថាបនាដោយក្តីសោមនស្សរីករាយ ពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និស្សិត និង សិស្សានុសិស្សគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែលម្អសៀវភៅដែលបានរៀបរៀងមកនេះ ឲ្យកាន់តែមានសុក្រិតភាពថែមទៀត។

ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសូមផ្តែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះលោក អ្នកមានគុណទាំងពីរ សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ និងសាស្ត្រាចារ្យនៃវិទ្យាស្ថានជាតិ អប់រំទាំងអស់ ដែលបានផ្តល់ចំណេះដឹងដល់រូបយើងខ្ញុំ ហើយសូមឱ្យលោក ទាំងអស់ជួបប្រទះតែសេចក្តីសុខគ្រប់ប្រការ។

សូមឱ្យសិស្សានុសិស្ស និងមិត្តអ្នកអានទាំងឡាយបានទទួលជោគជ័យ ក្នុងការសិក្សាជាស្តាពរ។

រាជធានីភ្នំពេញថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ២០១៦

ក្រុមអ្នករៀបរៀង

ឧទ្ទិសស្នាដៃ

យើងខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃដែលកើតចេញពីសេចក្តីព្យាយាមដំនះរាល់ការលំបាកនេះជូនដល់វិញ្ញាណក្ខ័ន្ធ៖

មេដឹកនាំខ្មែរគ្រប់ជំនាន់ កងទ័ព និងបុព្វបុរសដែលបានលះបង់កម្លាំងកាយ ចិត្ត ប្រាជ្ញា ស្មារតីរួមទាំងហ៊ានបូជាឈាមស្រស់ សាច់ស្រស់ ដើម្បីការពារជាតិមាតុភូមិ។

ជីដូនជីតា ញាតិការទាំងប្រាំពីរសណ្តាន ដែលបានចែកឋានទៅ។ សូមវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធលោកទាំងអស់គ្នាបានទៅកាន់សុខគតិភពកុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ។ សូមវិញ្ញាក្ខ័ន្ធលោកទាំងអស់តាមជួយថែរក្សាព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាឱ្យរួចផុតពីគ្រោះចង្រៃទាំងឡាយ ដើម្បីឱ្យព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាមានសុខសន្តិភាព និងមានភាពរីកចម្រើនដូចសម័យមហានគរ។

អ្នកប្រាជ្ញ បណ្ឌិត សាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ដែលស្នេហាមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា និងបានខិតខំស្រាវជ្រាវចងក្រងជាស្នាដៃជាឯកសារដ៏ល្អប្រសើរសម្រាប់ជាប្រយោជន៍ដល់អនុជនដែលជាអ្នកសិក្សាជំនាន់ក្រោយ និងប្រទេសជាតិទាំងមូល។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាដែលជាគរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ជំនាន់ទី២១ សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ៖

លោកឪពុក អ្នកម្តាយដែលបានផ្តល់កំណើត និងចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សាដល់ពួកយើងខ្ញុំ។ លោកបានតស៊ូធ្វើការយ៉ាងលំបាកដើម្បីផ្តត់ផ្គង់ដល់បុត្រធីតាទាំងកម្លាំងចិត្ត កម្លាំងកាយ និងសម្ភារៈ ពិសេសជាងនេះទៅទៀតនោះគឺលោកទាំងពីរបានផ្តល់ឱ្យពួកយើងមានភាពជោគជ័យនៅថ្ងៃនេះ។

ឯកឧត្តមបណ្ឌិតនាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ **សៀង សុវណ្ណា** ដែលបានសម្រួលដល់ការរៀនសូត្រដល់ពួកយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាកំឡុងពេលសិក្សារៀនសូត្រនៅទីនេះដើម្បីត្រៀមខ្លួនជាធនធានគ្រូបង្រៀនថ្មី និងប្រកបដោយគុណភាពខ្ពស់។

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ **ប៉ាន គនហេង** ដែលជាសាស្ត្រាចារ្យផ្នែកគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ក្នុងការផ្តល់ជាឯកសារ គំនិត និងជួយដឹកនាំគាំទ្រដល់ប្រធានបទរបស់យើងខ្ញុំ។

សាស្ត្រាចារ្យ **ម៉ែន រ៉ាំង, ស៊ឹម វិសុទ្ធ, ប៉ាន គនហេង, ថៃ ហេង, គីម ចំរើនវុឌ្ឍី** និង សាស្ត្រាចារ្យផ្នែកគណិតវិទ្យាទាំងអស់នៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានជួយពន្យល់ណែនាំដល់ក្រុមយើងខ្ញុំ។

ញាតិមិត្តទាំងឡាយ មិត្តគរុនិស្សិតរួមជំនាន់ជាមួយគ្នា និងមិត្តរួមថ្នាក់ដែលតែងតែបានជួយយកអាសារ និងផ្តល់ជាគំនិតយោបល់ល្អៗដល់យើងខ្ញុំ។

សូមលោកទាំងអស់ខាងលើ ទទួលបាននូវសុខភាពល្អជោគជ័យគ្រប់ភារៈកិច្ច និងជួបប្រទះតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ។

សេចក្តីផ្តើម

គណិតវិទ្យាបានកើតជាយូរយារណាស់មកហើយ ហើយចែកចេញជាច្រើនផ្នែកផ្សេងៗគ្នា។ នៅក្នុងនោះរួមមាន ពិជគណិត ពិជគណិតលីនេអ៊ែ គណិតវិភាគ តក្កវិទ្យា ចំនួន អនុគមន៍ តូប៉ូវិទ្យា ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលួង និងក្នុងលំហ.....។

នៅក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងនេះ មុខវិជ្ជាធរណីមាត្រវិភាគ(កោនិច) គឺជាមុខវិជ្ជាដែលមានការលំបាកក្នុងការសិក្សាឱ្យបានយល់ច្បាស់ និងស៊ីជម្រៅ។ យើងដឹងហើយថាអ្នកដែលមានស្នាដៃជាច្រើន និងមានប្រវត្តិយូរលង់ណាស់មកហើយដែលបានពង្រីកចំណេះដឹងលើមុខវិជ្ជាធរណីមាត្រវិភាគនេះ។ ពួកគាត់ជាអ្នកបង្កើតរូបមន្ត និងបានអនុវត្តមុខវិជ្ជានេះនៅក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់មនុស្សនាសម័យបុរាណ និងបច្ចុប្បន្ន។ គេសង្កេតឃើញមានការអនុវត្តទៅលើវិស័យមួយចំនួនដូចជា ការសាងសង់ស្ពាន អាគារ ការបង្កើតប្រព័ន្ធផ្កាយរណប ប្រព័ន្ធវ៉ាដាជាដើម.....។

ដោយហេតុតែមានការរីកចម្រើនលើផ្នែធរណីមាត្រវិភាគនេះហើយទើបគេយកមុខវិជ្ជានេះទៅអនុវត្តយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងវិស័យបច្ចេកវិទ្យានានាដែលអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិស្វករដ៏ឆ្នើមជាច្រើននាក់ ក្នុងពេលបច្ចុប្បន្នបានយកមកប្រើ។

មាតិកា

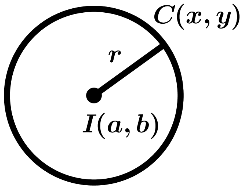
មេរៀនទី១ ៖ រង្វង់.....១
១. សមីការរង្វង់.....១
២. រង្វង់ និង បន្ទាត់.....៣
៣. មុំផ្គុំរវាងរង្វង់ពីរប្រសព្វគ្នា.....៦
៤. ទីតាំងធៀបរវាងចំណុច និង រង្វង់.....៦
៥. ទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ និង រង្វង់.....៧
៦. លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ.....៨
មេរៀនទី២ ៖ ប៉ារ៉ាបូល.....៣៧
១. និយមន័យ.....៣៧
២. សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល.....៣៨
៣. សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល.....៤០
៤. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនិងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុចមួយលើប៉ារ៉ាបូល....៤០
៥. លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ.....៤២
មេរៀនទី៣ ៖ អេលីប.....៥៨
១. និយមន័យ.....៥៨
២. សមីការនៃអេលីប.....៥៩
៣. លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ.....៦១
មេរៀនទី៤ ៖ អ៊ីពែបូល.....៩៦
១. និយមន័យ.....៩៦
២. ទម្រង់ស្តង់ដារសមីការអ៊ីពែបូល.....៩៦
៣. អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីពែបូល.....៩៧
៤. ទម្រង់ទូទៅនៃសមីការអ៊ីពែបូល.....៩៨
៥. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូលត្រង់ចំណុចមួយ.....៩៨

៦. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអ៊ីពែបូល.....៩៩
៧. លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ.....៩៩
មេរៀនទី៥ ៖ ចំណាត់ថ្នាក់កោនិច.....១២២
១. ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចពីសមីការទូទៅរបស់វា.....១២២
២.ការបង្វិលអ័ក្ស.....១២៣
៣.ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចដែលមានរាងទូទៅ.....១២៨
៤. លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ.....១៣០

មេរៀនទី១ សមីការរង្វង់

១. សមីការរង្វង់

ក. និយមន័យ *រង្វង់ ជាសំណុំចំណុច $C(x;y)$ នៅក្នុងប្លង់ដែលស្ថិតនៅចម្ងាយថេរពីចំណុចនឹងមួយ $I(a,b)$ ។*



- *ចំណុចនឹងនោះហៅថា* **ផ្ចិតរង្វង់** ។
- *ចម្ងាយថេរនោះហៅថា* **កាំរង្វង់** ។

ខ. សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់

គេមានរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a,b)$ និង កាំ r ។

រង្វង់ ជាសំណុំចំណុច $C(x;y)$ ដែលមានចម្ងាយស្មើ r ពីផ្ចិត I ។

តាមរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីចំណុចយើងបាន

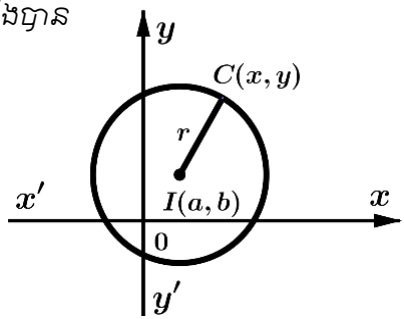
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=CI$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=CI^2$$

តែ $CI=r$ យើងបាន

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

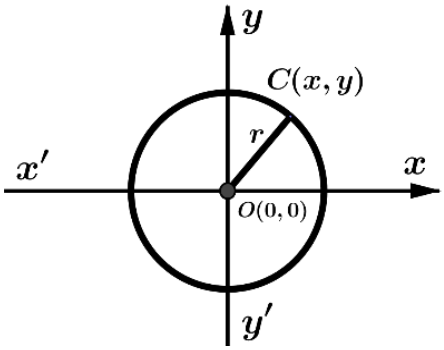
ជាសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a,b)$ និង កាំ r ។



ជាទូទៅ

សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a,b)$ និង កាំ r គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ។

សម្គាល់ *រង្វង់ដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ $O(0,0)$ និង កាំ r មានសមីការស្តង់ដា* $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ ។



គ. សមីការទូទៅនៃរង្វង់

សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a,b)$ និង កាំ r គឺ

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

សមមូល $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$

បើ $A=-2a\ ;\ B=-2b\ ;\ C=a^2+b^2-r^2$

គេបាន $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ *ហៅថាសមីការទូទៅនៃរង្វង់* ។

ជាទូទៅ *សមីការទូទៅនៃរង្វង់គឺ* $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

សម្គាល់ *គ្រប់សមីការដែលមានទម្រង់* $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ *មិនមែនសុទ្ធតែតាងឲ្យសមីការរង្វង់ទាំងអស់នោះទេ។*

i. *សមីការ* $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ *ជាសមីការរង្វង់ កាលណា* $A^2+B^2-4C>0$ *ឬ* $C<0$ ។

ii. *សមីការរង្វង់មានលក្ខណៈពិសេសដូចខាងក្រោម ៖*

a. *ជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង* x,y

b. *មេគុណនៃ* x^2 *និង* y^2 *ស្មើគ្នា*

c. *ក្នុងសមីការគ្មានតួដែលមានកត្តា* xy ។

iii. ចំពោះរង្វង់ដែលមានសមីការ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

a. ផ្ចិត $I(a,b)$ ដែល $a=-\frac{A}{2}$, $b=-\frac{B}{2}$

b. កាំ $r=\sqrt{a^2+b^2-C}$

ករណីពិសេស

a. សមីការរង្វង់មានផ្ចិតជាគល់តម្រុយគឺ $x^2+y^2=r^2$ ។

b. សមីការរង្វង់កាត់តាមគល់តម្រុយគឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

c. សមីការរង្វង់ប៉ះនឹងអ័ក្សរអាប់ស៊ីសគឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

d. សមីការរង្វង់ប៉ះនឹងអ័ក្សអរដោនេ គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

e. សមីការរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $A(x_A,y_A)$ និង $B(x_B,y_B)$ គឺ

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

សម្គាល់ បើគេឲ្យចំណុចនឹងពីរ A និង B នោះសំណុំចំណុច P ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $AP:BP=m:n$ ចំពោះ $m\neq n$ ជារង្វង់ ។ រង្វង់នេះហៅថា ៖ **រង្វង់អាប៉ូឡូនុស** ហើយចុងនៃអង្កត់ផ្ចិតទាំងពីរជាចំណុចចែកក្នុង និង ចែកក្រៅនៃអង្កត់ AB ។

២. រង្វង់ និង បន្ទាត់

ក. ចំណុចប្រសព្វនៃរង្វង់ និង បន្ទាត់

ជាទូទៅ៖ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ និង បន្ទាត់ គឺជាចម្លើយនៃប្រពន្ធ័សមីការដែលផ្គុំដោយសមីការរង្វង់ និង បន្ទាត់ ។

គេមានរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ និង បន្ទាត់ $D:y=mx+n$

នោះគេបានប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 & (1)\\ y=mx+n & (2)\end{cases}$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $(x-a)^2+\left[(mx+n)-b\right]^2=r^2$ $(*)$

តាង Δ ជាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $(*)$ យើងបាន

- បើ $\Delta>0$ នោះបន្ទាត់ និង រង្វង់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំណុច

- បើ $\Delta = 0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់
- បើ $\Delta < 0$ នោះបន្ទាត់ និង រង្វង់មិនប្រសព្វគ្នា

ខ បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់

បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ គឺជាបន្ទាត់ដែលកែងទៅនឹងកាំរង្វង់ត្រង់ចុងនៃកាំ ដែលហៅថា " **ចំណុចប៉ះ** " ។ គេអាចរកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះតាមលក្ខណៈខាងក្រោម ៖

យកចំណុច $P(x_0, y_0)$ នៅលើរង្វង់ $x^2 + y^2 = r^2$ ដែលផ្ទៃតរបស់ស្ថិតលើគល់ $O(0,0)$ និង មានកាំ r ។

1. ករណី $x_0 y_0 \neq 0$

ដោយមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច P ស្មើ $-\dfrac{x_0}{y_0}$

គេបានសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ PT គឺ $y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2 \quad (1)$$

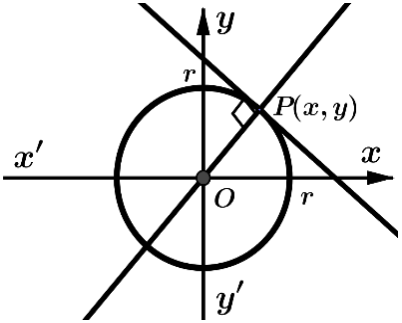
ដោយចំណុច $P(x_0, y_0)$ ឋិតនៅលើរង្វង់ គេបាន $x_0^2 + y_0^2 = r^2$

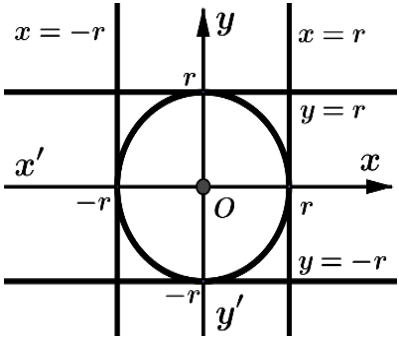
តាម (1) គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ គឺ $x_0 x + y_0 y = r^2$

2. ករណី $x_0 y_0 = 0$ នោះ $x_0 = 0$ ឬ $y_0 = 0$ គេបានចំណុច P ស្ថិតនៅលើអក្សកូអរដោនេ ។

- បើ $P(r,0)$ នោះសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $x = r$
- បើ $P(-r,0)$ នោះសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $x = -r$
- បើ $P(0,r)$ នោះសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = r$
- បើ $P(0,-r)$ នោះសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = -r$

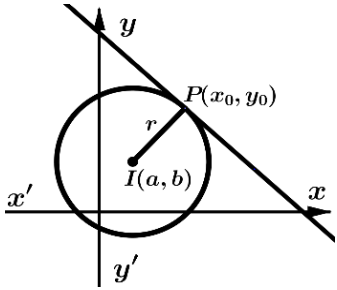
ជាទូទៅ សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $x^2 + y^2 = r^2$ ត្រង់ចំណុច $P(x_0, y_0)$ គឺ $\boxed{x_0 x + y_0 y = r^2}$





ជាទូទៅ *សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *ដែលផ្ចិត* $I(a,b)$ *និង មានកាំ* r *ត្រង់ចំណុច* $P(x_0,y_0)$ *គឺ*

$$\boxed{(x_0-a)(x-a)+(y_0-a)(y-a)=r^2}$$



គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ចំណុចមួយនៅលើរង្វង់

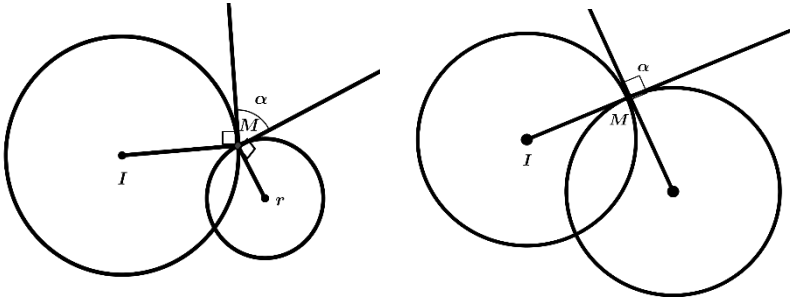
a. *សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់* $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *ត្រង់ចំណុច* $A(x_A,y_A)$ *គឺ* $\boxed{(x-x_A)(x-a)+(y-y_A)(y_A-b)=0}$

b. *សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់* $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ *ត្រង់ចំណុច* $A(x_A,y_A)$ *គឺ* $\boxed{x.x_A+y.y_A-a(x+x_A)-b(y+y_A)+c=0}$

c. *សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់* $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ *ត្រង់ចំណុច* $A(x_A,y_A)$ *គឺ* $\boxed{x.x_A+y.y_A+\frac{A}{2}(x+x_A)+\frac{B}{2}(y+y_A)+c=0}$

៣. មុំផ្គុំរវាងរង្វង់ពីរប្រសព្វគ្នា

មុំផ្គុំរវាងរង្វង់ពីរប្រសព្វគ្នា គឺជាមុំរវាងបន្ទាត់ប៉ះពីរត្រង់ចំណុចប្រសព្វមួយ។ បើមុំរវាងរង្វង់ទាំងពីរជាមុំកែង នោះគេថារង្វង់ទាំងពីរអរតូកូណាល់គ្នា ។



ចំណាំ: *ដើម្បីឱ្យរង្វង់* $C_1 : x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$ *និង* $C_2 : x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$ *អរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ* $2A_1A_2 + 2B_1B_2 = C_1 + C_2$ ។

- *មុំរវាងបន្ទាត់ពីរ* $D_1 : y = ax + b$ *និង* $D_1 : y = a'x + b'$ *គឺ* $\boxed{\tan\alpha = \frac{a' - a}{1 + a'a}}$
- *មុំរវាងបន្ទាត់ពីរ* $D_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *និង* $D_1 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *គឺ*

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}}$$

៤. ទីតាំងធៀបរវាងចំណុច និង រង្វង់

ទីតាំងធៀបរវាងចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ *និង រង្វង់ផ្ចិត* $I(a,b)$ *និង កាំ* r *គឺ៖*

- *បើ* $IM_0 = r$ *នោះចំណុច* M_0 *នៅលើរង្វង់ ។*
- *បើ* $IM_0 < r$ *នោះចំណុច* M_0 *នៅខាងក្នុងរង្វង់ ។*
- *បើ* $IM_0 < r$ *នោះចំណុច* M_0 *នៅខាងក្រៅរង្វង់ ។*

សម្គាល់: *បើគេមានសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

តាង $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$ *។ រួចគណនា* $f(x_0, y_0)$

- បើ $f(x_0, y_0) = 0$ នោះចំណុច M_0 នៅលើរង្វង់ ។
- បើ $f(x_0, y_0) < 0$ នោះចំណុច M_0 នៅខាងក្នុងរង្វង់ ។
- បើ $f(x_0, y_0) > 0$ នោះចំណុច M_0 នៅខាងក្រៅរង្វង់ ។

3. បើគេមានសមីការទូទៅនៃរង្វង់ $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$

តាង $f(x; y) = x^2 + y^2 + Ax + Bx + C$ ។ រួចគណនា $f(x_0, y_0)$

- បើ $f(x_0, y_0) = 0$ នោះចំណុច M_0 នៅលើរង្វង់ ។
- បើ $f(x_0, y_0) < 0$ នោះចំណុច M_0 នៅខាងក្នុងរង្វង់ ។
- បើ $f(x_0, y_0) > 0$ នោះចំណុច M_0 នៅខាងក្រៅរង្វង់ ។

៥. ទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ និង រង្វង់

ទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ $Ax + By + C = 0$ និង រង្វង់ផ្ចិត $I(a,b)$ កាំ r គឺ៖

- បើ $d = r$ នោះបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ ។
- បើ $d < r$ នោះបន្ទាត់កាត់រង្វង់ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា ។
- បើ $d > r$ នោះបន្ទាត់មិនកាត់រង្វង់ ។

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១.*សរសេរសមីការរង្វង់ជាទម្រង់ស្តង់ដា និងទម្រង់ទូទៅ ដោយស្គាល់ផ្ចិត I និងកាំ r ក្នុងករណីខាងក្រោម៖*

ក. $I(0,0)$, $r=2$ ខ. $I(0,1)$, $r=\sqrt{2}$

គ. $I(2,0)$, $r=2$ ឃ. $I(1,1)$, $r=\sqrt{3}$

ង. $I(0,2)$, $r=2$ ច. $I(-2,3)$, $r=4$

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរសមីការទម្រង់ស្តង់ដា និង ទម្រង់ទូទៅនៃរង្វង់៖

ក. $I(0,0)$ និង $r=2$

តាមរូបមន្ត $x^2+y^2=r^2$

$$x^2+y^2=2^2$$

$$x^2+y^2-4=0$$

ដូចនេះ | ទម្រង់ស្តង់ដា $x^2+y^2=2^2$ ទម្រង់ទូទៅ $x^2+y^2-4=0$ |

ខ. $I(0,1)$ និង $r=\sqrt{2}$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

យើងបាន $(x-0)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

$$x^2+(y-1)^2=2$$

$$x^2+y^2-2y+1-2=0$$

$$x^2+y^2-2y-1=0$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ទម្រង់ស្តង់ដា } x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2\\ \text{ទម្រង់ទូទៅ } x^2+y^2-2y-1=0\end{array}}$$

គ. $I(2,0)$ និង $r=2$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

យើងបាន $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

$$(x-2)^2+y^2=2^2$$

$$x^2-4x+4+y^2-4=0$$

$$x^2+y^2-4x=0$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ទម្រង់ស្តង់ដា } (x-2)^2+y^2=2^2\\ \text{ទម្រង់ទូទៅ } x^2+y^2-4x=0\end{array}}$$

ឃ. $I(1,1)$ និង $r=\sqrt{3}$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

យើងបាន $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{3})^2$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=3$$

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=3$$

$$x^2+y^2-2x-2y-1=0$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ទម្រង់ស្តង់ដា } (x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{3})^2\\ \text{ទម្រង់ទូទៅ } x^2+y^2-2x-2y-1=0\end{array}}$$

ង. $I(0,2)$ និង $r=2$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

យើងបាន $(x-0)^2+(y-2)^2=2^2$

$x^2+y^2-4x+4=4$

$x^2+y^2-4x=0$

ដូចនេះ

ទម្រង់ស្តង់ដា $(x-0)^2+(y-2)^2=2^2$
ទម្រង់ទូទៅ $x^2+y^2-4x=0$

ច. $I(-2,3)$ និង $r=4$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

យើងបាន $[x-(-2)]^2+[y-3]^2=4^2$

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9=16$

$x^2+y^2+4x-6y-3=0$

ដូចនេះ

ទម្រង់ស្តង់ដា $(x+2)^2+(y-3)^2=4^2$
ទម្រង់ទូទៅ $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

លំហាត់ទី០២. *រកផ្ចិតនិងកាំរង្វង់ដែលមានសមីការស្តង់ដាដូចខាងក្រោម*

ក. $x^2+y^2=9$ ខ. $(x-2)^2+(y-1)^2=16$

គ. $x^2+(y+3)^2=5$ ឃ. $(x+2)^2+(y+4)^2=7$

ដំណោះស្រាយ

២. *រកផ្ចិត និង កាំនៃរង្វង់*

ក. $x^2+y^2=9$

សមមូល $(x-0)^2+(y-0)^2=3^2$

នាំឱ្យ $I(0,0)$ និង $r=3$

ដូចនេះ ផ្ចិតរង្វង់ $I(0,0)$ កាំរង្វង់ $r=3$

ខ. $(x-2)^2+(y-1)^2=16$

សមមូល $(x-2)^2+(y-1)^2=4^2$

នាំឱ្យ $I(2,1)$ និង $r=4$

ដូចនេះ ផ្ចិតរង្វង់ $I(2,1)$ កាំរង្វង់ $r=4$

គ. $x^2+(y+3)^2=5$

សមមូល $(x-0)^2+[y-(-3)]^2=(\sqrt{5})^2$

នាំឱ្យ $I(0,-3)$ និង $r=\sqrt{5}$

ដូចនេះ ផ្ចិតរង្វង់ $I(0,-3)$ កាំរង្វង់ $r=\sqrt{5}$

ឃ. $(x+2)^2+(y+4)^2=7$

សមមូល $[x-(-2)]^2+[y-(-4)]^2=(\sqrt{7})^2$

នាំឱ្យ $I(-2,-4)$ និង $r=\sqrt{7}$

ដូចនេះ ផ្ចិត $I(-2,-4)$ កាំ $r=\sqrt{7}$

លំហាត់ទី០៣ រកផ្ចិត និងកាំរង្វង់ដែលមានសមីការទូទៅដូចខាងក្រោម

ក. $x^2+y^2+4x-6=0$ ខ. $x^2+y^2-6x-2y-6=0$

គ. $x^2+y^2+8x+2y-8=0$ ឃ. $2x^2+2y^2-6x+2y+3=0$

ង. $2x^2+2y^2-2x+2y-1=0$ ច. $3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$

ដំណោះស្រាយ

៣. រកផ្ចិត និង កាំនៃរង្វង់

ក. $x^2+y^2+4x-6=0$

យើងមាន $x^2+y^2+4x-6=0$

$$x^2+4x+4-4+y^2-6=0$$

$$(x+2)^2+y^2=10$$

គេបាន $I(-2,0)$ និង $r=\sqrt{10}$

ដូចនេះ $\boxed{I(-2,0) \text{ និង } r=\sqrt{10}}$

ខ. $x^2+y^2-6x+2y-6=0$

យើងមាន $x^2+y^2-6x+2y-6=0$

$$x^2-6x+9-9+y^2+2y+1-1-6=0$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$$

យើងបាន $I(3,-1)$ និង $r=4$

ដូចនេះ $\boxed{I(3,-1) \text{ និង } r=4}$

គ. $x^2+y^2+8x+2y-8=0$

យើងមាន $x^2+y^2+8x+2y-8=0$

$$x^2+8x+16-16+y^2+2y+1-1-8=0$$

$$(x+4)^2+(y+1)^2=5^2$$

យើងបាន $I(-4,-1)$ និង $r=5$

ដូចនេះ $\boxed{I(-4,-1) \text{ និង } r=5}$

ឃ. $2x^2+2y^2-6x-2y+3=0$

យើងមាន $2x^2+2y^2-6x-2y+3=0$

$$2(x^2-3x)+2(y^2-y)+3=0$$

$$(x^2-3x)+(y^2-y)+\frac{3}{2}=0$$

$$x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

យើងបាន $I\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ និង $r=1$

ដូចនេះ $\boxed{I\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ និង } r=1}$

ង. $2x^2+2y^2-2x+2y-1=0$

យើងមាន $2x^2+2y^2-2x+2y-1=0$

$$2(x^2-x)+2(y^2+y)-1=0$$

$$x^2-x+y^2+y-\frac{1}{2}=0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

យើងបាន $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ និង $r=1$

ដូចនេះ $\boxed{I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \text{ និង } r=1}$

ច. $3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$

យើងមាន $3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$

$$3x^2-2x+3y^2-3y+1=0$$

$$x^2-\frac{2}{3}x+y^2-y+\frac{1}{3}=0$$

$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

យើងបាន $I\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ និង $r=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{I\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) \text{ និង } r=\frac{1}{6}}$

លំហាត់ទី០៤ សរសេរសមីការរង្វង់ទម្រង់ទូទៅខាងក្រោម ទៅជាទម្រង់ស្តង់ដា រួចសង់ក្រាប ៖

ក. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ ខ. $2x^2+2y^2-8x=0$

គ. $x^2+y^2+4x-y-1=0$ ឃ. $x^2+y^2+6x-4y+2=0$

ដំណោះស្រាយ

៤. រកសមីការរង្វង់ទម្រង់ស្តង់ដា

ក. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$

យើងមាន $x^2+y^2-4x+2y+4=0$

$$x^2-4x+4-4+y^2+2y+1+3=0$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)-1=0$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=1$$

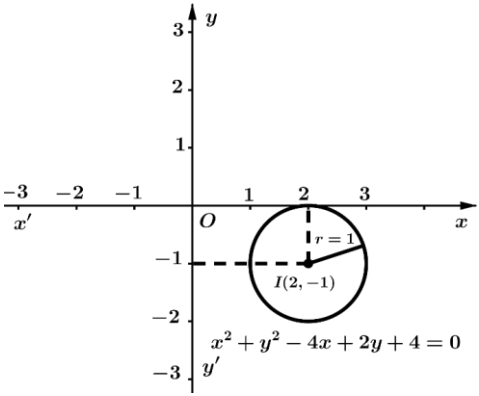
ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ស្តង់ដា } (x-2)^2+(y+1)^2=1}$

➢ *សង់ក្រាប*

ដោយសមីការរង្វង់មានទម្រង់ស្តង់ដា $(x-a)^2+(y+b)^2=r^2$

យើងបាន $a=2$, $b=-1$, $r^2=1\Rightarrow r=1$

នាំឱ្យ រង្វង់មានផ្ចិត $I(2,-1)$ *និង កាំ* $r=1$



ខ. $2x^2+2y^2-8x=0$

យើងមាន $2x^2+2y^2-8x=0$

$$x^2+y^2-4x=0$$

$$x^2-4x+4-4+y^2=0$$

$$(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$$

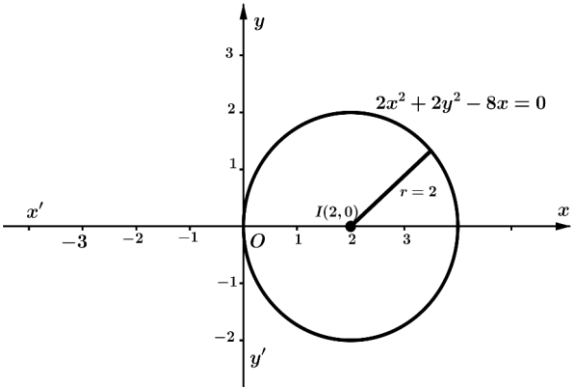
ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដា $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

- *សង់ក្រាប*

ដោយសមីការរង្វង់មានទម្រង់ស្តង់ដា $(x-a)^2+(y+b)^2=r^2$

យើងបាន $a=2$, $b=0$, $r^2=4\Rightarrow r=2$

នាំឱ្យ រង្វង់មានផ្ចិត $I(2,0)$ *និង កាំ* $r=2$



គ. $x^2+y^2+4x-y-1=0$

យើងមាន $x^2+y^2+4x-y-1=0$

$$x^2+4x+4-4+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=0$$

$$(x^2+4x+4)+(y^2-y+\frac{1}{4})-\frac{21}{4}=0$$

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$

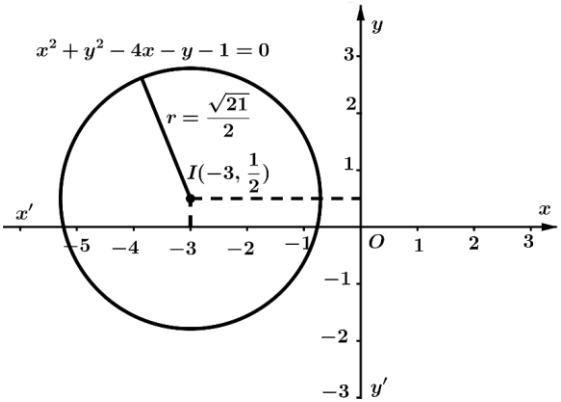
ដូចនេះ $\boxed{(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}}$

➢ *សង់ក្រាប*

ដោយសមីការរង្វង់មានទម្រង់ស្តង់ដា $(x-a)^2+(y+b)^2=r^2$

យើងបាន $a=-2$, $b=\frac{1}{2}$, $r^2=\frac{21}{4}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{21}}{2}$

នាំឱ្យ រង្វង់មានផ្ចិត $I(-2,\frac{1}{2})$ *និង កាំ* $r=\frac{\sqrt{21}}{2}$



ឃ. $x^2+y^2+6x-4y+2=0$

យើងមាន $x^2+y^2+6x-4y+2=0$

$$x^2+6x+9-9+y^2-4y+4-2=0$$
$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)-11=0$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2=11$$

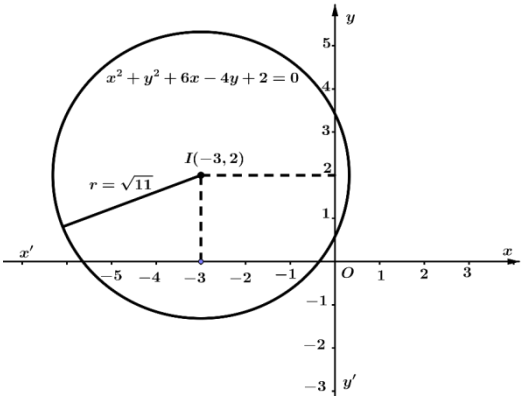
ដូចនេះ $\boxed{(x+3)^2+(y-2)^2=11}$

➢ *សង់ក្រាប*

ដោយសមីការរង្វង់មានទម្រង់ស្តង់ដា $(x-a)^2+(y+b)^2=r^2$

យើងបាន $a=-3$, $b=2$, $r^2=11\Rightarrow r=\sqrt{11}$

នាំឱ្យ រង្វង់មានផ្ចិត $I(-3,2)$ *និង កាំ* $r=\sqrt{11}$



លំហាត់ទី០៥ *សរសេរសមីការរង្វង់ទម្រង់ទូទៅដែលកាត់តាមបីចំណុចខាងក្រោម៖*

ក. $(1,0)$; $(0,1)$ និង $(3,4)$ ខ. $(2,2)$; $(-2,1)$ និង $(2,3)$

គ. $(1,2)$; $(2,4)$ និង $(3,2)$ ឃ. $(-1,2)$; $(2,-1)$ និង $(2,0)$

ដំណោះស្រាយ

៥. រកសមីការរង្វង់ទម្រង់ស្តង់ដា

ក. $(1,0);(0,1)$ និង $(3,4)$

ដោយក្រាបនៃរង្វង់កាត់តាមបីចំណុច $(1,0);(0,1)$ និង $(3,4)$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(1,0)$

យើងបាន $(1-a)^2+(0-b)^2=r^2$

$$1-2a+a^2+b^2=r^2 \quad (1)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(0,1)$

យើងបាន $(0-a)^2+(1-b)^2=r^2$

$$a^2+1+2b+b^2=r^2 \quad (2)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(3,4)$

យើងបាន $(3-a)^2+(4-b)^2=r^2$

$$9-6a+a^2+16-8b+b^2=r^2$$

$$25-6a+a^2-8b+b^2=r^2 \qquad (3)$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន $-2a+2b=0 \Rightarrow a=b$

យក $(1)-(3)$ គេបាន $-24+4a+8b=0$

$$-6+a+2a=0$$

$$a=2$$

យក $a=b=2$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1)

គេបាន $1-4+4+4=r^2 \Rightarrow r=\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{(x-2)^2+(y-2)^2=5}$

ខ. $(2,2);(-2,1)$ និង $(2,3)$

ដោយក្រាបនៃរង្វង់កាត់តាមបីចំណុច $(2,2);(-2,1)$ និង $(2,3)$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(2,2)$

យើងបាន $(2-a)^2+(2-b)^2=r^2$

$$8-4a+a^2-4b+b^2=r^2 \qquad (1)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(-2,1)$

យើងបាន $(-2-a)^2+(1-b)^2=r^2$

$$4+4a+a^2+1-2b+b^2=r^2$$

$$5+4a+a^2-2b+b^2=r^2 \qquad (2)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(2,2)$

យើងបាន $(2-a)^2+(3-b)^2=r^2$

$$4-4a+a^2+9-6b+b^2=r^2$$

$$13-4a+a^2-6b+b^2=r^2 \qquad (3)$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន $-8a-2b=-3 \quad (a)$

យក $(1)-(3)$ គេបាន $2b=5 \Rightarrow b=\frac{5}{2}$

យក $b=\frac{5}{2}$ ជំនួសក្នុងសមីការ (a)

គេបាន $-8a-2\frac{5}{2}=-3 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$

យក $a=-\frac{1}{4};b=\frac{5}{2}$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1)

គេបាន $8-4\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2-4\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=r^2$

$$\frac{1}{16}+\frac{25}{4}-1=r^2$$

$$\frac{85}{16}=r^2$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{85}{16}}$

គ. $(1,2);(2,4)$ និង $(3,2)$

ដោយក្រាបនៃរង្វង់កាត់តាមបីចំណុច $(1,2);(2,4)$ និង $(3,2)$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(1,2)$

យើងបាន $(1-a)^2+(2-b)^2=r^2$

$$1-2a+a^2+4-4b+b^2=r^2$$

$$5-2a+a^2-4b+b^2=r^2 \qquad (1)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(2,4)$

យើងបាន $(2-a)^2+(4-b)^2=r^2$

$$4-4a+a^2+16-8b+b^2=r^2$$

$$20-4a+a^2-8b+b^2=r^2 \qquad (2)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(3,2)$

យើងបាន $(3-a)^2+(2-b)^2=r^2$

$$9-6a+a^2+4-4b+b^2=r^2$$
$$13-6a+a^2-4b+b^2=r^2 \qquad (3)$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន $2a+4b=15 \quad (a)$

យក $(1)-(3)$ គេបាន $4a=8 \Rightarrow a=2$

យក $a=2$ ជំនួសក្នុងសមីការ (a) គេបាន

$4+4b=15 \Rightarrow b=\dfrac{11}{4}$

យក $a=2;b=\dfrac{11}{4}$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1)

គេបាន $5-4+4^2-4\left(\dfrac{11}{4}\right)+\left(\dfrac{11}{4}\right)^2=r^2$

$$\frac{25}{16}=r^2$$

ដូចនេះ $\boxed{(x-2)^2+\left(y-\dfrac{11}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}}$

ឃ. $(-1,2);(2,-1)$ និង $(2,0)$

ដោយក្រាបនៃរង្វង់កាត់តាមបីចំណុច $(-1,2);(2,-1)$ និង $(2,0)$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(-1,2)$

យើងបាន $(-1-a)^2+(2-b)^2=r^2$

$$1+2a+a^2+4-4b+b^2=r^2$$
$$5+2a-4b+a^2+b^2=r^2 \qquad (1)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(2,-1)$

យើងបាន $(2-a)^2+(-1-b)^2=r^2$

$$4-4a+a^2+1+2b+b^2=r^2$$
$$5-4a+2b+a^2+b^2=r^2 \qquad (2)$$

រង្វង់កាត់តាមចំណុច $(2,0)$

យើងបាន $(2-a)^2+(0-b)^2=r^2$

$$4-4a+a^2+b^2=r^2$$
$$4-4a+a^2+b^2=r^2 \qquad (3)$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន $6a-6b=0 \Rightarrow a=b$

យក $(1)-(3)$ គេបាន $6a-4b=-1$

$$6a-4a=-1$$
$$a=-\frac{1}{2}$$

យក $a=b=-\frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុងសមីការ (3)

គេបាន $4+2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=r^2 \Rightarrow r^2=\frac{13}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}}$

លំហាត់ទី ០៦ រកសមីការរង្វង់ខាងក្រោម ៖

ក. រង្វង់កាត់តាមចំនុច $I(2,1)$ និង កាត់តាមចំនុច $A(-1,3)$ ។

ខ. រង្វង់កាត់តាមចំនុច $A(3,\sqrt{3})$; $B(2,-2)$ ហើយមានផ្តិតឋិតលើអក្សរអាប់ស៊ីស ។

គ. រង្វង់កាត់តាមចំនុច $A(1,2)$ ហើយប៉ះទៅនឹងអក្សរកូអរដោនេ

ដំណោះស្រាយ

ក. រង្វង់កាត់តាមចំនុច $I(2,1)$ និង កាត់តាមចំនុច $A(-1;3)$

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដោយក្រាបនៃរង្វង់កាត់តាមចំនុច $A(-1;3)$

ពាំ $r=AI=\sqrt{(2+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$

យើងបាន $(x-2)^2+(y-1)^2=13$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការរង្វង់ } (x-2)^2+(y-1)^2=13}$

ខ. រង្វង់កាត់តាមចំនុច $A(3,\sqrt{3})$; $B(2,-2)$ ហើយមានផ្ចិតឋិតលើអ័ក្សរអាប់ស៊ីស

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដោយរង្វង់មានផ្ចិតឋិតលើអាប់ស៊ីស នោះ $b=0$

យើងបាន $(x-a)^2+y^2=r^2$

រង្វង់កាត់តាមចំនុច $A(3,\sqrt{3})$; $B(2,-2)$

$A(3,\sqrt{3})$ នោះ $(3-a)^2+3=r^2$ (1)

$B(2,-2)$ នោះ $(2-a)^2+4=r^2$ (2)

យក (1)−(2) គេបាន $(3-a)^2-(2-a)^2-1=0$

$$9-6a+a^2-4+4a-a^2-1=0$$

$$-2a+4=0$$

$$a=2$$

យក $a=2$ ជំនួសក្នុងសមីការ (2)

គេបាន $0+4=r^2 \Rightarrow r^2=4$

ដូចនេះ

សមីការរង្វង់ $(x-2)^2+y^2=4$

គ. រង្វង់កាត់តាមចំនុច $A(1,2)$ ហើយប៉ះទៅនឹងអក្សកូអរដោនេទាំងពីរ

តាមរូបមន្ត $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដោយរង្វង់ប៉ះទៅនឹងអក្សកូអរដោនេទាំងពីរ នោះ $a=b=r$

គេបាន $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

រង្វង់កាត់តាម $A(1,2)$ នោះ $(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$

$$1-2a+a^2+4-4a+a^2=a^2$$

$$a^2-6a+5=0$$

$$a_1=1\ ;\ a_2=5$$

ដូចនេះ

សមីការរង្វង់ $(x-1)^2+(y-1)^2=1\ ;(x-5)^2+(y-5)^2=25$

លំហាត់ទី ០៧ គេឲ្យចំណុច $A(5,4)$ នៅលើរង្វង់ $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ ។ រកសមីការរង្វង់ប៉ះត្រង់ចំណុចនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

៧. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់

តាមរូបមន្ត $(x_A-a)(x-a)+(y_B-b)(y-b)=r^2$

ដោយ រង្វង់មានផ្ចិត $I(2,3)$ និង $r=\sqrt{10}$

យើងបាន $(5-2)(x-2)+(4-3)(y-3)=10$

$$3(x-2)+(y-3)=10$$

$$3x-6+y-3-10=0$$

$$y=-3x+19$$

ដូចនេះ | សមីការប៉ះរង្វង់គឺ $y=-3x+19$ |

លំហាត់ទី០៨ រកសមីការបន្ទាត់ដែលកូសចេញពីចំណុច $B(0,-2)$ ទៅប៉ះនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

៨. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់

តាង $(l): y=mx+n$ ជាបន្ទាត់ដែលកូសចេញពី B ទៅប៉ះរង្វង់

ដោយបន្ទាត់ (l) កាត់តាមចំនុច $B(0,-2)$

គេបាន $-2=m(0)+n \Rightarrow n=-2$ នោះ $(l): y=mx-2$

បន្ទាត់ $(l): y=mx-2$ ប៉ះរង្វង់ $x^2+y^2=1$ គេបាន

សមីការអាប់ស៊ីស $x^2+(mx-2)^2=1$

$$x^2+m^2x^2-4mx+4-1=0$$

$$(1+m^2)x^2-4mx+3=0$$

$\Delta' = (-2m)^2 - (1+m^2)3$

$= 4m^2 - 3m^2 - 3$

$= m^2 - 3$

បន្ទាត់ (l) ប៉ះរង្វង់លុះត្រាតែ $\Delta' = 0$ គេបាន $m^2 - 3 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

ដូចនេះ | សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = \pm\sqrt{3}x - 2$ |

លំហាត់ទី ០៩. គេមានសមីការរង្វង់ $x^2 + y^2 = 13$ និងបន្ទាត់ $x + 5y = 13$ ។
រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់និងបន្ទាត់ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

៩. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ

រង្វង់ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់គេបាន $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \\ x + 5y = 13 & (2) \end{cases}$

តាម $(2) : x = 13 - 5y$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $(13-5y)^2 + y^2 = 13$

$169 - 130y + 25y^2 + y^2 - 13 = 0$

$26y^2 - 130y + 156 = 0$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$y_1 = 2 \; ; \; y_2 = 3$

បើ $y_1 = 2$ នោះ $x = 13 - 10 = 3$

បើ $y_2 = 3$ នោះ $x = 13 - 15 = -2$

ដូចនេះ | កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វគឺ $(2,3) \; ; \; (3,-2)$ |

លំហាត់ទី ១០ គេឲ្យចំណុចនឹងបី $A(1,0)\,;B(-2,-3)$ និង $C(-5,-3)$ ។
រកសំណុំចំណុច P ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $AP^2=BP^2+CP^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

១០. រកសំណុំចំនុច P

តាង $P(x,y)$ ជាសំណុំចំនុចនៅក្នុងប្លង់

គេបាន $AP^2=(x-1)^2+(y-0)^2$

$$AP^2=x^2-2x+1+y^2$$
$$BP^2=(x+2)^2+(y+3)^2$$
$$=x^2+4x+4+y^2+6y+9$$
$$=x^2+4x+y^2+6y+13$$
$$CP^2=(x+5)^2+(y+3)^2$$
$$=x^2+10x+25+y^2+6y+9$$
$$=x^2+10x+y^2+6y+34$$

ដោយ $AP^2=BP^2+CP^2$

គេបាន $x^2+y^2-2x+1=x^2+4x+y^2+6y+13+x^2+10x+y^2+6y+34$

$$x^2+y^2+16x+12y+46=0$$
$$x^2+16x+64-64+y^2+12y+36-36+46=0$$
$$(x+8)^2+(y+6)^2=54$$
$$(x+8)^2+(y+6)^2=(3\sqrt{2})^2$$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(-8,-6)$ និង $r=3\sqrt{6}$

លំហាត់ទី ១១. គេឲ្យបន្ទាត់ $3y = x+5$ និងរង្វង់ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ ។

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់កាត់រង្វង់ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងរង្វង់ ។

ដំណោះស្រាយ

១១/ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់កាត់រង្វង់ត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នា ។

យើងមាន បន្ទាត់ $3y = x+5$ នាំឲ្យ $x = 3y-5$ (1)

រង្វង់ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ (2)

បើបន្ទាត់កាត់រង្វង់យើងបាន

យក (1) ជំនួសក្នុង (2)

យើងបាន $(3y-5)^2+y^2-6(3y-5)-2y-15=0$

$$9y^2-30y+25-18y+30-2y-15=0$$

$$y^2-5y+4=0$$

$$\Delta = 25-16 = 9 > 0$$

ដូចនេះ | បន្ទាត់កាត់រង្វង់ត្រង់ពីរចំនុចផ្សេង |

ខ. រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និងរង្វង់

គេមានសមីការអាប់ស៊ីសរវាងបន្ទាត់ និង រង្វង់

គឺ $y^2-5y+4=0$

$a+b+c=0 \Rightarrow y_1 = 1; y_2 = 4$

បើ $y=1$ នោះ $x=-2$

បើ $y=4$ នោះ $x=7$

ដូចនេះ | រកកូអរដោនេចំណុចចប្រសព្វគឺ $(-2,1)$; $(7,4)$ |

លំហាត់ទី ១២ គេមានសមីការរង្វង់ពីគី $(C_1): x^2+y^2-2y-4=0$ និង $(C_2): x^2+y^2-x+y-12=0$ ។

ក. បង្ហាញថារង្វង់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នា ។

ខ. រកសមីការនៃរង្កត់ធ្នូរួមនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

១២. ក.បង្ហាញថារង្វង់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នា

យើងមាន $(C_1): x^2+y^2-2y-4=0$

$$x^2+y^2-2y+1-5=0$$

$$x^2+(y-1)^2=5$$

យើងបាន ផ្ចិត $I(0,1)$; $r=\sqrt{5}$

$$(C_2): x^2+y^2-x+y-12=0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-12=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

យើងបាន ផ្ចិត $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $I_1I_2=\sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

តែ $r_1+r_2=\sqrt{5}+\frac{5\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{10}}{2}$

ដូចនេះ **រង្វង់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នា**

ខ. រកសមីការនៃរង្កត់ធ្នូរួមនោះ

បើ (C_1) និង (C_2) ប្រសព្វគ្នា

គេបាន $x^2+y^2-2y-4=x^2+y^2-x+y-12$

សសមូល $x-3y+8=0$

ដូចនេះ | សមីការនៃរង្កត់ធ្នូរួមនោះគឺ $x-3y+8=0$ |

លំហាត់ទី ១៣ កំណត់សមីការរង្វង់ដែលមានបន្ទាត់ $(d_1):2x+y=-1$ ប៉ះត្រង់ចំណុច $A\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)$ និង $(d_2):2x+y=6$ ប៉ះត្រង់ចំណុច $B(2,2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១៣. កំណត់សមីការរង្វង់

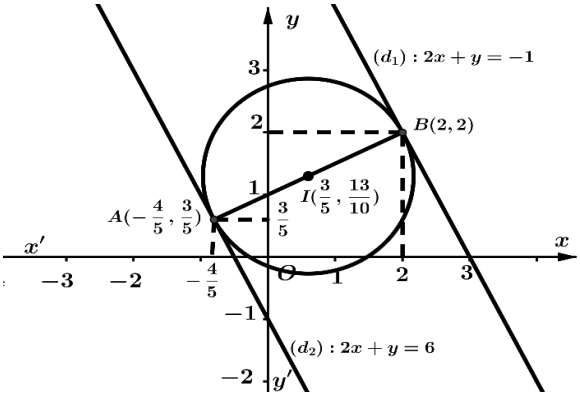
គេមានបន្ទាត់ $(d_1):2x+y+1=0$ និង $(d_2):2x+y-6=0$

ស្របគ្នាព្រោះ $a_1=a_2=2$

តាមរូបមន្តចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ

$$d=AB=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ដោយ $a=2;b=1;c=1;c'=-6$



គេបាន $d=AB=\frac{|1+6|}{\sqrt{4+1}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

នាំឲ្យ $r=\frac{AB}{2}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$ នោះ $r^2=\frac{49}{20}$

បើ I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ នោះ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB

គេបាន $I\left(\frac{-4}{5}+2,\frac{3}{5}+2\right)=I\left(\frac{3}{5},\frac{13}{10}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការរង្វង់គឺ}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\left(y-\frac{13}{10}\right)^2=\frac{49}{20}}$

លំហាត់ទី ១៤. រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យសមីការ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ កំណត់បានជាសមីការរង្វង់។

ដំណោះស្រាយ

១៤. កំណត់លក្ខខណ្ឌដើម្បីបានជាសមីការរង្វង់

គេមានសមីការរង្វង់គឺ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$$x^2+Ax+y^2+By+C=0$$

$$x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+By+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}+C=0$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

សមីការនេះជាសមីការរង្វង់លុះត្រាតែ $A^2+B^2-4C>0$ ឬ $C<0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{លក្ខខណ្ឌនៃសមីការរង្វង់គឺ } A^2+B^2-4C>0 \text{ ឬ } C<0}$

លំហាត់ទី ១៥ ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់ $(C_1):x^2+y^2-4x-6y+4=0$ និង $(C_2):x^2+y^2-10x-14y+70=0$ ប៉ះគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

១៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នា

យើងមាន $(C_1):x^2+y^2-4x-6y+4=0$

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9-9=0$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2=9$$

យើងបាន ផ្ចិត $I_1(2,3)$; $r_1=3$

យើងមាន $(C_2): x^2+y^2-10x-14y+70=0$

$$x^2-10x+25-25+y^2-14y+49-49+70=0$$
$$(x-5)^2+(y-7)^2=4$$

យើងបាន ផ្ចិត $I_2(5,7)$; $r_2=2$

តែ $I_1I_2=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5=r_1+r_2$

ដូចនេះ រង្វង់ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នា

លំហាត់ទី ១៦ រកកាំនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(-1,-2)$ ហើយប៉ះជាមួយបន្ទាត់ $(\Delta): 5x+12y-10=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

១៦. រកកាំនៃរង្វង់

បើបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ នោះចម្ងាយពីផ្ចិតទៅបន្ទាត់គឺកាំ r

តាមរូបមន្ត $r=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

យើងបាន $r=\dfrac{|5(-1)+12(-2)-10|}{\sqrt{25+144}}=\dfrac{39}{13}=3$

ដូចនេះ កាំនៃរង្វង់គឺ $r=3$

លំហាត់ទី ១៧ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ $y=kx$ និងរង្វង់ $x^2+y^2-10x+16=0$

ក. កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំណុច ខ. ប៉ះគ្នា គ. មិនកាត់គ្នា

ដំណោះស្រាយ

១៧. កំណត់តម្លៃ k

ក. ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់កាត់រង្វង់ត្រង់ពីរចំណុច

យើងមាន បន្ទាត់ $y=kx$ និង រង្វង់ $x^2+y^2-10x+16=0$

នោះសមីការរវាប់ស៊ីសរវាងបន្ទាត់ និង រង្វង់ គឺ

$$x^2+(kx)^2-10x+16=0$$
$$(1+k^2)x^2-10x+16=0$$
$$\Delta'=25-16(1+k^2)$$
$$=9-16k^2$$

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ និង រង្វង់កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំណុច លុះត្រាតែ $\Delta'>0$

យើងបាន $9-16k^2>0\Rightarrow k\in\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{k\in\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)}$

ខ. ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ និង រង្វង់ប៉ះគ្នា លុះត្រាតែ $\Delta'=0$

យើងបាន $9-16k^2=0\Rightarrow k_1=-\frac{3}{4};k_2=\frac{3}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{k=-\frac{3}{4};k=\frac{3}{4}}$

គ. បន្ទាត់មិនកាត់រង្វង់

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ និង រង្វង់មិនកាត់គ្នា លុះត្រាតែ $\Delta' < 0$

គេបាន $9-16k^2 < 0 \Rightarrow k \in \left(-\infty;-\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4};+\infty\right)$

ដូចនេះ $\boxed{k \in \left(-\infty;-\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4};+\infty\right)}$

លំហាត់ទី ១៨ *ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់* $(C_1): x^2+y^2+2x-2y-2=0$ *និង* $(C_2): x^2+y^2-4x-2y+4=0$ *ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ ។ រួចកំណត់កូអរដោនេចំនុចប៉ះនោះ ។*

ដំណោះស្រាយ

១៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់ (C_1) *និង* (C_2) *ប៉ះគ្នា*

យើងមាន $(C_1): x^2+y^2+2x-2y-2=0$

$$x^2+2x+1+y^2-2y+1-4=0$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=4$$

យើងបាន ផ្ចិត $I_1(-1,1)$; $r_1=2$

មាន $(C_2): x^2+y^2-4x-2y+4=0$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1-1=0$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$

យើងបាន ផ្ចិត $I_2(2,1)$; $r_2=1$

តែ $I_1I_2=\sqrt{9+0}=3=r_1+r_2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{រង្វង់}(C_1) \text{ និង}(C_2) \text{ ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ}}$

- *កំណត់កូអរដោនចំនុចប៉ះនោះ*

កូអរដោនចំនុចប៉ះ ជាចម្លើយនៃប្រពន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-2=0 \quad (1) \\ x^2+y^2-4x-2y+4=0 \quad (2) \end{cases}$$

យក $(1)-(2)$ គេបាន $6x-6=0 \Rightarrow x=1$

យក $x=1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$1+y^2+2-2y-2=0$$
$$y^2-2y+1=0$$
$$\Rightarrow y=1$$

ដូចនេះ **កូអរដោនេចំណុចប៉ះនោះគឺ $(1,1)$**

លំហាត់ទី ១៩ ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់ $(C_1):(x+1)^2+(y-1)^2=4$ និង $(C_2):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}$ ប៉ះគ្នាខាងក្នុង។ រួចកំណត់កូអរដោនចំនុចប៉ះនោះ។

ដំណោះស្រាយ

១៩.ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នា

យើងមាន $(C_1):(x+1)^2+(y-1)^2=4$

យើងបាន ផ្ចិត $I_1(-1,1)$; $r_1=2$

$$(C_2):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}$$

យើងបាន ផ្ចិត $I_2\left(-\frac{1}{2},1\right)$; $r_2=\frac{3}{2}$

យើងមាន $I_1I_2=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+(0-0)^2}=\frac{1}{2}$

តែ $|r_1-r_2|=\left|2-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}=I_1I_2$

ដូចនេះ **រង្វង់ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាខាងក្នុង**

• *កំណត់កូអរដោនចំនុចប៉ះនោះ*

កូអរដោនចំនុចប៉ះ ជាចម្លើយនៃប្រពន្ធសមីការ

យើងបាន $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=4 \quad (1) \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{9}{4} \quad (2) \end{cases}$

យក $(1)-(2)$ *គេបាន* $(x+1)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=4-\frac{9}{4}$

$$x^2+2x+1-x^2-x-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

$$x=1$$

យក $x=1$ *ជំនួសក្នុង* (1)

គេបាន $4+(y-1)^2=4$

$$\Rightarrow \quad y=1$$

ដូចនេះ | *កូអរដោនេចំណុចប៉ះនោះគឺ* $(1,1)$ |

លំហាត់ទី ២០ *សិក្សាទីតាំងរវាងរង្វង់* $(C_1): x^2+y^2+6x+2y+5=0$ *និង* $(C_2): x^2+y^2-2x-2y=0$ *។*

ដំណោះស្រាយ

២០. សិក្សាទីតាំងរវាងរង្វង់ (C_1) *និង* (C_2)

យើងមាន $(C_1): x^2+y^2+6x+2y+5=0$

$$x^2+6x+9-9+y^2+2y+1+4=0$$

$$(x+3)^2+(y+1)^2=5$$

យើងបាន ផ្ចិត $I_1(-3,-1)$; $r_1=\sqrt{5}$

គេមាន $(C_2): x^2+y^2-2x-2y=0$

$$x^2-2x+1-1+y^2-2y+1-1=0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

យើងបាន ផ្ទិត $I_2(1,1)$; $r_2 = \sqrt{2}$

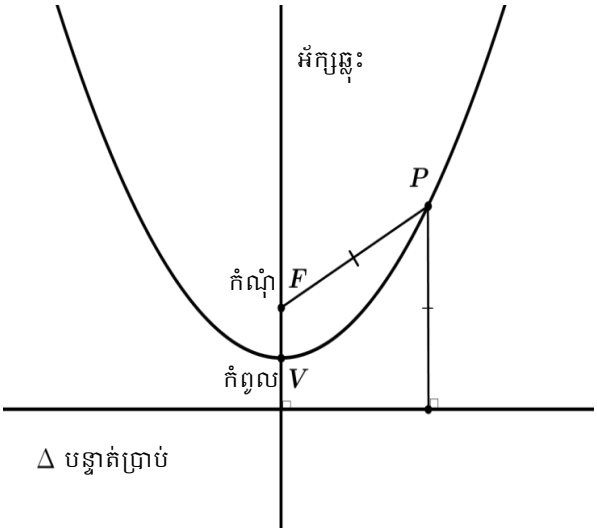
តែ $I_1I_2 = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

ដោយ $r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2} < I_1I_2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{រង្វង់}(C_1) \text{ និង}(C_2) \text{ នៅដាច់ពីគ្នា}}$

មេរៀនទី២ **ប៉ារ៉ាបូល**

១. និយមន័យ៖ *ប៉ារ៉ាបូល គឺជាសំណុំចំណុចនៅក្នុងប្លង់ដែលមានចម្ងាយពីចំណុចនោះទៅចំណុចនឹងមួយ ស្មើទៅនឹងចម្ងាយពីចំនុចនោះទៅបន្ទាត់នឹងមួយ ។ ចំណុចនឹងមួយ នោះ ហៅថា* ***កំណុំ*** *ហើយបន្ទាត់នឹងនោះហៅថា****បន្ទាត់ប្រាប់ទិស****។*



- *បន្ទាត់ដែលកាត់តាមកំណុំ F ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ហៅថា* ***អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ។***
- *ចំណុច V ដែលស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះ និង ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ ដែលភ្ជាប់កំណុំ F និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ហៅថា****កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល ។***

២. សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល៖

1. *សមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ*

សមីការស្តង់ដា	*កំពូល*	*កំណុំ*	*បន្ទាត់ប្រាប់ទិស*	*ពណ៌នា*
$x^2 = 4py$	$V(0,0)$	$F(0,p)$	$\Delta : y = -p$	❖ *អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ* ➢ P>0 *ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស* y>0 ➢ P<0 *ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស* y<0
$y^2 = 4px$	$V(0,0)$	$F(p,0)$	$\Delta : x = -p$	❖ *អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស* ➢ P>0 *ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស* x>0 ➢ P<0 *ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស* x<0

2. សមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

សមីការស្តង់ដា	កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	ពណ៌នា
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$V(h,k)$	$F(h,k+p)$	$\Delta : y = k - p$	❖ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ ➢ P>0 ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស y>0 ➢ P<0 ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស y<0
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$V(h,k)$	$F(h+p,k)$	$\Delta : x = h - p$	❖ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ➢ P>0 ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស x>0 ➢ P<0 ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស x<0

៣. សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល

- *ករណីអ័ក្សឆ្លុះ ជាអ័ក្សឈរប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា*

  $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

  សមីការសរសេរជា $x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4kp = 0$ ។

- *ករណីអ័ក្សឆ្លុះ ជាអ័ក្សដេកប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា*

  $(y-k)^2 = 4p(x-k)$

  សមីការសរសេរជា $y^2 + 4px - 2ky + k^2 + 4hp = 0$ ។

  សមីការដែលពន្លាតហើយមានរាង៖

  ករណីអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ: $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad , \quad (A \neq 0)$

  ករណីអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក: $Bx^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad , \quad (B \neq 0)$

ជាទូទៅ ៖ *សមីការទូទៅរបស់ប៉ារ៉ាបូលមានរាង*

- $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad , \quad (A \neq 0)$ *ករណីអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ*
- $Bx^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad , \quad (B \neq 0)$ *ករណីអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក*

៤. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុចមួយលើប៉ារ៉ាបូល

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូល $P : (y-k)^2 = 4p(x-h)$ *ត្រង់ចំណុច* $M_0(x_0, y_0) \in P$

- *សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច* $M_0(x_0, y_0)$ *គឺ៖*

  $y - y_0 = m(x - x_0)$ *ដែល* $m = y'(x_0)$ ។

  យើងមាន៖ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ *ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹង* x

  យើងបាន

  $$2y'(y-k) = 4p \Rightarrow y' = \frac{4p}{2(y-k)} = \frac{2p}{y-k}$$

  នោះ $y'(x_0) = \frac{2p}{2(y-k)} = m$ ។

គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅជា $y-y_0=\frac{2p}{y_0-k}(x-x_0)$

ឬ $(y-y_0)(y_0-k)=2p(x-x_0)$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ៖

$(y-y_0)(y_0-k)=2p(x-x_0)$ ។

ចំណាំ៖ គេអាចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូល $(y-k)^2=4p(x-h)$ ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ តាមវិធីញែកកូរអង្គដូចខាងក្រោម៖

- សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូលជា

$(y-k)(y-k)=2p\times 2(x-h)\Leftrightarrow (y-k)(y-k)=2p\left[(x-h)+(x-h)\right]$

- ជំនួស x មួយនិង y មួយដោយ x_0 និង y_0 រៀងគ្នា

យើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ដែលត្រូវរកគឺ៖

$(y-k)(y_0-k)=2p\left[(x-h)+(x_0-h)\right]$ ។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូល $P:(x-h)^2=4p(y-k)$ ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ $(x-h)(x_0-h)=[(y-k)+(y_0-k)]$ ។

❖ បើប៉ារ៉ាបូលឱ្យមកក្នុងទម្រង់ទូទៅ $x^2+Ax+By+C=0$ គេគេសរសេរ $x\cdot x+\frac{A}{2}\cdot 2x+\frac{B}{2}\cdot 2y+C=0$

$\Leftrightarrow x\cdot x+\frac{A}{2}\cdot(x+x)+\frac{B}{2}\cdot(y+y)+C=0$

នោះសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ

$x\cdot x_0+\frac{A}{2}\cdot(x+x_0)+\frac{B}{2}\cdot(y+y_0)+C=0$ ។

❖ បើប៉ារ៉ាបូលឱ្យមកក្នុងទម្រង់ទូទៅ $y^2+Ax+By+C=0$

គេបានសមី ការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ

$y\cdot y_0+\frac{A}{2}\cdot(x+x_0)+\frac{B}{2}\cdot(x+x_0)+C=0$ ។

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(0,0)$ និង បន្ទាត់ ប្រាប់ទិស $y=-4$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដោយបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=-4$

ជាបន្ទាត់ដេកនោះអក្សរឆ្លុះជាអក្សរឈរ

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$ (*)

ដែល $V(h,k), y=k-p$

នោះ $h=0, k=0, p=k-y=0-(-4)=4$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow (x-0)^2=4\times 4(y-0)\Leftrightarrow x^2=16y$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2=16y$

លំហាត់ទី២៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(2,3)$ និង បន្ទាត់ ប្រាប់ទិស $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដោយ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=1$

ជាបន្ទាត់ឈរនោះអក្សរឆ្លុះជាអក្សរដេក

គេបាទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-k)^2=4p(x-h)$ (*)

ដែល $V(h,k), x=h-p$

នោះ $h=2, k=3, p=h-x=2-1=1$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow (y-3)^2=4\times 1(x-2)\Leftrightarrow (y-3)^2=4(x-2)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-3)^2=4(x-2)$

លំហាត់ទី៣៖ *រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំ* (1,-3) *និង បន្ទាត់ ប្រាប់ទិស* y = -5 *។*

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដោយ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=-5$ *ជាបន្ទាត់ដេក នោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ*

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$ (*)

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរនោះ $h=1$ *កំពូលជាចំណុចកណ្តាលនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងកំណុំ*

គេបាន $k=\dfrac{-3+(-5)}{2}=-4$ *ហើយ* $p=k-(-5)=-4+5=1$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow(x-1)^2=4\times1[y-(-4)]\Leftrightarrow(x-1)^2=4(y+4)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-1)^2=4(y+4)$

លំហាត់ទី៤៖ *រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំ* (-1,3) *និង បន្ទាត់ ប្រាប់ទិស* $x=3$ *។*

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដោយបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=3$ *ជាបន្ទាត់ឈរ នោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក*

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-k)^2=4p(x-h)$ (*)

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេកនោះ $k=3$ *កំពូលជាចំណុចកណ្តាលនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងកំណុំ គេបាន*

$h=\dfrac{-1+3}{2}=1$ *ហើយ* $p=h-3=1-3=-2$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow(y-3)^2=4(-2)(x-1)\Leftrightarrow(y-3)^2=-8(x-1)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-3)^2=-8(x-1)$

លំហាត់ទី៥៖ *រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖*

ក. កំពូល (5,-2) *និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស* $y=2$

ខ. កំពូល (1,2) *និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស* $x=-5$

គ. កំណុំ (-2,2)*និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស* $y=-1$

ឃ. កំណុំ (6,0)*និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស* $x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ក. កំពូល (5,-2) *និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស* $y=2$ *ដោយ*

ជាបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=2$ *ជាបន្ទាត់ដេកនោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ*

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$ (*)

ដែល $V(h,k), y=k-p$

នោះ $h=5, k=-2, p=k-y=-2-2=-4$ *នាំឱ្យ*

$$(*)\Leftrightarrow (x-5)^2=4(-4)\left[y-(-2)\right]\Leftrightarrow (x-5)^2=-16(y+2)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-5)^2=-16(y+2)$

ខ. កំពូល (1,2) *និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស* $x=-5$

ដោយបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-5$ *ជាបន្ទាត់ឈរនោះ*

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-k)^2=4p(x-h)$ (*)

ដែល $V(h,k), x=h-p$

នោះ $h=1, k=2, p=h-x=1-(-5)=1+5=6$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow (y-2)^2=4\times 6(x-1)\Leftrightarrow (y-2)^2=24(x-1)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-2)^2=24(x-1)$

គ. កំណុំ (-2,2)និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=-1$

ដោយបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=-1$ ជាបន្ទាត់ដេកនោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$ (*)

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរនោះ $h=-2$

កំពូលជាចំណុចកណ្តាលនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងកំណុំ គេបាន

$k=\frac{-2-(-1)}{2}=-\frac{1}{2}$ ហើយ $p=k-(-1)=-\frac{1}{2}-(-1)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow[x-(-2)]^2=4\times\frac{1}{2}(y-2)\Leftrightarrow(x+2)^2=2(y-2)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x+2)^2=2(y-2)$

ឃ. កំណុំ (6,0)និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=2$ ដោយ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=2$ ជាបន្ទាត់ឈរនោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-k)^2=4p(x-h)$ (*)

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេកនោះ $k=0$ កំពូលជាចំណុចកណ្តាលនៃបន្ទាត់ ប្រាប់ទិស និងកំណុំ គេបាន

$h=\frac{6+2}{2}=4$ ហើយ $p=h-2=4-2=2$

នាំឱ្យ $(*)\Leftrightarrow[y-0]^2=4\times2(x-4)\Leftrightarrow y^2=8(x-4)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $y^2=8(x-4)$

លំហាត់ទី៦៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល (2,-3) និង កំណុំ (2,4) ។

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដោយកំពូលនិងកំណុំប៉ារ៉ាបូលមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

ដែល $V(h,k), F(h,k+p)$

នាំឱ្យ $h=2, k=-3, k+p=4 \Rightarrow p=4-k=4-(-3)=4+3=7$

គេបាន $(x-2)^2 = 4\times 7[y-(-3)] \Leftrightarrow (x-2)^2 = 28(y+3)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-2)^2 = 28(y+3)$

លំហាត់ទី៧៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល (-1,-3) និង កំណុំ (2,-3) ។

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដោយ កំពូលនិងកំណុំនៃប៉ារ៉ាបូលមានកូរអរដោនេដូចគ្នា

នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ដែល $V(h,k), F(h+p,k)$ នាំឱ្យ

$h=-1, k=-3, h+p=2 \Rightarrow p=2-h=2-(-)1=2+1=3$

គេបាន $[y-(-1)]^2 = 4\times 3[x-(-3)] \Leftrightarrow (y+1)^2 = 12(x+3)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y+1)^2 = 12(x+3)$

លំហាត់ទី៨៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. កំពូល(1,0) និង កំណុំ (-2,0)

ខ. កំពូល(0,-1) និង កំណុំ (0,-2)

គ. កំពូល(2,2) និង កំណុំ (2,3)

ឃ. កំពូល(2,-3) និង កំណុំ (3,-3)

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ក. កំពូល(1,0) *និង កំណុំ* (-2,0) *ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអរដោនេកំពូលស្មើនឹងអរដោនេកំណុំ នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ*

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ *ដែល* $V(h,k), F(h+p,k)$ *នាំឱ្យ*

$h=1, k=0, h+p=-2 \Rightarrow p=-2-h=-2-1=-3$

គេបានទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$(y-0)^2 = 4\times(-3)(x-1) \Leftrightarrow y^2 = -12(x-1)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $y^2 = -12(x-1)$

ខ. កំពូល(0,-1) *និង កំណុំ* (0,-2)*ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអាប់ស៊ីសកំពូលស្មើនឹងអាប់ស៊ីសកំណុំ នោះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ*

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ *ដែល* $V(h,k), F(h,k+p)$ *នាំឱ្យ*

$h=0, k=-1, k+p=-2 \Rightarrow p=-2-k=-2-(-1)=-2+1=-1$

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$(x-0)^2 = 4\times(-1)[y-(-1)] \Leftrightarrow x^2 = -4(y+1)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2 = -4(y+1)$

គ. កំពូល(2,2) *និង កំណុំ* (2,3)*ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអាប់ស៊ីសកំពូលស្មើនឹងអាប់ស៊ីសកំណុំ នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ*

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ *ដែល* $V(h,k), F(h,k+p)$

នាំឱ្យ $h=2, k=2, k+p=3 \Rightarrow p=3-k=3-2=1$

គេបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$(x-2)^2 = 4\times1(y-2) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4(y-2)$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-2)^2 = 4(y-2)$

ឃ. កំពូល(2,-3) និង កំណុំ (3,-3)ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអរដោនេ កំពូលស្មើនឹងអរដោនេ កំណុំ នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-k)^2=4p(x-h)$ ដែល $V(h,k),F(h+p,k)$

នាំឱ្យ $h=2,k=-3,h+p=3\Rightarrow p=3-h=3-2=1$

គេបានទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$$[y-(-3)]^2=4\times1(x-2)\Leftrightarrow(y+3)^2=4(x-2)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-3)^2=4(x-2)$

លំហាត់ទី៩៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម៖

ក. អ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ ហើយកាត់តាមចំណុច (4,2),(0,0)និង(3,-3)

ខ. អ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស $(y'y)$ ហើយកាត់តាមចំណុច (1,-1),(0,0)និង(3,-2) ។

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ក. អ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ ហើយកាត់តាមចំណុច (4,2),(0,0) និង(3,-3)

ដោយអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$(y-k)^2=4p(x-h)$ (*)

ម្យ៉ាងទៀត ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច (4,2),(0,0)និង(3,-3) តាម (*) គេបាន

$$\begin{cases}(2-k)^2=4p(4-h)\\(0-k)^2=4p(0-h)\\(-3-k)^2=4p(3-h)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-4k+k^2=16p-4ph & (1)\\k^2=-4ph & (2)\\9+6k+k^2=12p-4ph & (3)\end{cases}$$

យកសមីការ $(1)-(2),(1)-(3)$

$$\begin{cases} 4-4k=16p \\ -5-10k=4p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-k=4p \\ -5-10k=4p \end{cases}$$

នាំឱ្យ $1-k=-5-10k \Leftrightarrow 9k=-6 \Rightarrow k=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

នោះ $4p=1-(-\frac{2}{3})=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow p=\frac{5}{12}$

យកតម្លៃ k និង p ជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន

$(-\frac{2}{3})^2=-4\times\frac{5}{12}h$

$\frac{4}{9}=-\frac{5}{3}h \Rightarrow h=\frac{4}{9}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{15}$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{3}\left(x+\frac{4}{5}\right)$

ខ.អ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស $(y'y)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $(1,-1),(0,0)$ និង$(3,-2)$ ដោយអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស $(y'y)$ នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$ $(*)$

ម្យ៉ាងទៀត ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $(1,-1),(0,0)$ និង $(3,-2)$ តាម $(*)$ គេបាន

$$\begin{cases} (1-h)^2=4p(-1-k) \\ (0-h)^2=4p(0-k) \\ (3-h)^2=4p(-2-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2h+h^2=-4p-4pk & (1) \\ h^2=-4pk & (2) \\ 9-6h+h^2=-8p-4pk & (3) \end{cases}$$

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង $(1)\,\&\,(3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2h=-4p \times(-2) \\ 9-6h=-8p \end{cases}$$

$7-2h=0 \Rightarrow h=\frac{7}{2}$

$$-4p = 1 - 2\times\frac{7}{2} = 1 - 7 = -6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

$$(2) \Rightarrow k = \frac{h^2}{-4p} = \frac{(\frac{7}{2})^2}{-4\times\frac{3}{2}} = \frac{\frac{49}{4}}{-6} = -\frac{49}{24}$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 = 6\left(y+\frac{49}{24}\right)$

លំហាត់ទី១០៖ រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម៖

ក. $x^2+4x+4=2y$ ខ. $2x^2+4x-9y=20$

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ក. $x^2+4x+4=2y$

យើងមាន

$$x^2+4x+4=2y$$
$$x^2+4x+4=2(y-0)$$
$$(x+2)^2=2(y-0)$$

ដូចនេះ. ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x+2)^2=2(y+0)$

ខ. $2x^2+4x-9y=20$

យើងមាន

$$2x^2+4x-9y=20$$
$$2x^2+4x=9y+20$$
$$2(x^2+2x)=9y+20$$
$$2(x^2+2x+1-1)=9y+20$$
$$2(x+1)^2-2=9y+20$$
$$2(x+1)^2=9y+22$$
$$(x+1)^2=\frac{9}{2}\left(y+\frac{22}{9}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x+1)^2=\frac{9}{2}(y+\frac{22}{9})$

លំហាត់ទី១១៖ *រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម៖*

ក. $y^2+2y+25=4x$ ខ. $4y^2+8y+4x=0$

ដំណោះស្រាយ

រកទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ក. $y^2+2y+25=4x$

យើងមាន $y^2+2y+25=4x$

$$y^2+2y+1=4x-24$$
$$(y+1)^2=4(x-6)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y+1)^2=4(x-6)$

ខ. $4y^2+8y+4x=0$

យើងមាន $4y^2+8y+4x=0$

$$4(y+1)^2=-4x+4$$
$$(y+1)^2=\frac{-4x+4}{4}$$
$$(y+1)^2=-(x-1)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y+1)^2=-(x-1)$

លំហាត់ទី១២៖ *រកកំពូល កំណុំនិងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោមរួចសង់ក្រាប៖*

ក. $x^2+6x=4y-5$ ខ. $y^2-4y-8x+20=0$

គ. $x^2+2y-10x+35=0$ ឃ. $4y^2-16y-8x-8=0$

ដំណោះស្រាយ

រកកំពូល កំណុំ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការប៉ារ៉ាបូល

ក. $x^2+6x=4y-4$

យើងមាន $x^2+6x=4y-5$

$$x^2+6x+9=4y+4$$
$$(x+3)^2=4(y+1)$$

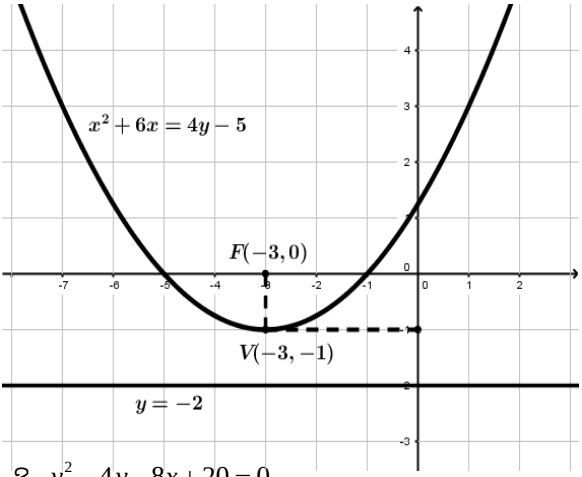
ដោយទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលរាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេបាន $h=-3, k=-1, 4p=4 \Rightarrow p=1$

នោះ កំពូល $V(h,k) \Rightarrow V(-3,-1)$

កំណុំ $F(h,k+p) \Rightarrow F(-3,-1+1) \Rightarrow F(-3,0)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y = k-p = -1-1 = -2$



ខ. $y^2-4y-8x+20=0$

យើងមាន $y^2-4y-8x+20=0$

$$y^2-4y+4=8x-16$$

$$(y-2)^2=8(x-2)$$

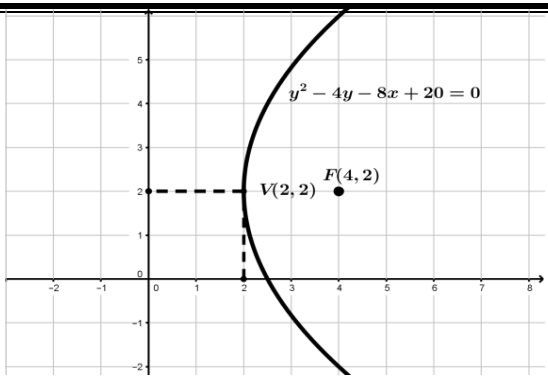
ដោយទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលរាង $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

គេបាន $h=2, k=2, 4p=8 \Rightarrow p=2$

នោះកំពូល $V(h,k) \Rightarrow V(2,2)$

កំណុំ $F(h+p,k) \Rightarrow F(2+2,2) \Rightarrow F(4,2)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h-p = 2-2 = 0$



គ. $x^2 + 2y - 10x + 35 = 0$

យើងមាន $x^2 + 2y - 10x + 35 = 0$

$$x^2 - 10x + 25 = -2y - 10$$

$$(x-5)^2 = -2(y+5)$$

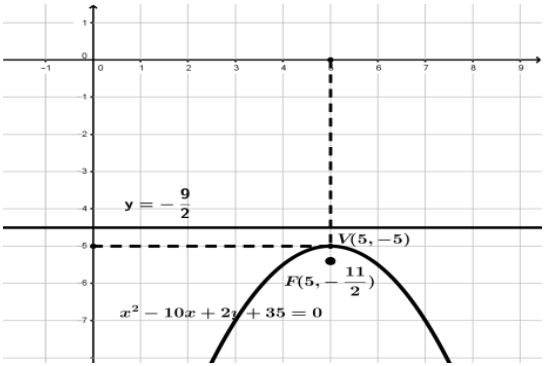
ដោយទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលរាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេបាន $h = 5, k = -5, 4p = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$

នោះកំពូល $V(h,k) \Rightarrow V(5,-5)$

កំណុំ $F(h,k+p) \Rightarrow F(5,-5-\frac{1}{2}) \Rightarrow F(5,-\frac{11}{2})$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y = k - p = -5 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$



ឃ. $4y^2-16y-8x-8=0$

យើងមាន $4y^2-16y-8x-8=0$

$$y^2-4y-2x-2=0$$

$$y^2-4y+4=2x+2+4$$

$$(y-2)^2=(2x+6)$$

$$(y-2)^2=2(x+3)$$

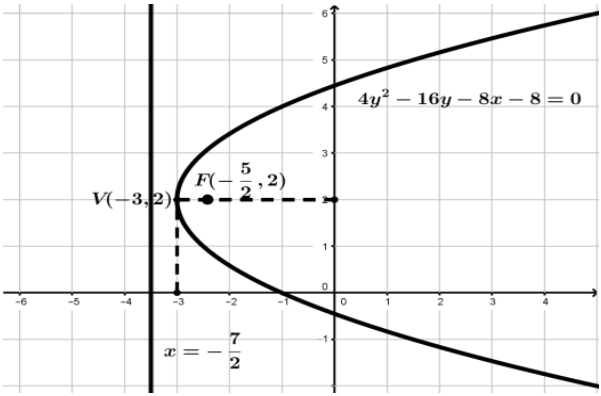
ដោយទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$

គេបាន $h=-3,k=2,4p=2\Rightarrow p=\frac{1}{2}$

នោះ កំពូល $V(h,k)\Rightarrow V(-3,2)$

កំណុំ $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3+\frac{1}{2},2)\Rightarrow F(-\frac{5}{2},2)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p=-3-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$



លំហាត់ទី១៣៖ គេឱ្យសមីការប៉ារ៉ាបូល $x^2+4x-12=4y$ ។

ក. សរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដា រួចរកកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលខាងលើក្នុងតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដា រួចរកកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

យើងមាន $x^2+4x-12=4y$

$$x^2+4x+4=4y+16$$

$$(x+2)^2=4(y+4)$$

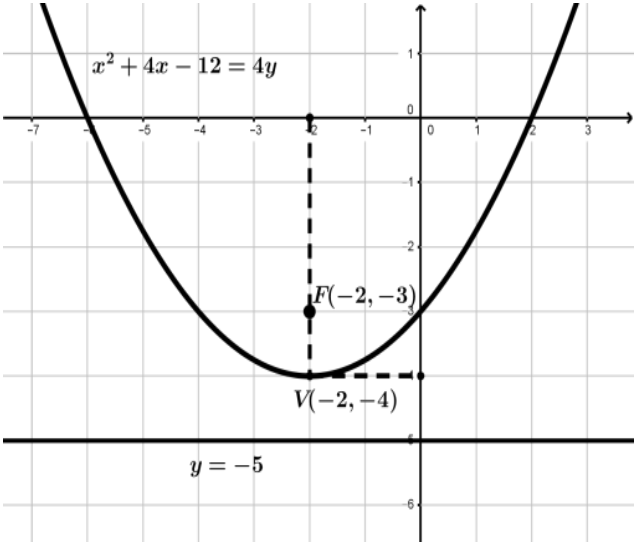
យើងបាន $h=-2,k=-4,4p=4\Rightarrow p=1$

នាំឱ្យកំពូល $V(h,k)\Rightarrow V(-2,-4)$

កំណុំ $F(h,k+p)\Rightarrow F(-2,-4+1)\Rightarrow F(-2,-3)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=k-p=-4-1=-5$

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលខាងលើក្នុងតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j})$



លំហាត់ទី១៤៖ គេឱ្យប៉ារ៉ាបូល (P): $y=f(x)=x^2-2x+2$ ហើយ A និង B មាន អាប់ស៊ីស a និង b រៀងគ្នាស្ថិតលើ (P) ។

ក. ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ខាងលើក្នុងតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j})$

ខ. ចូរបង្ហាញថា $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ។

គ. ស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រនូវវិសមភាព

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ខាងលើក្នុងតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j})$

យើងមាន $y=x^2-2x+2$

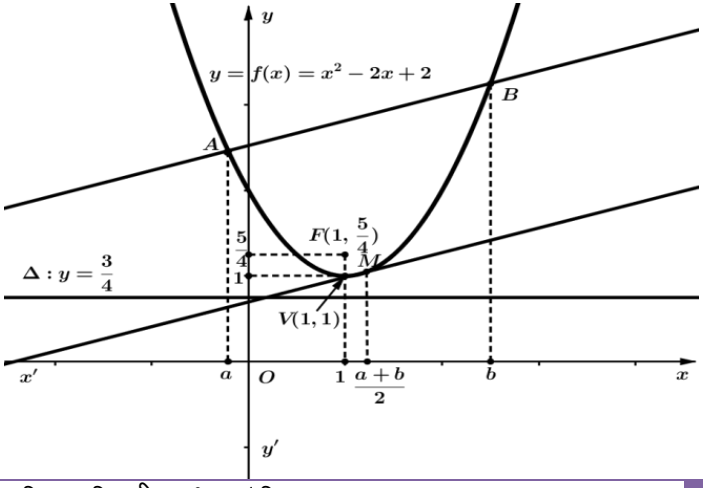
$(x-1)^2=y-1$

យើងបាន $h=1,k=1,4p=1\Rightarrow p=\frac{1}{4}$

នាំឱ្យកំពូល $V(h,k)\Rightarrow V(1,1)$

កំណុំ $F(h,k+p)\Rightarrow F(1,1+\frac{1}{4})\Rightarrow F(1,\frac{5}{4})$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=k-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$



ខ. ចូរបង្ហាញថា $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

យើងមាន $f(x)=x^2-2x+2 \Rightarrow f'(x)=2x-2$

$f(b)=b^2-2b+2$

$f(a)=a^2-2a+2$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=b^2-2b+2-a^2+2a-2$$
$$=(b^2-a^2)-2(b-a)$$
$$=(b-a)(b+a)-2(b-a)$$
$$=(b-a)(b+a-2)$$
$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=2\times\frac{a+b}{2}-2=b+a-2$$

នាំឱ្យ $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

គ. ស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រនូវវិសមភាព

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$

យក M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស ស្ថិតនៅលើ (P) ។

សង់បន្ទាត់ AB និងបន្ទាត់ (T) ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុច M ។

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ AB គឺ $m_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ហើយមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (T) គឺ $m_2=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

តាមក្រាហ្វិចយើងពិនិត្យឃើញថា $AB\parallel(T)\Rightarrow m_1=m_2$

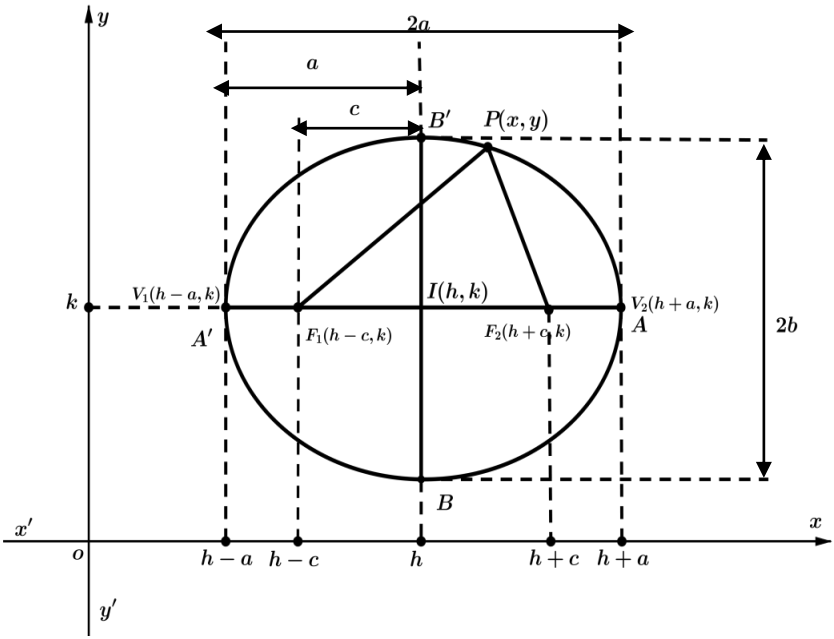
គេបាន $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

មេរៀនទី៣ **អេលីប**

១. និយមន័យ *អេលីបគឺជាសំណុំចំណុច $P(x,y)$ នៅក្នុងប្លង់ដែលផលបូកចម្ងាយពី $P(x,y)$ ទៅចំណុចនឹងពីរគឺ F_1 និង F_2 ស្មើ $2a$ ។*



- *ចំណុច $I(h,k)$ ហៅថាផ្ចិតនៃអេលីប*
- *ចំណុច $F_1(h-c,k)$ និង $F_2(h+c,k)$ ហៅថាកុំណុំ*
- *ចំណុច $V_1(h-a,k)$ និង $V_2(h+a,k)$ ហៅថាកំពូល*
- *បន្ទាត់ AA' ហៅថាអ័ក្សធំនៃអេលីនមានប្រវែងស្មើ $2a$*
- *បន្ទាត់ BB' ហៅថាអ័ក្សតូចនៃអេលីបមានប្រវែងស្មើ $2b$*

២.សមីការនៃអេលីប

ក.សមីការស្តង់ដានៃអេលីប

a) *អេលីបមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ*

- *សមីការស្តង់ដា*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

- *ផ្ចិត* $I(h,k)$
- *កំពូល* $V_1(h,k-a)$ *និង* $V_2(h,k+a)$
- *កំណុំ* $F_1(h,k-c)$ *និង* $F_2(h,k+c)$

b) *អេលីបមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក*

- *សមីការស្តង់ដា*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

- *ផ្ចិត* $I(h,k)$
- *កំពូល* $V_1(h-a,k)$ *និង* $V_2(h+a,k)$
- *កំណុំ* $F_1(h-c,k)$ *និង* $F_2(h+c,k)$
- *សមីការស្តង់ដា*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

សម្គាល់

- a ជាប្រវែងកន្លះអ័ក្សធំ
- b ជាប្រវែងកន្លះអ័ក្សតូចដែល $a^2 = b^2 + c^2$
- អិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e = \frac{c}{a}$
- បើ $h = 0$ និង $k = 0$ នោះអេលីបមានផ្ចិតត្រង់គល់ O
- សមីការទូទៅនៃអេលីប

  $x^2 + y^2 + Ax + By + D = 0$
- ផ្ទៃក្រឡាអេលីបដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់ $O(0,0)$

  កំណត់ដោយ $A = \pi ab$

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១.រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ នៃអេលីប ហើយសង់អេលីបនីមួយៗ។

ក. $3x^2+2y^2=6$

ខ. $4x^2+3y^2=12$

គ. $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

ឃ. $\frac{x^2}{16}+y^2=1$

ង. $25x^2+16y^2=400$

ច. $16x^2+25y^2=400$

ឆ. $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

ដំណោះស្រាយ

១.កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនិងសង់ក្រាប នៃអេលីប ៖

ក. $3x^2+2y^2=6$

យើងមាន $3x^2+2y^2=6$

$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{\frac{6}{3}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{6}{2}}=1$

$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{3})^2}=1$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ។

នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$

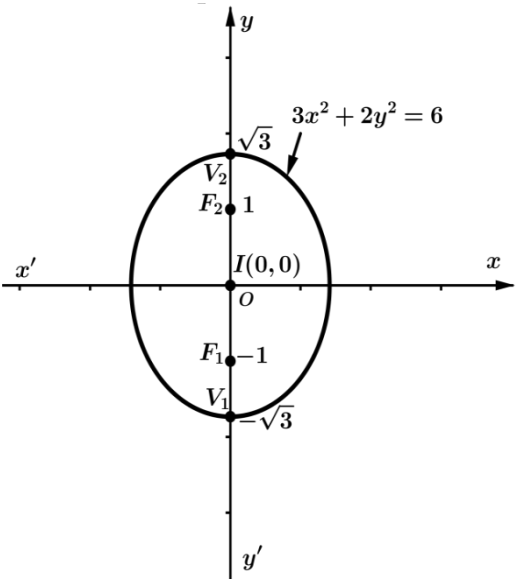
$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2\Rightarrow c=1$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h,k)=I(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(0\ ,-\sqrt{3})$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(0\ ,\ \sqrt{3})$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(0\ ,-1)$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(0\ ,\ 1)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- សង់អេលីប



ខ. $4x^2+3y^2=12$

យើងមាន $4x^2+3y^2=12$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{\frac{12}{4}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{12}{3}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{(y-0)^2}{(2)^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សរបេះដោនេ

នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=2$, $b=\sqrt{3}$

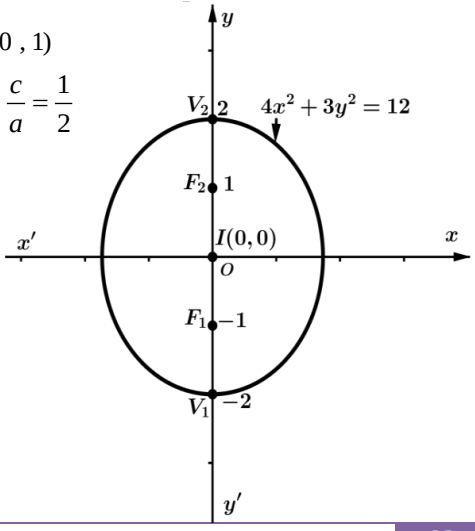
$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=4-3=1 \Rightarrow c=1$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(0\ ,-2)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(0\ ,\ 2)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(0\ ,-1)$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(0\ ,\ 1)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$
- សង់អេលីប



គ. $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

យើងមាន $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{1^2}+\frac{(y-0)^2}{3^2}=1$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=3$, $b=1$

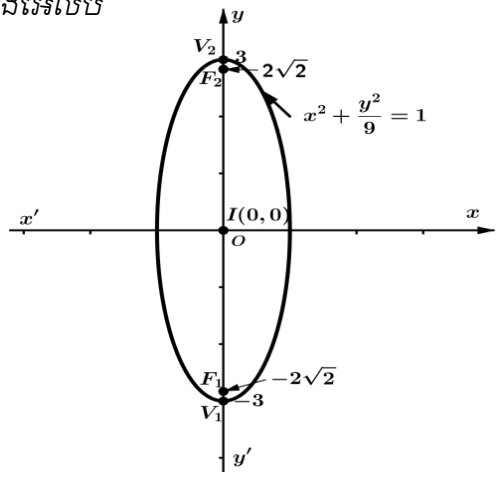
$c^2=a^2-b^2=3^2-1^2=9-1=8\Rightarrow c=2\sqrt{2}$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(0\ ,-3)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(0\ ,\ 3)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(0\ ,-2\sqrt{2})$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(0\ ,\ 2\sqrt{2})$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- សង់អេលីប



ឃ. $\frac{x^2}{16}+y^2=1$

យើងមាន $\frac{x^2}{16}+y^2=1$

$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{4^2}+\frac{(y-0)^2}{1^2}=1$

មានទម្រង់ដែលអ័ក្សធំ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=4$, $b=1$, $c^2=a^2-b^2$

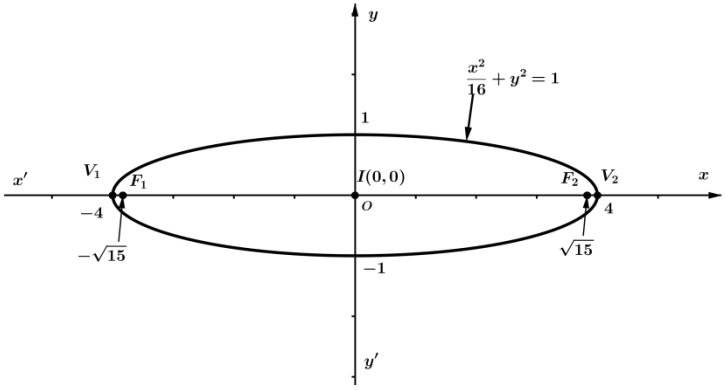
$c^2=16-1=15\Rightarrow c=\sqrt{15}$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h-a\ ,\ k)=(-4\ ,0)$

  $V_2(h+a\ ,\ k)=(4\ ,\ 0)$
- កំណុំ $F_1(h-c\ ,\ k)=(-\sqrt{15}\ ,0)$

  $F_2(h+c\ ,\ k)=(\sqrt{15}\ ,\ 0)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}$
- សង់អេលីប



ង. $25x^2+16y^2=400$

យើងមាន $25x^2+16y^2=400$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{\frac{400}{25}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{400}{16}}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{4^2}+\frac{(y-0)^2}{5^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ។

នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=5$, $b=4$, $c^2=a^2-b^2$

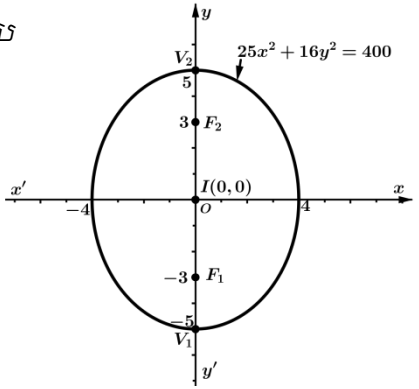
$$c^2=25-16=9\Rightarrow c=3$$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(0\ ,-5)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(0\ ,\ 5)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(0\ ,-3)$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(0\ ,\ 3)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$
- សង់អេលីប



ច. $16x^2+25y^2=400$

$$\frac{(x-0)^2}{\frac{400}{16}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{400}{25}}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{5^2}+\frac{(y-0)^2}{4^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សរាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=5$, $b=4$

$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=25-16=9$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{9}=3$$

គេបាន:

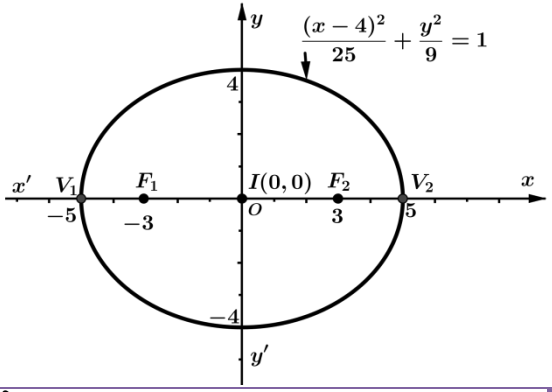
- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(0\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h-a\ ,\ k)=(-5\ ,\ 0)$

$$V_2(h+a\ ,\ k)=(5\ ,\ 0)$$

- កំណុំ $F_1(h-c\ ,\ k)=(-3,\ 0)$

$$F_2(h+c\ ,\ k)=(3\ ,\ 0)$$

- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$
- សង់អេលីប



ឧ. ខ្សែកោង (E) តាង $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ជាអេលីបដែលមានសមីការ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ អ័ក្សធំជាបន្ទាត់ដេក ហើយ $c^2=a^2+b^2$ ដែល $a^2=25$, $b^2=9$

នោះ $c^2=25-9=16\Rightarrow c=4$

- បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំ កំពូលនិងចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សតូច មាន ផ្ចិត $I(h,k)=I(4,0)$

  កំណុំ $F_1(h-c,k)=F_1(0,0)$

  $F_2(h+c,k)=F_2(8,0)$

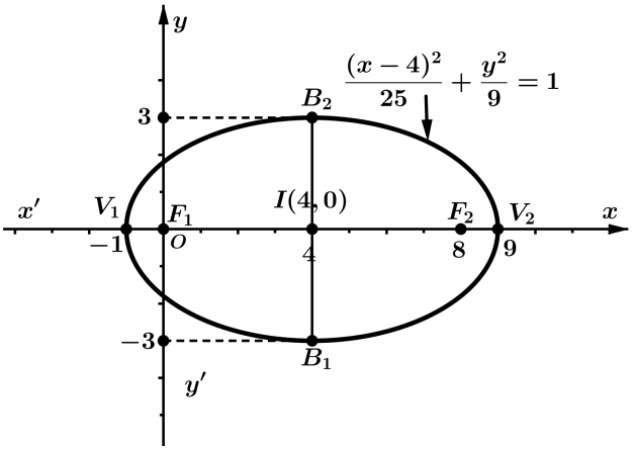
  កំពូល $V_1(h-a,k)=V_1(-1,0)$

  $V_2(h+a,k)=V_2(9,0)$

  ចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សតូច $B_1(h,k-b)=B_1(4,-3)$

  $B_1(h,k-b)=B_1(4,-3)$ $B_2(h,k+b)=B_2(4,3)$

២. សង់ (E)



លំហាត់ទី២. *រកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីបហើយសង់អេលីប នីមួយៗ*

ក. $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$

ខ. $4x^2+y^2+16x+7=0$

គ. $16x^2+9y^2-54y-63=0$

ឃ. $3x^2+2y^2-18x+4y+28=0$

ង. $2x^2+5y^2+8x-10y-27=0$

ដំណោះស្រាយ

២. *កូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ និងសង់ក្រាបនៃអេលីបនីមួយៗ*

ក. $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$

យើងមាន $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$

$$(x-1)^2-1+4(y-2)^2-16+13=0$$

$$(x-1)^2+4(y-2)^2=4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{1^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ *ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ។*

នាំឱ្យ $h=1$, $k=2$, $a=2$, $b=1$

$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=4-1=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$

គេបាន:

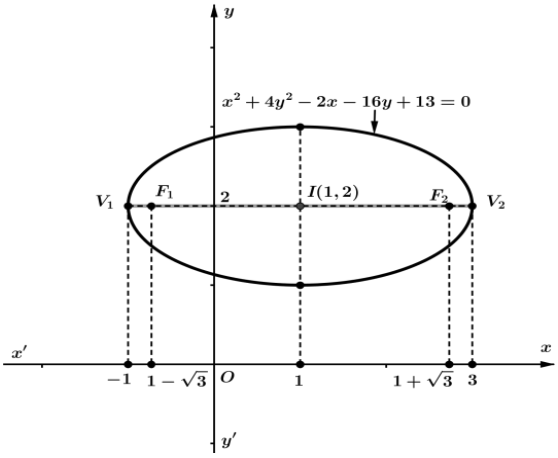
- *ផ្ចិត* $I(h\ ,\ k)=(1\ ,\ 2)$
- *កំពូល* $S_1(h-a\ ,\ k)=(-1\ ,\ 2)$

$$S_2(h+a\ ,\ k)=(3\ ,\ 2)$$

- កំណុំ $F_1(h-c\ ,\ k)=(1-\sqrt{3},\ 2)$

$$F_2(h+c\ ,\ k)=(1+\sqrt{3}\ ,\ 2)$$

- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- សង់អេលីប



ខ. $4x^2+y^2+16x+7=0$

យើងមាន $4x^2+y^2+16x+7=0$

$$4(x^2+4x+4)-16+y^2+7=0$$

$$4(x+2)^2+y^2=9$$

$$\frac{(x+2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{(y-0)^2}{3^2}=1$$

មានទម្រង់ $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ។

នាំឱ្យ $h=-2$, $k=0$, $a=3$, $b=\frac{3}{2}$

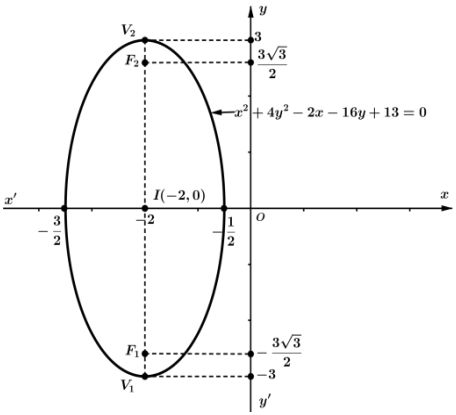
$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4} \Rightarrow c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(-2\ ,\ 0)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(-2\ ,-3)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(-2\ ,\ 3)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(-2\ ,-\frac{3\sqrt{3}}{2})$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(-2\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2})$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- សង់អេលីប



គ. $16x^2+9y^2-54y-63=0$

យើងមាន $16x^2+9y^2-54y-63=0$

$$16x^2+9(y^2-6y+9)-81-63=0$$
$$16x^2+9(y-3)^2=144$$
$$\frac{(x-0)^2}{\frac{144}{16}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{144}{9}}=1$$
$$\frac{(x-0)^2}{3^2}+\frac{(y-3)^2}{4^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ នាំឱ្យ $h=0$, $k=3$, $a=4$, $b=3$

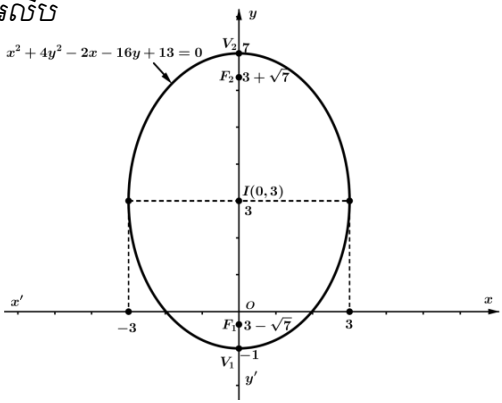
$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=16-9=7$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(0\ ,\ 3)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(0\ ,-1)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(0\ ,\ 7)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(0\ ,3-\sqrt{7})$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(0\ ,\ 3+\sqrt{7})$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$
- សង់អេលីប



ឃ. $3x^2+2y^2-18x+4y+28=0$

យើងមាន $3x^2+2y^2-18x+4y+28=0$

$$3(x-3)^2-27+2(y+1)^2-2+28=0$$

$$3(x-3)^2+2(y+1)^2=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{\frac{1}{3}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{2}}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សរអរដោនេ។

នាំឱ្យ $h=3$, $k=-1$, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

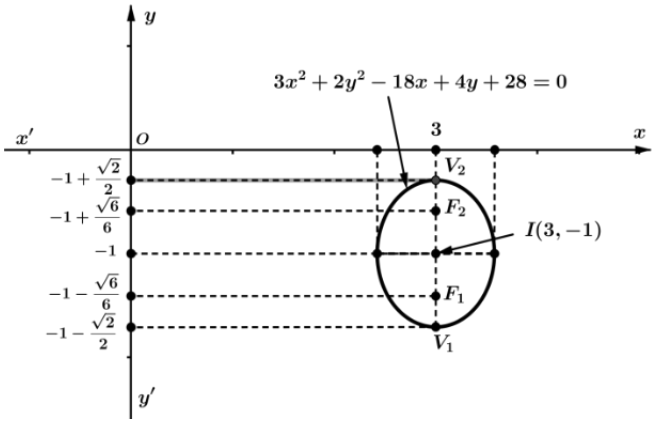
គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(3\ ,\ -1)$
- កំពូល $V_1(h,k-a)=(3,-1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

  $V_2(h,k+a)=(3,-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$
- កំណុំ $F_1(h,k-c)=(3,-1-\frac{\sqrt{6}}{6})$

$$F_2(h,k+c)=(3,-1+\frac{\sqrt{6}}{6})$$

- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
- សង់អេលីប



ង. $2x^2+5y^2+8x-10y-27=0$

យើងមាន $2x^2+5y^2+8x-10y-27=0$

$$2(x+2)^2-8+5(y-1)^2-5-27=0$$

$$2(x+2)^2+5(y-1)^2=40$$

$$\frac{(x+2)^2}{20}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{20})^2}+\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{8})^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

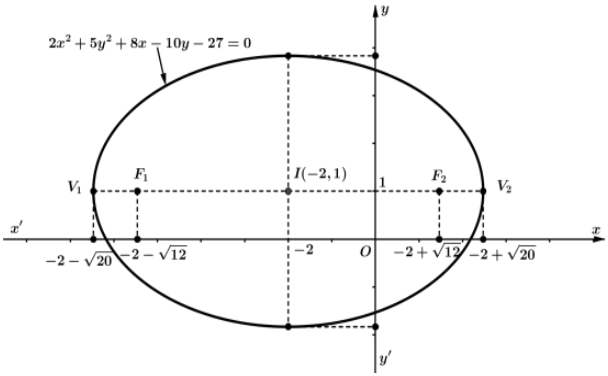
ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សរាប់ស៊ីស

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\,,\,k)=(-2\,,\,1)$
- កំពូល $V_1(h-a\,,\,k)=(-2-\sqrt{20}\,,\,1)$

  $V_2(h+a\,,\,k)=(-2+\sqrt{20}\,,\,1)$
- កំណុំ $F_1(h-c\,,\,k)=(-2-\sqrt{12}\,,1)$

  $F_2(h+c\,,\,k)=(-2+\sqrt{12}\,,\,1)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$
- សង់អេលីប



លំហាត់ទី៣. រកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីបខាងក្រោម

ក. $9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$

ខ. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

គ. $100x^2+16y^2-100x-64y-311=0$

ឃ. $100x^2+16y^2-100x-64y-311=0$

ដំណោះស្រាយ

៣. កូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ នៃអេលីប

ក. $9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$

យើងមាន $9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$

$$9(x^2+6x+9)+16(y^2-2y+1)=144$$

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{144}{6}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{144}{16}}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ $h=-3$, $k=1$, $a=4$, $b=3$

$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=16-9=7$$

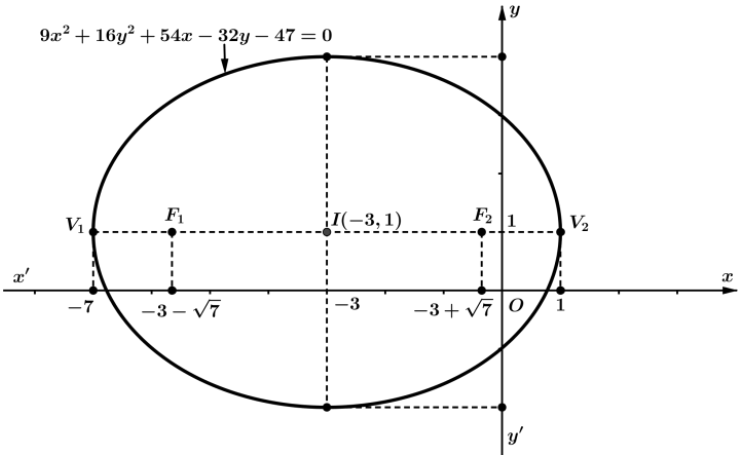
$$\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(-3\ ,\ 1)$
- កំពូល $V_1(h-a\ ,\ k)=(-7\ ,\ 1)$

  $V_2(h+a\ ,\ k)=(1\ ,\ 1)$
- កំណុំ $F_1(h-c\ ,\ k)=(-3-\sqrt{7}\ ,\ 1)$

  $F_2(h+c\ ,\ k)=(-3+\sqrt{7}\ ,\ 1)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$
- សង់អេលីប



ខ. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

យើងមាន $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

$$9(x^2+4x+4)-36+4(y^2-6y+9)=0$$

$$9(x+2)^2+4(y-3)^2=36$$

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្ស

អរដោនេ នាំឱ្យ $h=-2$, $k=3$, $a=3$, $b=2$

$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=9-4=5$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

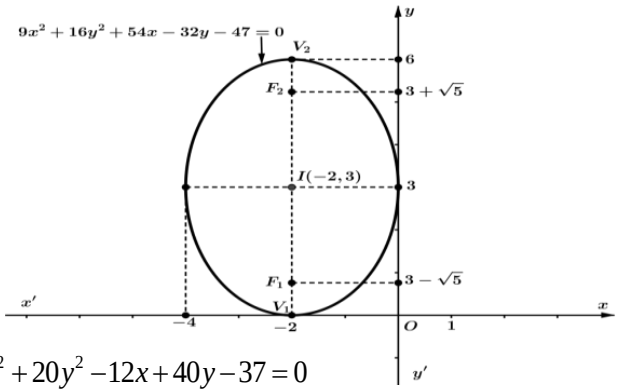
គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(-2\ ,\ 3)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(-2\ ,0)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(-2\ ,\ 6)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(-2\ ,3-\sqrt{5})$

$F_2(h\,,\,k+c)=(-2\,,\,3+\sqrt{5})$

- *អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ* $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- *សង់អេលីប*



គ. $12x^2+20y^2-12x+40y-37=0$

យើងមាន $12x^2+20y^2-12x+40y-37=0$

$$12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+20(y+1)^2=60$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$

មានទម្រង់ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សរអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ $h=\dfrac{1}{2}\,,\,k=-1\,,\,a=\sqrt{5}\,,\,b=\sqrt{3}$

$$c^2=a^2-b^2\Leftrightarrow c^2=5-3=2$$

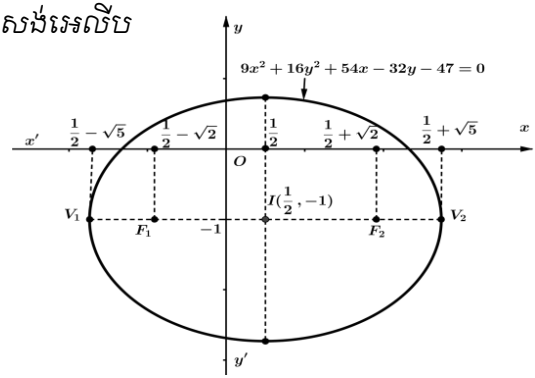
$$\Rightarrow c=\sqrt{2}$$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=(\frac{1}{2}\ ,\ -1)$
- កំពូល $V_1(h-a\ ,\ k)=(\frac{1}{2}-\sqrt{5}\ ,\ -1)$

  $V_2(h+a\ ,\ k)=(\frac{1}{2}+\sqrt{5}\ ,\ -1)$
- កំណុំ $F_1(h-c\ ,\ k)=(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\ ,\ -1)$

  $F_2(h+c\ ,\ k)=(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\ ,\ -1)$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$
- សង់អេលីប



ឃ. $100x^2+16y^2-100x-64y-311=0$

យើងមាន $100x^2+16y^2-100x-64y-311=0$

$$100\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16(y-2)^2=400$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{5^2}=1$$

មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្ស

អរដោនេ។ នាំឱ្យ $h=\frac{1}{2}$, $k=2$, $a=5$, $b=2$

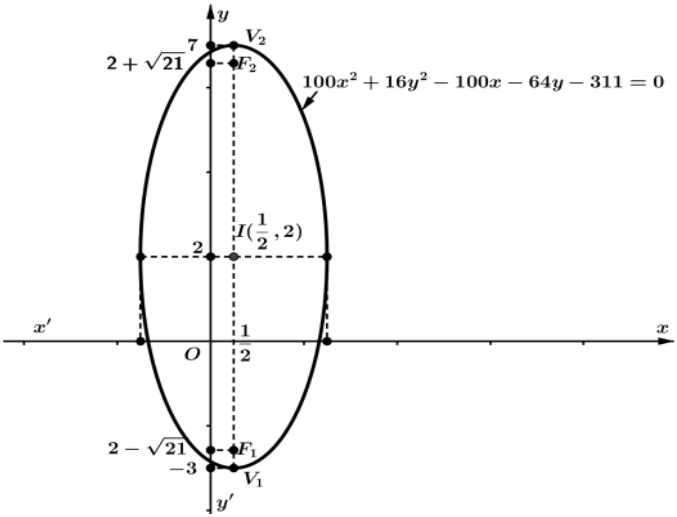
$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c^2=25-4=21$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{21}$$

គេបាន:

- ផ្ចិត $I(h\ ,\ k)=\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$
- កំពូល $V_1(h\ ,\ k-a)=(\frac{1}{2}\ ,-3)$

  $V_2(h\ ,\ k+a)=(\frac{1}{2}\ ,\ 7)$
- កំណុំ $F_1(h\ ,\ k-c)=(\frac{1}{2}\ ,2-\sqrt{21})$

  $F_2(h\ ,\ k+c)=(\frac{1}{2}\ ,\ 2+\sqrt{21})$
- អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$
- សង់អេលីប



លំហាត់ទី៤. រកទម្រង់ស្តង់ដារនៃសមីការអេលីបដែលផ្សែងផ្ចាត់លក្ខខ័ណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

ក. កំណុំ $F_1(3,0)$, $F_2(1,0)$ និងកំពូល $(0,0)$ ។

ខ. កំណុំ $F_1(0,-1)$, $F_2(0,1)$ និងកាត់អ័ក្សរាប់ស៊ីសត្រង់ $(-2,0)$, $(2,0)$ ។

គ. កំណុំ $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $(0,-2)$, $(0,2)$ ។

ឃ. កំណុំ $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ និងកំពូល $V_1(-3,0)$, $V_2(3,0)$ ។

ង. កំណុំ $F_1(3,3)$, $F_2(3,-1)$ ហើយកាត់តាមចំណុចដែលមានអរដោនេ $(4,0)$ ។

ច. កំពូល $V_1(2,2)$, $V_2(6,2)$ និងកំណុំ $(5,2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

៤. ទម្រង់ស្តង់ដារនៃសមីការអេលីបដែលផ្សែងផ្ចាត់លក្ខខ័ណ្ឌ៖

ក. កំណុំ $F_1(3,0)$, $F_2(1,0)$ និងកំពូល $(0,0)$

ដោយកូអរដោនេនៃកំណុំអេលីបមានអរដោនេថេរ នោះអេលីប មានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សរាប់ស៊ីស ហើយមានសមីការស្តង់ដារ គឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ។

គេមានកំណុំ:

$$\left.\begin{matrix} F_1(3,0) \\ F_1(h+c,k) \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} h+c=3 \\ k=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} F_2(1,0) \\ F_2(h-c,k) \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} h-c=1 \\ k=0 \end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases} h+c=3 \\ h-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=2 \\ c=1 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

អាចសរសេរជា $\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ហើយអេលីបមានកំពូល $(0\ ,\ 0)$

គេបាន

$$\left.\begin{matrix}V(0\ ,\ 0)\\ V(h-a\ ,\ k)\end{matrix}\right| \Rightarrow h-a=0$$

$$\Leftrightarrow 2-a=0\Rightarrow a=2$$

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

ដូចនេះសមីការអេលីបគឺ $\boxed{\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{3})^2}=1}$

ខ. កំណុំ $F_1(0\ ,\ -1)$, $F_2(0\ ,\ 1)$ និងកាត់អ័ក្សរាប់ស៊ីសត្រង់ $(-2\ ,\ 0)$, $(2\ ,\ 0)$ ។

ដោយកូអរដោនៃកំណុំអេលីបមានរាប់ស៊ីសថេរ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ ហើយមានសមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ។

គេមានកំណុំ:

$$\left.\begin{matrix}F_1(0\ ,\ -1)\\ F_1(h\ ,\ k-c)\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases}k-c=-1\\ h=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}F_2(0\ ,\ 1)\\ F_2(h\ ,\ k+c)\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases}k+c=1\\ h=0\end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases}k-c=-1\\ k+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ c=1\end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

អាចសរសេរជា $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ហើយអេលីបកាត់តាម $(-2\ ,\ 0)\ ,\ (2\ ,\ 0)$

គេបាន $\begin{cases}\frac{(-2)^2}{b^2}+\frac{0^2}{a^2}=1\\ \frac{2^2}{b^2}+\frac{0^2}{a^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{4}{b^2}=1\end{cases}$

$\Rightarrow b^2=4\Rightarrow b=\sqrt{4}=2$

$a^2=b^2+c^2$

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

ដូចនេះសមីការអេលីបគឺ $\boxed{\frac{(x-0)^2}{2^2}+\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2}=1}$

គ. កំណុំ $F_1(-2\ ,\ 0)\ ,\ F_2(2\ ,\ 0)$ និងកាត់អ័ក្សរយៈដោនេត្រង់ $(0\ ,-2)\ ,\ (0\ ,\ 2)$ ។

ដោយកូអរដោនេនៃកំណុំអេលីបអរដោនេចេរ នោះអេលីមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយមាន

សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ។

គេមានកំណុំ:

$$\left.\begin{matrix}F_1(-2\ ,\ 0)\\ F_1(h-c\ ,\ k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h-c=-2\\ k=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}F_2(2\ ,\ 0)\\ F_2(h+c\ ,\ k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h+c=2\\ k=0\end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases}h-c=-2\\ h+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\ c=2\end{cases}$

ឆាំឱ្យ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

អាចសរសេរជា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ហើយអេលីបកាត់តាម $(0\ ,-2)\ ,(0\ ,2)$

គេបាន $\begin{cases}\dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{(-2)^2}{b^2}=1\\ \dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{2^2}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{b^2}=1\\ \dfrac{4}{b^2}=1\end{cases}$

$\Rightarrow b^2=4\Rightarrow b=\sqrt{4}=2$

$a^2=b^2+c^2$

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{\dfrac{(x-0)^2}{(\sqrt{8})^2}+\dfrac{(y-0)^2}{2^2}=1}$

ឃ. កំណុំ $F_1(-2\ ,0)\ ,F_2(2\ ,0)$ និងកំពូល $V_1(-3\ ,0)\ ,V_2(3\ ,0)$

ដោយកូអរដោនៃកំពូលអេលីបមានអរដោនេថេរ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយមានសមីការស្តង់ដាគឺ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ។

គេមានកំពូល:

$$\left.\begin{matrix}V_1(-3\ ,0)\\ V_1(h-a\ ,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h-a=-3\\ k=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}V_2(3\ ,0)\\ V_2(h+a\ ,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h+a=3\\ k=0\end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases}h-a=-3\\ h+a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\ a=3\end{cases}$

គេមានកំណុំ:

$$\left.\begin{matrix}F_1(-2\ ,0)\\ F_1(h-c\ ,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow h-c=-2$$

$$\left.\begin{matrix}F_2(2\ ,0)\\ F_2(h+c\ ,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow h+c=2$$

គេបាន $\begin{cases}h-c=-2\\ h+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\ c=2\end{cases}$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

គេបាន $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1}$

ង. កំណុំ $F_1(3\ ,\ 3)$, $F_2(3\ ,\ -1)$ ហើយកាត់តាមចំណុចដែលមាន
កូអរដោនេ $(4\ ,\ 0)$ ។
ដោយកូអរដោនេនៃកំណុំអេលីបមានអាប់ស៊ីសថេរ នោះ
អេលីបមានអ័ក្សធំស្របនឹងអរដោនេ ហើយមានសមីការ
ស្តង់ដាគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ។
គេមានកំណុំ:

$$\left.\begin{matrix} F_1(3\ ,\ 3) \\ F_1(h\ ,\ k+c) \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} k+c=3 \\ h=3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} F_2(3\ ,\ -1) \\ F_2(h\ ,\ k-c) \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} k-c=-1 \\ h=3 \end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases} k-c=-1 \\ k+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ c=2 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
អាចសរសេរជា $\frac{(x-3)^2}{b^2} + \frac{(y-1)^2}{a^2} = 1$
ហើយអេលីបកាត់តាមចំណុច $(4\ ,\ 0)$
គេបាន: $\frac{(4-3)^2}{b^2} + \frac{(0-1)^2}{a^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 b^2 \quad (i)$$

តែ $c^2 = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow \quad 2^2 = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4 \quad (ii)$

តាម (i) & (ii) គេបាន:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 b^2 & (i) \\ a^2 - b^2 = 4 & (ii) \end{cases}$$

តាម (ii): $b^2 = a^2 - 4$ ជំនួសក្នុង (i)

គេបាន $a^2 + a^2 - 4 = a^2(a^2 - 4)$

$$2a^2 - 4 = a^4 - 4a^2$$

$$a^4 - 6a^2 + 4 = 0$$

តាង $t = a^2$, $(t > 0)$

គេបាន $t^2 - 6t + 4 = 0$

$$\Delta' = (-3)^2 - 4 = 5$$

$$\Rightarrow t_1 = 3 - \sqrt{5} \text{ , } t_2 = 3 + \sqrt{5}$$

ចំពោះ $t = 3 - \sqrt{5}$

$$\left.\begin{matrix} t = 3 - \sqrt{5} \\ t = a^2 \end{matrix}\right| \Rightarrow a^2 = 3 - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow b^2 = 3 - \sqrt{5} - 4 = -\sqrt{5} - 1 < 0$$

ចំពោះ $t = 3 + \sqrt{5}$

$$\left.\begin{matrix} t = 3 + \sqrt{5} \\ t = a^2 \end{matrix}\right| \Rightarrow a^2 = 3 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow b^2 = 3 + \sqrt{5} - 4 = \sqrt{5} - 1$$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{\dfrac{(x-3)^2}{(\sqrt{\sqrt{5}-1})^2} + \dfrac{(y-1)^2}{(\sqrt{\sqrt{5}+3})^2} = 1}$

ច. កំពូល $V_1(2\ ,\ 2)$, $V_2(6\ ,\ 2)$ និងកំណុំ $(5\ ,\ 2)$

ដោយកូអរដោនៃកំពូលអេលីបមានអរដោនេថេរ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយមានសមីការស្តង់ដា គឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

គេមានកំពូល:

$$\left.\begin{matrix}V_1(2\ ,\ 2)\\ V_1(h-a\ ,\ k)\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases}h-a=2\\ k=2\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}V_2(6\ ,\ 2)\\ V_2(h+a\ ,\ k)\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases}h+a=6\\ k=2\end{cases}$$

$$\text{គេបាន}\quad \begin{cases}h-a=2\\ h+a=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=4\\ a=2\end{cases}$$

គេមានកំណុំ:

$$\left.\begin{matrix}(5\ ,\ 2)\\ (h+c\ ,\ k)\end{matrix}\right| \Rightarrow h+c=5$$

$$\Rightarrow c=5-h=5-4=1$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{\frac{(x-4)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2}=1}$

លំហាត់ទី៥. រកសមីការអេលីបដែលមានលក្ខខ័ណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

ក. ផ្ចិត $(0,0)$ ហើយអ័ក្សធំ 8 ឯកតា និងអ័ក្សតូចជាអ័ក្សដេកមានប្រវែង 5 ឯកតា។

ខ. ផ្ចិត $(0,0)$ និងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2,0)$ និង $(-2,0)$ ហើយកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $\left(0\ ,\ \frac{1}{3}\right)$ និង $\left(0\ ,\ -\frac{1}{3}\right)$ ។

គ. កំពូល $V_1(2\ ,\ 0)$ និង $V_2(-2\ ,\ 0)$ ហើយមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ

ស្មើនឹង $\frac{3}{5}$។

ដំណោះស្រាយ

៥. សមីការអេលីបដែលមានលក្ខខ័ណ្ឌ៖

ក. ផ្ចិត $(0\ ,\ 0)$ ហើយអ័ក្សធំមានប្រវែង 8 ឯកតានិងអ័ក្សតូចជាអ័ក្សដេកមានប្រវែង 5 ឯកតា

ដោយអ័ក្សតូចជាអ័ក្សដេក នោះអ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

ដូចនេះសមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

តាមបំរាប់: ផ្ចិត $(0\ ,\ 0)\Rightarrow h=0\ ,\ k=0$

អ័ក្សធំមានប្រវែង 8 ឯកតា $\Rightarrow a=\frac{8}{2}=4$

អ័ក្សតូចមានប្រវែង 5 ឯកតា $\Rightarrow b=\frac{5}{2}$

គេបាន $\frac{(x-0)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{(y-0)^2}{4^2}=1$

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{16}=1\Leftrightarrow \quad \frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

$$\Leftrightarrow 64x^2+25y^2=400$$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{64x^2+25y^2=400}$

ខ. ផ្ចិត $(0\ ,\ 0)$ និងកាត់អ័ក្សរាប់ស៊ីសត្រង់ $(2\ ,\ 0)\&(-2\ ,\ 0)$ ហើយកាត់អ័ក្សរដេនេ ត្រង់ $\left(0\ ,\ \frac{1}{3}\right)\&\left(0\ ,\ -\frac{1}{3}\right)$។

- ប្រវែងអ័ក្សដេកនៃអេលីបគឺ:

  $\sqrt{[2-(-2)]^2}=\sqrt{4^2}=4$

- ប្រវែងអ័ក្សឈរនៃអេលីបគឺ:

$$\sqrt{\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ អ័ក្សធំរបស់អេលីបស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះ

សមីការស្តង់ដារគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

គេមានផ្ចិត $(0\ ,\ 0)=(h\ ,\ k)\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k=0\end{cases}$

ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ 4 នាំឱ្យ $a=\frac{4}{2}=2$

ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $\frac{2}{3}$ នាំឱ្យ $b=\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}$

គេបាន $\frac{(x-0)^2}{2^2}+\frac{(y-0)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{4}+9y^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+36y^2=4$$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{x^2+36y^2=4}$

គ. កំពូល $V_1(2\ ,\ 0)$ និង $V_2(-2\ ,\ 0)$ ហើយមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេស្មើនឹង $\frac{3}{5}$ ដោយកូអរដោនេនៃកំពូលអេលីបមានអរដោនេថេរ នោះអេលីបមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសដែលមានសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ។

គេមានកំពូល:

$$\left.\begin{matrix}V_1(2\ ,\ 0)\\V_1(h+a\ ,\ k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}k=0\\h+a=2\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}V_2(-2\ ,\ 0)\\V_2(h-a\ ,\ k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}k=0\\h-a=-2\end{cases}$$

គេបាន $\begin{cases} h+a=2 \\ h-a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ a=2 \end{cases}$

ហើយអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow c=\frac{3a}{5}$

$$c=\frac{3\cdot 2}{5}=\frac{6}{5}$$

$$b^2=a^2-c^2=2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow b^2=4-\frac{36}{25}=\frac{100-36}{25}=\frac{64}{25}$$

គេបាន $\frac{(x-0)^2}{4}+\frac{(y-0)^2}{\frac{64}{25}}=1$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{25y^2}{64}=1$$

$$16x^2+25y^2=64$$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{16x^2+25y^2=64}$

លំហាត់ទី៦. ក. រកផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយផ្ទៃអេលីប

$9x^2+4y^2=36$ ។

ខ.បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយសមីការអេលីប

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ គឺស្មើនឹង πab ។

ដំណោះស្រាយ

៦.ក. រកផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយផ្ទៃអេលីប $9x^2+4y^2=36$

គេមាន $9x^2+4y^2=36$

$$\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត $9x^2+4y^2=36 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}$

គេបានផ្ទៃក្រឡា $S = 2\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{36-9x^2}}{2} dx$

តាមរូបមន្ត $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$

គេបាន $\int \sqrt{36-9x^2}\, dx = \int 3\sqrt{4-x^2}\, dx$

$$= 3\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{2^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{3x}{2}\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\frac{x}{2}$$

នាំឱ្យ $S = 2\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{36-9x^2}}{2} dx$

$$= 2\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{36-9x^2}}{2} dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{36-9x^2}\, dx$$

$$= \left(\frac{3x}{2}\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$= (3\sqrt{4-4} + 6\arcsin 1) - (-3\sqrt{4-4} + 6\arcsin(-1))$

$= 6\cdot\frac{\pi}{2} - \left(6\cdot(-\frac{\pi}{2})\right) = 3\pi + 3\pi = 6\pi$

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាអេលីបគឺ $\boxed{S = 6\pi}$

ខ. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយផ្ទៃអេលីប $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ គឺស្មើនឹង πab

គេមាន $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

គេបាន $S = 2\int_{-a}^{a} y\, dx = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\, dx$

$$= \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin 1\right)-\frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin(-1)\right)$$

$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{a^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4}\pi+\frac{a^2}{4}\pi\right)$$

$$= \frac{2b}{a}\cdot\frac{2a^2}{4}\pi=\frac{4a^2b}{4a}\pi=ab\pi$$

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាអេលីបគឺ $\boxed{S=ab\pi}$

លំហាត់ទី៧ *ក.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីបដែលមានសមីការ* $9x^2+4y^2=36$ *ត្រង់* $(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})$ ។

ខ.បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីបដែលមាន

សមីការ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *នៅត្រង់* (x_0,y_0) *គឺ* $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ ។

គ.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $4x^2+y^2=4$

ហើយកាត់តាមចំណុច $(3\ ,\ 0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

៧/ ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប

តាង $(T): y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

គេមាន $9x^2+4y^2=36$

នាំឱ្យ $18x+8y'y=0$ *(ដេរីវេអង្គទាំងសងខាង)*

$$9x+4y'y=0\Rightarrow y'=-\frac{9x}{4y}$$

ដែរ $y'(x_0)=-\dfrac{9x_0}{4y_0}=-\dfrac{9\cdot 1}{4(3\sqrt{3}/2)}=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$

ដែរ $y'(x_0)=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $(T):y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-1)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$(T):y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(T):y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3}$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(T):y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3}}$

ខ. បង្ហាញសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអេលីបដែលមានសមីការ

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ នៅត្រង់ (x_0,y_0) គឺ $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

តាង $(T):y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

គេមាន $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (ដេរីវេអង្គទាំងសងខាង)

គេបាន $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y'y}{b^2}=0\Rightarrow y'=\dfrac{\left(-\dfrac{2x}{a^2}\right)}{\left(\dfrac{2y}{b^2}\right)}$

$$y'=-\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2y}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

នាំឱ្យ $y'(x_0)=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

គេបាន $(T):y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$$(T):y=\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)(x-x_0)+y_0$$

$$(T): y=-\frac{b^2x_0x}{a^2y_0}+\frac{b^2x_0x_0}{a^2y_0}+y_0$$

$$(T): a^2yy_0=-b^2x_0x+b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

$$(T): b^2x_0x+a^2yy_0=b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

$$(T): \frac{b^2xx_0}{a^2b^2}+\frac{a^2yy_0}{a^2b^2}=\frac{b^2x_0^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y_0^2}{a^2b^2}$$

$$(T): \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

តែ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

គេបាន $(T): \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

ដូចនេះ សមីការអេលីបគឺ $\boxed{(T): \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $4x^2+y^2=4$ ហើយតាមចំណុច $(3\,,\,0)$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): \frac{xx_0}{b^2}+\frac{yy_0}{a^2}=1$

គេមាន $4x^2+y^2=4$

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

គេមានទម្រង់ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ នាំឱ្យ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

នាំឱ្យ $(T): \frac{xx_0}{1}+\frac{yy_0}{4}=1\Leftrightarrow xx_0+\frac{yy_0}{4}=1$

ដោយ (D) កាត់តាមចំណុច $(3\,,\,0)$

គេបាន $(T): xx_0+\frac{yy_0}{4}=1\quad(i)$

$$(T): 3x_0+\frac{0\cdot y_0}{4}=1\Leftrightarrow 3x_0=1$$

$$\Rightarrow\ x_0=\frac{1}{3}$$

គេបាន $4x_0^2+y_0^2=4\Rightarrow y_0^2=4-4x_0^2$

$$\Rightarrow y_0 = \pm 2\sqrt{1-x_0^2} = \pm 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y_0 = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-1} = \pm\frac{2\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

យក $x_0 = \frac{1}{3}$ & $y_0 = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ជំនួសក្នុង (i)

គេបាន $(T): \frac{1}{3}x + \frac{y}{4}\cdot\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 1$

$$(T): \frac{1}{3}x + y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 1$$

$$(T): \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)y = 1 - \frac{1}{3}x = \frac{3-x}{3}$$

$$(T): y = \frac{3-x}{3}\cdot\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(3-x)$$

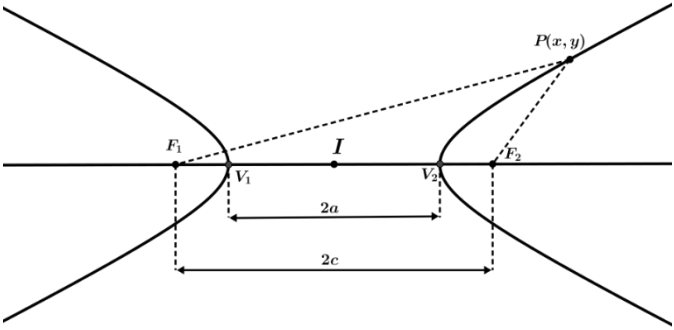
$$(T): y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(T): y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)}$

មេរៀនទី៤

អ៊ីពែបូល

១. និយមន័យ៖ *អ៊ីពែបូលជាសំណុំចំណុច $P(x,y)$ នៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលដកចម្ងាយរវាងចំណុច $P(x,y)$ ទៅនឹងចំនុចនឹងពីរផ្សេងគ្នា ជាចំនួនថេរ (ស្មើ $2a$) ។ ចំណុចនឹងទាំងពីរ ហៅថា កំណុំតាងដោយ F_1 និង F_2 ។*



២. ទម្រង់ស្តង់ដាសមីការអ៊ីពែបូល

គេតាងចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំពូលដោយ a និងចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំដោយ c ទំនាក់ទំនង $b^2 = c^2 - a^2$ ដែល $c > a > 0$ ។

- *សមីការអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្ស $x'x$*

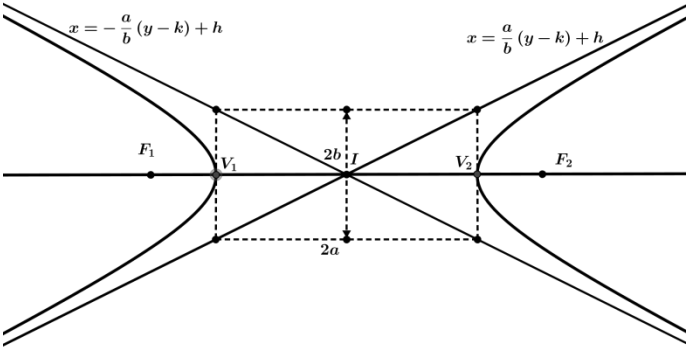
ផ្ចិត	កំពូល	កំណុំ	សមីការ
$I(0,0)$	$S_1(-a,0)$ $S_2(a,0)$	$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$I(h,k)$	$S_1(h-a,k)$ $S_2(h+a,k)$	$F_1(h-c,k)$ $F_2(h+c,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

- *សមីការអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្ស $y'y$*

ផ្ចិត	កំពូល	កំណុំ	សមីការ
$I(0,0)$	$S_1(0,-a)$ $S_2(0,a)$	$F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$I(h,k)$	$S_1(h,k-a)$ $S_2(h,k+a)$	$F_1(h,k-c)$ $F_2(h,k+c)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

៣. អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីពែបូល

គ្រប់អ៊ីពែបូលទាំងអស់មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរជានិច្ច ដែលអាស៊ីមតូតទ្រេតទាំងពីរនោះកាត់តាមកំពូលនៃចតុកោណកែងដែលមានវិមាត្រ $2a$ និង $2b$ ហើយមានផ្ចិតជាផ្ចិតនៃអ៊ីពែបូល ។ អង្កត់ដែលមានប្រវែង $2b$ ជាន់ដោយភ្ជាប់ចំណុច $(h,k+b)$ និង $(h,k-b)$ ហៅថាអ័ក្សឆ្លាស់នៃអ៊ីពែបូល ។



ចំណាំ៖ ដើម្បីរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល គេគ្រាន់តែឱ្យអង្គទីមួយនៃសមីការស្តង់ដារបស់វា ស្មើសូន្យ រួច ទាញរក y ។

- សមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សរាប់ស៊ីសគឺ $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$ ។
- សមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សរររដោនេ គឺ $y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$ ។

៤. ទម្រង់ទូទៅនៃសមីការអ៊ីពែបូល

ទម្រង់ទូទៅនៃសមីការអ៊ីពែបូលគឺ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $A\times B<0$ ។

៥. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូលត្រង់ចំណុចមួយ

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូល $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ $y-y_0=\frac{b^2(x_0-h)}{a^2(y_0-k)}(x-x_0)$

  ឬ $\frac{(x-h)(x_0-h)}{a^2}-\frac{(y-k)(y_0-k)}{b^2}=1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូល $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ $y-y_0=\frac{a^2(x_0-h)}{b^2(y_0-k)}(x-x_0)$ ឬ $\frac{(y-k)(y_0-k)}{a^2}-\frac{(x-h)(x_0-h)}{b^2}=1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូលដែលមានសមីការទូទៅ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ គឺ $Ax\cdot x_0+By\cdot y_0+\frac{C}{2}(x+x_0)+\frac{D}{2}(y+y_0)+E=0$ ។

៦. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអ៊ីពែបូល

និយមន័យ៖ *អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ* e *នៃអ៊ីពែបូលគឺជាផលធៀបរវាង* c *និង* a *គឺ* $e=\frac{c}{a}\ \ (0<e<1)$ ។

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១: *ចូរសង់អ៊ីពែបូលនិងសមីការអាស៊ីមតូតរបស់ទម្រង់ខាងក្រោម៖*

ក/ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ ខ/ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{5}=1$

គ/ $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$ ឃ/ $\frac{(y+2)^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{4}=1$

ដំណោះស្រាយ

សង់អ៊ីពែបូលនិងសមីការអាស៊ីមតូតរបស់ទម្រង:

ក/ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

យើងមាន $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{(x-0)^2}{4^2}-\frac{(y-0)^2}{2^2}=1$

សមីការមានទម្រង់ស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ $h=0$, $k=0$, $a=4$, $b=2$

$$c^2=a^2+b^2=4^2+2^2=16+4=20\Rightarrow c=\sqrt{20}$$

យើងបាន

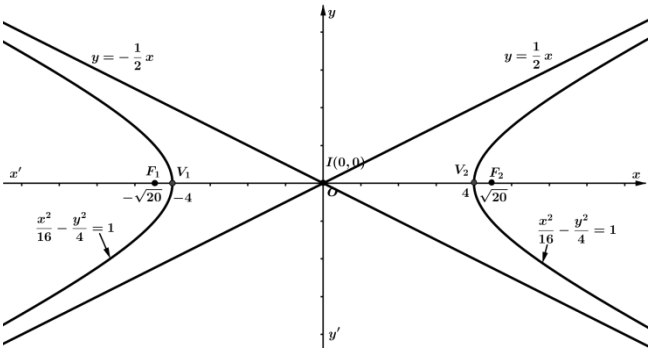
- *ផ្ចិត* $I(h,k)=I(0,0)$
- *កំពូល* $V_1(h-a,k)=V_1(-4,0)$ *និង* $V_2(h+a,k)=V_2(4,0)$
- *កំណុំ* $F_1(h-c,k)=F_1\left(-\sqrt{20},0\right)$ *និង* $F_2(h+c,k)=F_2\left(\sqrt{20},0\right)$

- *អាស៊ីមតូត*

$$y_1 = -\frac{b}{a}(x-h)+k \Leftrightarrow y_1 = -\frac{2}{4}(x-0)+0 = -\frac{2}{4}x = -\frac{1}{2}x$$

និង $y_2 = \frac{b}{a}(x-h)+k \Leftrightarrow y_2 = \frac{2}{4}(x-0)+0 = \frac{2}{4}x = \frac{1}{2}x$

<u>សង់ក្រាប</u>



ខ/ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{5}=1$

យើងមាន $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{5}=1 \Leftrightarrow \frac{(y-0)^2}{5^2}-\frac{(x-0)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$

សមីការមានទម្រង់ស្តង់ដា $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ $h=0\,,\ k=0\,,\ a=5,\ b=\sqrt{5}$

$$c^2 = a^2+b^2 = 5^2+(\sqrt{5})^2 = 25+5 = 30 \Rightarrow c = \sqrt{30}$$

យើងបាន

- *ផ្ចិត* $I(h,k) = I(0,0)$
- *កំពូល* $V_1(h,k-a) = V_1(0,-5)$ *និង* $V_2(h,k+a) = V_2(0,5)$

- កំណុំ $F_1(h,k-c)=F_1\left(0,-\sqrt{30}\right)$ និង

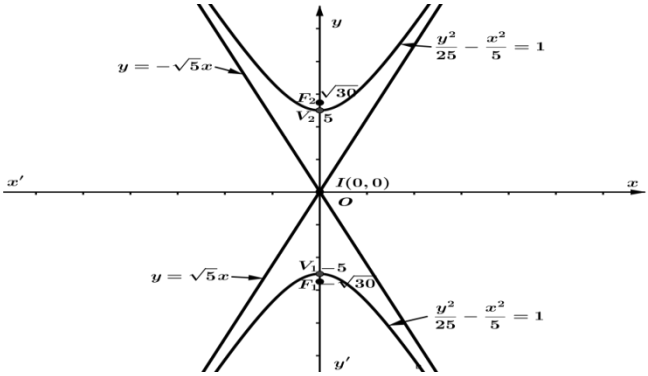
  $F_2(h,k+c)=F_2\left(0,\sqrt{30}\right)$

- អាស៊ីមតូត

$$y_1=-\frac{a}{b}(x-h)+k \Leftrightarrow y_1=-\frac{5}{\sqrt{5}}(x-0)+0=-\frac{5}{\sqrt{5}}x=-\sqrt{5}x$$

$$y_2=\frac{a}{b}(x-h)+k \Leftrightarrow y_2=\frac{5}{\sqrt{5}}(x-0)+0=\frac{5}{\sqrt{5}}x=\sqrt{5}x$$

<u>សង់ក្រាប</u>



គ/ $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$

យើងមាន $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{3^2}-\dfrac{(y+3)^2}{2^2}=1$

សមីការមានទម្រង់ស្តង់ដា $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ $h=2$, $k=-3$, $a=3, b=2$

$c^2=a^2+b^2=3^2+2^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

យើងបាន

- ផ្ចិត $I(h,k)=I(2,-3)$
- កំពូល $V_1(h-a,k)=V_1(2-3,-3)=V_1(-1,-3)$ និង

$V_2(h+a,k)=V_2(2+3,-3)=V_2(5,-3)$

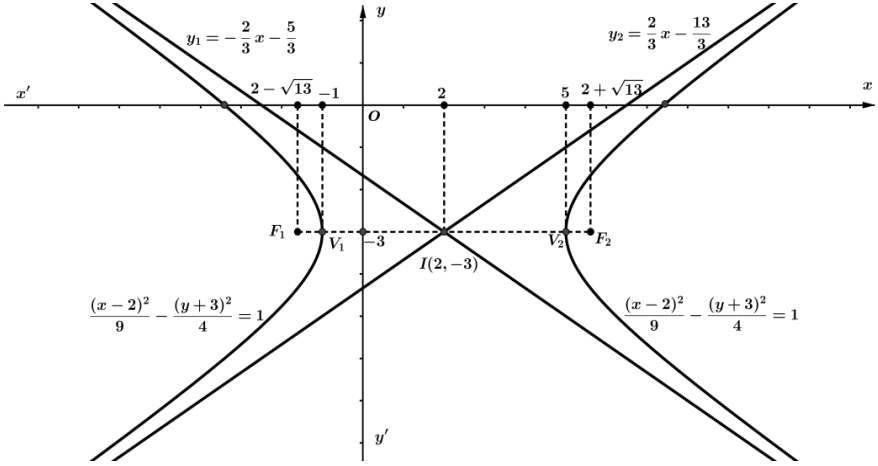
- កំណុំ $F_1(h-c,k)=F_1\left(2-\sqrt{13},-3\right)$

  និង $F_2(h+a,k)=F_2\left(2+\sqrt{13},-3\right)$
- អាស៊ីមតូត

$$y_1=-\frac{b}{a}(x-h)+k \Leftrightarrow y_1=-\frac{2}{3}(x-2)-3=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}-3=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$y_2=\frac{b}{a}(x-h)+k \Leftrightarrow y_2=\frac{2}{3}(x-2)-3=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-3=\frac{2}{3}x-\frac{13}{3}$$

<u>សង់ក្រាប</u>



ឃ/ $\frac{(y+2)^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{4}=1$

យើងមាន $\frac{(y+2)^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{(y+2)^2}{4^2}-\frac{(x+3)^2}{2^2}=1$

សមីការមានទម្រង់ស្តង់ដា $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ $h=-3$, $k=-2$, $a=4$, $b=2$

$$c^2=a^2+b^2=4^2+2^2=16+4=20\Rightarrow c=\sqrt{20}$$

យើងបាន

- ផ្ចិត $I(h,k)=I(-3,-2)$
- កំពូល $V_1(h,k-a)=V_1(-3,-2-4)=V_1(-3,-6)$

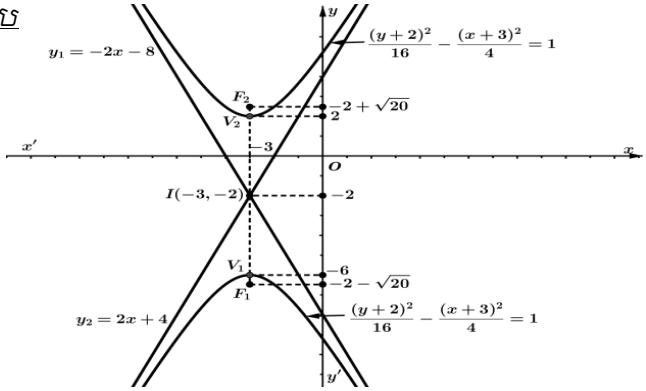
  និង $V_2(h,k+a)=V_2(-3,-2+4)=V_2(-3,2)$
- កំណុំ $F_1(h,k-c)=F_1\left(-3,-2-\sqrt{20}\right)$

  និង $F_2(h,k+c)=F_2\left(-3,-2+\sqrt{20}\right)$
- អាស៊ីមតូត

$$y_1=-\frac{a}{b}(x-h)+k\Leftrightarrow y_1=-\frac{4}{2}(x+3)-2=-2x-6-2=-2x-8$$

$$y_2=\frac{a}{b}(x-h)+k\Leftrightarrow y_2=\frac{4}{2}(x+3)-2=2x+6-2=2x+4$$

<u>សង់ក្រាប</u>



លំហាត់ទី២: បង្ហែងសមីការអ៊ីពែបូលខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដា ៖

ក/ $y^2=2x^2-4x+3$ ខ/ $3y^2-x^2+6x-12y=0$

គ/ $y^2=3x^2-6x$ ឃ/ $x^2-y^2-4x+2y+11=0$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហែងសមីការអ៊ីពែបូលខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដានិងសង់ក្រាប

ក. $y^2=2x^2-4x+3$

$$y^2=2(x^2-2x)+3$$
$$y^2=2\left[(x-1)^2-1\right]+3$$
$$y^2-2(x-1)^2=1$$
$$\frac{(y-0)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}=1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលគឺ $\frac{(y-0)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}=1$

ខ. $3y^2-x^2+6x-12y=0$

យើងមាន $3y^2-x^2+6x-12y=0$

$$\Leftrightarrow 3(y^2-4y+4)-12-(x^2-6x+9)+9=0$$
$$\Leftrightarrow 3(y-2)^2-(x-3)^2=3$$
$$\Leftrightarrow \frac{(y-2)^2}{1}-\frac{(x-3)^2}{3}=1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលគឺ $\frac{(y-2)^2}{1}-\frac{(x-3)^2}{3}=1$

គ. $y^2=3x^2-6x$

$$y^2-3x^2+6x=0$$
$$y^2-3(x^2-2x)=0$$
$$y^2-3\left[(x-1)^2-1\right]=0$$

$$y^2-3(x-1)^2+3=0$$
$$\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលគឺ $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y-0)^2}{3}=1$

ឃ. $x^2-y^2-4x+2y+11=0$

$$x^2-4x-(y^2-2y)+11=0$$
$$x^2-4x+4-4-\left(y^2-2y+1-1\right)+11=0$$
$$(x+2)^2-(y-1)^2-4+1+11=0$$
$$(x+2)^2-(y-1)^2+8=0$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលគឺ $\frac{(y-1)^2}{8}-\frac{(x-2)^2}{8}=1$

លំហាត់ទី៣៖ *សរសេរសមីការស្តង់ដាដោយស្គាល់ធាតុខាងក្រោម:*

ក. កំណុំ $(\pm3,0)$ និងកំពូល $(\pm2,0)$

ខ. កំណុំ $(0,\pm8)$ និងកំពូល $(0,\pm5)$

គ. កំណុំ $\left(3,-9+\sqrt{145}\right),\left(3,-9-\sqrt{145}\right)$ និងកំពូល $(3,0),\ (3,-18)$

ឃ. កំណុំ $\left(-5,-3-\sqrt{97}\right),\left(-5,-3+\sqrt{97}\right)$ និងកំពូល $(-5,-7),\ (-5,1)$

ដំណោះស្រាយ

៣. រកទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការអ៊ីពែបូល

ក. កំណុំ $(\pm3,0)$ និងកំពូល $(\pm2,0)$ ដោយកំណុំនិងកំពូលមានអរដោនេដូចគ្នា នោះអក្សទំទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សរអាប់ស៊ីសហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

យើងមាន:

- *កំណុំ*

$$\left.\begin{matrix}(-3,0)\\(h-c,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}k=0\\h-c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h+c=3\\h-c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\c=3\end{cases}$$
$$\left.\begin{matrix}(3,0)\\(h+c,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}k=0\\h+c=3\end{cases}$$

- *កំពូល*

$$\left.\begin{matrix}(-2,0)\\(h-a,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}k=0\\h-a=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h+a=2\\h-a=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\a=2\end{cases}$$
$$\left.\begin{matrix}(2,0)\\(h+a,k)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}k=0\\h+a=2\end{cases}$$

$$b^2=c^2-a^2=3^2-2^2=9-4=5\Rightarrow b=\sqrt{5}$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\sqrt{5}^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

ខ. កំណុំ $(0,\pm8)$ *និងកំពូល* $(0,\pm5)$

ដោយកំណុំនិងកំពូលមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា នោះអក្សទំទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សរអរដោនេហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$

យើងមាន:

- *កំណុំ*

$$\left.\begin{matrix}(0,-8)\\(h,k-c)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k-c=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+c=8\\k-c=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\c=8\end{cases}$$
$$\left.\begin{matrix}(0,8)\\(h,k+c)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k+c=8\end{cases}$$

- *កំពូល*

$$\left.\begin{matrix}(0,-5)\\(h,k-a)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k-a=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+a=5\\k-a=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\a=5\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(0,5)\\(h,k+a)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k+a=5\end{cases}$$

$$b^2=c^2-a^2=8^2-5^2=64-25=39\Rightarrow b=\sqrt{39}$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{y^2}{5^2}-\frac{x^2}{\sqrt{39}^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{39}=1$

គ. កំណុំ $\left(3,-9+\sqrt{145}\right),\left(3,-9-\sqrt{145}\right)$ និងកំពូល $(3,0),(3,-18)$ *ដោយកំណុំនិងកំពូលមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នានោះអក្សរទំទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សរអរដោនេនោះ*

ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$

យើងមាន:

- *កំណុំ*

$$\left.\begin{matrix}\left(3,-9-\sqrt{145}\right)\\(h,k-c)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=3\\k-c=-9-\sqrt{145}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\left(3,-9+\sqrt{145}\right)\\(h,k+c)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=3\\k+c=-9+\sqrt{145}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k+c=-9+\sqrt{145}\\k-c=-9-\sqrt{145}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-9\\c=\sqrt{145}\end{cases}$$

- *កំពូល*

$$\left.\begin{matrix}(3,-18)\\(h,k-a)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=3\\k-a=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+a=0\\k-a=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-9\\a=9\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(3,0)\\(h,k+a)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=3\\k+a=0\end{cases}$$

$$b^2=c^2-a^2=\sqrt{145}^2-9^2=145-81=64\Rightarrow b=8$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ

$$\frac{(y+9)^2}{9^2}-\frac{(x-3)^2}{8^2}=1\Rightarrow\frac{(y+9)^2}{81}-\frac{(x-3)^2}{64}=1$$

ឃ. កំណុំ $\left(-5,-3-\sqrt{97}\right),\left(-5,-3+\sqrt{97}\right)$ និងកំពូល $(-5,-7),(-5,1)$

ដោយកំណុំនិងកំពូលមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នានោះអក្សទំទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សអរដោនេនោះទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

យើងមាន:

- កំណុំ

$$\left.\begin{matrix}\left(-5,-3-\sqrt{97}\right)\\(h,k-c)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=-5\\k-c=-3-\sqrt{97}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\left(-5,-3+\sqrt{97}\right)\\(h,k+c)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=-5\\k+c=-3+\sqrt{97}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k+c=-3+\sqrt{97}\\k-c=-3-\sqrt{97}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-3\\c=\sqrt{97}\end{cases}$$

- កំពូល

$$\left.\begin{matrix}(-5,-7)\\(h,k-a)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=-5\\k-a=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+a=1\\k-a=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-3\\a=4\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(-5,1)\\(h,k+a)\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}h=-5\\k+a=1\end{cases}$$

$$b^2=c^2-a^2=\sqrt{97}^2-4^2=97-16=81\Rightarrow b=9$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(y+3)^2}{4^2}-\frac{(x+5)^2}{9^2}=1$

$$\Leftrightarrow\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x+5)^2}{81}=1$$

លំហាត់ទី៤៖ *សរសេរសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលចំពោះបណ្តាធាតុខាងក្រោម:*

ក. កំពូល $(\pm 7,0)$ *និង អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ* $e=\frac{4}{3}$

ខ. កំណុំ $(0,\pm 10)$ *ហើយកាត់តាមចំណុច* $(2,3)$

គ. កំណុំ $(0,0)$ *កំពូល* $(0,2)$ *និងកំណុំ* $(0,4)$

ឃ. ផ្ចិត $(0,0)$ *កំពូល* $(3,0)$ *និងកំណុំ* $(5,0)$

ដំណោះស្រាយ

៤. សរសេរសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលដោយស្គាល់ធាតុ

ក។ កំពូល $(\pm 7,0)$ *និង អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ* $e=\frac{4}{3}$

ដោយកំពូលនៃអ៊ីពែបូលគឺ $(\pm 7,0)$ *ស្ថិតនៅលើអ័ក្សរោប់ស៊ីស*

នោះទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

កំពូល $(\pm a,0)$ *គឺ* $(\pm 7,0)\Rightarrow a=7$

$$e=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow c=\frac{4}{3}a\quad\Rightarrow c=\frac{4}{3}\times 7=\frac{28}{3}$$

ម៉្យាងទៀត $c^2=a^2+b^2\quad\Rightarrow\left(\frac{28}{3}\right)^2=7^2+b^2$

$$\Rightarrow b^2=\frac{784}{9}-49=\frac{343}{9}$$

យើងបាន ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{x^2}{(7)^2}-\frac{y^2}{343/9}=1\Rightarrow\frac{x^2}{49}-\frac{9y^2}{343}=1$$

$$\Rightarrow 343x^2-441y^2=16807$$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលគឺ $343x^2-441y^2-16807=0$

ខ. កំណុំ $(0,\pm 10)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $(2,3)$ ដោយកំណុំ $(0,\pm 10)$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សរបេះដោនេហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

យើងមាន កំណុំ $(0,\pm c)$ គឺ $(0,\pm 10) \Rightarrow c=10$

ហើយ $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \sqrt{10}^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=10-a^2$

ដោយអ៊ីពែបូលកាត់តាមចំណុច $(2,3)$

គេបាន

$$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}-\frac{4}{10-a^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{9(10-a^2)-4a^2}{a^2(10-a^2)}=1$$

$$\Rightarrow 9(10-a^2)-4a^2=a^2(10-a^2) \Rightarrow a^4-23a^2+90=0$$

$$\Rightarrow a^4-18a^2-5a^2+90=0 \Rightarrow (a^2-18)(a^2-5)=0$$

$$\Rightarrow a^2=18, a^2=5$$

នោះ $b^2=10-a^2=10-18=-8$ មិនយក

$b^2=10-a^2=10-5=5$

យើងបានទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{5}=1 \Rightarrow y^2-x^2=5$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលគឺ $y^2-x^2-5=0$

គ. ផ្តិត $(0,0)$ កំពូល $(0,2)$ និង កំណុំ $(0,4)$ ដោយផ្តិត កំពូល និង កុំណុំមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា នោះអក្សទំទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សអ័ររបេះដោនេ ហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

យើងមាន

- ផ្ចិត $(0,0)=(h,k)\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k=0\end{cases}$
- កំពូល $(0,2)=(h,k+a)\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k+a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\a=0\end{cases}$
- កំណុំ $(0,4)=(h,k+c)\Rightarrow k+c=4\Rightarrow c=4$

តែ $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$

យើងបានទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការ

$$\frac{y^2}{2^2}-\frac{x^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1\Leftrightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$$

$$\Leftrightarrow 3y^2-x^2=12$$

$$\Leftrightarrow 3y^2-x^2-12=0$$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល គឺ $3y^2-x^2-12=0$

ឃ. ផ្ចិត $(0,0)$ កំពូល $(3,0)$ និងកំណុំ $(5,0)$ ដោយផ្ចិត កំពូលនិងកំណុំមានអរដោនេដូចគ្នានោះអក្សរទីមួយនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សរអាប់ស៊ីស ហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

យើងមាន

- ផ្ចិត $(h,k)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}h=0\\k=0\end{cases}$
- កំពូល $(h+a,k)=(3,0)\Rightarrow h+a=3\Rightarrow a=3-h=3-0=3$
- កំណុំ $(h+c,k)=(5,0)\Rightarrow h+c=5\Rightarrow c=5-h=5-0=5$

តែ $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

យើងបានទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការ

$$\frac{(x-0)^2}{3^2}-\frac{(y-0)^2}{4^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$
$$16x^2-9y^2=144$$
$$16x^2-9y^2-144=0$$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលគឺ $16x^2-9y^2-144=0$

លំហាត់ទី៥៖ *រកសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលខាងក្រោម៖*

ក. កំពូល $(\pm 3,0)$ *និងសមីការរអាស៊ីមតូត* $y=\pm\frac{3}{4}x$

ខ. កំណុំ $(\pm 3,0)$ *និងសមីការរអាស៊ីមតូត* $y=\pm\frac{3}{4}x$

គ. កំពូល $(6,1)$, $(-2,1)$ *និងសមីការរអាស៊ីមតូត* $y=\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}$ *និង* $y=\frac{-3x}{4}+\frac{5}{2}$

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល

ក. កំពូល $(\pm 3,0)$ *និងសមីការរអាស៊ីមតូត* $y=\pm\frac{3}{4}x$

ដោយកំពូលមានអរដោនេដូចគ្នា នោះអក្សរទំនឹងនៃអ៊ីពែបូលស្រប និងអក្សរអាប់ស៊ីសហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

យើងមាន:

- កំពូល

$$\begin{cases}(h-a,k)=(-3,0)\Rightarrow h-a=-3,k=0\\(h+a,k)=(3,0)\ \ \Rightarrow h+a=3,k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h-a=-3\\h+a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\a=3\end{cases}$$

- សមីការអាស៊ីមតូត

$$\begin{cases}y=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)+k\\y=\pm\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Rightarrow\pm\frac{b}{a}(x-h)+k=\pm\frac{3}{4}x\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$$

នោះ $b=\dfrac{3}{4}a=\dfrac{3}{4}\times3=\dfrac{9}{4}$

យើងបាន $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{16y^2}{81}=1$

$\Leftrightarrow 81x^2-144y^2=729$

$\Leftrightarrow 81x^2-144y^2-729=0$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលគឺ $81x^2-144y^2-729=0$

ខ. កំណុំ $(\pm3,0)$ និងសមីការអាស៊ីមតូត $y=\pm\dfrac{3}{4}x$

ដោយកំណុំមានអរដោនេដូចគ្នា នោះអ័ក្សទទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹង អ័ក្សរាប់ស៊ីសហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

យើងមាន:

- កំណុំ

$$\begin{cases}(h-c,k)=(-3,0)\Rightarrow h-c=-3,\ k=0\\(h+c,k)=(3,0)\ \ \Rightarrow h+c=3,\ k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h-c=-3\\h+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=0\\c=3\end{cases}$$

- *សមីការអាស៊ីមតូត*

$$\left.\begin{array}{l} y=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)+k \\ y=\pm\dfrac{3}{4}x \end{array}\right| \Rightarrow \pm\frac{b}{a}(x-h)+k=\pm\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4}$$

នោះ $b=\dfrac{3}{4}a$

តែ $a^2+b^2=c^2=3^2=9$

$$\Rightarrow a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2=9 \Leftrightarrow a^2+\frac{9}{16}a^2=9$$

$$\Leftrightarrow \quad 25a^2=144 \Rightarrow a^2=\frac{144}{25}$$

$$\Rightarrow b^2=9-a^2=9-\frac{144}{25}$$

$$\Rightarrow b^2=\frac{81}{25}$$

យើងបាន $\dfrac{x^2}{\frac{144}{25}}-\dfrac{y^2}{\frac{81}{25}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{25x^2}{144}-\dfrac{25y^2}{81}=1$

$$\Leftrightarrow \quad 2025x^2-3600y^2=11664$$

$$\Leftrightarrow 2025x^2-3600y^2-11664=0$$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលគឺ

$$2025x^2-3600y^2-11664=0$$

គ. កំពូល $(6,1)$, $(-2,1)$ *និងសមីការអាស៊ីមតូត* $y=\dfrac{3x}{4}-\dfrac{1}{2}$

និង $y=\dfrac{-3x}{4}+\dfrac{5}{2}$

ដោយកំពូលមានអរដោនេដូចគ្នា នោះអក្សរទំទឹងនៃអ៊ីពែបូលស្របនឹងអក្សរអាបស៊ីសហើយទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

យើងមាន:

- កំពូល

$$\begin{cases}(h-a,k)=(-2,1)\Rightarrow h-a=-2,\ k=1\\(h+a,k)=(6,1)\ \ \Rightarrow h+a=6,\ k=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h-a=-2\\h+a=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=2\\a=4\end{cases}$$

- សមីការអាស៊ីមតូត

$$\left.\begin{cases}y=\dfrac{b}{a}(x-h)+k\\y=\dfrac{3x}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}(x-2)+1\end{cases}\right|\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$$
$$\left.\begin{cases}y=-\dfrac{b}{a}(x-h)+k\\y=\dfrac{-3x}{4}+\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{4}(x-2)+1\end{cases}\right|$$

$$\Rightarrow b=\frac{3}{4}a=\frac{3}{4}\times 4=3$$

យើងបាន $\dfrac{(x-2)^2}{4^2}-\dfrac{(y-1)^2}{3^2}=1$

$$\frac{x^2-4x+4}{16}-\frac{y^2-2y+1}{9}=1$$
$$9(x^2-4x+4)-16(y^2-2y+1)=144$$
$$9x^2-36x+36-16y^2+32y-16-144=0$$
$$9x^2-36x-16y^2+32y-124=0$$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែប៊ូលគឺ $9x^2-36x-16y^2+32y-124=0$

លំហាត់ទី៦៖ *ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណបណ្តាចម្ងាយពីចំណុចណាមួយនៃអ៊ីពែបូល* $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *ទៅអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់វា គឺជាចំនួនថេរមួយ។*

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាផលគុណបណ្តាចម្ងាយពីចំណុចណាមួយនៃអ៊ីពែបូល $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *ទៅអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់វា គឺជាចំនួនថេរមួយ*

យក $M_0(x_0,y_0)\in(H)\Leftrightarrow\frac{x_0^{\,2}}{a^2}-\frac{y_0^{\,2}}{b^2}=1$ (1)

សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃ $(H):\mathrm{y}=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow\begin{bmatrix}bx-ay=0\\bx+ay=0\end{bmatrix}$

ចម្ងាយ M_0H_0 *ពី* M_0 *ទៅអាស៊ីមតូត មានសមីការ*

$$M_0H_0=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ចម្ងាយ M_0K_0 *ពី* M_0 *ទៅអាស៊ីមតូតមានសមីកា* $M_0K_0=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ដូច្នេះ $M_0H_0\cdot M_0K_0=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{|(bx_0-ay_0)(bx_0+ay_0)|}{a^2+b^2}=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$ *ថេរ*

$$\left(\text{ព្រោះ }\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1\right)$$

ដូចនេះ ផលគុណបណ្តាចម្ងាយពី $M_0\in(H)$ *ទៅអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃ* (H) *ជាចំនួនថេរមួយ ។*

លំហាត់ទី៧៖ ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះអ៊ីពែបូល $2x^2 - y^2 = 2$ ត្រង់ចំណុច $M(2,-\sqrt{2})$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះអ៊ីពែបូល

យើងមាន $2x^2 - y^2 = 2$ ធ្វើដេរីវេលើអង្គសងខាងនៃសមីការ យើងបាន $4x - 2yy' = 0$ នាំឱ្យ $y' = \frac{2x}{y}$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះអ៊ីពែបូលត្រង់ចំណុច $M(2,-\sqrt{2})$ នោះមេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះគឺ $m = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $M(2,-\sqrt{2})$ គឺ

$y + \sqrt{2} = -2\sqrt{2}(x-2)$

$y = -2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = -2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះអ៊ីពែបូលគឺ $y = -2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៖ ក្នុងប្លង់តម្រុយ (O,x,y) គេឱ្យអ៊ីពែបូលមានសមីការ $2x^2 - y^2 = 4$

ក. រកកូអរដោនេបណ្តាកំពូល , កូអរដោនេបណ្តាកំណុំ , អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ និងសមីការអាស៊ីម តូតនៃអ៊ីពែបូលនោះ។

ខ. រកតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = mx$ កាត់អ៊ីពែបូលខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកកូអរដោនេបណ្តាកំពូល , កូអរដោនេបណ្តាកំណុំ , អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ និងសមីការអាស៊ីមតូត នៃអ៊ីពែបូល

យើងមាន $2x^2-y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ ដោយសមីការស្តង់ដា

អ៊ីពែបូលមានរាង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ អ័ក្សពិត (ox)

យើងបាន $a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $S_1(-\sqrt{2},0)$; $S_2(\sqrt{2},0)$

$c^2=a^2+b^2=2+4=6 \Rightarrow c=\sqrt{6}$

កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរគឺ $F_1(-\sqrt{6},0)$; $F_2(\sqrt{6},0)$

អ៊ីចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{2}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}x$ ។

ខ. រក m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=mx$ កាត់អ៊ីពែបូលខាងលើ

យើងមាន $2x^2-y^2=4$ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់

$y=kx$ និង អ៊ីពែបូលខាងលើគឺ

$$\begin{cases} 2x^2-y^2=4 \\ y=mx \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x^2-(mx)^2=4$

$\Leftrightarrow \ 2x^2-m^2x^2=4$

$\Leftrightarrow \ (2-m^2)x^2=4 \quad (1)$

បន្ទាត់ $y=mx$ កាត់អ៊ីពែបូលដែលឱ្យ លុះត្រាតែ (1) មានឫស ។

សមីការ (1) មានឫស $\Leftrightarrow 2-m^2>0 \Leftrightarrow m^2<2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

ដូចនេះ $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

លំហាត់ទី៩៖ ចំពោះអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. បន្ទាត់ប៉ះដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

ខ. បន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំណុច $P(x_1,y_1)$ គឺ $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

ដំណោះស្រាយ

ក. បន្ទាត់ប៉ះដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

តាង $y=mx+c$ ជាសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស m

យើងបានសមីការរអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $y=mx+c$ និងអ៊ីពែបូលគឺ

$$(mx+c)^2=-b^2+\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$(m^2x^2+2mxc+c^2)a^2=-a^2b^2+b^2x^2$$

$$x^2(a^2m^2-b^2)+2mxca^2+c^2a^2+a^2b^2=0$$

$$\Delta'=m^2c^2a^4-(a^2m^2-b^2)(c^2a^2+a^2b^2)$$

$$=m^2c^2a^4-m^2c^2a^4-m^2a^2b^4+b^2c^2a^2+a^2b^4$$

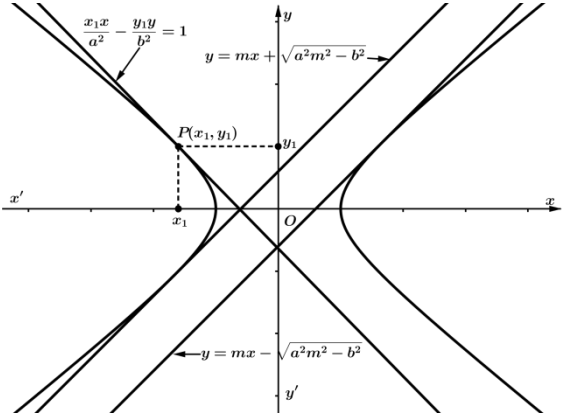
$$=-m^2a^4b^2+b^2c^2a^2+a^2b^4$$

តែបន្ទាត់ប៉ះអ៊ីពែបូល នោះយើងបាន $\Delta'=0$

សមមូល $-m^2a^4b^2+b^2c^2a^2+a^2b^4=0\Rightarrow c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$



ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំណុច (x_1,y_1) គឺ

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

នោះយើងបាន $2b^2x-2a^2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{b^2x}{a^2y}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំណុច $P(x_1,y_1)$ គឺ $\frac{b^2x}{a^2y}$

- $y_1\neq 0$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$a^2y_1(y-y_1)=b^2x_1(x-x_1)$$

$$a^2y_1y-a^2y_1^2=b^2x_1x-b^2x_1^2$$

$$b^2x_1x-a^2y_1y=b^2x_1^2-a^2y_1^2$$

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2 \quad (1) \quad (\text{ដោយ } b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2)$$

ដូចនេះ $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

- $y_1=0$

ក្នុងករណីនេះ $x_1 = \pm a$ (ព្រោះ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$)

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $x = a$ ឬ $x = -a$

ករណីនេះបំពេញឱ្យសមីការ (1)

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះអ៊ីពែបូលត្រង់គ្រប់ចំណុច $P(x_1, y_1)$ គឺ

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

មេរៀនទី៥ ចំណាត់ថ្នាក់កោនិច

តាមការសិក្សាកន្លងមក គេសង្កេតឃើញថាទម្រង់ទូទៅនៃសមីការកោនិចមាន រាង $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ដែល A,B,C,D,E,F ជាចំនួនពិត។ហើយពីទម្រង់ទូទៅនៃកោនិចត្រូវបានគេចែកចេញជាពីរករណីគឺករណី $B=0$ និងករណី $B\neq 0$ ។ នៅពេលនេះយើងនឹងធ្វើចំណាត់ថ្នាក់កោនិចទៅតាមករណីនីមួយៗ ។

១. ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចពីសមីការទូទៅរបស់វា($B=0$)

ទម្រង់ទូទៅនៃសមីការកោនិចរាង $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ។ យើងធ្វើចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចពីទម្រង់ទូទៅនេះដូចខាងក្រោម៖

- បើ $A=C$ នោះកោនិចជារង្វង់ ។
- បើ $A=0$ ឬ $C=0$ (មិនសូន្យព្រមគ្នា) នោះកោនិចជាប៉ារ៉ាបូល ។
- បើ $A\times C>0$ នោះកោនិចជាអេលីប ។
- បើ $A\times C<0$ នោះកោនិចជាអ៊ីពែបូល ។

ឧទាហរណ៍៖ ចូរធ្វើចំណែកថ្នាក់នៃកោនិចខាងក្រោម៖

ក. $-x^2+2x+y-4=0$

ខ. $-y^2+2x-y-4=0$

គ. $-x^2+y^2-2x+y-20=0$

ឃ. $x^2+y^2+6x-2y+9=0$

ង. $x^2-y^2-2x-8=0$

ចម្លើយ

ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិច

ក. $-x^2+2x+y-4=0$ ជាសមីការប៉ារ៉ាបូល ព្រោះ $C=0$ ។

ខ. $-y^2+2x-y-4=0$ ជាសមីការប៉ារ៉ាបូល ព្រោះ $A=0$ ។

គ. $-x^2+y^2-2x+y-20=0$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល ព្រោះ

$A\times C=(-1)\times 1=-1<0$ ។

ឃ. $x^2+y^2+6x-2y+9=0$ ជាសមីការរង្វង់ ព្រោះ

$A\times C=1\times 1=1>0$ ។

ង. $x^2-y^2-2x-8=0$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល ព្រោះ

$A\times C=1\times(-)=-1<0$ ។

២. ការបង្វិលអ័ក្ស

នៅផ្នែកមុនយើងបានសិក្សាពីសមីការនៃកោនិច ដែលមានអ័ក្សស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេគឺសមីការដែលមានរាង

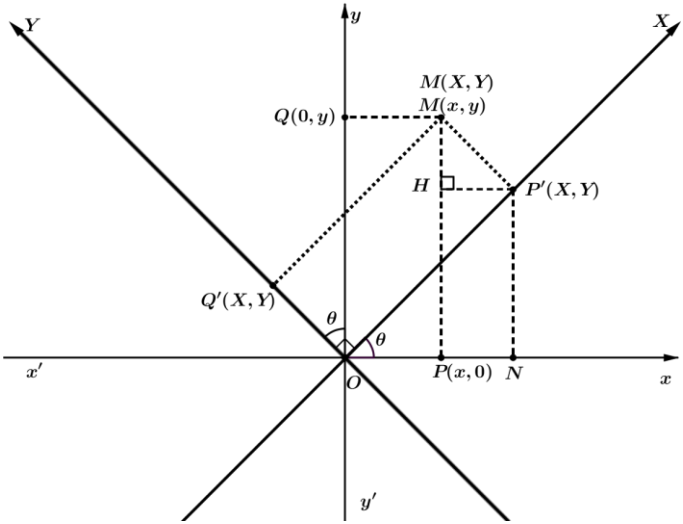
$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (1) (គ្មានតួ xy) ។ បន្តទៅទៀតនេះយើងនឹងសិក្សាពីកោនិចដែលមានអ័ក្សមិនស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេគឺសមីការដែលមានទម្រង់៖

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (2) (មានតួ xy) ។

ជាប្រទីបក្នុងការសិក្សាកោនិចមានទម្រង់ទូទៅ (2) បែបនេះយើងត្រូវបម្លែងវា ឱ្យទៅជាទម្រង់ (1) ដោយការ បង្វិលអ័ក្សកូអរដោនេក្នុងតម្រុយ (xoy) ឱ្យទៅជាអ័ក្ស កូអរដោនេក្នុងតម្រុយថ្មី (XOY) ដែលអ័ក្សរបស់កោនិចស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេថ្មី ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ **ការបង្វិលអ័ក្សដើម្បីបំបាត់តួ** xy

យើងមានសមីការទូទៅរាង $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (*)
ដែល $B\neq 0$ អាចបម្លែងជារាង
$A'X^2+C'Y^2+D'X+E'Y+F'=0$ (**) ដោយការបង្វិល
អក្សកូរអរដោនេតាមមុំ θ មួយដែល $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$ ។
ហើយមេគុណនៃសមីការថ្មី A',C',D',E',F' អាចរកបានដោយ
ការជំនួស $x=X\cos\theta-Y\sin\theta$ និង $y=X\sin\theta+Y\cos\theta$
ក្នុងសមីការដើម ។



<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន

$x=OP=ON-PN=ON-HP'$ ព្រោះ $PN=HP'$

ក្នុងត្រីកោណកែង $OP'N$ មាន $\cos\theta=\frac{ON}{OP'}=\frac{ON}{X}\Rightarrow ON=X\cos\theta$

ក្នុងត្រីកោណកែង MHP' មាន $\sin\theta=\frac{HP'}{MP'}=\frac{HP'}{Y}\Rightarrow HP'=Y\sin\theta$

នោះ $x=X\cos\theta-Y\sin\theta$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះ $y = X\sin\theta + Y\cos\theta$

យកតម្លៃ x និង y ជំនួសក្នុងសមីការ (*) យើងបាន

$$A(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + B(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$$
$$+\mathrm{C}(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + D(X\cos\theta - Y\sin\theta) + E(X\sin\theta + Y\cos\theta)$$
$$+F = 0$$

យើងពន្លាត បន្ទាប់មកផ្តុំតួ $X^2, XY, Y^2, X, \mathrm{Y}$ នោះយើងបាន

$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$ ដែល

$$A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$
$$B' = 2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$\mathrm{C}' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta + E\sin\theta$$
$$E' = -D\sin\theta + E\cos\theta$$
$$F' = F$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$B' = 0 \Rightarrow 2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$
$$2(C - A)\sin\theta\cos\theta = -B(\cos^2 - \sin^2)$$
$$(C - A)\sin 2\theta = -B\cos 2\theta$$
$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{C - A}{-B}$$
$$\cot 2\theta = \frac{B}{A - c}$$

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរកំណត់មុំបង្វែរវិល θ ដែលធ្វើឱ្យបាត់តួ xy នៃសមីការ $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x - y = 0$ ។

ចម្លើយ

កំណត់មុំបង្វែរវិល θ ដែលធ្វើឱ្យបាត់តួ xy

យើងមាន $A = 3, B = 2, C = 3$

យើងបាន $\cot 2\theta = \dfrac{A - C}{B} = \dfrac{3 - 3}{2} = 0 \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

ដូចនេះ មុំបង្វែរវិលគឺ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

ឧទាហរណ៍២៖ *សរសេរសមីការ* $4xy-1=0$ *ជាទម្រង់ស្តង់ដា រួចសង់ក្រាប ។*

ចម្លើយ

សរសេរសមីការជាទម្រង់ស្តង់ដា

យើងមានសមីការ $4xy=1$ (1) *មាន* $A=0,B=4,C=0,F=-1$

យើងបាន $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{0-0}{4}=0\Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

តាំឱ្យ

$$\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta=X\sin\frac{\pi}{4}-Y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta=X\cos\frac{\pi}{4}+Y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$$

យកតម្លៃ x *និង* y *ជំនួសក្នុង* (1) *យើងបាន*

$$4\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+1=0$$

$$\frac{1}{2}(X^2-Y^2)=-1$$

$$\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=-1$$

$$\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដាគឺ $\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$ *ជាសមីការអ៊ីពែបូល ដែលមានអ័ក្សទទឹង ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេនៃតម្រុយថ្មី* (XoY)

នោះ $h'=0,k'=0,a'=\sqrt{2},b'=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow c'=\sqrt{a'^2+b'^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$$

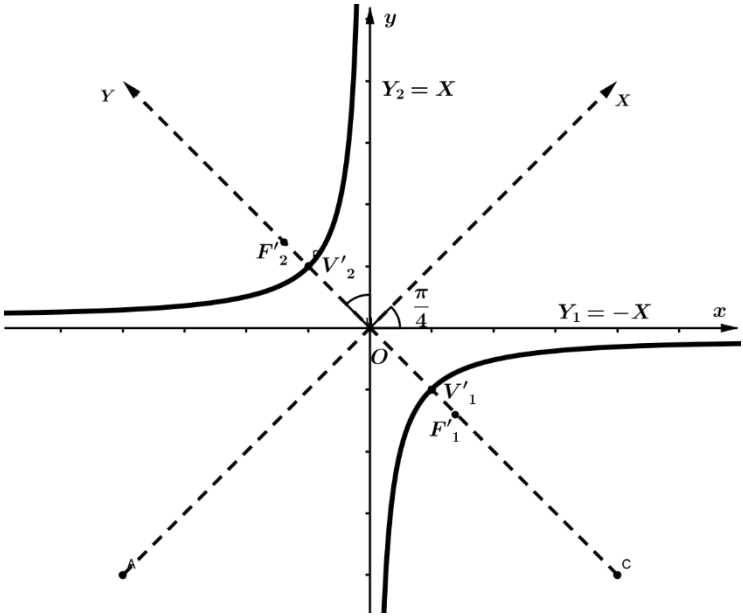
យើងបាន

- ផ្ចិត $I'(h',k')=I(0,0)$
- កំពូល $V_1'(h',k'-a')=V_1'(0,0-\sqrt{2})=V_1'(0,-\sqrt{2})$

  $V_2'(h',k'+a')=V_2'(0,0+\sqrt{2})=V_2'(0,\sqrt{2})$
- កំណុំ $F_1'(h',k'-c')=V_1'(0,0-2)=F_1'(0,-2)$

  $F_2'(h',k'+c')=V_2'(0,0+2)=F_1'(0,2)$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$$\begin{cases} Y_1=-\dfrac{a'}{b'}(X-h')+k'=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(X-0)+0=-X \\ Y_2=\dfrac{a'}{b'}(X-h')+k'=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(X-0)+0=X \end{cases}$$



៣. ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចដែលមានរាងទូទៅ

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$

យើងធ្វើចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចដែលមានរាងទូទៅ $AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$ ដូចតទៅ៖

តាង $\Delta = B^2 - 4AC$

- បើ $\Delta = 0$ នោះកោនិចជាប៉ារ៉ាបូល
- បើ $\Delta < 0$ នោះកោនិចជារេលីប
- បើ $\Delta > 0$ នោះកោនិចជាអ៊ីពែបូល

ឧទាហរណ៍៖ ចូរធ្វើចំណាត់ថ្នាក់កោនិចខាងក្រោម៖

ក. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 2016 = 0$

ខ. $2x^2 - 3xy + y^2 + 168x + 168y = 0$

គ. $3x^2 - 2xy + y^2 + 77777x - 77777y = 0$

ឃ. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + Kx + K'y + K'' = 0 (K, K', K'' \in \mathbb{R})$

ង. $xy + K = 0 (K \in \mathbb{R})$

ចម្លើយ

ចំណាត់ថ្នាក់កោនិចខាងក្រោម៖

ក. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 2016 = 0$

សមីការមាន $A = 3, B = 6, C = 3$

$\Rightarrow B^2 - 4AC = (6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$

ដូចនេះ សមីការ $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 2016 = 0$

ជាសមីការកោនិចរាងប៉ារាបូល

ខ. $2x^2 - 3xy + y^2 + 168x + 168y = 0$

សមីការមាន $A = 2, B = 3, C = 1$

$\Rightarrow B^2 - 4AC = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

ដូចនេះ សមីការ $2x^2-3xy+y^2+168x+168y=0$

ជាសមីការអ៊ីពែបូល

គ. $3x^2-2xy+y^2+77777x-77777y=0$

សមីការមាន $A=3,B=2,C=1$

$\Rightarrow B^2-4AC=(-2)^2-4\times3\times1=4-12=-8<0$

ដូចនេះ សមីការ $3x^2-2xy+y^2+77777x-77777y=0$

ជាសមីការអេលីប

ឃ. $3x^2+6xy+3y^2+Kx+K'y+K''=0(K,K',K''\in\mathbb{R})$

សមីការមាន $A=3,B=6,C=3$

$\Rightarrow B^2-4AC=6^2-4\times3\times3=36-36=0$

ដូចនេះ សមីការ $3x^2+6xy+3y^2+Kx+K'y+K''=0$

ជាសមីការប៉ារ៉ាបូល $(K,K',K''\in\mathbb{R})$

ង. $xy-K=0,K\in\mathbb{R}$

សមីការមាន $A=0,B=1,C=0$

$\Rightarrow B^2-4AC=1^2-4\times(0)\times(0)=1-0=1>0$

ដូចនេះ សមីការ $xy-K=0(K\in\mathbb{R})$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល។

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១. *ចូរធ្វើចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចខាងក្រោម រួចរកទម្រង់ស្តង់ដា និងសង់ក្រាប៖*

ក. $-4x^2+25y^2-8x+150y+121=0$

ខ. $16x^2+9y^2-32x+72y+16=0$

គ. $4x^2+4y^2-4x+8y-11=0$

ឃ. $-4y^2+16x+16y+16=0$

ដំណោះស្រាយ

ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចខាងក្រោម រួចរកទម្រង់ស្តង់ដា និងសង់ក្រាប

ក. $-4x^2+25y^2-8x+150y+121=0$

- *ចំណាត់ថ្នាក់*

សមីការមាន $A=-4, C=25 \Rightarrow A\times C=-4\times 25=-100<0$

នោះ កោនិចជាអ៊ីពែបូល

- *ទម្រង់ស្តង់ដា*

យើងមាន $-4x^2+25y^2-8x+150y+121=0$

$$-4(x^2+2x+1-1)+25(y^2+6y+9-9)+121=0$$

$$-4(x+1)^2+4+25(y+3)^2-225+121=0$$

$$-4(x+1)^2+25(y+3)^2=100$$

$$\frac{25(y+3)^2}{100}-\frac{4(x+1)^2}{100}=1$$

$$\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{25}=1$$

នោះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{25}=1$

- *សង់ក្រាប*

ដោយសមីការមានទម្រង់ស្តង់ដារ $\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{25}=1$

ជាសមីការអ៊ីពែបូល ដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោ $(y'o\,y)$ *ដែលមាន* $h=-1,k=-3$

$a=2,b=5\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

យើងបាន

- *ផ្ចិត* $I(h,k)=I(-1,-3)$
- *កំពូល* $V_1(h,k-a)=V_1(-1,-3-2)=V_1(-1,-5)$

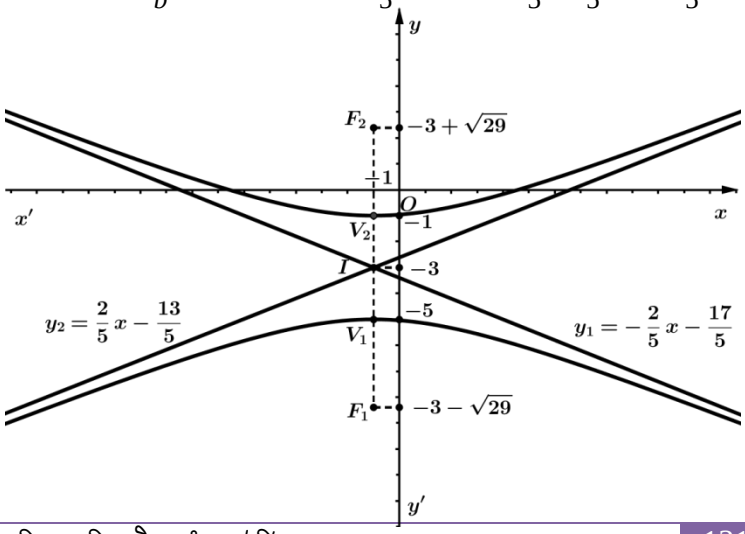
$$V_2(h,k+a)=V_2(-1,-3+2)=V_2(-1,-1)$$

- *កំណុំ* $F_1(h,k-c)=F_1(-1,-3-\sqrt{29})$

$$F_2(h,k+c)=F_2(-1,-3+\sqrt{29})$$

- *អាស៊ីមតូត*
- $y_1=-\frac{a}{b}(x-h)+k\Leftrightarrow y_1=-\frac{2}{5}(x+1)-3=-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}-3=-\frac{2}{5}x-\frac{17}{5}$

$y_2=\frac{a}{b}(x-h)+k\Leftrightarrow y_2=\frac{2}{5}(x+1)-3=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}-3=-\frac{2}{5}x-\frac{13}{5}$



ខ. $16x^2+9y^2-32x+72y+16=0$

- *ចំណាត់ថ្នាក់*

សមីការមាន $\Rightarrow A\times C=16\times 9=144$

នោះ កោនិចជាអេលីប

- *ទម្រង់ស្តង់ដា*

យើងមាន $16x^2+9y^2-32x+72y+16=0$

$$16(x^2-2x)+9(y^2+8y)=-16$$
$$16(x^2-2x+1-1)+9(y^2+8y+16-16)=-16$$
$$16(x-1)^2-16+9(y+4)^2-144=-16$$
$$16(x-1)^2+9(y+4)^2=144$$
$$\frac{16(x-1)^2}{144}+\frac{9(y+4)^2}{144}=1$$
$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

- *សង់ក្រាប*

ដោយសមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

ជាសមីការអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ

ដែលមាន $h=1,k=-4$

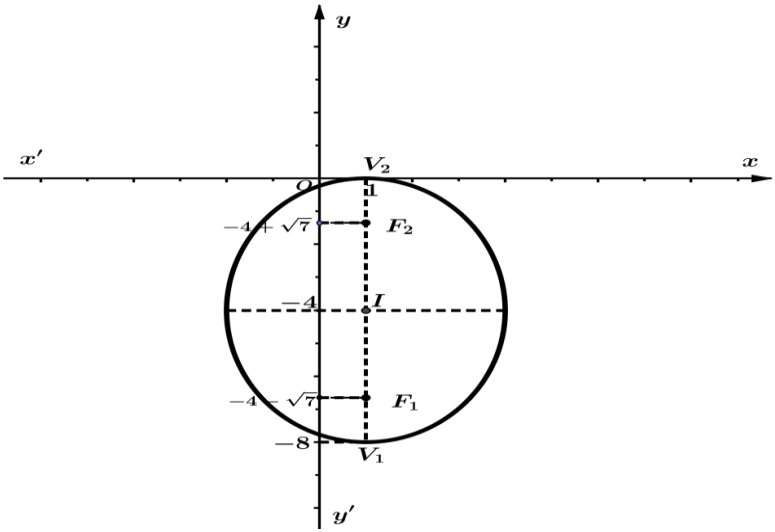
$a=4,b=3\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

- *ផ្ចិត* $I(h,k)=I(1,-4)$
- *កំពូល* $V_1(h,k-a)=V_2(1,-4-4)=V_1(1,-8)$

$$V_2(h,k+a)=V_2(1,-4+4)=V_2(1,0)$$

- *កំណុំ* $F_1(h,k-c)=F_1(1,-4-\sqrt{7})$

$$F_2(h,k+c)=F_2(1,-4+\sqrt{7})$$



គ. $4x^2+4y^2-4x+8y-11=0$

- *ចំណាត់ថ្នាក់*

សមីការមាន $A=C=4$ *នោះ កោនិចជារង្វង់*

- *ទម្រង់ស្តង់ដា*

យើងមាន $4x^2+4y^2-4x+8y-11=0$

$$x^2+y^2-x+2y-\frac{11}{4}=0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+2y+1-1-\frac{11}{4}=0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=4$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការគឺ $(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=4$

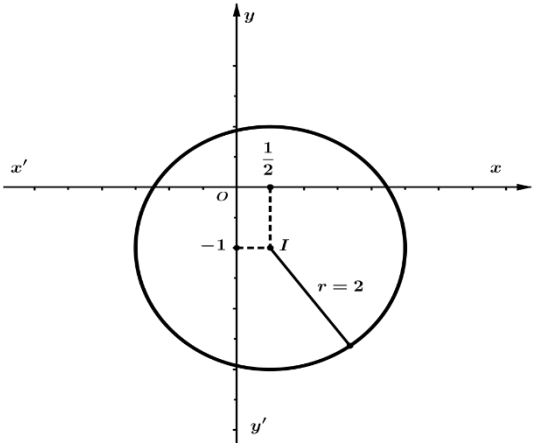
- *សង់ក្រាប*

ដោយរង្វង់មានសមីការ $(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=4$ *នោះ*

$a=\frac{1}{2}, b=-1$

យើងបាន

- ផ្ចិត $I(a,b)=I(\frac{1}{2},-1)$
- កាំ $r^2=4\Rightarrow r=2$



ឃ. $-4y^2+16x+16y+16=0$

- ចំណាត់ថ្នាក់

សមីការមាន $A=0$ នោះ កោនិចជាប៉ារ៉ាបូល

- ទម្រង់ស្តង់ដា

យើងមាន $-4y^2+16x+16y+16=0$

$$-4(y^2-4y)=-16x-16$$
$$y^2-4y+4-4=4x+4$$
$$(y-2)^2=4x+8$$
$$(y-2)^2=4(x+2)$$

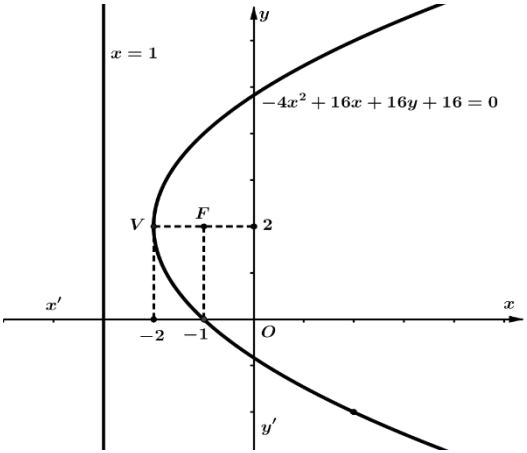
ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់នៃសមីការគឺ $(y-2)^2=4(x+2)$

- សង់ក្រាប
- ដោយប៉ារ៉ាបូលមានទម្រង់ស្តង់ដា $(y-2)^2=4(x+2)$

- ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមាន អ័ក្សឆ្អឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដែល $h=-2, k=2, 4p=4 \Rightarrow p=1$

យើងបាន

- កំពូល $V(h,k)=V(-2,2)$
- កំណុំ $F(h+p,k)=F(-2+1,2)=F(-1,2)$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=h-p=-2-1=-3$



លំហាត់ទី២. *ចូរកំណត់មុំបង្វែងវិល θ ដែលធ្វើឱ្យបាត់តួ xy នៃសមីការខាងក្រោម៖*

ក. $x^2+xy+y^2+x-2y+3=0$

ខ. $7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

គ. $8x^2+4\sqrt{3}xy+4y^2-16=0$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់មុំបង្វែងវិល θ ដែលធ្វើឱ្យបាត់តួ xy

ក. $x^2+xy+y^2+x-2y+3=0$

សមីការមាន $A=C=1, B=1$

$$\Rightarrow \cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{1-1}{1}=0$$

$$\Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ មុំបង្វែងវិល $\theta=\frac{\pi}{4}$

ខ. $7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

សមីការមាន $A=-13, B=6\sqrt{3}, C=7$

$$\Rightarrow \cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{7-13}{6\sqrt{3}}=\frac{-6}{6\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ មុំបង្វែងវិល $\theta=-\frac{\pi}{6}$

គ. $8x^2+4\sqrt{3}xy+4y^2-16=0$

សមីការមាន $A=8, B=4\sqrt{3}, C=4$

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{8-4}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ មុំបង្វែរវិល $\theta = \frac{\pi}{6}$

លំហាត់ទី៣៖ ចូរសរសេរសមីការខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដា

ក. $2xy + 6 = 0$

ខ. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដា

ក. $2xy + 6 = 0$

សមីការមាន $A = C = 0, B = 2$

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{0-0}{2} = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = X\sin\frac{\pi}{4} - Y\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = X\cos\frac{\pi}{4} + Y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$$

យកតម្លៃ x និង y ជំនួសក្នុងសមីការ យើងបាន

$$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) + 6 = 0$$

$$X^2 - Y^2 = -6$$

$$\frac{Y^2}{6} - \frac{X^2}{6} = 1$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដាគឺ $\frac{Y^2}{6}-\frac{X^2}{6}=1$

ជារន្ធីពែបូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេថ្មី (XOY)

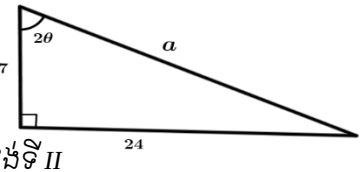
ខ. $16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+100=0$

សមីការមាន $A=16, B=-24, C=9$

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{16-9}{-24}=-\frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow 2\theta\approx 106.26\Rightarrow \theta\approx 53.13$$

តាមរូបយើងបាន



$a=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$

ដោយ $2\theta\approx 106.26$ នៅក្នុងកាដ្រង់ទី II

នោះ $\cos 2\theta<0\Rightarrow \cos 2\theta=-\frac{7}{25}$

ដោយ $\theta\approx 53.13^0$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី I $\Rightarrow \cos\theta>0, \sin\theta>0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\\ \sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}}=\frac{3}{5}\\ \sin\theta=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}}=\frac{4}{5}\end{cases}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta=\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta=\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\end{cases}$$

យកតម្លៃ x និង y ជំនួសក្នុងសមីការ យើងបាន

$$16\left(\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\right)^2-24\left(\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\right)\left(\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)+9\left(\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)^2$$
$$-60\left(\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\right)-80\left(\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)+100=0$$
$$\frac{144X^2}{25}-\frac{384XY}{25}+\frac{256Y^2}{25}-\frac{288X^2}{25}+\frac{168XY}{25}+\frac{288Y^2}{25}+\frac{144X^2}{25}$$
$$+\frac{216XY}{25}+\frac{81Y^2}{25}-36X+48Y-64X-48Y+100=0$$
$$25Y^2-100X+100=0$$
$$Y^2-4X+4=0$$
$$Y^2=4X-4$$
$$Y^2=4(X-1)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ស្តង់ដាគឺ $Y^2=4(X-1)$ ជាប៉ារ៉ាបូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេថ្មី (XOY)

លំហាត់ទី៤៖ ចូរធ្វើចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចខាងក្រោម៖

ក. $40x^2+36xy+25y^2-52=0$

ខ. $x^2-10xy+y^2+1=0$

គ. $x^2-\sqrt{3}xy=1$

ឃ. $6x^2+4\sqrt{3}xy+2y^2-9x+9\sqrt{3}y=63$

ង. $4x^2-4xy+7y^2=24$

ច. $2x^2-4xy+8y^2-10x+4y-13=0$

ឆ. $-x^2+4xy-4y^2-5x-10y-20=0$

ជ. $2x^2-xy+3y^2-3x+4y-6=0$

ឈ. $-8x^2+12xy+17y^2-20=0$

ញ. $x^2-2xy+y^2-4y=0$

ដំណោះស្រាយ

ចំណាត់ថ្នាក់នៃកោនិចខាងក្រោម៖

ក. $40x^2+36xy+25y^2-52=0$

សមីការមាន $A=40, B=36, C=25$

$\Rightarrow \Delta = B^2-4AC = 36^2-4\times 40\times 25 = 1296-4000 = -2704 < 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអេលីប

ខ. $x^2-10xy+y^2+1=0$

សមីការមាន $A=1, B=-10, C=1$

$\Rightarrow \Delta = B^2-4AC = (-10)^2-4\times 1\times 1 = 100-4 = 96 > 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអ៊ីពែបូល

គ. $x^2-\sqrt{3}xy=1$

សមីការមាន $A=1, B=-\sqrt{3}, C=0$

$\Rightarrow \Delta = B^2-4AC = \left(-\sqrt{3}\right)^2-4\times 1\times 0 = 3-0 = 3 > 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអ៊ីពែបូល

ឃ. $6x^2+4\sqrt{3}xy+2y^2-9x+9\sqrt{3}y=63$

សមីការមាន $A=6, B=4\sqrt{3}, C=2$

$\Rightarrow \Delta = B^2-4AC = \left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times 6\times 2 = 48-48 = 0$

ដូចនេះ កោនិចជាប៉ារ៉ាបូល

ង. $4x^2-4xy+7y^2=24$

សមីការមាន $A=4, B=-4, C=7$

$\Rightarrow \Delta = B^2-4AC = (-4)^2-4\times 4\times 7 = 16-112 = -96 < 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអេលីប

ច. $2x^2-4xy+8y^2-10x+4y-13=0$

សមីការមាន $A=2, B=-4, C=8$

$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4\times 2\times 8 = 16 - 64 = -48 < 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអេលីប

ឆ. $-x^2 + 4xy - 4y^2 - 5x - 10y - 20 = 0$

សមីការមាន $A = -1, B = 4, C = -4$

$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 16 - 16 = 0$

ដូចនេះ កោនិចជាប៉ារ៉ាបូល

ជ. $2x^2 - xy + 3y^2 - 3x + 4y - 6 = 0$

សមីការមាន $A = 2, B = -1, C = 3$

$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4\times 2\times 3 = 4 - 24 = -20 < 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអេលីប

ឈ. $-8x^2 + 12xy + 17y^2 - 20 = 0$

សមីការមាន $A = 8, B = 12, C = 17$

$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 12^2 - 4\times(-8)\times 17 = 144 + 544 = 688 > 0$

ដូចនេះ កោនិចជាអ៊ីពែបូល

ញ. $x^2 - 2xy + y^2 - 4y = 0$

សមីការមាន $A = 1, B = -2, C = 1$

$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4\times 1\times 1 = 4 - 4 = 0$

ដូចនេះ កោនិចជាប៉ារ៉ាបូល

លំហាត់ទី៤៖ *ចូរបង្ហាញថាសមីការខាងក្រោមជាប៉ារ៉ាបូល រួចរកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងសង់ក្រាប*

ក. $3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+2x+2\sqrt{3}y=0$

ខ. $x^2-4xy+4y^2+2x-3y+1=0$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមីការខាងក្រោមជាប៉ារ៉ាបូល រួចរកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស និង សង់ក្រាប

ក. $3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+2x+2\sqrt{3}y=0$

សមីការមាន $A=3,B=-2\sqrt{3},C=1$

$$\Rightarrow \Delta=B^2-4AC=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times3\times1=12-12=0$$

ដូចនេះ កោនិចជាប៉ារ៉ាបូល

ដែលមាន $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{3-1}{-2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow 2\theta=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta=\dfrac{1}{2}X-\dfrac{\sqrt{3}}{2}Y=\dfrac{X-\sqrt{3}Y}{2}\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}X+\dfrac{1}{2}Y=\dfrac{\sqrt{3}X+Y}{2}\end{cases}$$

យកតម្លៃ x *និង* y *ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ យើងបាន*

$$3\left(\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\right)+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)=0$$

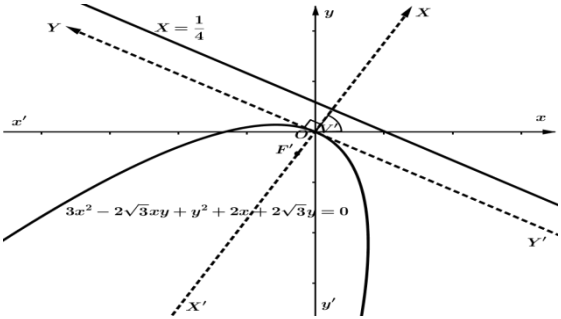
$$\frac{3X^2}{4}-\frac{6\sqrt{3}XY}{4}+\frac{9Y^2}{4}-\frac{6X^2}{4}+\frac{4\sqrt{3}XY}{4}+\frac{6Y^2}{4}+\frac{3X^2}{4}$$
$$+\frac{2\sqrt{3}XY}{4}+\frac{Y^2}{4}+X-\sqrt{3}Y+3X+\sqrt{3}Y=0$$
$$4Y^2+4X=0$$
$$Y^2+X=0$$
$$Y^2=-X$$
$$(Y-0)^2=-(X-0)$$

នោះ $(Y-0)^2=-(X-0)$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមាន

$h'=0,k'=0,4p'=-1\Rightarrow p'=-\frac{1}{4}$ ក្នុងតម្រុយថ្មី (XOY)

យើងបាន

- កំពូល $V'(h',k')=V'(0,0)$
- កំណុំ $F'(h'+p',k')=F'(-\frac{1}{4},0)$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $X=h'-p'=\frac{1}{4}$



ខ. $x^2-4xy+4y^2+2\sqrt{5}x-3\sqrt{5}y+1=0$

សមីការមាន $A=1,B=-4,C=4$

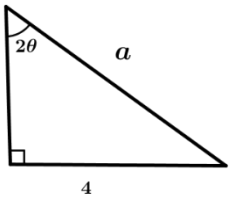
$\Rightarrow \Delta=B^2-4AC=(-4)^2-4\times1\times4=16-16=0$

នោះ កោនិចជាប៉ារ៉ាបូល

ដែលមាន $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{1-4}{-4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2\theta \approx 53.13^0 \Rightarrow \theta \approx 26.57^0$

តាមរូបយើងបាន



$a = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

ដោយ $2\theta \approx 53.13^0$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី I^3

នោះ $\cos 2\theta > 0 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{3}{5}$

ម្យ៉ាងទៀត $\theta \approx 26.57^0$ នោះ $\cos\theta > 0, \sin\theta > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}X - \frac{\sqrt{5}}{5}Y = \frac{\sqrt{5}}{5}(2X-Y) \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}X + \frac{2\sqrt{5}}{5}Y = \frac{\sqrt{5}}{5}(X+2Y) \end{cases}$$

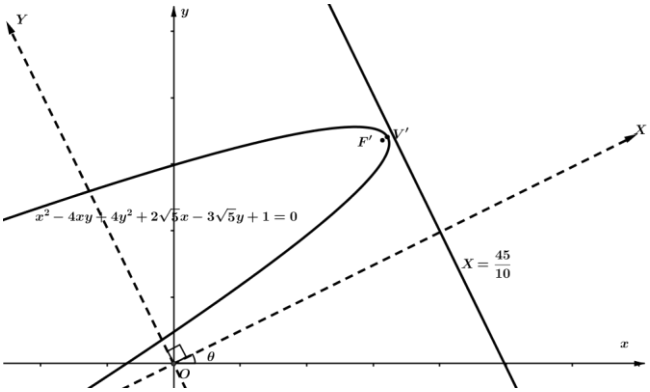
យកតម្លៃ x និង y ជំនួសក្នុងសមីការដើម យើងបាន

$$\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2X-Y)\right]^2-4\times\frac{\sqrt{5}}{5}(2X-Y)\times\frac{\sqrt{5}}{5}(X+2Y)+4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X+2Y)\right]^2$$
$$+2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}(2X-Y)-3\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}(X+2Y)+1=0$$
$$\frac{4}{5}X^2-\frac{4\sqrt{5}}{5}XY+\frac{1}{5}Y^2-\frac{8}{5}X^2-\frac{12\sqrt{5}}{5}XY+\frac{8}{5}Y^2+\frac{4}{5}X^2+\frac{16\sqrt{5}}{5}XY+\frac{16}{5}Y^2$$
$$+4X-2Y-3X-6y+1=0$$
$$5Y^2+X-8Y+1=0$$
$$5(Y^2-\frac{8}{5}Y+\frac{16}{25}-\frac{16}{25})=-X-1$$
$$5(Y-\frac{4}{5})^2=-X-1+\frac{16}{5}$$
$$(Y-\frac{4}{5})^2=-\frac{X}{5}+\frac{11}{25}$$
$$(Y-\frac{4}{5})^2=-\frac{1}{5}(X-\frac{11}{5})$$

ដាច្បាំវ៉ាបូលដែលមាន $h'=\frac{11}{5},k'=\frac{4}{5},4p'=-\frac{1}{5}\Rightarrow p'=-\frac{1}{20}$

យើងបាន

- កំពូល $V'(h,k)=V'\left(\frac{11}{5},\frac{4}{5}\right)$
- កំណុំ $F'(h'+p',k')=F'(\frac{11}{5}-\frac{1}{20},\frac{4}{5})=F'(\frac{43}{20},\frac{4}{5})$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $X=h'-p'=\frac{11}{5}+\frac{1}{20}=\frac{45}{20}$



លំហាត់ទី៥៖ *ចូរបង្ហាញថាសមីការខាងក្រោមជាអេលីប រួចរកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសង់ក្រាប៖*

ក. $40x^2+36xy+25y^2=52$

ខ. $31x^2+10\sqrt{3}xy+21y^2-144=0$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមីការខាងក្រោមជាអេលីប រួចរកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសង់ក្រាប៖

ក. $40x^2+36xy+25y^2=52$

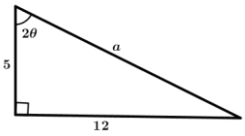
សមីការមាន $A=40, B=36, C=25$

$$\Rightarrow \Delta = B^2-4AC = 36^2-4\times 40\times 25 = 1296-4000 = -2704 < 0$$

នោះ កោនិចជាអេលីប ដែលមាន

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{40-25}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow 2\theta \approx 67.38^0 \Rightarrow \theta \approx 33.69^0$$



តាមរូបយើងបាន

$$a=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

ដោយ $2\theta \approx 67.38^0$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី I

នោះ $\cos 2\theta > 0 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{5}{12}$

ម្យ៉ាងទៀត $\theta \approx 33.69^0$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី I នោះ

$\cos\theta > 0, \sin\theta > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}X - \frac{2}{\sqrt{13}}Y = \frac{1}{\sqrt{13}}(3X-2Y) \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}X + \frac{3}{\sqrt{13}}Y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2X+3Y) \end{cases}$$

យកតម្លៃ x និង y ជំនួសក្នុងសមីការដើម យើងបាន

$$\frac{40}{13}(3X-2Y)^2 + \frac{36}{13}(3X-2Y)(2X+3Y) + \frac{25}{13}(2X+3Y)^2 = 52$$

$$\frac{360}{13}X^2 - \frac{480}{13}XY + \frac{160}{13}Y^2 + \frac{216}{13}X^2 + \frac{180}{13}XY - \frac{216}{13}Y^2$$

$$+\frac{100}{13}X^2 + \frac{300}{13}XY + \frac{225}{13}Y^2 = 52$$

$$52X^2 + 13Y^2 = 52$$

$$X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$$

ជាអេលីបដែលមាន $h'=0, k'=0, a'=2, b'=1$

នោះ $c' = \sqrt{a'^2 - b'^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

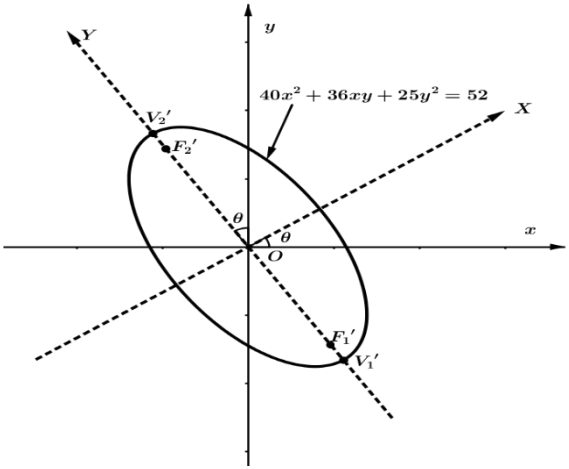
យើងបាន

- ផ្ចិត $I'(h',k') = I'(0.0)$

- កំពូល $V_1'(h',k'-a')=V_1'(0,0-2)=V_1'(0,-2)$

  $V_2'(h',k'+a')=V_2'(0,0+2)=V_2'(0,2)$
- កំណុំ $F_1'(h',k'-c')=F_1'(0,0-\sqrt{3})=F_1'(0,-\sqrt{3})$

  $F_2'(h',k'+c')=F_2'(0,0+\sqrt{3})=F_2'(0,\sqrt{3})$



ខ. $31x^2+10\sqrt{3}xy+21y^2-144=0$

សមីការមាន $A=31,B=10\sqrt{3},C=21$

$\Rightarrow \Delta=B^2-4AC=\left(10\sqrt{3}\right)^2-4\times 31\times 21=300-2604=-2304<0$

នោះ កោនិចជាអេលីប ដែលមាន

$\Rightarrow \cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{31-21}{10\sqrt{3}}=\dfrac{10}{10\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow 2\theta=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$

ដាំឱ្យ

$$\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta=X\cos\dfrac{\pi}{6}-Y\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}X-\dfrac{1}{2}Y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}X-Y) \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta=X\sin\dfrac{\pi}{6}+Y\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}X+\dfrac{\sqrt{3}}{2}Y=\dfrac{1}{2}(X+\sqrt{3}Y) \end{cases}$$

យកតម្លៃ x និង y ដំនួសក្នុងសមីការដើម យើងបាន

ជាអេលីបដែលមាន $h'=0, k'=0, a=3, b=2$

នោះ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

យើងបាន

- ផ្ចិត $I'(h',k')=I'(0.0)$
- កំពូល $V_1'(h',k'-a')=V_1'(0,0-3)=V_1'(0,-3)$

$$V_2'(h',k'+a')=V_2'(0,0+3)=V_2'(0,3)$$

- កំណុំ $F_1'(h',k'-c')=F_1'(0,0-\sqrt{5})=F_1'(0,-\sqrt{5})$

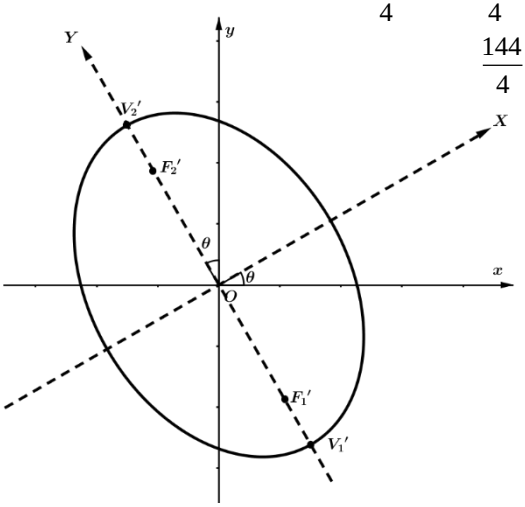
$$F_2'(h',k'+c')=F_2'(0,0+\sqrt{5})=F_2'(0,\sqrt{5})$$

$$31[\frac{1}{2}(\sqrt{3}X-Y)]^2+10\sqrt{3}\times\frac{1}{2}(\sqrt{3}X-Y)\times\frac{1}{2}(X+\sqrt{3}Y)$$
$$+21[\frac{1}{2}(X+\sqrt{3}Y)]^2-144=0$$

$$\frac{93}{4}X^2-\frac{62\sqrt{3}}{4}XY+\frac{31}{4}Y^2+\frac{30}{4}X^2+\frac{20\sqrt{3}}{4}XY-\frac{30}{4}Y^2$$
$$+\frac{21}{4}X^2+\frac{42\sqrt{3}}{4}XY+\frac{63}{4}Y^2=144$$

$$\frac{144}{4}X^2+\frac{64}{4}Y^2=144$$

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$$



លំហាត់ទី៩៖ *ចូរបង្ហាញថាសមីការខាងក្រោមជាអ៊ីពែបូល រួចរកកូអរដោនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ អាស៊ីមតូត និងសង់ក្រាប៖*

ក. $xy-2y-4x=0$

ខ. $2x^2-3xy-2y^2+10=0$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមីការខាងក្រោមជាអ៊ីពែបូល រួចរកកូអរដោនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ អាស៊ីមតូត និងសង់ក្រាប៖

ក. $xy-2y-4x=0$

សមីការមាន $A=C=0, B=1$

$$\Rightarrow \cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{0-0}{1}=0$$

$$\Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta=X\cos\dfrac{\pi}{4}-Y\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta=X\sin\dfrac{\pi}{4}+Y\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}X+\dfrac{\sqrt{2}}{2}Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$$

យកតម្លៃ x *និង* y *ជំនួសក្នុងសមីការដើម យើងបាន*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)=0$$

$$\frac{1}{2}(X^2-Y^2)-\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y-2\sqrt{2}\,\mathrm{X}+2\sqrt{2}\,\mathrm{Y}=0$$

$$X^2-Y^2-6\sqrt{2}X+2\sqrt{2}Y=0$$

$$[X^2-6\sqrt{2}X+(3\sqrt{2})^2]-[Y^2-2\sqrt{2}Y+(\sqrt{2})^2]=0+(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2$$

$$(X-3\sqrt{2})^2-(Y-\sqrt{2})^2=16$$

$$\frac{(X-3\sqrt{2})^2}{16}-\frac{(Y-\sqrt{2})^2}{16}=1$$

ជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សរអាប់ស៊ីស ហើយមាន $h'=3\sqrt{2},k'=\sqrt{2},a'=4,b'=4$

$$\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

យើងបាន

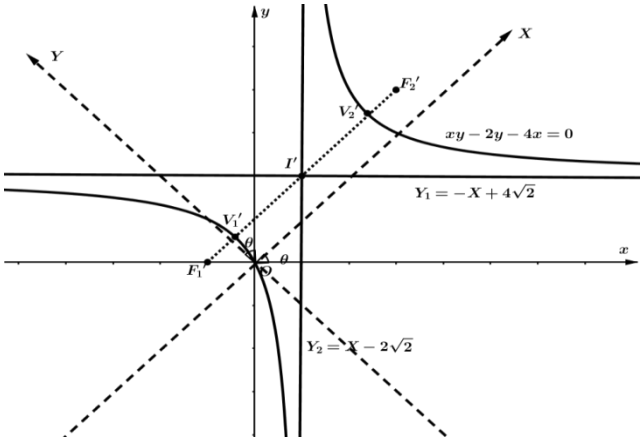
- ផ្ចិត $I'(h',k')=I'(3\sqrt{2},\sqrt{2})$
- កំពូល $V_1'(h'-a',k')=V_1'(3\sqrt{2}-4,\sqrt{2})$

  $V_2'(h'+a',k')=V_2'(3\sqrt{2}+4,\sqrt{2})$
- កំណុំ $F_1'(h'-c',k')=F_1'(3\sqrt{2}-4\sqrt{2},\sqrt{2})=F_1'(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

  $F_2'(h'+c',k')=F_2'(3\sqrt{2}+4\sqrt{2},\sqrt{2})=F_2'(7\sqrt{2},\sqrt{2})$
- អាស៊ីមតូត

$$Y_1=-\frac{b}{a}(X-h')+k'=-\frac{4}{4}(X-3\sqrt{2})+\sqrt{2}=-X+4\sqrt{2}$$

$$Y_2=\frac{b}{a}(X-h')+k'=\frac{4}{4}(X-3\sqrt{2})+\sqrt{2}=X-2\sqrt{2}$$



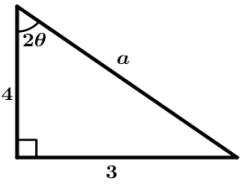
ខ. $2x^2-3xy-2y^2+10=0$

សមីការមាន $A=2, B=-3, c=-2$

$$\Rightarrow \cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{2+2}{-3}=-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta\approx 143.13^0 \Rightarrow \theta\approx 71.57^0$$

តាមរូបយើងបាន



$$a=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{25}=\sqrt{5}$$

ដោយ $2\theta\approx 143.13^0$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី II

នោះ $\cos 2\theta<0 \Rightarrow \cos 2\theta=-\frac{4}{5}$

ម្យ៉ាងទៀត $\theta\approx 71.57^0$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី I នោះ $\cos\theta>0, \sin\theta>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}X - \dfrac{3}{\sqrt{10}}Y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(X-3Y) \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}X + \dfrac{1}{\sqrt{10}}Y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3X+Y) \end{cases}$$

យកតម្លៃ x និង y ជំនួសក្នុងសមីការដើម យើងបាន

$$2\left[\frac{1}{\sqrt{10}}(X-3Y)\right]^2 - 3\times\frac{1}{\sqrt{10}}(X-3Y)\times\frac{1}{\sqrt{10}}(3X+Y)$$

$$-2\times\left[\frac{1}{\sqrt{10}}(3X+Y)\right]^2 + 10 = 0$$

$$\frac{X^2}{5} - \frac{6XY}{5} + \frac{9Y^2}{5} - \frac{9X^2}{10} + \frac{24XY}{10} + \frac{9Y^2}{10} - \frac{9X^2}{5} - \frac{6XY}{5}$$

$$-\frac{Y^2}{5} + 10 = 0$$

$$-\frac{5}{2}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 = -10$$

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

ជាអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ហើយមាន $h' = 0, k' = 0, a' = 2, b' = 2$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

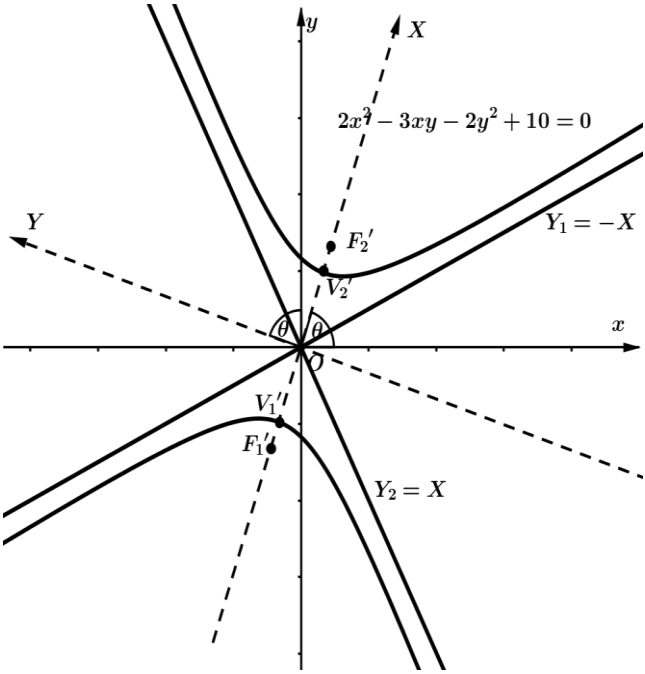
យើងបាន

- ផ្ទិត $I'(h',k') = I'(0,0)$
- កំពូល $V_1'(h'-a',k') = V_1'(0-2,0) = V_1'(-2,0)$

  $V_2'(h'+a',k') = V_2'(0+2,0) = V_2'(2,0)$
- កំណុំ $F_1'(h'-c',k') = F_1'(0-2\sqrt{2},0) = F_1'(-2\sqrt{2},0)$

  $F_2'(h'+c',k') = F_2'(0+2\sqrt{2},0) = F_2'(2\sqrt{2},0)$
- អាស៊ីមតូត $Y_1 = -\dfrac{b}{a}(X-h') + k' = -\dfrac{2}{2}(X-0) + 0 = -X$

$$Y_2 = \frac{b}{a}(X - h') + k' = \frac{2}{2}(X - 0) + 0 = X$$



ឯកសារយោង

១. ជួន ណាត	វចនានុក្រមខ្មែរ ភាគ១ និង ២	១៩៦៧
២. គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២	ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា	២០០៩
៣. ថៃហេង	កោនិក (វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ)	
៤. STEPSAM	គណិតវិទ្យា ១៥ ភាគ	
៥. Internet	Conic section-math2.org	
៦. Internet	Introduction to conic section (kemh111)	

៧. ប្រជុំវិញ្ញាសារគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២