
ចំណូលកំដៅ

អ្នកសរសេរ ឡាយ ចាន់ហេន



SEPTEMBER 12, 2023

Telegram: 0965472228 | Tel: 088 40 80 192

<https://salafree.blogspot.com/>

មេរៀនទី១ ចំនួនកុំផ្លិច (Complex Number)



នៅអំឡុងឆ្នាំ 1572 អ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិអ៊ីតាលី ម្នាក់ឈ្មោះ Rafaelle Bombelli បានបង្ហាញឱ្យឃើញថា សំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ មិនទាន់គ្រប់គ្រាន់សម្រាប់បកស្រាយ សមីការពិជគណិតដែលមានទម្រង់ $x^2 + a = 0$ ដែល $a > 0$ ឡើយទេ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះ គេត្រូវបង្កើតចំនួន មួយទៀតគឺ i ដែល $i^2 = -1$ ។

១ ចំនួនកុំផ្លិចប្រុងពិជគណិត (Algebraic Operations with Complex Numbers)

១.១ ចំនួននិមិត្ត (Imaginary Number)

i : ហៅថាចំនួននិមិត្ត ដែល $i^2 = -1$ ។

លំហាត់ទី១ សរសេរចំនួនខាងក្រោមទៅជាចំនួននិមិត្ត

- ក. $\sqrt{-4}$
- ខ. $\sqrt{-8}$
- គ. $-\sqrt{-144}$
- ឃ. $\sqrt{-121}$
- ង. $\sqrt{-256}$
- ច. $-\sqrt{-32}$

ចម្លើយ

១.២ ចំនួនកុំផ្លិចដែលមានទម្រង់ពិជគណិត (Algebraic Operations with Complex Numbers)

ទម្រង់ពិជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$, a និង b ជាចំនួនពិត ។

a ជាផ្នែកពិត Real Number: $Re(z)=a$

b ជាផ្នែកនិមិត្ត Imaginary Number : $Im(z)= b$ ។

លំហាត់ទី២ ចូរកំណត់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

- ក. $z = 2 + 4i$
- ខ. $-1 + 2i$
- គ. $7 - 9i$
- ឃ. $-6i$
- ង. 6

ចម្លើយ

១.៣ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ (conjugate and Opposite of Complex Number)

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ។

នោះ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z គឺ $\bar{z} = a - bi$ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ z គឺ $-z = -(a + bi) = -a - bi$ ។

លំហាត់ទី៣ ចូរកំណត់ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z = 2 + 4i$

ខ. $-4 - 2i$

គ. $-7 - 3i$

ឃ. $-2i$

ង. 5

ចម្លើយ

១.៤ ចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា (Equality of two complex numbers)

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + bi$ ស្មើនឹង $z_2 = c + di$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៤ ចូរកំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យសមភាពខាងក្រោមពិត

ក. $2x + 3yi = 6 + 3i$

ខ. $(x + y) + (2x - y)i = 2 - 5i$

គ. $(x + 5) + 8yi = 0$

ឃ. $(3x + 1) + (y - 1)i = 7 - 3i$

ង. $(5 - \sqrt{-4}) - (x + yi) = 6$

ច. $(6 + 5i)(x + yi) = 38 - 9i$

ចម្លើយ

១.៥ ប្រមាណវិធីបូក និង វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច (Adding and Subtracting Complex Numbers)

ដើម្បីបូកដកចំនួនកុំផ្លិចលើសត្រូវបូកដកផ្នែកពិតនិងផ្នែកពិត ហើយ ផ្នែកនិមិត្តនិងផ្នែកនិមិត្ត ។

លំហាត់ទី៥ គេមាន $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = 3 - 2i$ ។ ចូរគណនា $z_1 + z_2$ និង $z_1 - z_2$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៦ គេមាន $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - 4i$ និង $z_3 = 2 + i$ ។

ចូរគណនា $z_1 + z_2, z_1 + z_3, z_1 - z_2, z_1 - z_3, z_2 - z_3$ និង $z_2 + z_3$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៧ គេមាន $z_1 = 5 - 3i, z_2 = 4 - i$ និង $z_3 = 2 + 7i$ ។

ចូរគណនា $2z_1 + z_2, 5z_1 + 3z_3, z_1 - 2z_2, z_1 - 2z_3, 3z_2 - 2z_3$ និង $3z_2 + z_3$ ។

ចម្លើយ

១.៦ ប្រមាណវិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច (Multiplying complex numbers)

ជាទូទៅ: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ។

លំហាត់ទី៨ ចូរគណនា

ក. $z_1 = 3i(5 - 4i)$

ខ. $z_2 = (2 + 3i)(4 + 2i)$

គ. $z_3 = (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)(\sqrt{2} - i\sqrt{3})$

ចម្លើយ

$$\text{ಪಾಞ್ಚರೇಫ: } \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad \text{೪}$$

$$\tilde{n}.z_1 = \frac{3}{2+i}$$

$$\Im.z_2 = \frac{2i}{1-3i}$$

$$\tilde{h}.z_3 = \frac{3+2i}{1+3i}$$

$$\mathcal{U}.z_4 = \frac{7+5i}{1-2i}$$

$$\mathfrak{L}.z_5 = \frac{7-5i}{3-2i}$$

အမေရိကန်

លំហាត់ទី១០ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = i$ និង $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។ ចូរគណនា $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ។

အနိစ္စ

លំហាត់ទី១១ សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2i} \right)^2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចកំណត់ $\text{Re}(z)$ និង $\text{Im}(z)$ ។

ප්‍රශ්නය

លើសមាស

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \times i = -i, i^4 = i^2 \times i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = i, i^6 = i^4 \times i^2 = -1, i^7 = i^4 \times i^3 = -i, i^8 = i^4 \times i^4 = 1$$

$$i^9 = i^8 \times i = i, \dots, i^{4k} = 1$$

ជាទូទៅ $i^{4k+r} = i^{4k} \times i^r = i^r, k=0,1,2,3\dots ; r < 4$

 $\mathfrak{N}.i^5$

2.i²⁰

A.34

UJ.i²⁰¹⁴

S.i²⁰²²

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{i}^{2000} \times \mathfrak{i}^{3000}$$

$$2i^{400} - i^{600}$$

$$\mathfrak{H}.\mathfrak{i}^{101}\left(\mathfrak{i}^{102}-\mathfrak{i}^{103}\right)$$

$$\mathcal{W}.\mathbf{i}^{2014}(\mathbf{i}^{25} + \mathbf{i}^{31}) - \mathbf{i}^{204}$$

$$\mathfrak{L} \cdot \frac{i^{2022} + i^{2039}}{i^{201} - i^{30}}$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

ចំពោះ សមីការដឺក្រឡែ ២ $ax^2 + bx + c = 0$

តាមឌីសក្រីសង្ខេប $\Delta = b^2 - 4ac$

ចំពោះ ករណី $\Delta < 0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ និង $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

លំហាត់ទី១៤ ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមឲ្យបានត្រឹមត្រូវ

ក. $x^2 - 4x + 8 = 0$

ខ. $5x^2 - 3x = -4$

គ. $2x^2 - 4x + 5 = 0$

ចម្លើយ

--	--	--

២. ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (Trigonometric form of a Complex Number)

(២.១) ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច (Modulus of Complex Number)

បើ $z = a + bi$ នោះម៉ូឌុលនៃ z កំណត់ដោយ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

លំហាត់ទី១៥ ចូរគណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z = -1 + i$

ខ. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

គ. $z = -3 - 4i$

ឃ. $w = -2\sqrt{2} + i$

ង. $w = (1+i)(\sqrt{3}+i)$

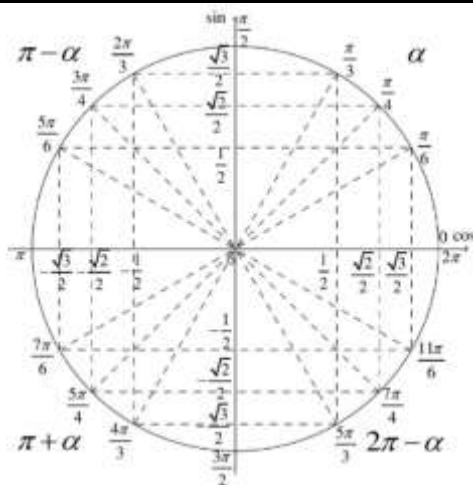
ច. $w = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}$

ចម្លើយ

--	--	--

២.២ អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច (Argument of Complex Number)

❖ ចំណាំដើម្បីរកអាគុយម៉ង់ត្រូវតែចងចាំរូបមន្ត និង តម្លៃពិសេសនៃរង្វង់ឆ័ត្រកោណមាត្រ



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
$\cot \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

ចំណាំ៖ $1(\text{rd}) = \frac{180^\circ}{\pi}$ និង $1^\circ = \frac{\pi}{180}$

1. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$ 2. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ 3. $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha$ 4. $\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot \alpha$ ។

លំហាត់ទី១៦ ចូរស្វែងរកមុំខាងក្រោមទៅជាដឺក្រេ

ក. $\frac{\pi}{3}$

ខ. $\frac{7\pi}{2}$

គ. $\frac{5\pi}{4}$

ឃ. -5π

ង. $\frac{2}{3}\pi$

ច. 3π

ចម្លើយ

លំហាត់ទី១៧ ចូរបំប្លែងមុំខាងក្រោមទៅជាអ៊ីឌ័រ

ក. 60° ខ. 45° គ. 210° ឃ. 90° ស. 135° ច. -360°

ចម្លើយ

លំហាត់ទី១៨ ចូរគណនាតម្លៃនៃកោណមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $\cos 0^\circ$ ខ. $\sin \frac{\pi}{3}$ គ. $\cos \frac{\pi}{4}$ ឃ. $\cos \frac{2\pi}{3}$ ស. $\sin \frac{2\pi}{3}$
ច. $\cos \frac{4\pi}{3}$ ឆ. $\sin \frac{4\pi}{3}$ ជ. $\cos \frac{7\pi}{4}$ ង. $\sin \frac{7\pi}{4}$ ញ. $\sin 2\pi$

ចម្លើយ

បើ $z = a + bi$ នោះអាគុយម៉ង់នៃ z កំណត់ដោយ $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$ នោះយើងបាន $\arg(z) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី១៩ ចូរគណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z = 2\sqrt{3} + 2i$ ខ. $z = -3 + 3i$ គ. $z = 3i$
ឃ. $w = 1 + i\sqrt{3}$ ស. $w = -1 - \sqrt{3}$ ច. $w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

ចម្លើយ

២.៣ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ឬ ទម្រង់ប៉ូលែនចំនួនកុំផ្លិច (Polar or Trigonometric Form of Complex Numbers)

បើ $z = a + bi$ អាចសរសេរជាត្រីកោណមាត្រ $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), r > 0$ ។
(+ ទាំងពីរ i នៅខាង $\sin$) ។

សម្គាល់:

1. បើ $z = \cos \alpha - i \sin \alpha \Leftrightarrow \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$
2. បើ $z = -\cos \alpha + i \sin \alpha \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$
3. បើ $z = -\cos \alpha - i \sin \alpha \Leftrightarrow \cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)$
4. បើ $z = \sin \alpha + i \cos \alpha \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

លំហាត់ទី២០ ចូរបម្លែងចំនួនខាងក្រោមទៅជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z = -4 + 4i$

ខ. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

គ. $z = -2$

ឃ. $w = 1 + i$

ង. $w = \sqrt{3} + i$

ច. $w = -\sqrt{3} - 3i$

ចម្លើយ

លំហាត់ទី២១ សរសេរចំនួនខាងក្រោមទៅជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z = 2 + 2i$

ខ. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

គ. $z = 2 - 2i\sqrt{3}$

ឃ. $w = -1 + i\sqrt{3}$

ង. $w = -1 - i$

ច. $w = -2\sqrt{3} - 2i$

ចម្លើយ

លំហាត់ទី២២ សរសេរចំនួនខាងក្រោមទៅជាទម្រង់ពីរគណិត

ក. $z = \cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4}$

ខ. $z = \cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}$

គ. $z = \cos \frac{25\pi}{3} + i \sin \frac{25\pi}{3}$

ឃ. $z = \cos \frac{31\pi}{6} + i \sin \frac{31\pi}{6}$

ចម្លើយ

២.៣ ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រិ (Basic Operation Trigonometric Form of Complex Numbers)

បើ $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ និង $z_2 = r_2 (\cos \theta + i \sin \theta)$ លើនិច្ចាស

1. $z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 [\cos(\alpha + \theta) + i \sin(\alpha + \theta)]$

❖ $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

❖ $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\alpha - \theta) + i \sin(\alpha - \theta)]$

លំហាត់ទី២៣ ចូរគណនា $z_1 \times z_2$ នៃកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ និង $z_2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

ខ. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right)$ និង $z_2 = \sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$

គ. គេឲ្យ $z = 1 - i$ និង $w = \sqrt{3} + i$ ដោយប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រិចូរគណនា $z \cdot w$ ។

This image shows a full page of white paper designed for handwriting practice. It features 20 evenly spaced, horizontal dashed lines that run across the entire width of the page. The lines are thin and light gray, providing a guide for letter height and placement without being distracting. There is no text or other markings on the page.

ខ.សរសេរ $z \cdot w$ និង $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

[illegible]

លំហាត់ទី២៥ គេឲ្យ $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

គណនា $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ទីកោណមាត្រ រួចសរសេរជាទម្រង់ពីរគណិត ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី២៦ សរសេរ $A = \frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ទីកោណមាត្រ រួចសរសេរជាទម្រង់ពីរគណិត ។

ចម្លើយ

២.៤ ទ្រឹស្តីបទដឺម៉ូ (De MOIVRE's Theorem)

បើ $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ លើសបាន $z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha); n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី២៧ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ គណនា z^3 ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី២៨ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = (1+i)$ គណនា z^{60} ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី២៩ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = (4\sqrt{3} + 4i)$ គណនា z^5 ។

ចម្លើយ

အခြေခံ

ප්‍රශ්න

លំហាត់ទី៣២ ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ក. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{333}$ ខ. $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{555}$ គ. $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{666}$ ឃ. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{777}$

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៣៣ ចូរសរសេរ z^{2019} នៃល $z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ ជាទម្រង់ $a + bi$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៣៤ ចូរសរសេរ z^{2019} នៃល $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២.៥ ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច (Complex roots)

បើ $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ លើសបានឫសទី n នៃ z លើសតាមដោយ

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{(\alpha + 2k\pi)}{n} + i \sin \frac{(\alpha + 2k\pi)}{n} \right); k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

အမိန့်

ප්‍රශ්න

အနိစ္စ

លំហាត់ទី៣៨ គេមានចំនួន $z = 4 + i4\sqrt{3}$ ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនាបូសទី៣នៃ z ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៣៩ គណនាបូសទី៤ នៃ $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤០ គណនាបូសទី៥ នៃ $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤១ គណនា $\sqrt{16+16i}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤២ រកបូសកាវ៉ានៃ z ដែល $z = 16 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤៣ រកបូសគូបនៃ z ដែល $z = 27 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤៤ គណនាបូសទី៦នៃ 1 ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីរគណិត ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤៥ គណនាបូសទីងនៃ -1 ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីរគណិត ។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤៦ រកបូសទី ៣ នៃ z ដែល $z = 2\sqrt{3} + 2i$ រួចតាងចំណុចបញ្ចប់នៃបូសទាំងអស់នៅលើរង្វង់។

ចម្លើយ

លំហាត់ទី៤៧ រកបូសទី ៤ នៃ z ដែល $z = -8 - i8\sqrt{3}$ រួចតាងចំណុចបញ្ចប់នៃបូសទាំងអស់នៅលើរង្វង់។

ចម្លើយ

အမိန့်

အနိစ္စ

- គ. តាង បួសទាំងអស់នៅលើរដ្ឋ**

အမေရိကန်

ផ្នែកលំហាត់បញ្ចប់មេរៀន

លំហាត់ទី 51. ចូរកំណត់ផ្នែកពិត (Re)និង ផ្នែកនិមិត្ត (Im) នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $z = 1 + 2i$

ខ. $z = -3 + 7i$

គ. $z = 4i$

ឃ. $z = 1$

ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 52. ចូរកំណត់ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z = 7 + 2i$

ខ. $z = -5 + 2i$

គ. $w = 1 + 4i$

ឃ. $z = 1 + 2i$

ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 53. គណនា $z_1 - z_2$ និង $z_1 + z_2$ នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $z_1 = 3 + 3i$ និង $z_2 = -2 + 4i$ ខ. $z_1 = -4 + 2i$ និង $z_2 = -2 + 4i$ គ. $z_1 = 3 - 5i$ និង $z_2 = 7 + 9i$

ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

က. $z_1 = 5 + 2i$ နှင့် $z_2 = 1 + 2i$ ခ. $z_1 = -2 + 6i$ နှင့် $z_2 = 1 + 2i$ က. $z_1 = 8 - 4i$ နှင့် $z_2 = 2 - 3i$

[illegible]
$$\begin{array}{lll} \text{१. } z = 2(3-2i) + 3(-1+i) & \text{२. } z = \frac{3+i}{1+2i} - \frac{1+3i}{1-2i} & \text{३. } z = \frac{7+9i}{(1+i)(2-3i)} \end{array}$$
[illegible]

ក. ចូរបង្ហាញថា $x^2 - 4x + 13 = 0$ និង $y^2 + 2y + 5 = 0$ ។

ខ. ចូរសរសេរ $Z = \frac{4(x-3)^2}{x^2+1} + \frac{2(y+2)^2}{y^2+1}$ ជាទម្រង់ពីរឯកឈត ។

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

លំហាត់ទី 57. ចូរគណនា $z = \frac{(1+3i)^2}{1+i}$ ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីរគណិតរូបកំណត់ (Re)និង (Im) នៃ z ។
ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 58. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ
ក. $2x - 2yi = 2 + 2i$ ខ. $2x^2 + 3yi = 2 + i$ គ. $(3x-1) + (2y-4)i = 0$ ឃ. $(4x-2y) + 2(x+y)i = 2 + 4i$
ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 59. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $z = w$ នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖
ក. $z = (3a+1) + i(2b-5)$ និង $w = 7 + 3i$ ខ. $z = (a+b) + i(a-b)$ និង $w = 3 + 7i$
គ. $z = (a-b+2) + i(a^2+b^2)$ និង $w = 3 + 5i$ ឃ. $z = (4a^2-9b^2) + i(2a-3b+5)$ និង $w = 7(4+i)$
ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 60. ចូរគណនាចំនួនខាងក្រោម៖

ក. i^{28}

ខ. i^{51}

គ. i^{77}

ឃ. i^{100}

ង. i^{555}

ច. i^{666}

ឆ. i^{2022}

ដំណោះស្រាយ

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

លំហាត់ទី 61. ចូរគណនាចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $i^{200} + i^{410}$

ខ. $2i^{2022} + i^{500} - 3i^2$

គ. $\frac{2i^{200} + 3i^{2023}}{3i^{201} - 2i^{101}}$

ឃ. $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i} \right)^{25} \right]^2$

ដំណោះស្រាយ

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

លំហាត់ទី 62. ដោយដឹងថា $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ ។ ចូរគណនា $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

ដំណោះស្រាយ

.....
.....
.....
.....

លំហាត់ទី 63. គណនា $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{1000}$

ដំណោះស្រាយ

.....
.....
.....
.....

លំហាត់ទី 64. គណនា $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2022}$ ។ ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីរធាតុ

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី 65. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុង $\mathbb{C}$

ក. $z^2 - 4z + 13 = 0$

ខ. $z^2 + 6z = -10$

គ. $2z^2 - 6z + 5 = 0$

ឃ. $9z^2 - 6z = -5$

ង. $z^2 - (2+i)z + 1+i = 0$

ច. $z^2 - (3+2i)z + 5+5i = 0$

ឆ. $z^2 - (5-3i)z + 4-7i = 0$

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី 66. ចូរគណនាម៉ូឌុល និង អាគុយសង់ នៃចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $z = 1 - i\sqrt{3}$

ខ. $z = 4 + 4i$

គ. $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

ឃ. $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី 67. សរសេរចំនួនខាងក្រោមទៅជាទម្រង់ទីកោណមាត្រ

ក. $z = 1 + i\sqrt{3}$

ខ. $z = -1 + i\sqrt{3}$

គ. $-3\sqrt{3} + 3i$

ឃ. $z = -2022i$

ន. $z = (1+i)^{12}$

ច. $z = (2+2i)^{15}$

ឆ. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$

ជ. $z = (1-i\sqrt{3})^{300}$

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី 68. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ។ សរសេរ z^{2020} ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី 69. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ ។ សរសេរ z^{2022} ជាទម្រង់ពីរធាតុ ។

ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 70. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^9}$ ។

ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីរធាតុ រួចបញ្ជាក់ម៉ូឌុល និង អាក្យូបង់នៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

លំហាត់ទី 71. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ។

ក. ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីរធាតុ

ខ. គណនាមូលដ្ឋាននៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

နိဂုံးစာ

[illegible]

ក. គណនា $z_1 + z_2, z_2 - z_1, z_1 \times z_2, \frac{z_1}{z_2}$

ខ. សរសេរ $z_1 + z_2, z_2 - z_1, z_1 \times z_2, \frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal dashed lines, each set consisting of three parallel lines. These lines are evenly spaced vertically across the entire page, providing a guide for letter height and placement for young learners. The background is white, and there are no margins or additional markings.

ក. សរសេរចំនួន $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ខ. សរសេរចំនួន a, b និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

[illegible]

គ. សរសេរ $z_1 \times z_2, \frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិតរួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

[illegible]

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos \frac{7\pi}{12}$ និង $\sin \frac{7\pi}{12}$ ។

[illegible]

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{N}. \begin{cases} ix + (1+i)y = 4i \\ (2+3i)x - (2-i)y = 5i - 6 \end{cases} & \mathfrak{O}. \begin{cases} (2+3i)x + (1-2i)y = 8-3i \\ (3+2i)x + (1+2i)y = 13+6i \end{cases} & \mathfrak{P}. \begin{cases} x + iy = -1+2i \\ ix - 2y = -3-4i \end{cases} \\ \mathfrak{U}. \begin{cases} (1+i)z_1 + 2z_2 = 6-2i \\ (3+2i)z_1 + z_2 = 4+3i \end{cases} & \mathfrak{H}. \begin{cases} 2z_1 + (3-i)z_2 = 5(5-i) \\ 3z_1 + (1+i)z_2 = 7+8i \end{cases} & \mathfrak{G}. \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 10+7i \\ (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 2(4+i) \end{cases} \end{array}$$

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកលំហាត់ប្រឡងជាតិឧបត្ថម្ភ

លំហាត់ទី 81. (ឆ្នាំ ២០០២)

1. គេឲ្យ $z = 1 - i\sqrt{3}$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2002} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
2. គេឲ្យ $u = x + iy$ និង $z_1 = a + ib$ ។
ចូរគណនា x និង y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b បើគេដឹងថា $u = z_1^2 + iz_1 - \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី 82. (ឆ្នាំ ២០០៣)

- គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$
1. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
 2. សរសេរ $z' = 1 + i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចចេញរកម៉ូឌុល និង អាក្យុយម៉ង់ នៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{z'}{z}$ ។

លំហាត់ទី 83. (ឆ្នាំ ២០០៤)

1. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi - y = \frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។
2. គេឲ្យ $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 84. (ឆ្នាំ ២០០៥)

- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$ និង $z_2 = (1-i)x + (1-y)(1+i)$ ។
1. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។
 2. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\bar{z}_1 - (z_2 + y - 1) = 0$ ($\bar{z}_1$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1) ។

លំហាត់ទី 85. (ឆ្នាំ ២០០៦)

1. កំណត់ចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ ។
2. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ។ សរសេរ $z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 86. (ឆ្នាំ ២០០៧)

- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $A = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$ និង $B = \frac{x+iy}{1+i}$ ដែល x, y ជាចំនួនពិត។
1. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
 2. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\bar{B} - A^2 = 0$ ($\bar{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B) ។

លំហាត់ទី 87. (ឆ្នាំ ២០០៨)

- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ និង $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ដែល x, y ជាចំនួនពិតខុសពី ០ ហើយ α ជាចំនួនពិត។
1. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|z| = |w|$ ។
 2. ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|z| = |w|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{z} = \bar{z}$ ។
 3. រកតម្លៃ x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $z = 1$, $w = 1$ ។

លំហាត់ទី 88. (ឆ្នាំ ២០០៩)

សរសេរ $A = \frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត ។

លំហាត់ទី 89. (ឆ្នាំ ២០១០)

1. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ (1) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។ រកម៉ូឌុល និង អាគ្នេយ៍នៃបូសនីមួយៗរបស់សមីការ (1) ។
2. សរសេរសមីការ $w = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 90. (ឆ្នាំ ២០១១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

1. រកបូស t_1, t_2 នៃសមីការ $-t^2 + 2t - 4 = 0$ ដោយយក t_1 ជាបូសដែលមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ។
2. សរសេរ $z = \frac{4t_2}{t_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 91. (ឆ្នាំ ២០១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

- គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។
1. គណនា $A = x - y^2$ និង $B = x^2 + x + 1$ ។
 2. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ ហើយបង្ហាញថា $C = x^{2013} + y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី 92. (ឆ្នាំ ២០១៣ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

- គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 2\sqrt{3} - 2i$ និង $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។
1. សរសេរ $z = a^2 + b^2 + 4ai + \sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។
 2. សរសេរ a, b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 93. (ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

- គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។
1. គណនា $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 z_2$ ។
 2. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
 3. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាបូសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$ ។

លំហាត់ទី 94. (ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2}, z_2 = -i\sqrt{2}$ និង $z_3 = i\sqrt{2}$ ។
1. គណនា $z_1 + z_2, z_1 + z_3, (z_1 + z_2)(z_1 + z_3)$ ។
 2. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគ្នេយ៍នៃ $z_1 + z_2, z_1 + z_3, \left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2} \right)^2$ ។
 3. កំណត់ i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \geq 1$ ។ ទាញរកតម្លៃ $i^{2015} - i^{2014}$ ។

លំហាត់ទី 95. (ឆ្នាំ ២០១៥ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ។
1. គណនា $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \times z_2$ ។
 2. សរសេរទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2, z_1 \times z_2$ ។

លំហាត់ទី 96. (ឆ្នាំ ២០១៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ និង $z_3 = -\frac{1}{2}$ ។

1. គណនា $z_1 + z_2, (z_1 + z_2) \times z_3$ ។
2. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = (z_1 + z_2) \times z_3$ ។
3. ទាញរកតម្លៃ z^3 ។

លំហាត់ទី 97. (ឆ្នាំ ២០១៧ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ ។

1. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
2. រកម៉ូឌុល និង អាក្យូបង់នៃ z_1^3 ។
3. សរសេរផលគុណ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 98. (ឆ្នាំ ២០១៨ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + i3\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$ ។

1. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។
2. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
3. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី 99. (ឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

1. ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2 - 8z + 64 = 0$ ។
2. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 4 - 4i\sqrt{3}$ ។ សរសេរ $2z_1 + \overline{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និង គណនា $(2z_1 + \overline{z_2})^3$ ។ (លើសពីនេះ $\overline{z_2}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_2 ។

លំហាត់ទី 100. (ឆ្នាំ ២០២១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។ រក $\overline{z_1}$ ($\overline{z_1}$ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1) ។
2. រកម៉ូឌុល និង អាក្យូបង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 ។ សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
3. បង្ហាញថា $\overline{z_1}$ ជាឫសនៃសមីការ $z^2 = 2(z\sqrt{2} - 2)$ ។

