សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

ដេប៉ាតឺម៉ង់ គណិតវិទ្យា

កំណែពិជគណិតឆ្នាំទី១

រៀបរៀង និង ស្រាវជ្រាវដោយនិស្សិត ស៊ីម សេងកា

២០១៩

មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃតក្កវិទ្យា និង ទ្រឹស្តីសំណុំ

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

លំហាត់ផ្នែកតក្កវិទ្យា

1. ចូររកតារាងភាពពិតនៃ Propositions ខាងក្រោមតាមពីររបៀប :

ក. $\neg(p\wedge\neg q)$

ខ. $\neg p\wedge q$

គ. $\neg(p\vee q)$

ឃ. $\neg(p\vee\neg q)$

ង. $p\wedge(\neg q\vee r)$

ច. $\neg(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg r)$

ឆ. $(\neg p\vee q)\wedge(q\vee\neg r)$

ជ. $\neg[(p\vee q)\wedge\neg r]\vee\neg p$

ឈ. $[\neg p\wedge(q\vee\neg r)]\vee(\neg q\wedge r)$

2. បង្ហាញថា Proposition $p\vee\neg(p\wedge q)$ ជា Tautology

3. បង្ហាញថា Proposition $(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$ ជា Contradiction

4. បង្ហាញថា Proposition $p\vee\neg p$ ជា Tautology ។

រួចទាញបង្ហាញថា Proposition $(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$ ជា Tautology ។

5. បង្ហាញថា :

ក. $p\vee q\equiv\neg(\neg p\wedge\neg q)$

ខ. $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

គ. $\neg(p\vee q)\vee(\neg p\wedge q)\equiv\neg p$

6. គេបង្កើតសំណើមួយដោយប្រើឈ្នាប់ $\downarrow$ កំណត់សរសេរដោយ " $p \downarrow q$ " is read " Neither p nor q " និង មានតារាងភាពពិត :

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

បង្ហាញថា :

ក. $\neg p \equiv p \downarrow p$

ខ. $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

គ. $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

7. គេបង្កើតសំណើមួយដោយប្រើឈ្នាប់ $\veebar$ កំណត់សរសេរដោយ :

" $p \veebar q$ " read as " p or q but not both " និង មានតារាងភាពពិត :

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

បង្ហាញថា : $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

8. ដោយប្រើលក្ខណៈបង្ហាញថា :

ក. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ខ. $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

គ. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ឃ. $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv \neg p \wedge q$

ង. $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$

ច. $(p \wedge q) \vee \neg p \equiv \neg p \vee q$

9. បង្ហាញថា : $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

10. បង្ហាញថា : $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$

11. សិក្សាតារាងភាពពិតនៃ Propositions ខាងក្រោម :

ក. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

ខ. $(p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$

គ. $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$

12. បង្ហាញថា : Proposition $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ជា Tautology .

13. ចូររកតារាងភាពពិតនៃ Propositions ខាងក្រោមតាមពីររបៀប :

ក. $(\neg p \vee q) \Rightarrow p$

ខ. $q \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$

គ. $(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$

ឃ. $(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

ង. $[p \wedge (\neg q \Rightarrow p)] \wedge \neg[(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)]$

ច. $[q \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)] \vee [(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r]$

ឆ. $(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

14. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

ក. $\neg p \Rightarrow q\ ,\ p \vdash \neg q$

ខ. $\neg p \Rightarrow q\ ,\ q \vdash p$

គ. $p \Rightarrow q\ ,\ r \Rightarrow \neg q \vdash r \Rightarrow \neg p$

ឃ. $p \Rightarrow \neg q\ ,\ \neg r \Rightarrow \neg q \vdash p \Rightarrow \neg r$

ង. $p \Rightarrow \neg q\ ,\ r \Rightarrow p\ ,\ q \vdash \neg r$

15. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

S_1 : បើ 6 ជាចំនួនគត់គូ នោះ 2 ចែកមិនដាច់ 7

S_2 : 5 មិនមែនជាចំនួនបឋម ឬ 2 ចែកដាច់ 7

S_3 : ប៉ុន្តែ 5 ជាចំនួនបឋម

S : ដូចនេះ 6 ជាចំនួនគូ

S_1 : បើខ្ញុំធ្វើការ នោះខ្ញុំមិនអាចរៀនបានទេ

S_2 : ខ្ញុំធ្វើការ ឬ ខ្ញុំប្រឡងគណិតវិទ្យា

S_3 : ខ្ញុំប្រឡងគណិតវិទ្យា

S : ដូចនេះ ខ្ញុំរៀន

16. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

S_1 : បើមេឃភ្លៀង នោះលោក A នឹងឈឺ

S_2 : មេឃមិនភ្លៀង

S : លោក A មិនឈឺ

S_1 : បើមេឃភ្លៀង នោះលោក A នឹងឈឺ

S_2 : លោក A មិនឈឺ

S : មេឃមិនភ្លៀង

17. រូបវិទូម្នាក់ធ្វើវិចារដូចខាងក្រោម :

- បើសម្មតិកម្មរបស់ខ្ញុំត្រឹមត្រូវ នោះការពិសោធន៍ត្រូវបានសម្រេច ។
- ការពិសោធន៍បានសម្រេចហើយ ។

ដូចនេះ សម្មតិកម្មខ្ញុំត្រឹមត្រូវ ។ តើវិចារនេះត្រឹមត្រូវឬទេ ?

18. នៅក្នុងយន្តហោះមួយគ្រឿងដែលធ្វើដំណើរពីក្រុងប៉ារីសទៅក្រុងតូក្យូ មានអ្នកដំណើរ 6 នាក់ដែលមានឈ្មោះ A , B , C , D , E និង F ។ ក្នុងចំណោមអ្នកដំណើរទាំងនេះមាន :

ម្នាក់ជាជនជាតិជប៉ុន , ម្នាក់ជាជនជាតិចិន , ម្នាក់ជាជនជាតិខ្មែរ , ម្នាក់ជាជនជាតិបារាំង , ម្នាក់ជាជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ និង ម្នាក់ទៀតជាជនជាតិឥណ្ឌា ។ គេដឹងថា :

- A និង ជប៉ុនជាគ្រូពេទ្យ
- អាល្លឺម៉ង់ចាស់ជាង A
- E និង ចិនជាសាស្ត្រាចារ្យ
- ឥណ្ឌាចាស់ជាង C

- C និង ខ្មែរជាវិស្វករ
- B និង F ឡើងយន្តហោះនៅក្រុមពាម ហើយខ្មែរឡើងយន្តហោះនៅក្រុងប៉ារីស ។
- B និង ជប៉ុនចុះនៅតូក្យូ ហើយ C និង អាល្លឺម៉ង់ចុះនៅហុងកុង ។

តើគេអាចរកសញ្ជាតិ និង មុខរបររបស់អ្នកដំណើរទាំងនេះបានដែរឬទេ ?

19. គេឱ្យ $a\,,\,b\in\mathbb{N}$ បង្ហាញថា :

ក. $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=b)}\equiv a>b$

ខ. $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=a)}\equiv a\neq a$

គ. $\overline{(a>b)\Rightarrow(a<b)}\equiv a>b$

20. សិក្សាតម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម :

ក. $\forall x\in\mathbb{R}:\ |x|=x$

គ. $\forall x\in\mathbb{R}:\ x+1>x$

ខ. $\exists x\in\mathbb{R}:\ x^2=x$

ឃ. $\exists x\in\mathbb{R}:\ x+2=x$

21. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើនៃលំហាត់ (20)

22. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ :

ក. $\forall x:P(x)\wedge\exists y:Q(y)$

ខ. $\exists x:P(x)\vee\forall y:Q(y)$

23. សិក្សាតម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោមចំពោះ $A=\{1,2,3\}$:

ក. $\exists x\,,\forall y\ :\ x^2<y+1$

ឃ. $\exists x\,,\forall y\,,\exists z\ :\ x^2+y^2<2z^2$

ខ. $\forall x\,,\exists y\ :\ x^2+y^2<12$

ង. $\exists x\,,\exists y\,,\forall z\ :\ x^2+y^2<2z^2$

គ. $\forall x\,,\forall y\ :\ x^2+y^2<12$

24. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើនៃលំហាត់ (23)

25. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើខាងក្រោម :

ក. $\forall x\,,\exists y\ :\ [P(x)\vee Q(y)]$

ខ. $\exists x\,,\forall y\ :\ [P(x,y)\rightarrow Q(x,y)]$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ផ្នែកតក្កវិទ្យា

1. ចូររកតារាងភាពពិតនៃ Propositions ខាងក្រោមតាមពីររបៀប :

ក. $\neg(p \wedge \neg q)$

+ របៀបទី១

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

+ របៀបទី២

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
Step		iv	i	iii	ii	i

ខ. $\neg p \wedge q$

+ របៀបទី១

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

+ របៀបទី២

p	q	$\neg$	p	$\wedge$	q
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0
Step		ii	i	iii	i

គ. $\neg(p \vee q)$

+ របៀបទី១

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

+ របៀបទី២

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
Step		iii	i	ii	i

ឃ. $\neg(p \vee \neg q)$

+ របៀបទី១

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

+ របៀបទី២

p	q	$\neg$	$(p$	$\vee$	$\neg$	$q)$
1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0
Step		iv	i	iii	ii	i

ង. $p \wedge (\neg q \vee r)$

+ <u>របៀបទី១</u>

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \wedge (\neg q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

+ <u>របៀបទី២</u>

p	q	r	p	$\wedge$	$(\neg$	q	$\vee$	$r)$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	0
Step			i	iv	ii	i	iii	i

ច. $\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

\+ <u>របៀបទី១</u>

តាង $M = \neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	M
1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

\+ <u>របៀបទី២</u>

p	q	r	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$r)$
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
Step			iv	i	iii	ii	i	v	i	iii	ii	i

ឆ. $(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)$

+ របៀបទី១

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \vee q$	$q \vee \neg r$	$(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

+ របៀបទី២

p	q	r	$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$r)$
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
Step			ii	i	iii	i	iv	i	iii	ii	i

ជ. $\neg[(p \vee q) \wedge \neg r] \vee \neg p$

+ <u>របៀបទី១</u>

តាង $M = \neg[(p \vee q) \wedge \neg r] \vee \neg p$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg r$	$\neg[(p \vee q) \wedge \neg r]$	M
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

+ <u>របៀបទី២</u>

p	q	r	$\neg$	$[(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$r]$	$\vee$	$\neg$	p
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
Step			v	i	iii	i	iv	ii	i	vi	ii	i

ឈ. $[\neg p \wedge (q \vee \neg r)] \vee (\neg q \wedge r)$

+ របៀបទី១

តាង $M = [\neg p \wedge (q \vee \neg r)] \vee (\neg q \wedge r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \wedge r$	$q \vee \neg r$	$\neg p \wedge (q \vee \neg r)$	M
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1

+ របៀបទី២

p	q	r	$[\neg$	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$r)]$	$\vee$	$(\neg$	q	$\wedge$	$r)$
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
Step			ii	i	iv	i	iii	ii	i	v	ii	i	iii	i

2. បង្ហាញថា Proposition $p\vee\neg(p\wedge q)$ ជា Tautology

- $p\vee\neg(p\wedge q)\equiv p\vee(\neg p\vee\neg q)\equiv(p\vee\neg p)\vee\neg q\equiv T\vee\neg q\equiv T$

$\therefore$ Proposition $p\vee\neg(p\wedge q)$ ជា Tautology

3. បង្ហាញថា Proposition $(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$ ជា Contradiction

- $(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)\equiv(p\wedge q)\wedge(\neg p\wedge\neg q)\equiv(p\wedge q)\wedge(\neg q\wedge\neg p)$

$$\equiv[p\wedge(q\wedge\neg q)]\wedge\neg p\equiv(p\wedge F)\wedge\neg p\equiv F\wedge\neg p\equiv F$$

$\therefore$ Proposition $(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$ ជា Contradiction

4. បង្ហាញថា Proposition $p\vee\neg p$ ជា Tautology ។

រួចទាញបង្ហាញថា Proposition $(p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$ ជា Tautology ។

\+ តារាងភាពពិត

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$
1	0	1
0	1	1

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា Proposition $p\vee\neg p$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ជានិច្ច

នាំឱ្យគេបាន Proposition $p\vee\neg p$ ជាសំណើពិតជានិច្ច

∴ Proposition $p \vee \neg p$ ជា Tautology

- $(p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \equiv [p \vee (\neg p \vee q)] \wedge [\neg q \vee (\neg p \vee q)]$

$$\equiv [(p \vee \neg p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (q \vee \neg p)] \equiv (T \vee q) \wedge [(\neg q \vee q) \vee \neg p]$$

$$\equiv T \wedge (T \vee \neg p) \equiv T \wedge T \equiv T$$

∴ Proposition $(p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q)$ ជា Tautology

5. បង្ហាញថា :

ក. $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

- $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q) \equiv p \vee q$

ព្រោះ : $\neg(\neg p) \equiv p$ និង $\neg(\neg q) \equiv q$

∴ $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

ខ. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

- $p \equiv p \wedge T \equiv p \wedge (T \vee q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \equiv p \vee (p \wedge q)$

∴ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

គ. $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q) \equiv \neg p \wedge T \equiv \neg p$

∴ $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

6. គេបង្កើតសំណើមួយដោយប្រើឈ្នាប់ $\downarrow$ កំណត់សរសេរដោយ “ $p \downarrow q$ ” is read “ Neither p nor q ” និង មានតារាងភាពពិត :

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

បង្ហាញថា :

ក. $\neg p \equiv p \downarrow p$

+ តារាងភាពពិត

p	$\neg p$	$p \downarrow p$
1	0	0
0	1	1

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា $\neg p$ និង $p \downarrow p$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យគេបាន $\neg p \equiv p \downarrow p$

$\therefore$ $\boxed{\neg p \equiv p \downarrow p}$

ខ. $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

+ តារាងភាពពិត

p	q	$p \wedge q$	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា $p \wedge q$ និង $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យគេបាន $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$\therefore$ $\boxed{p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)}$

គ. $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

+ តារាងភាពពិត

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា $p \vee q$ និង $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យគេបាន $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$\therefore$ $\boxed{p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)}$

7. គេបង្កើតសំណើមួយដោយប្រើឈ្នាប់ $\veebar$ កំណត់សរសេរដោយ :

" $p \veebar q$ " read as " p or q but not both " និង មានតារាងភាពពិត :

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

បង្ហាញថា : $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

+ តារាងភាពពិត

p	q	$p \veebar q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា $p \veebar q$ និង $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យគេបាន $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

$\therefore$ $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

8. ដោយប្រើលក្ខណៈបង្ហាញថា :

ក. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

- $p \equiv p \wedge T \equiv p \wedge (T \vee q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \equiv p \vee (p \wedge q)$

$\therefore$ $\boxed{p \vee (p \wedge q) \equiv p}$

ខ. $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

- $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q) \equiv \neg p \wedge T \equiv \neg p$

$\therefore$ $\boxed{\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p}$

គ. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- $p \equiv p \vee F \equiv p \vee (F \wedge q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q) \equiv p \wedge (p \vee q)$

$\therefore$ $\boxed{p \wedge (p \vee q) \equiv p}$

ឃ. $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv \neg p \wedge q$

- $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv \neg p \wedge (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \equiv F \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p \wedge q$

$\therefore$ $\boxed{(p \vee q) \wedge \neg p \equiv \neg p \wedge q}$

ង. $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$

- $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$

$\therefore$ $\boxed{p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q}$

ច. $(p\wedge q)\vee\neg p\equiv\neg p\vee q$

- $(p\wedge q)\vee\neg p\equiv\neg p\vee(p\wedge q)\equiv(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q)\equiv T\wedge(\neg p\vee q)\equiv\neg p\vee q$

$\therefore$ $\boxed{(p\wedge q)\vee\neg p\equiv\neg p\vee q}$

9. បង្ហាញថា : $p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$

- $p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv\neg p\vee(q\wedge r)\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$

$\therefore$ $\boxed{p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)}$

10. បង្ហាញថា : $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge\neg r)\Rightarrow\neg q$

- $(p\wedge\neg r)\Rightarrow\neg q\equiv\neg(p\wedge\neg r)\vee\neg q\equiv(\neg p\vee r)\vee\neg q\equiv\neg p\vee(r\vee\neg q)$

  $\equiv\neg p\vee(\neg q\vee r)\equiv\neg p\vee(q\Rightarrow r)\equiv p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$

$\therefore$ $\boxed{p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge\neg r)\Rightarrow\neg q}$

11. សិក្សាតារាងភាពពិតនៃ Propositions ខាងក្រោម :

ក. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា p និង $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យគេបាន $p \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

$\therefore$ $\boxed{p \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)}$

ខ. $(p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$\neg(p \Leftrightarrow \neg q)$	$(p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា $p \Rightarrow q$ និង $(p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យគេបាន $p \Rightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$

$\therefore$ $p \Rightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$

គ. $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$\neg(p \Leftrightarrow \neg q)$	$(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថា Proposition $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ជានិច្ច នាំឱ្យគេបាន Proposition $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$ ជាសំណើពិតជានិច្ច

$\therefore$ Proposition $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Leftrightarrow \neg q)$ ជា Tautology

12. បង្ហាញថា Proposition $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ជា Tautology .

- $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (q \vee p) \equiv [\neg p \vee (\neg q \vee q)] \vee p$$

$$\equiv (\neg p \vee T) \vee p \equiv T \vee p \equiv T$$

$\therefore$ Proposition $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ជា Tautology

13. ចូររកតារាងភាពពិតនៃ Propositions ខាងក្រោមតាមពីររបៀប :

ក. $(\neg p \vee q) \Rightarrow p$

\+ របៀបទី១

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \Rightarrow p$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

\+ របៀបទី២

p	q	$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	p
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
Step		ii	i	iii	i	iv	i

ខ. $q \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$

\+ របៀបទី១

p	q	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$q \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

+ <u>របៀបទី២</u>

p	q	q	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\vee$	$p)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0
Step		i	iv	ii	i	iii	i

គ. $(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$

+ <u>របៀបទី១</u>

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1

+ <u>របៀបទី២</u>

p	q	$(p$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$q)$	$\Rightarrow$	$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Step		i	iii	ii	i	iv	ii	i	iii	i

ឃ. $(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

+ របៀបទី១

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$q \Rightarrow \neg p$	$(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1

+ របៀបទី២

p	q	$(\neg$	q	$\vee$	$p)$	$\Leftrightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$\neg$	$p)$
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
Step		ii	i	iii	i	iv	i	iii	ii	i

ង. $[p \wedge (\neg q \Rightarrow p)] \wedge \neg[(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)]$

+ របៀបទី១

តាង $M = (p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)$, $N = \neg[(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)]$

និង $P = [p \wedge (\neg q \Rightarrow p)] \wedge \neg[(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)]$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow p$	$p \wedge (\neg q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$q \vee \neg p$	M	N	P
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0

+ របៀបទី២

p	q	$[p$	$\wedge$	$(\neg$	q	$\Rightarrow$	$p)]$	$\wedge$	$\neg$	$[(p$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$q)$	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$p)]$
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
Step		i	iv	ii	i	iii	i	vi	v	i	iii	ii	i	iv	i	iii	ii	i

ច. $[q \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)] \vee [(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r]$

+ របៀបទី១

តាង $M = [q \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)] \vee [(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r]$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$r \Rightarrow \neg p$	$q \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)$	$\neg q \Rightarrow p$	$(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r$	M
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1

+ របៀបទី២

p	q	r	$[q$	$\Leftrightarrow$	$(r$	$\Rightarrow$	$\neg$	$p)]$	$\vee$	$[(\neg$	q	$\Rightarrow$	$p)$	$\Leftrightarrow$	$r]$
1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
Step			i	iv	i	iii	ii	i	v	ii	i	iii	i	iv	i

ឆ. $(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

+ របៀបទី១

p	q	$\neg q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0

+ របៀបទី២

p	q	$(p$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Step		i	iii	ii	i	iv	i	iii	i

14. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

ក. $\neg p \Rightarrow q \ , \ p \vdash \neg q$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow \neg q$

\+ តារាងភាពពិត

p	q	$[(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$p]$	$\Rightarrow$	$\neg$	q
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
Step		ii	i	iii	i	iv	i	v	ii	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow \neg q$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $\neg p \Rightarrow q \ , \ p \vdash \neg q$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

$\therefore$ $\neg p \Rightarrow q \ , \ p \vdash \neg q$ គឺ Fallacy

ខ. $\neg p \Rightarrow q \ , \ q \vdash p$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

\+ តារាងភាពពិត

p	q	$[(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$q]$	$\Rightarrow$	p
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Step		ii	i	iii	i	iv	i	v	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(\neg p \Rightarrow q)\wedge q]\Rightarrow p$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $\neg p \Rightarrow q \ , \ q \vdash p$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

$\therefore$ $\neg p \Rightarrow q \ , \ q \vdash p$ គឺ Fallacy

គ. $p \Rightarrow q \ , \ r \Rightarrow \neg q \vdash r \Rightarrow \neg p$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow\neg q)]\Rightarrow(r\Rightarrow\neg p)$

+ តារាងភាពពិត

p	q	r	$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(r$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)]$	$\Rightarrow$	$(r$	$\Rightarrow$	$\neg$	$p)$
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
Step			i	iii	i	iv	i	iii	ii	i	v	i	iii	ii	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow\neg q)]\Rightarrow(r\Rightarrow\neg p)$ ជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p \Rightarrow q \ , \ r \Rightarrow \neg q \vdash r \Rightarrow \neg p$ ត្រឹមត្រូវ ឬ មានសុពលភាព (Valid)

$\therefore$ $p \Rightarrow q \ , \ r \Rightarrow \neg q \vdash r \Rightarrow \neg p$ គឺ Valid

ឃ. $p \Rightarrow \neg q \ , \ \neg r \Rightarrow \neg q \vdash p \Rightarrow \neg r$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$

+ តារាងភាពពិត

p	q	r	$[(p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$(\neg$	r	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)]$	$\Rightarrow$	$(p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$r)$
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
Step			i	iii	ii	i	iv	ii	i	iii	ii	i	v	i	iii	ii	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ :

$[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p \Rightarrow \neg q \ , \ \neg r \Rightarrow \neg q \vdash p \Rightarrow \neg r$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

$\therefore$ $p \Rightarrow \neg q \ , \ \neg r \Rightarrow \neg q \vdash p \Rightarrow \neg r$ គឺ Fallacy

ង. $p \Rightarrow \neg q, \ r \Rightarrow p \ , \ q \ \vdash \ \neg r$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge q] \Rightarrow \neg r$

+ តារាងភាពពិត

p	q	r	$[(p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$(r$	$\Rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$q)]$	$\Rightarrow$	$\neg$	r
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
Step			i	iii	ii	i	iv	i	iii	i	v	i	vi	ii	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p\Rightarrow\neg q)\wedge(r\Rightarrow p)\wedge q]\Rightarrow\neg r$ ជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p\Rightarrow\neg q,\ r\Rightarrow p\ ,\ q\ \vdash\ \neg r$ ត្រឹមត្រូវ ឬ មានសុពលភាព (Valid)

$\therefore$ $p\Rightarrow\neg q,\ r\Rightarrow p\ ,\ q\ \vdash\ \neg r$ គឺ Valid

15. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

S_1 : បើ 6 ជាចំនួនគត់គូ នោះ 2 ចែកមិនដាច់ 7

S_2 : 5 មិនមែនជាចំនួនបឋម ឬ 2 ចែកដាច់ 7

S_3 : ប៉ុន្តែ 5 ជាចំនួនបឋម

S : ដូចនេះ 6 ជាចំនួនគូ

តាង សំណើ : p “ 6 ជាចំនួនគត់គូ ”

q “ 2 ចែកដាច់ 7 ” , $\neg q$ “ 2 ចែកមិនដាច់ 7 ”

r “ 5 ជាចំនួនបឋម ” , $\neg r$ “ 5 មិនមែនជាចំនួនបឋម ”

គេបាន Argument $S_1 , S_2 , S_3 \vdash S$ មានទម្រង់ : $p \Rightarrow \neg q \, , \neg r \vee q \, , r \vdash p$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge r] \Rightarrow p$

+ តារាងភាពពិត

p	q	r	$[(p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$(\neg$	r	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$r]$	$\Rightarrow$	p
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
Step			i	iii	ii	i	iv	ii	i	iii	i	v	i	vi	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge r] \Rightarrow p$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p \Rightarrow \neg q \, , \neg r \vee q \, , r \vdash p$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

មានន័យថា $S_1 , S_2 , S_3 \vdash S$ គឺ Fallacy

$\therefore$ $S_1 , S_2 , S_3 \vdash S$ គឺ Fallacy

S_1 : បើខ្ញុំធ្វើការ នោះខ្ញុំមិនអាចរៀនបានទេ

S_2 : ខ្ញុំធ្វើការ ឬ ខ្ញុំប្រឡងគណិតវិទ្យា

S_3 : ខ្ញុំប្រឡងគណិតវិទ្យា

S : ដូចនេះ ខ្ញុំរៀន

- តាង សំណើ : p " ខ្ញុំធ្វើការ "

  q " ខ្ញុំរៀន " , $\neg q$ " ខ្ញុំមិនអាចរៀនបានទេ "

  r " ខ្ញុំប្រឡងគណិតវិទ្យា "

គេបាន Argument $S_1 , S_2 , S_3 \vdash S$ មានទម្រង់ : $p \Rightarrow \neg q \; , \; p \vee r \; , \; r \vdash q$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge r] \Rightarrow q$

+ តារាងភាពពិត

p	q	r	$[(p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$r]$	$\Rightarrow$	q
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Step			i	iii	ii	i	iv	i	iii	i	v	i	vi	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge r] \Rightarrow q$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p \Rightarrow \neg q$, $p \vee r$, $r \vdash q$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

មានន័យថា S_1 , S_2 , $S_3 \vdash S$ គឺ Fallacy

$\therefore$ S_1 , S_2 , $S_3 \vdash S$ គឺ Fallacy

16. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

S_1 : បើមេឃភ្លៀង នោះលោក A នឹងឈឺ

S_2 : មេឃមិនភ្លៀង

S : លោក A មិនឈឺ

- តាង សំណើ : p " មេឃភ្លៀង " , $\neg p$ " មេឃមិនភ្លៀង "

  q " លោក A ឈឺ " , $\neg q$ " លោក A មិនឈឺ "

គេបាន Argument S_1 , $S_2 \vdash S$ មានទម្រង់ : $p \Rightarrow q$, $\neg p \vdash \neg q$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$

+ តារាងភាពពិត

p	q	$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$p]$	$\Rightarrow$	$\neg$	q
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
Step		i	iii	i	iv	ii	i	v	ii	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p\Rightarrow q)\wedge\neg p]\Rightarrow\neg q$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p\Rightarrow q$, $\neg p\vdash\neg q$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

មានន័យថា $S_1 , S_2 \vdash S$ គឺ Fallacy

$\therefore$ $S_1 , S_2 \vdash S$ គឺ Fallacy

S_1 : បើមេឃភ្លៀង នោះលោក A នឹងឈឺ

S_2 : លោក A មិនឈឺ

S : មេឃមិនភ្លៀង

- តាង សំណើ : p " មេឃភ្លៀង " , $\neg p$ " មេឃមិនភ្លៀង "
  q " លោក A ឈឺ " , $\neg q$ " លោក A មិនឈឺ "

គេបាន Argument $S_1 , S_2 \vdash S$ មានទម្រង់ : $p\Rightarrow q$, $\neg q\vdash\neg p$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p\Rightarrow q)\wedge\neg q]\Rightarrow\neg p$

+ តារាងភាពពិត

p	q	$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$q]$	$\Rightarrow$	$\neg$	p
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
Step		i	iii	i	iv	ii	i	v	ii	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ ជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p \Rightarrow q$, $\neg q \vdash \neg p$ ត្រឹមត្រូវ ឬ មានសុពលភាព (Valid)

មានន័យថា $S_1 , S_2 \vdash S$ គឺ Valid

$\therefore$ $S_1 , S_2 \vdash S$ គឺ Valid

17. រូបវិទូម្នាក់ធ្វើវិចារដូចខាងក្រោម :

- បើសម្មតិកម្មរបស់ខ្ញុំត្រឹមត្រូវ នោះការពិសោធន៍ត្រូវបានសម្រេច ។
- ការពិសោធន៍បានសម្រេចហើយ ។

ដូចនេះ សម្មតិកម្មខ្ញុំត្រឹមត្រូវ ។ តើវិចារនេះត្រឹមត្រូវឬទេ ?

- តាង សំណើ : p “ សម្មតិកម្មរបស់ខ្ញុំត្រឹមត្រូវ ”

  q “ ការពិសោធន៍ត្រូវបានសម្រេច ”

គេបាន Argument មានទម្រង់ : $p \Rightarrow q$, $q \vdash p$

- គេនឹងសិក្សាតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

\+ តារាងភាពពិត

p	q	$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$q]$	$\Rightarrow$	p
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0
Step		i	ii	i	iii	i	iv	i

តាមតារាងភាពពិតខាងលើ គេឃើញថាសំណើ $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ មិនមែនជា Tautology

ដូចនេះ គេបានវិចារ $p \Rightarrow q$, $q \vdash p$ មិនត្រឹមត្រូវ ឬ គ្មានសុពលភាព (Fallacy)

មានន័យថា : វិចារនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ

$\therefore$ វិចារនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ

18. នៅក្នុងយន្តហោះមួយគ្រឿងដែលធ្វើដំណើរពីក្រុងប៉ារីសទៅក្រុងតូក្យូ មានអ្នកដំណើរ 6 នាក់ដែលមានឈ្មោះ A , B , C , D , E និង F ។ ក្នុងចំណោមអ្នកដំណើរទាំងនេះមាន :

ម្នាក់ជាជនជាតិជប៉ុន , ម្នាក់ជាជនជាតិចិន , ម្នាក់ជាជនជាតិខ្មែរ , ម្នាក់ជាជនជាតិបារាំង , ម្នាក់ជាជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ និង ម្នាក់ទៀតជាជនជាតិឥណ្ឌា ។ គេដឹងថា :

- A និង ជប៉ុនជាគ្រូពេទ្យ
- អាល្លឺម៉ង់ចាស់ជាង A
- E និង ចិនជាសាស្ត្រាចារ្យ
- ឥណ្ឌាចាស់ជាង C
- C និង ខ្មែរជាវិស្វករ
- B និង F ឡើងយន្តហោះនៅក្រុមរោម ហើយខ្មែរឡើងយន្តហោះនៅក្រុងប៉ារីស ។
- B និង ជប៉ុនចុះនៅតូក្យូ ហើយ C និង អាល្លឺម៉ង់ចុះនៅហុងកុង ។

តើគេអាចរកសញ្ជាតិ និង មុខរបររបស់អ្នកដំណើរទាំងនេះបានដែរឬទេ ?

- គេបំពេញតារាងនេះដោយតម្លៃនៃសំណើ “ x មានសញ្ជាតិ y ” ។ គេឃើញថានៅក្នុងជួរដេកនីមួយៗត្រូវមានលេខ 0 ចំនួនប្រាំ និង លេខ 1 តែមួយគត់ (ព្រោះអ្នកដំណើរម្នាក់ៗមានសញ្ជាតិតែមួយគត់) ហើយនៅក្នុងជួរឈរនីមួយៗក៏ដូច្នេះដែរ (ព្រោះអ្នកដំណើរទាំងអស់នោះមានសញ្ជាតិខុសៗគ្នាទាំងអស់) ។

ឧទាហរណ៍ : សំណើ “ A និង ជប៉ុនជាគ្រូពេទ្យ ” បញ្ជាក់ថា : “ A មានសញ្ជាតិជប៉ុន ” (មិនពិតទេ) ។

គេដាក់លេខ 0 នៅត្រង់ជួរដេក A និង ជួរឈរ ជប៉ុន ។ គេបំពេញតារាងនេះតាមសម្មតិកម្មដែលគេឱ្យដោយប្រើរបៀបនេះ ។

	ជប៉ុន	ចិន	ខ្មែរ	បារាំង	អាល្លឺម៉ង់	ឥណ្ឌា
A	0	0	0	0	0	1
B	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0
D	0	0	1	0	0	0
E	0	0	0	0	1	0
F	1	0	0	0	0	0

សន្និដ្ឋាន :

- A ជាឥណ្ឌា ហើយជាគ្រូពេទ្យ
- F ជាជប៉ុន ហើយជាគ្រូពេទ្យ
- D ជាខ្មែរ ហើយជាវិស្វករ
- C ជាបារាំង ហើយជាវិស្វករ
- B ជាចិន ហើយជាសាស្ត្រាចារ្យ
- E ជាអាល្លឺម៉ង់ ហើយជាសាស្ត្រាចារ្យ

19. គេឱ្យ $a\,,\,b \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា :

ក. $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=b)} \equiv a>b$

- $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=b)} \equiv \overline{\overline{(a>b)}\vee(a=b)} \equiv (a>b)\wedge\overline{(a=b)} \equiv (a>b)\wedge(a\neq b) \equiv a>b$

$\therefore$ $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=b)}\equiv a>b$

ខ. $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=a)}\equiv a\neq a$

- $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=a)}\equiv\overline{\overline{(a>b)}\vee(a=a)}\equiv(a>b)\wedge\overline{a=a}\equiv(a>b)\wedge(a\neq a)\equiv a\neq a$

$\therefore$ $\overline{(a>b)\Rightarrow(a=a)}\equiv a\neq a$

គ. $\overline{(a>b)\Rightarrow(a<b)}\equiv a>b$

- $\overline{(a>b)\Rightarrow(a<b)}\equiv\overline{\overline{(a>b)}\vee(a<b)}\equiv(a>b)\wedge\overline{(a<b)}\equiv(a>b)\wedge(a\geq b)\equiv(a>b)$

$\therefore$ $\overline{(a>b)\Rightarrow(a<b)}\equiv a>b$

20. សិក្សាតម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម :

ក. $\forall x\in\mathbb{R}:|x|=x$

- $\exists x=-1\in\mathbb{R}\ :\ |-1|=1\neq-1$

ដោយ សំណើខាងលើ (មិនពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 0 ឬ F

$\therefore$ សំណើ $\forall x\in\mathbb{R}:|x|=x$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 0 ឬ F

ខ. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$

- $\exists x = 1 \in \mathbb{R} \; : \; 1^2 = 1$

ដោយ សំណើខាងលើ (ពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 1 ឬ T

$\therefore$ សំណើ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ឬ T

គ. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$

- ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន $x + 1 > x \Leftrightarrow 1 > 0$ (ពិត)

ដោយ សំណើខាងលើ (ពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 1 ឬ T

$\therefore$ សំណើ $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ឬ T

ឃ. $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 = x$

- $x + 2 = x \Leftrightarrow 2 = 0$ (មិនពិត)

នាំឱ្យ $\nexists x \in \mathbb{R}$ ដែល $x + 2 = x$

ដោយ សំណើខាងលើ (មិនពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 0 ឬ F

$\therefore$ សំណើ $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 = x$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 0 ឬ F

21. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើនៃលំហាត់ (20)

- តាមសំណួរ (ក) នៃលំហាត់លេខ (20)

គេមាន $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = x$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = x$ គេបាន :

$$\neg[\ \forall x \in \mathbb{R} : |x| = x\ ] \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg(|x| = x) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : |x| \neq x$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = x$ គឺ $\exists x \in \mathbb{R} : |x| \neq x$

- តាមសំណួរ (ខ) នៃលំហាត់លេខ (20)

គេមាន $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$ គេបាន :

$$\neg[\ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x\ ] \equiv \forall x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 = x) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq x$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$ គឺ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq x$

- តាមសំណួរ (គ) នៃលំហាត់លេខ (20)

គេមាន $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$ គេបាន :

$$\neg[\ \forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x\ ] \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x + 1 > x) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x + 1 \leq x$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$ គឺ $\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 \leq x$

- តាមសំណួរ (ឃ) នៃលំហាត់លេខ (20)

គេមាន $\exists x \in \mathbb{R} : x+2=x$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x \in \mathbb{R} : x+2=x$ គេបាន :

$$\neg[\ \exists x \in \mathbb{R} : x+2=x\ ] \equiv \forall x \in \mathbb{R} : \neg(x+2=x) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x+2 \neq x$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x \in \mathbb{R} : x+2=x$ គឺ $\forall x \in \mathbb{R} : x+2 \neq x$

22. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ :

ក. $\forall x : P(x) \wedge \exists y : Q(y)$

- ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\forall x : P(x) \wedge \exists y : Q(y)$ គេបាន :

$$\neg[\ \forall x : P(x) \wedge \exists y : Q(y)\ ] \equiv \neg[\forall x : P(x)] \vee \neg[\exists y : Q(y)]$$
$$\equiv \exists x : \neg P(x) \vee \forall y : \neg Q(y)$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\forall x : P(x) \wedge \exists y : Q(y)$ គឺ $\exists x : \neg P(x) \vee \forall y : \neg Q(y)$

ខ. $\exists x : P(x) \vee \forall y : Q(y)$

- ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x : P(x) \vee \forall y : Q(y)$ គេបាន :

$$\neg[\ \exists x : P(x) \vee \forall y : Q(y)\ ] \equiv \neg[\exists x : P(x)] \wedge \neg[\forall y : Q(y)]$$
$$\equiv \forall x : \neg P(x) \wedge \exists y : \neg Q(y)$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x : P(x) \vee \forall y : Q(y)$ គឺ $\forall x : \neg P(x) \wedge \exists y : \neg Q(y)$

23. សិក្សាតម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោមចំពោះ $A=\{1,2,3\}$:

ក. $\exists x,\forall y:\ x^2<y+1$

ប្រសិនបើ $x=1$ នោះនាំឱ្យ $x^2<y+1$ ទៅជា $1<y+1\Leftrightarrow y>0$ (ពិត) ចំពោះ $\forall y\in A$

ដោយ សំណើខាងលើ (ពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 1 ឬ T

∴ សំណើ $\exists x,\forall y:\ x^2<y+1$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ឬ T

ខ. $\forall x,\exists y:\ x^2+y^2<12$

ចំពោះ $\forall x\in A$ ប្រសិនបើ $y=1$ នោះនាំឱ្យ $x^2+y^2<12$ ទៅជា $x^2+1<12$

$\Leftrightarrow x^2<11$ (ពិត)

ដោយ សំណើខាងលើ (ពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 1 ឬ T

∴ សំណើ $\forall x,\exists y:\ x^2+y^2<12$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ឬ T

គ. $\forall x,\forall y:\ x^2+y^2<12$

ប្រសិនបើ $x=2$ និង $y=3$ នោះនាំឱ្យ $x^2+y^2<12$ ទៅជា $2^2+3^2<12$ $\Leftrightarrow 13<12$ (មិនពិត)

ដោយ សំណើខាងលើ (មិនពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 0 ឬ F

∴ សំណើ $\forall x,\forall y:\ x^2+y^2<12$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 0 ឬ F

ឃ. $\exists x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$

ប្រសិនបើ $x = 1$ និង $z = 3$ នោះនាំឱ្យ $x^2 + y^2 < 2z^2$ ទៅជា $1^2 + y^2 < 2 \times 3^2$

$\Leftrightarrow 1 + y^2 < 18$ (ពិត) ចំពោះ $\forall y \in A$

ដោយ សំណើខាងលើ (ពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 1 ឬ T

∴ សំណើ $\exists x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ឬ T

ង. $\exists x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$

ប្រសិនបើ $z = 1$ នោះនាំឱ្យ $x^2 + y^2 < 2z^2$ ទៅជា $x^2 + y^2 < 2 \times 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2$ (មិនពិត)

ដោយ សំណើខាងលើ (មិនពិត)

នាំឱ្យគេបាន តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងលើស្មើ 0 ឬ F

∴ សំណើ $\exists x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$ មានតម្លៃភាពពិតស្មើ 0 ឬ F

24. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើនៃលំហាត់ (23)

- តាមសំណួរ (ក) នៃលំហាត់លេខ (23)

គេមាន $\exists x, \forall y : x^2 < y + 1$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x, \forall y : x^2 < y + 1$ គេបាន :

$\neg[\ \exists x, \forall y : x^2 < y + 1\ ] \equiv \forall x, \exists y : \neg(x^2 < y + 1) \equiv \forall x, \exists y : x^2 \geq y + 1$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x, \forall y : x^2 < y+1$ គឺ $\forall x, \exists y : x^2 \geq y+1$

- តាមសំណួរ (ខ) នៃលំហាត់លេខ (23)

គេមាន $\forall x, \exists y : x^2 + y^2 < 12$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\forall x, \exists y : x^2 + y^2 < 12$ គេបាន :

$$\neg[\ \forall x, \exists y : x^2 + y^2 < 12\ ] \equiv \exists x, \forall y : \neg(x^2 + y^2 < 12) \equiv \exists x, \forall y : x^2 + y^2 \geq 12$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\forall x, \exists y : x^2 + y^2 < 12$ គឺ $\exists x, \forall y : x^2 + y^2 \geq 12$

- តាមសំណួរ (គ) នៃលំហាត់លេខ (23)

គេមាន $\forall x, \forall y : x^2 + y^2 < 12$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\forall x, \forall y : x^2 + y^2 < 12$ គេបាន :

$$\neg[\ \forall x, \forall y : x^2 + y^2 < 12\ ] \equiv \exists x, \exists y : \neg(x^2 + y^2 < 12) \equiv \exists x, \exists y : x^2 + y^2 \geq 12$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\forall x, \forall y : x^2 + y^2 < 12$ គឺ $\exists x, \exists y : x^2 + y^2 \geq 12$

- តាមសំណួរ (ឃ) នៃលំហាត់លេខ (23)

គេមាន $\exists x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$ គេបាន :

$$\neg[\ \exists x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2\ ] \equiv \forall x, \exists y, \forall z : \neg(x^2 + y^2 < 2z^2)$$

$$\equiv \forall x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 \geq 2z^2$$

∴ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$ គឺ $\forall x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 \geq 2z^2$

- តាមសំណួរ (ង) នៃលំហាត់លេខ (23)

គេមាន $\exists x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$ គេបាន :

$$\neg[\ \exists x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2\ ] \equiv \forall x, \forall y, \exists z : \neg\left(x^2 + y^2 < 2z^2\right)$$

$$\equiv \forall x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 \geq 2z^2$$

∴ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x, \exists y, \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$ គឺ $\forall x, \forall y, \exists z : x^2 + y^2 \geq 2z^2$

25. ដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើខាងក្រោម :

ក. $\forall x, \exists y : [P(x) \vee Q(y)]$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\forall x, \exists y : [P(x) \vee Q(y)]$ គេបាន :

$$\neg\{\ \forall x, \exists y : [P(x) \vee Q(y)]\ \} \equiv \exists x, \forall y : \neg[P(x) \vee Q(y)]$$

$$\equiv \exists x, \forall y : [\neg P(x) \wedge \neg Q(y)]$$

∴ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\forall x, \exists y : [P(x) \vee Q(y)]$ គឺ $\exists x, \forall y : [\neg P(x) \wedge \neg Q(y)]$

ខ. $\exists x, \forall y : [P(x, y) \rightarrow Q(x, y)]$

ដោយដាក់ឈ្នាប់មិនលើសំណើ $\exists x, \forall y : [P(x, y) \rightarrow Q(x, y)]$ គេបាន :

$$\neg\{\ \exists x,\forall y : [P(x,y)\to Q(x,y)]\ \} \equiv \forall x,\exists y : \neg[P(x,y)\to Q(x,y)]$$

$$\equiv \forall x,\exists y : \neg[\neg P(x,y)\vee Q(x,y)]$$

$$\equiv \forall x,\exists y : [P(x,y)\wedge\neg Q(x,y)]$$

$\therefore$ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $\exists x,\forall y : [P(x,y)\to Q(x,y)]$ គឺ $\forall x,\exists y : [P(x,y)\wedge\neg Q(x,y)]$

ននននន 📖 ឧឧឧឧ

លំហាត់ផ្នែកទ្រឹស្តីសំណុំ

1. រកសំណុំដែលស្មើគ្នាក្នុងចំណោមសំណុំខាងក្រោម :

$A=\{x : x^2-4x+3=0\}$

$B=\{x : x^2-3x+2=0\}$

$C=\{x : x\in\mathbb{N}^* ,\ x<3\}$

$D=\{x : x\in\mathbb{N} : x \text{ is odd} ,\ x<5\}$

2. គេឱ្យ $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$, $D=\{3,4,5\}$, $E=\{3,5\}$

តើសំណុំ X ស្មើនឹងសំណុំណាមួយក្នុងចំណោមសំណុំខាងលើ ដោយគេដឹងថា :

i. X និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា

ii. $X\subset D$ តែ $X\not\subset B$

iii. $X\subset A$ តែ $X\not\subset C$

iv. $X\subset C$ តែ $X\not\subset A$

3. នៅក្នុងប្លង់មួយគេតាង :

- Q ជាសំណុំនៃចតុកោណ
- T ជាសំណុំចតុកោណព្នាយ
- C ជាសំណុំការេ
- P ជាសំណុំប្រលេឡូក្រាម
- R ជាសំណុំចតុកោណកែង
- L ជាសំណុំចតុកោណស្មើ

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងតាម " ភាពនៅក្នុង " រវាងសំណុំខាងលើ ។

ខ. ចូររកសំណុំ $L \cap R$, $Q \cap P$, $C \cup R$, $L - Q$, $L \cap R \cap T$

គ. គូស Venn diagram តាងឱ្យទំនាក់ទំនងនៃសំណុំខាងលើ ។

4. នៅក្នុងប្លង់មួយគេតាង :

- T ជាសំណុំត្រីកោណ
- E ជាសំណុំត្រីកោណសម័ង្ស
- I ជាសំណុំត្រីកោណសមបាត
- R ជាសំណុំត្រីកោណកែង
- B ជាសំណុំត្រីកោណដែលមានមុំទាល

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងតាម " ភាពនៅក្នុង " រវាងសំណុំខាងលើ ។

ខ. ចូររកសំណុំ $E \cap R$, $E \cap B$, $R \cap B$, $T \cap I$, $T \cup I$, $I - T$, $I \cap B$, $T - I$

គ. គូស Venn diagram តាងឱ្យទំនាក់ទំនងនៃសំណុំខាងលើ ។

5. ក្នុងសកល $\mathbb{R}$ គេឱ្យសំណុំ E , F , G , H កំណត់ដូចខាងក្រោម :

$E = \{x : x \in \mathbb{R} , \ x + 5 > 0\}$ $\qquad$ $G = \{x : x \in \mathbb{R} , \ x + 5 < 0\}$

$F = \{x : x \in \mathbb{R} , \ x - 2 > 0\}$ $\qquad$ $H = \{x : x \in \mathbb{R} , \ x - 2 < 0\}$

ចូរសរសេរសំណុំ $A = \{x : x \in \mathbb{R} , \ (x+5)(x-2) > 0\}$ ជាអនុគមន៍នៃ E , F , G , H ។

6. គេឱ្យសំណុំ $M=\left\{ \ x : x=\dfrac{n+7}{n+1} \ , n\in\mathbb{N}^{*} \ \right\}$

កំណត់សំណុំរង A នៃ M ដែល $A=\left\{ \ x\in M : x\in\mathbb{Z} \ \right\}$ ។

7. គេឱ្យ A , B ជាសំណុំ ។ បង្ហាញថា :

i. $A\cup B=B\cup(A-B)$

ii. $B\cap(A-B)=\varnothing$

iii. $A=(A-B)\cup(A\cap B)$

iv. $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

v. $A-B=A\cap\overline{B}$

vi. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

vii. $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$

viii. $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

8. គេឱ្យ A , B ជាសំណុំ ។ បង្ហាញថា :

i. $A\cup(A\cap B)=A$

ii. $A\cap(A\cup B)=A$

9. គេឱ្យបីសំណុំ A , B , C ។

i. បង្ហាញថា : $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

ii. រកឧទាហរណ៍ដើម្បីបញ្ជាក់ថា : $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$

10. គេឱ្យបីសំណុំ A , B , C ។ ចូរសម្រួល :

i. $[A\cup(A\cap B)]\cap B$

ii. $(A\cup B)\cap(B\cap C)\cap(C\cup A)$

iii. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

iv. $(\overline{A\cup B})\cap(C\cup\overline{A})$

v. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

vi. $A\cap B\cap(B\cup\overline{C})$

vii. $\overline{[(\overline{A\cap B})\cap(\overline{A\cap C})]\cup A}$

viii. $A\cup\{[B\cap(A\cup B)]\cap[A\cup(A\cap B)]\}$

ix. $A\cap(\overline{A}\cup B)$

11. គេឱ្យបួនសំណុំ A , B , C , D ។

i. បង្ហាញថា បើ $A\subset B$ និង $C\subset D$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap D$ និង $A\cup C\subset B\cup D$

ii. បង្ហាញថា បើ $A\subset B$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap C$ និង $A\cup C\subset B\cup C$

iii. បើ $A\cap C\subset B\cap C$ តើគេបាន $A\subset B$ ឬទេ ?

iv. បើ $A\cup C\subset B\cup C$ តើគេបាន $A\subset B$ ឬទេ ?

v. បើ $A\cap C\subset B\cap C$ និង $A\cup C\subset B\cup C$ តើគេបាន $A\subset B$ ឬទេ ?

12. រក Dual នៃសមភាពខាងក្រោម :

i. $A\cup(A\cap B)=A$

ii. $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=U$

iii. $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$

iv. $(A\cap U)\cap(\varnothing\cup\overline{A})=\varnothing$

v. $(A\cup U)\cap(A\cap\varnothing)=\varnothing$

vi. $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A\cup C}\cap\overline{A\cup B}$

vii. $\overline{A\cap U}\cap A=\varnothing$

viii. $A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$

ix. $(A\cap U)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

x. $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$

13. គេឱ្យបីសំណុំ A , B , C ។

i. បើ $A\cap C = B\cap C$ តើគេបាន $A = B$ ឬទេ ?

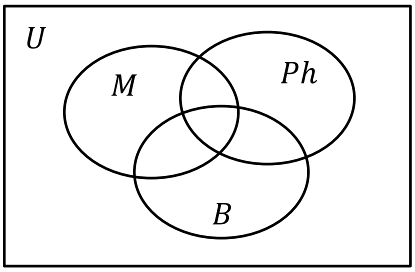
ii. បើ $A\cup C = B\cup C$ តើគេបាន $A = B$ ឬទេ ?

iii. បើ $A\cap C = B\cap C$ និង $A\cup C = B\cup C$ តើគេបាន $A = B$ ឬទេ ?

14. ការស្ទង់មតិចំពោះនិស្សិតចំនួន 100 នាក់ឱ្យលទ្ធផលតាមស្ថិតិដូចខាងក្រោម :

32 នាក់រៀនគណិតវិទ្យា , 20 នាក់រៀនរូបវិទ្យា , 45 នាក់រៀនជីវវិទ្យា , 15 នាក់រៀនគណិតវិទ្យា និង ជីវវិទ្យា

7 នាក់រៀនគណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា , 10 នាក់រៀនរូបវិទ្យា និង ជីវវិទ្យា , 30 នាក់មិនរៀនទាំងបីមុខវិជ្ជា ។



ក. រកចំនួននិស្សិតដែលរៀនទាំងបីមុខវិជ្ជា ។

ខ. រកចំនួននិស្សិតដែលរៀនតែពីរមុខវិជ្ជា ។

គ. រកចំនួននិស្សិតដែលរៀនតែមួយមុខវិជ្ជា ។

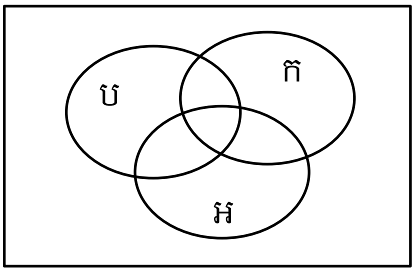
បញ្ជាក់ : បំពេញចំនួនខាងលើក្នុង Venn diagram ខាងលើ ។

15. ការស្ទង់មតិចំពោះប្រជាជន 60 នាក់ឱ្យលទ្ធផលតាមស្ថិតិដូចខាងក្រោម :

25 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ , 26 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា , 26 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

9 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ និង ទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា , 11 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ និង ទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

8 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា និង ទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ , 8 នាក់មិនអានទាំងបីទស្សនាវដ្ដី ។



ក. រកចំនួនប្រជាជនដែលអានតទាំងបីទស្សនាវដ្ដី ។

ខ. រកចំនួនប្រជាជនដែលអានតែពីរទស្សនាវដ្ដី ។

គ. រកចំនួនប្រជាជនដែលអានតែមួយទស្សនាវដ្ដី ។

បញ្ជាក់ : បំពេញចំនួនខាងលើក្នុង Venn diagram ខាងលើ ។

16. គេឱ្យសំណុំ $A = \{1,2,3,4,5\}$ ។ រកថ្នាក់ $\mathcal{A}$ ដែល :

ក. $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមិនមានធាតុ 2 និង 4 ។

ខ. $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមានផលបូកធាតុទាំងអស់ស្មើនឹង 5 ។

គ. $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមានបួនធាតុ ។

17. រក Power set $\wp(A)$ ដែល :

ក. $A=\{a,b,c\}$

ខ. $A=\{1,2,3,4\}$

គ. $A=\{a,b,c,d,e\}$

18. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

S_1 : និស្សិតទាំងអស់សុទ្ធតែជាមនុស្សឧស្សាហ៍

S_2 : គ្មានអ្នកក្រណាម្នាក់ជានិស្សិត

S : មនុស្សឧស្សាហ៍សុទ្ធតែមិនមែនជាអ្នកក្រ

19. បង្ហាញថា :

i. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ii. $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

iii. $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

iv. $n!\geq 2^n$, for $\forall n\geq 4$

20. គេឱ្យពីរសំណុំ A , B ។

គេបានផលសងឆ្លុះនៃ A និង B កំណត់សរសេរដោយ : $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ ។

a) Given $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$, $D=\{2,3,5,7,8\}$

រក $A\Delta B$, $B\Delta C$, $C\Delta D$, $A\Delta D$, $A\cap(B\Delta D)$, $(A\cap B)\Delta(A\cap D)$

b) បង្ហាញថា : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទ្រឹស្តីសំណុំ

1. រកសំណុំដែលស្មើគ្នាក្នុងចំណោមសំណុំខាងក្រោម :

$A=\{x:x^2-4x+3=0\}$ $\quad C=\{x:x\in\mathbb{N}^*\ ,\ x<3\}$

$B=\{x:x^2-3x+2=0\}$ $\quad D=\{x:x\in\mathbb{N}:\ x\ \text{ is odd}\ ,\ x<5\}$

- $A=\{x:x^2-4x+3=0\}$

ដោយសមីការ $x^2-4x+3=0$ មានឫស $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

នាំឱ្យសំណុំ $A=\{1,3\}$

- $B=\{x:x^2-3x+2=0\}$

ដោយសមីការ $x^2-3x+2=0$ មានឫស $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

នាំឱ្យសំណុំ $B=\{1,2\}$

- $C=\{x:x\in\mathbb{N}^*\ ,\ x<3\}$

ដោយ $x\in\mathbb{N}^*$, $x<3$ គេបាន $x=1\ ,\ 2$

នាំឱ្យសំណុំ $C=\{1,2\}$

- $D=\{x:x\in\mathbb{N}:\ x\ \text{ is odd}\ ,\ x<5\}$

ដោយ $x\in\mathbb{N}$: x is odd , $x<5$ គេបាន $x=1\ ,\ 3$

នាំឱ្យសំណុំ $D=\{1,3\}$

$\therefore$ $A = D = \{1,3\}$ & $B = C = \{1,2\}$

2. គេឱ្យ $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$, $D = \{3,4,5\}$, $E = \{3,5\}$

តើសំណុំ X ស្មើនឹងសំណុំណាមួយក្នុងចំណោមសំណុំខាងលើ ដោយគេដឹងថា :

i. X និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា

ដើម្បីឱ្យ X និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា លុះត្រាតែ $X \cap B = \varnothing$

$\therefore$ $X = C = \{1,3,5,7,9\}$, $X = E = \{3,5\}$

ii. $X \subset D$ តែ $X \not\subset B$

$X \subset D \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \in D$

$X \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in X$ ដែល $x \notin B$

$\therefore$ $X = E = \{3,5\}$

iii. $X \subset A$ តែ $X \not\subset C$

$X \subset A \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \in A$

$X \not\subset C \Leftrightarrow \exists x \in X$ ដែល $x \notin C$

$\therefore$ $X = B = \{2,4,6,8\}$, $X = D = \{3,4,5\}$

iv. $X \subset C$ តែ $X \not\subset A$

$X \subset C \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \in C$

$X \not\subset A \Leftrightarrow \exists x \in X$ ដែល $x \notin A$

តាមការសង្កេតមើលសំណុំខាងលើ យើងឃើញថា $A \subset A$, $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset A$

$\therefore$ | គេមិនអាចរកសំណុំ X ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌខាងលើនេះបានទេ |

3. នៅក្នុងប្លង់មួយគេតាង :

- Q ជាសំណុំនៃចតុកោណ
- T ជាសំណុំចតុកោណព្នាយ
- C ជាសំណុំការេ
- P ជាសំណុំប្រលេឡូក្រាម
- R ជាសំណុំចតុកោណកែង
- L ជាសំណុំចតុកោណស្មើ

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងតាម “ ភាពនៅក្នុង ” រវាងសំណុំខាងលើ ។

$\therefore$ | $C \subset L \subset R \subset P \subset T \subset Q$ |

ខ. ចូររកសំណុំ $L \cap R$, $Q \cap P$, $C \cup R$, $L - Q$, $L \cap R \cap T$

$\therefore$

$L \cap R = C$

$Q \cap P = P$ (ព្រោះ: $P \subset Q$)

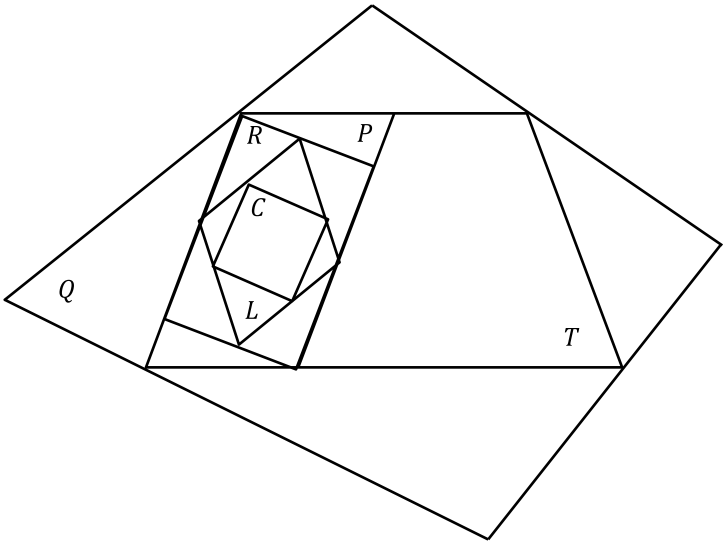
$C \cup R = R$ (ព្រោះ: $C \subset R$)

$L - Q = \varnothing$ (ព្រោះ: $L \subset Q$)

$L \cap R \cap T = (L \cap R) \cap T = C \cap T = C$ (ព្រោះ: $L \cap R = C$ & $C \subset T$)

គ. គូស Venn diagram តាងឱ្យទំនាក់ទំនងនៃសំណុំខាងលើ ។

$$C \subset L \subset R \subset P \subset T \subset Q$$



4. នៅក្នុងប្លង់មួយគេតាង :

- T ជាសំណុំត្រីកោណ
- E ជាសំណុំត្រីកោណសម័ង្ស
- I ជាសំណុំត្រីកោណសមបាត
- R ជាសំណុំត្រីកោណកែង
- B ជាសំណុំត្រីកោណដែលមានមុំទាល

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងតាម “ ភាពនៅក្នុង ” រវាងសំណុំខាងលើ ។

$$\therefore \boxed{E \subset I \subset T \ , \ R \subset T \ , \ B \subset T}$$

ខ. ចូររកសំណុំ $E\cap R$, $E\cap B$, $R\cap B$, $T\cap I$, $T\cup I$, $I-T$, $I\cap B$, $T-I$

$\therefore$

$E\cap R=\varnothing$ (ព្រោះគ្មានត្រីកោណសម័ង្សណាដែលមានមុំកែងទេ)

$E\cap B=\varnothing$ (ព្រោះគ្មានត្រីកោណសម័ង្សណាដែលមានមុំទាលទេ)

$R\cap B=\varnothing$ (ព្រោះគ្មានត្រីកោណកែងណាដែលមានមុំទាលទេ)

$T\cap I=I$ (ព្រោះ $I\subset T$)

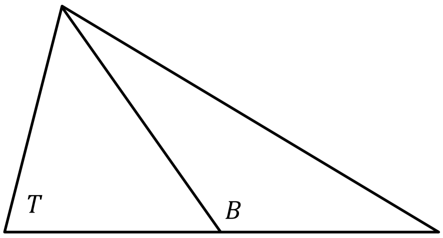
$T\cup I=T$ (ព្រោះ $I\subset T$)

$I-T=\varnothing$ (ព្រោះ $I\subset T$)

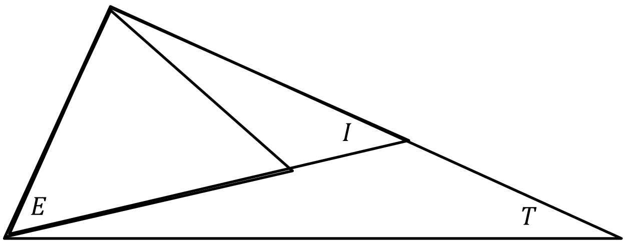
$I\cap B=$ សំណុំនៃត្រីកោណសមបាតដែលមានមុំទាល

$T-I=$ សំណុំនៃត្រីកោណដែលមិនសមបាត

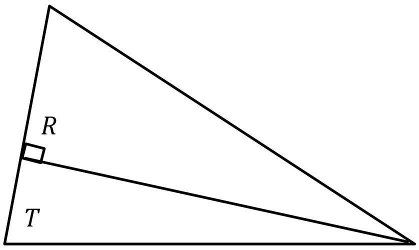
គ. គូស Venn diagram តាងឱ្យទំនាក់ទំនងនៃសំណុំខាងលើ ។



$B\subset T$



$E\subset I\subset T$



$R\subset T$

5. ក្នុងសកល $\mathbb{R}$ គេឱ្យសំណុំ E , F , G , H កំណត់ដូចខាងក្រោម :

$E=\{x : x\in\mathbb{R} , x+5>0\}$ $G=\{x : x\in\mathbb{R} , x+5<0\}$

$F=\{x : x\in\mathbb{R} , x-2>0\}$ $H=\{x : x\in\mathbb{R} , x-2<0\}$

ចូរសរសេរសំណុំ $A=\{x : x\in\mathbb{R} , (x+5)(x-2)>0\}$ ជាអនុគមន៍នៃ E , F , G , H ។

- $(x+5)(x-2)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x+5<0 \\ x-2<0 \end{cases}$

នាំឱ្យសំណុំ $A=(E\cap F)\cup(G\cap H)$

$\therefore$ $\boxed{A=(E\cap F)\cup(G\cap H)}$

6. គេឱ្យសំណុំ $M=\left\{ x : x=\dfrac{n+7}{n+1} , n\in\mathbb{N}^* \right\}$

កំណត់សំណុំរង A នៃ M ដែល $A=\{ x\in M : x\in\mathbb{Z} \}$ ។

$$\frac{n+7}{n+1}=\frac{(n+1)+6}{n+1}=1+\frac{6}{n+1}$$

ដោយ $n\in\mathbb{N}^*$ ដើម្បីឱ្យ 6 ចែកដាច់នឹង $n+1$ លុះត្រាតែ $n=1 , 2 , 5$

+ ចំពោះ $n=1 \Rightarrow x=1+\dfrac{6}{n+1}=1+\dfrac{6}{1+1}=1+3=4$

+ ចំពោះ $n=2 \Rightarrow x=1+\dfrac{6}{n+1}=1+\dfrac{6}{2+1}=1+2=3$

+ ចំពោះ $n=5 \Rightarrow x=1+\dfrac{6}{n+1}=1+\dfrac{6}{5+1}=1+1=2$

$\therefore$ សំណុំរង A នៃ M គឺ $A=\varnothing , \{2\} , \{3\} , \{4\} , \{2,3\} , \{2,4\} , \{3,4\} , \{2,3,4\}$

7. គេឱ្យ A , B ជាសំណុំ ។ បង្ហាញថា :

i. $A\cup B=B\cup(A-B)$

- $B\cup(A-B)=B\cup(A\cap\overline{B})=(B\cup A)\cap(B\cup\overline{B})=(B\cup A)\cap U=B\cup A=A\cup B$

(ដែល U ជាសំណុំសកល)

$\therefore$ $\boxed{A\cup B=B\cup(A-B)}$

ii. $B\cap(A-B)=\varnothing$

- $B\cap(A-B)=B\cap(A\cap\overline{B})=B\cap(\overline{B}\cap A)=(B\cap\overline{B})\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$

$\therefore$ $\boxed{B\cap(A-B)=\varnothing}$

iii. $A=(A-B)\cup(A\cap B)$

- $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=[A\cup(A\cap B)]\cap[\overline{B}\cup(A\cap B)]$

$=A\cap[(\overline{B}\cup A)\cap(\overline{B}\cup B)]=A\cap[(\overline{B}\cup A)\cap U]$

$=A\cap(\overline{B}\cup A)=A\cap(A\cup\overline{B})=A$

$\therefore$ $\boxed{A=(A-B)\cup(A\cap B)}$

iv. $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

- $(A-B)\cap(A\cap B)=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap B)=(A\cap\overline{B})\cap(B\cap A)$

$=[A\cap(\overline{B}\cap B)]\cap A=(A\cap\varnothing)\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$

$\therefore$ $$(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$$

v. $A-B=A\cap\overline{B}$

- $A-B=\{x : x\in A \wedge x\notin B\}=\{x : x\in A \wedge x\in\overline{B}\}=\{x : x\in(A\cap\overline{B})\}$

$\therefore$ $$A-B=A\cap\overline{B}$$

vi. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

- $(A-B)-C=(A\cap\overline{B})-C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$
- $A-(B\cup C)=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$

$\therefore$ $$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

vii. $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$

- $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=(\overline{B}\cap A)\cap(A\cap\overline{C})$

  $=[\overline{B}\cap(A\cap A)]\cap\overline{C}=(\overline{B}\cap A)\cap\overline{C}$
- $A-(B\cup C)=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=(\overline{B}\cap A)\cap\overline{C}$

$\therefore$ $$(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$$

viii. $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

- $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=[A\cup(A\cap\overline{C})]\cap[\overline{B}\cup(A\cap\overline{C})]$

$$=A\cap[(\overline{B}\cup A)\cap(\overline{B}\cup\overline{C})]=[A\cap(\overline{B}\cup A)]\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$$

$$=[A\cap(A\cup\overline{B})]\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$$

- $A-(B\cap C)=A\cap(\overline{B\cap C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$\therefore$ $\boxed{(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)}$

8. គេឱ្យ A , B ជាសំណុំ ។ បង្ហាញថា :

i. $A\cup(A\cap B)=A$

- $A=A\cap U=A\cap(U\cup B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B)$

(ដែល U ជាសំណុំសកល)

$\therefore$ $\boxed{A\cup(A\cap B)=A}$

ii. $A\cap(A\cup B)=A$

- $A=A\cup\varnothing=A\cup(\varnothing\cap B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B)$

(ដែល U ជាសំណុំសកល)

$\therefore$ $\boxed{A\cap(A\cup B)=A}$

9. គេឱ្យបីសំណុំ A , B , C ។

i. បង្ហាញថា : $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

- $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap\overline{C})$
- $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})$

$$=\left[A\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\right]\cap\left[B\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\right]$$

$$=\left[(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{C})\right]\cap\left[(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{C})\right]$$

$$=\left[\varnothing\cup(A\cap\overline{C})\right]\cap\left[(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{C})\right]$$

$$=(A\cap\overline{C})\cap\left[(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{C})\right]$$

$$=\left[(A\cap\overline{C})\cap(B\cap\overline{A})\right]\cup\left[(A\cap\overline{C})\cap(B\cap\overline{C})\right]$$

$$=\left[(\overline{C}\cap A)\cap(\overline{A}\cap B)\right]\cup\left[(A\cap\overline{C})\cap(\overline{C}\cap B)\right]$$

$$=\left\{\left[\overline{C}\cap(A\cap\overline{A})\right]\cap B\right\}\cup\left\{\left[A\cap(\overline{C}\cap\overline{C})\right]\cap B\right\}$$

$$=\left[(\overline{C}\cap\varnothing)\cap B\right]\cup\left[(A\cap\overline{C})\cap B\right]=(\varnothing\cap B)\cup\left[(A\cap\overline{C})\cap B\right]$$

$$=\varnothing\cup\left[(A\cap\overline{C})\cap B\right]=(A\cap\overline{C})\cap B=A\cap(\overline{C}\cap B)=A\cap(B\cap\overline{C})$$

$\therefore$ $\boxed{A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)}$

ii. រកឧទាហរណ៍ដើម្បីបញ្ជាក់ថា : $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$

- ឧទាហរណ៍ : គេមានបីសំណុំ $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{c,d,e,f,g\}$ និង $C=\{b,e,h\}$

គេបាន $B-C=\{c,d,f,g\}$, $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A\cup C=\{a,b,c,d,e,h\}$

នាំឱ្យ $A\cup(B-C)=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $(A\cup B)-(A\cup C)=\{f,g\}$

នាំឱ្យ $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$

$\therefore$ $\boxed{A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)}$

10. គេឱ្យបីសំណុំ A , B , C ។ ចូរសម្រួល :

i. $[A\cup(A\cap B)]\cap B$

- $[A\cup(A\cap B)]\cap B=A\cap B$ (ព្រោះ $A\cup(A\cap B)=A$)

$\therefore$ $\boxed{[A\cup(A\cap B)]\cap B=A\cap B}$

ii. $(A\cup B)\cap(B\cap C)\cap(C\cup A)$

- $(A\cup B)\cap(B\cap C)\cap(C\cup A)=[(A\cup B)\cap(B\cap C)]\cap(C\cup A)$
- $(A\cup B)\cap(B\cap C)=B\cap C$ (ព្រោះ $B\cap C\subset B\subset A\cup B$)
- $(B\cap C)\cap(C\cup A)=B\cap C$ (ព្រោះ $B\cap C\subset C\subset C\cup A$)

នាំឱ្យ $[(A\cup B)\cap(B\cap C)]\cap(C\cup A)=(B\cap C)\cap(C\cup A)=B\cap C$

$\therefore$ $\boxed{(A\cup B)\cap(B\cap C)\cap(C\cup A)=B\cap C}$

iii. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

- $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=[A\cup(A\cap\overline{B})]\cap[B\cup(A\cap\overline{B})]=A\cap[(B\cup A)\cap(B\cup\overline{B})]$

$=A\cap[(B\cup A)\cap U]=A\cap(B\cup A)=A$

$\therefore$ $\boxed{(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A}$

iv. $(\overline{A\cup B})\cap(C\cup\overline{A})$

- $(\overline{A\cup B})\cap(C\cup\overline{A})=(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(C\cup\overline{A})=(\overline{B}\cap\overline{A})\cap(C\cup\overline{A})$

$=\overline{B}\cap[\overline{A}\cap(C\cup\overline{A})]=\overline{B}\cap[\overline{A}\cap(\overline{A}\cup C)]=\overline{B}\cap\overline{A}$

$\therefore$ $$\left(\overline{A\cup B}\right)\cap\left(C\cup\overline{A}\right)=\overline{B}\cap\overline{A}$$

v. $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$

- $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left[\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right]\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$

(ដោយ $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=A$)

$$=A\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(A\cup B\right)$$

$$=U\cap\left(A\cup B\right)=A\cup B$$

$\therefore$ $$\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=A\cup B$$

vi. $A\cap B\cap\left(B\cup\overline{C}\right)$

- $A\cap B\cap\left(B\cup\overline{C}\right)=A\cap\left[B\cap\left(B\cup\overline{C}\right)\right]=A\cap B$

$\therefore$ $$A\cap B\cap\left(B\cup\overline{C}\right)=A\cap B$$

vii. $\overline{\left[\left(\overline{A\cap B}\right)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right]\cup A}$

- $\overline{\left[\left(\overline{A\cap B}\right)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right]\cup A}=\overline{\left[\left(\overline{A\cap B}\right)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right]}\cap\overline{A}=\left[\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)\right]\cap\overline{A}$

$$=\left[A\cap\left(B\cup C\right)\right]\cap\overline{A}=\overline{A}\cap\left[A\cap\left(B\cup C\right)\right]$$

$$=\left(\overline{A}\cap A\right)\cap\left(B\cup C\right)=\varnothing\cap\left(B\cup C\right)=\varnothing$$

$\therefore$ $$\overline{\left[\left(\overline{A\cap B}\right)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right]\cup A}=\varnothing$$

viii. $A\cup\{[B\cap(A\cup B)]\cap[A\cup(A\cap B)]\}$

- $A\cup\{[B\cap(A\cup B)]\cap[A\cup(A\cap B)]\}=A\cup(B\cap A)=A$

(ព្រោះ $B\cap(A\cup B)=B$ & $A\cup(A\cap B)=A$)

$\therefore$ $\boxed{A\cup\{[B\cap(A\cup B)]\cap[A\cup(A\cap B)]\}=A}$

ix. $A\cap(\overline{A}\cup B)$

- $A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

$\therefore$ $\boxed{A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B}$

11. គេឱ្យបួនសំណុំ A , B , C , D ។

i. បង្ហាញថា បើ $A\subset B$ និង $C\subset D$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap D$ និង $A\cup C\subset B\cup D$

- $\forall x\in A\cap C \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in C$

គេមាន $A\subset B$ និង $C\subset D$

$\Rightarrow x\in B\wedge x\in D$

$\Rightarrow x\in B\cap D$

គេបាន $A\cap C\subset B\cap D$

$\therefore$ $\boxed{\text{បើ } A\subset B \text{ និង } C\subset D \text{ នោះគេបាន } A\cap C\subset B\cap D}$

- $\forall x\in A\cup C \Leftrightarrow x\in A\vee x\in C$

គេមាន $A\subset B$ និង $C\subset D$

$\Rightarrow x\in B\vee x\in D$

$\Rightarrow x\in B\cup D$

គេបាន $A\cup C\subset B\cup D$

$\therefore$ | បើ $A\subset B$ និង $C\subset D$ នោះគេបាន $A\cup C\subset B\cup D$ |

ii. បង្ហាញថា បើ $A\subset B$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap C$ និង $A\cup C\subset B\cup C$

- តាមសំណួរ (i) គេមាន បើ $A\subset B$ និង $C\subset D$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap D$

គេមាន $A\subset B$ និង $C\subset C$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap C$

$\therefore$ | បើ $A\subset B$ នោះគេបាន $A\cap C\subset B\cap C$ |

- តាមសំណួរ (i) គេមាន បើ $A\subset B$ និង $C\subset D$ នោះគេបាន $A\cup C\subset B\cup D$

គេមាន $A\subset B$ និង $C\subset C$ នោះគេបាន $A\cup C\subset B\cup C$

$\therefore$ | បើ $A\subset B$ នោះគេបាន $A\cup C\subset B\cup C$ |

iii. បើ $A\cap C\subset B\cap C$ តើគេបាន $A\subset B$ ឬទេ ?

(សម្រាយបញ្ជាក់ ដោយលើកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ)

ឧទាហរណ៍ : គេមានបីសំណុំ $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,5,6\}$ និង $C=\{2,4,6\}$

គេបាន $A\cap C=\{2\}$, $B\cap C=\{2,6\}$

$\therefore$ | បើ $A\cap C\subset B\cap C$ គេមិនអាចទាញបានថា $A\subset B$ ទេ |

iv. បើ $A\cup C\subset B\cup C$ តើគេបាន $A\subset B$ ឬទេ ?

(សម្រាយបញ្ជាក់ ដោយលើកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ)

ឧទាហរណ៍ : គេមានបីសំណុំ $A=\{3,4\}$, $B=\{1,2,3\}$ និង $C=\{4,5,6\}$

គេបាន $A\cup C=\{3,4,5,6\}$, $B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore$ | បើ $A\cup C\subset B\cup C$ គេមិនអាចទាញបានថា $A\subset B$ ទេ |

v. បើ $A\cap C\subset B\cap C$ និង $A\cup C\subset B\cup C$ តើគេបាន $A\subset B$ ឬទេ ?

+ ករណីទី១ : បើ $x\in A$ និង $x\in C$

ក្នុងករណី $x\in A\cap C$

គេមាន $A\cap C\subset B\cap C$

នាំឱ្យ $x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in B$ និង $x\in C$

$\Rightarrow x\in B$

នាំឱ្យ $A\subset B$

+ ករណីទី២ : បើ $x\in A$ និង $x\notin C$

ក្នុងករណី $x\in A\cup C$

គេមាន $A\cup C\subset B\cup C$

នាំឱ្យ $x\in B\cup C \Leftrightarrow x\in B$ ឬ $x\in C$

តែ $x\notin C$ នាំឱ្យ $x\in B$

នាំឱ្យ $A\subset B$

$\therefore$ | បើ $A\cap C\subset B\cap C$ និង $A\cup C\subset B\cup C$ គេបាន $A\subset B$ |

12. រក Dual នៃសមភាពខាងក្រោម :

i. $A\cup(A\cap B)=A$

- Dual នៃ $A\cup(A\cap B)=A$ គឺ $A\cap(A\cup B)=A$

$\therefore$ Dual នៃ $A\cup(A\cap B)=A$ គឺ $A\cap(A\cup B)=A$

ii. $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=U$

- Dual នៃ $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=U$ គឺ :

$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing$

$\therefore$ Dual នៃ $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=U$ គឺ :

$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing$

iii. $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$

- Dual នៃ $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$ គឺ $(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A$

$\therefore$ Dual នៃ $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$ គឺ $(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A$

iv. $(A\cap U)\cap(\varnothing\cup\overline{A})=\varnothing$

- Dual នៃ $(A\cap U)\cap(\varnothing\cup\overline{A})=\varnothing$ គឺ $(A\cup\varnothing)\cup(U\cap\overline{A})=U$

$\therefore$ Dual នៃ $(A\cap U)\cap(\varnothing\cup\overline{A})=\varnothing$ គឺ $(A\cup\varnothing)\cup(U\cap\overline{A})=U$

v. $(A\cup U)\cap(A\cap\varnothing)=\varnothing$

- Dual នៃ $(A\cup U)\cap(A\cap\varnothing)=\varnothing$ គឺ $(A\cap\varnothing)\cup(A\cup U)=U$

$\therefore$ Dual នៃ $(A\cup U)\cap(A\cap\varnothing)=\varnothing$ គឺ $(A\cap\varnothing)\cup(A\cup U)=U$

vi. $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A\cup C}\cap\overline{A\cup B}$

- Dual នៃ $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A\cup C}\cap\overline{A\cup B}$ គឺ $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A\cap C}\cup\overline{A\cap B}$

$\therefore$ Dual នៃ $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A\cup C}\cap\overline{A\cup B}$ គឺ $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A\cap C}\cup\overline{A\cap B}$

vii. $\overline{A\cap U}\cap A=\varnothing$

- Dual នៃ $\overline{A\cap U}\cap A=\varnothing$ គឺ $\overline{A\cup\varnothing}\cup A=U$

$\therefore$ Dual នៃ $\overline{A\cap U}\cap A=\varnothing$ គឺ $\overline{A\cup\varnothing}\cup A=U$

viii. $A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$

- Dual នៃ $A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$ គឺ $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

$\therefore$ Dual នៃ $A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$ គឺ $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

ix. $(A\cap U)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

- Dual នៃ $(A\cap U)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ គឺ :

$(A\cup\varnothing)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\therefore$ Dual នៃ $(A\cap U)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ គឺ :

$(A\cup\varnothing)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

x. $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$

- Dual នៃ $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$ គឺ $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$

$\therefore$ Dual នៃ $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$ គឺ $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$

13. គេឱ្យបីសំណុំ A , B , C ។

i. បើ $A\cap C=B\cap C$ តើគេបាន $A=B$ ឬទេ ?

(សម្រាយបញ្ជាក់ ដោយលើកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ)

ឧទាហរណ៍ : គេមានបីសំណុំ $A=\{a,d,e,k,l\}$, $B=\{a,d,e,g,h,i\}$ និង $C=\{a,b,c,d,e,f\}$

គេបាន $A\cap C=\{a,d,e\}$, $B\cap C=\{a,d,e\}$

គេសង្កេតឃើញថា $A\cap C=B\cap C=\{a,d,e\}$

តែគេមិនអាចទាញបានថា $A=B$ ទេ

$\therefore$ បើ $A\cap C=B\cap C$ គេមិនអាចទាញបានថា $A=B$ ទេ

ii. បើ $A\cup C=B\cup C$ តើគេបាន $A=B$ ឬទេ ?

(សម្រាយបញ្ជាក់ ដោយលើកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ)

ឧទាហរណ៍ : គេមានបីសំណុំ $A=\{a,g,h,i\}$, $B=\{a,d,e,g,h,i\}$ និង $C=\{a,b,c,d,e,f\}$

គេបាន $A \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, $B \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$

គេសង្កេតឃើញថា $A \cup C = B \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$

តែគេមិនអាចទាញបានថា $A = B$ ទេ

$\therefore$ បើ $A \cup C = B \cup C$ គេមិនអាចទាញបានថា $A = B$ ទេ

iii. បើ $A \cap C = B \cap C$ និង $A \cup C = B \cup C$ តើគេបាន $A = B$ ឬទេ ?

- គេស្រាយថា $A \subset B$

\+ ករណីទី១ : បើ $x \in A$ និង $x \in C$

ក្នុងករណី $x \in A \cap C$

គេមាន $A \cap C = B \cap C$

នាំឱ្យ $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in B$ និង $x \in C$

$\Rightarrow x \in B$

នាំឱ្យ $A \subset B$

\+ ករណីទី២ : បើ $x \in A$ និង $x \notin C$

ក្នុងករណី $x \in A \cup C$

គេមាន $A \cup C = B \cup C$

នាំឱ្យ $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in B$ ឬ $x \in C$

តែ $x \notin C$ នាំឱ្យ $x \in B$

នាំឱ្យ $A \subset B$

- គេស្រាយថា $B \subset A$

+ ករណីទី១ : បើ $x \in B$ និង $x \in C$

ក្នុងករណី $x \in B \cap C$

គេមាន $A \cap C = B \cap C$

នាំឱ្យ $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A$ និង $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$

នាំឱ្យ $B \subset A$

+ ករណីទី២ : បើ $x \in B$ និង $x \notin C$

ក្នុងករណី $x \in B \cup C$

គេមាន $A \cup C = B \cup C$

នាំឱ្យ $x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in A$ ឬ $x \in C$

តែ $x \notin C$ នាំឱ្យ $x \in A$

នាំឱ្យ $B \subset A$

$\therefore$ បើ $A \cap C = B \cap C$ និង $A \cup C = B \cup C$ គេបាន $A = B$

14. ការស្ទង់មតិចំពោះនិស្សិតចំនួន 100 នាក់ឱ្យលទ្ធផលតាមស្ថិតិដូចខាងក្រោម :

32 នាក់រៀនគណិតវិទ្យា , 20 នាក់រៀនរូបវិទ្យា , 45 នាក់រៀនជីវវិទ្យា , 15 នាក់រៀនគណិតវិទ្យា និង ជីវវិទ្យា

7 នាក់រៀនគណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា , 10 នាក់រៀនរូបវិទ្យា និង ជីវវិទ្យា , 30 នាក់មិនរៀនទាំងបីមុខវិជ្ជា ។

ក. រកចំនួននិស្សិតដែលរៀនទាំងបីមុខវិជ្ជា

- តាង $n(X)$ ជាចំនួននិស្សិតមិនរៀនទាំងបីមុខវិជ្ជា

តាមសម្មតិកម្មគេមាន :

- $n(U)=100$
- $n(X)=30$
- $n(M)=32$
- $n(Ph)=20$
- $n(B)=45$
- $n(M\cap B)=15$
- $n(M\cap Ph)=7$
- $n(Ph\cap B)=10$

គេបាន $n(M\cup B\cup Ph)=n(U)-n(X)=100-30=70$

តាមរូបមន្តគេបាន :

$$n(M\cup B\cup Ph)=n(M)+n(B)+n(Ph)-n(M\cap B)-n(M\cap Ph)-n(Ph\cap B)+n(M\cap B\cap Ph)$$

នាំឱ្យ $n(M\cap B\cap Ph)$ គឺ :

$$n(M\cap B\cap Ph)=n(M\cup B\cup Ph)-n(M)-n(B)-n(Ph)+n(M\cap B)+n(M\cap Ph)+n(Ph\cap B)$$

$$n(M\cap B\cap Ph)=70-32-45-20+15+7+10=5$$

$$\therefore \quad \boxed{n(M\cap B\cap Ph)=5}$$

ខ. រកចំនួននិស្សិតដែលរៀនតែពីរមុខវិជ្ជា

$n(M\cap B)=15$

$n(M\cap B)-n(M\cap B\cap Ph)=15-5=10$

$n(M\cap Ph)=7$

$n(M\cap Ph)-n(M\cap B\cap Ph)=7-5=2$

$n(Ph\cap B)=10$

$n(Ph\cap B)-n(M\cap B\cap Ph)=10-5=5$

ដូច្នេះ

10 នាក់ រៀនតែគណិត និង ជីវៈ

2 នាក់ រៀនតែគណិត និង រូប

5 នាក់ រៀនតែរូប និង ជីវៈ

គ. រកចំនួននិស្សិតដែលរៀនតែមួយមុខវិជ្ជា

$n(M)=32$

$n(M)-n(M\cap Ph)-n(M\cap B)+n(M\cap B\cap Ph)=32-7-15+5=15$

$n(Ph)=20$

$n(Ph)-n(M\cap Ph)-n(Ph\cap B)+n(M\cap B\cap Ph)=20-7-10+5=8$

$n(B)=45$

$n(B)-n(M\cap B)-n(Ph\cap B)+n(M\cap B\cap Ph)=45-15-10+5=25$

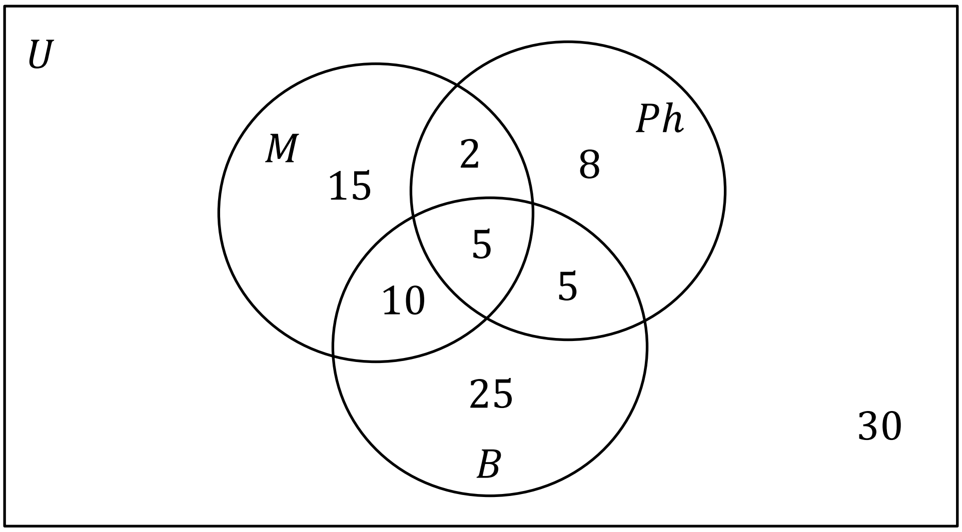
ដូច្នេះ

15 នាក់ រៀនតែគណិត

8 នាក់ រៀនតែរូប

25 នាក់ រៀនតែជីវៈ

Venn diagram



15. ការស្ទង់មតិចំពោះប្រជាជន 60 នាក់ឱ្យលទ្ធផលតាមស្ថិតិដូចខាងក្រោម :

25 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ , 26 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា , 26 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

9 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ និង ទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា , 11នាក់អានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ និង ទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

8 នាក់អានទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា និង ទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ , 8 នាក់មិនអានទាំងបីទស្សនាវដ្ដី ។

ក. រកចំនួនប្រជាជនដែលអានទាំងបីទស្សនាវដ្ដី

- តាង $n(X)$ ជាចំនួនអ្នកមិនអានទាំងបីទស្សនាវដ្ដី

$n(B)$ ជាចំនួនអ្នកអានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ

$n(K)$ ជាចំនួនអ្នកអានទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា

$n(A)$ ជាចំនួនអ្នកអានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

តាមសម្មតិកម្មគេមាន :

- $n(U)=60$
- $n(X)=8$
- $n(B)=25$
- $n(K)=26$
- $n(A)=26$
- $n(B\cap K)=9$
- $n(B\cap A)=11$
- $n(K\cap A)=8$

គេបាន $n(B\cup K\cup A)=n(U)-n(X)=60-8=52$

តាមរូបមន្តគេបាន :

$$n(B\cup K\cup A)=n(B)+n(K)+n(A)-n(B\cap K)-n(B\cap A)-n(K\cap A)+n(B\cap K\cap A)$$

នាំឱ្យ $n(B\cap K\cap A)$ គឺ :

$$n(B\cap K\cap A)=n(B\cup K\cup A)-n(B)-n(K)-n(A)+n(B\cap K)+n(B\cap A)+n(K\cap A)$$

$$n(B\cap K\cap A)=52-25-26-26+9+11+8=3$$

$$\therefore \quad \boxed{n(B\cap K\cap A)=3}$$

ខ. រកចំនួនប្រជាជនដែលអានតែពីរទស្សនាវដ្ដី

$n(B\cap K)=9$

$n(B\cap K)-n(B\cap K\cap A)=9-3=6$

$n(B\cap A)=11$

$n(B\cap A)-n(B\cap K\cap A)=11-3=8$

$n(K\cap A)=8$

$n(K\cap A)-n(B\cap K\cap A)=8-3=5$

ដូច្នេះ

6 នាក់ អានតែទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ និង ទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា
8 នាក់ អានតែទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ និង ទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ
5 នាក់ អានតែទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា និង ទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

គ. រកចំនួនប្រជាជនដែលអានតែមួយទស្សនាវដ្ដី

$n(B)=25$

$n(B)-n(B\cap K)-n(B\cap A)+n(B\cap K\cap A)=25-9-11+3=8$

$n(K)=26$

$n(K)-n(B\cap K)-n(K\cap A)+n(B\cap K\cap A)=26-9-8+3=12$

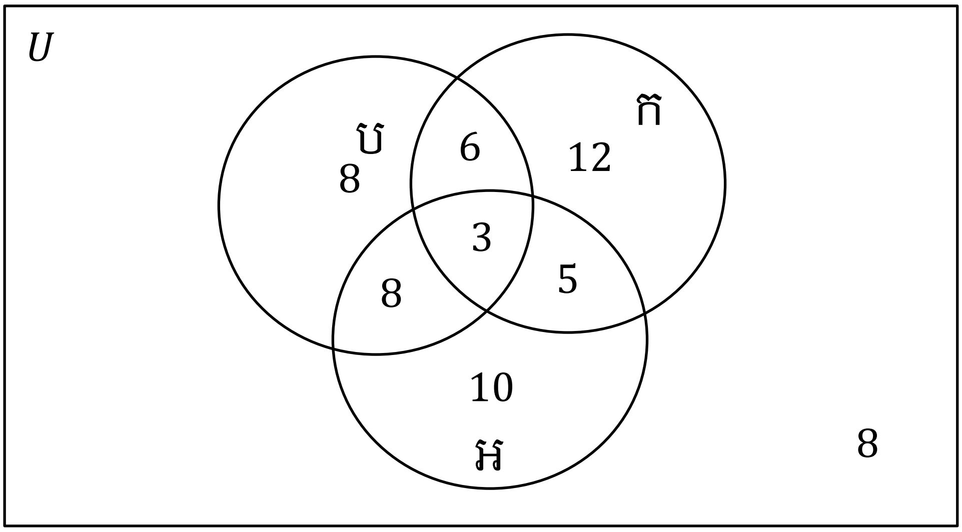
$n(A)=26$

$n(A)-n(B\cap A)-n(K\cap A)+n(B\cap K\cap A)=26-11-8+3=10$

ដូច្នេះ

8 នាក់ អានតែទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ
12 នាក់ អានតែទស្សនាវដ្ដីកុលធីតា
10 នាក់ អានតែទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

Venn diagram



16. គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2,3,4,5\}$ ។ រកថ្នាក់ $\mathcal{A}$ ដែល :

ក. $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមិនមានធាតុ 2 និង 4 ។

- ដោយ $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមិនមានធាតុ 2 និង 4

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{A}=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}\}}$

ខ. $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមានផលបូកធាតុទាំងអស់ស្មើនឹង 5

- ដោយ $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមានផលបូកធាតុទាំងអស់ស្មើនឹង 5

ដូច្នេះ គេបាន $\mathcal{A}=\{\{5\},\{1,4\},\{2,3\}\}$

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{A}=\{\{5\},\{1,4\},\{2,3\}\}}$

គ. $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមានបួនធាតុ

- ដោយ $\mathcal{A}$ ថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ A ដែលមានបួនធាតុ

ដូច្នេះ គេបាន $\mathcal{A} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\}\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}$

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{A} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\}\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}}$

17. រក Power set $\mathcal{P}(A)$ ដែល :

ក. $A=\{a,b,c\}$

- គេមាន សំណុំ $A=\{a,b,c\}$

នោះគេបាន Power set $\mathcal{P}(A)$ គឺ $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}}$

ខ. $A=\{1,2,3,4\}$

- គេមាន សំណុំ $A=\{1,2,3,4\}$

នោះគេបាន Power set $\mathcal{P}(A)$ គឺ :

$$\boxed{\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}}$$

គ. $A=\{a,b,c,d,e\}$

- គេមាន សំណុំ $A=\{a,b,c,d,e\}$

នោះគេបាន Power set $\mathcal{P}(A)$ គឺ

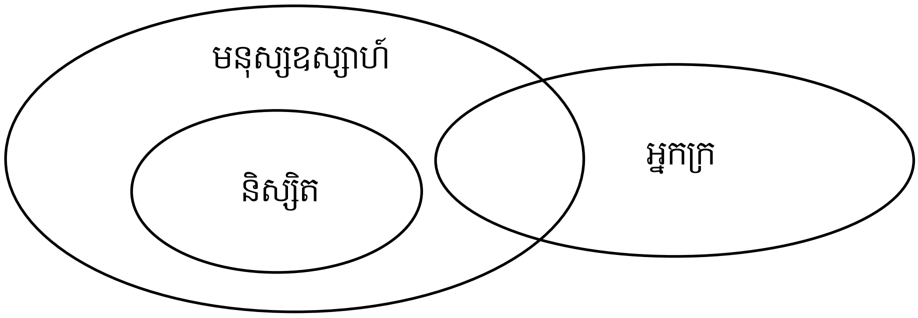
$$\mathcal{P}(A)=\{\ \varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\},$$
$$\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\},\{b,c,d,e\},\{a,b,c,d,e\}\ \}$$

18\. សិក្សាសុពលភាព (validity) នៃ Argument ខាងក្រោម :

S_1 : និស្សិតទាំងអស់សុទ្ធតែជាមនុស្សឧស្សាហ៍

S_2 : គ្មានអ្នកក្រណាម្នាក់ជានិស្សិត

S : មនុស្សឧស្សាហ៍សុទ្ធតែមិនមែនជាអ្នកក្រ



តាមដ្យាក្រាមវិន ខាងលើ គេបាន Argument នេះ invalid

19\. បង្ហាញថា :

i. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

\+ ចំពោះ $n=1$ គេបាន $1^2=\dfrac{1\times 2\times 3}{6}\Leftrightarrow 1=1$ ពិត

+ ចំពោះ $n=2$ គេបាន $1^2+2^2=\dfrac{2\times3\times5}{6} \Leftrightarrow 5=5$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

គេនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times[(n+1)+1]\times[2(n+1)+1]}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

គេមាន $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\times\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\times\frac{2n^2+n+6n+6}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\times\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\times\frac{2n^2+4n+3n+6}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\times\frac{2n(n+2)+3(n+2)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

ii. $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

+ ចំពោះ $n=1$ គេបាន $1=\dfrac{1\times 2}{2} \Leftrightarrow 1=1$ ពិត

+ ចំពោះ $n=2$ គេបាន $1+4=\dfrac{2\times 5}{2} \Leftrightarrow 5=5$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

គេនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+[3(n+1)-2]=\frac{(n+1)\times[3(n+1)-1]}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

គេមាន $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

$$\Rightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{n(3n-1)}{2}+(3n+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{n(3n-1)+2(3n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{3n^2+5n+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{3n^2+3n+2n+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}}$$

iii. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

+ ចំពោះ $n=1$ គេបាន $\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ពិត

+ ចំពោះ $n=2$ គេបាន $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{5+1}{15}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

គេនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{[2(n+1)-1]\times[2(n+1)+1]}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

គេមាន $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

$$\Rightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+2n+n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+1)+(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

$\therefore$ $\boxed{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}}$

iv. $n!\geq 2^n$, for $\forall n\geq 4$

+ ចំពោះ $n=4$ គេបាន $4!\geq 2^4 \Leftrightarrow 24\geq 16$ ពិត

+ ចំពោះ $n=5$ គេបាន $5!\geq 2^5 \Leftrightarrow 120\geq 32$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $n!\geq 2^n$

គេនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ $(n+1)!\geq 2^{n+1}$

គេមាន $n!\geq 2^n$

$\Rightarrow n!\times(n+1)\geq 2^n\times(n+1)$

$\Leftrightarrow (n+1)!\geq 2^n\times(n+1)$

ដោយចំពោះ $\forall n\geq 4$ គេបាន $(n+1)\geq 2$

$\Rightarrow (n+1)!\geq 2^n\times 2$

$\Leftrightarrow (n+1)!\geq 2^{n+1}$

$\therefore$ $\boxed{n!\geq 2^n \text{ , for } \forall n\geq 4}$

20. គេឱ្យពីរសំណុំ A , B ។

គេបានផលសងឆ្លុះនៃ A និង B កំណត់សរសេរដោយ : $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ ។

a) Given $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$, $D=\{2,3,5,7,8\}$

រក $A\Delta B$, $B\Delta C$, $C\Delta D$, $A\Delta D$, $A\cap(B\Delta D)$, $(A\cap B)\Delta(A\cap D)$

- $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \cap B = \{4,5,6\}$

$\therefore$ $\boxed{A\Delta B = \{1,2,3,7,8,9\}}$

- $B\Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$

$B \cup C = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B \cap C = \{5,7,9\}$

$\therefore$ $\boxed{B\Delta C = \{1,3,4,6,8\}}$

- $C\Delta D = (C \cup D) \setminus (C \cap D)$

$C \cup D = \{1,2,3,5,7,8,9\}$, $C \cap D = \{3,5,7\}$

$\therefore$ $\boxed{C\Delta D = \{1,2,8,9\}}$

- $A\Delta D = (A \cup D) \setminus (A \cap D)$

$A \cup D = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A \cap D = \{2,3,5\}$

$\therefore$ $\boxed{A\Delta D = \{1,4,6,7,8\}}$

- $A \cap (B\Delta D)$

គេមាន $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B\Delta D = (B \cup D) \setminus (B \cap D)$

$B \cup D = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B \cap D = \{5,7,8\}$

$\Rightarrow B\Delta D = \{2,3,4,6,9\}$

$\Rightarrow A \cap (B\Delta D) = \{2,3,4,6\}$

$\therefore$ $$\boxed{A\cap(B\Delta D)=\{2,3,4,6\}}$$

- $(A\cap B)\Delta(A\cap D)=[(A\cap B)\cup(A\cap D)]\setminus[(A\cap B)\cap(A\cap D)]$

$A\cap B=\{4,5,6\}$, $A\cap D=\{2,3,5\}$

$\Rightarrow (A\cap B)\cup(A\cap D)=\{2,3,4,5,6\}$, $(A\cap B)\cap(A\cap D)=\{5\}$

$\therefore$ $$\boxed{(A\cap B)\Delta(A\cap D)=\{2,3,4,6\}}$$

b) បង្ហាញថា : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$\forall x: x\in A\Delta B \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\vee x\in(B\setminus A)$

$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$\therefore$ $$\boxed{A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)}$$

ꕥꕥꕥ 🕮 ꕥꕥꕥ

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ - អនុគមន៍ - អនុវត្តន៍

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

1. ក្នុងចំណោមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុខាងក្រោម :

   តើទំនាក់ទំនងមួយណាជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ $A=\{a,b,c\}$ ទៅសំណុំ $B=\{1,2\}$

   i. $\mathcal{R}_1=\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$

   ii. $\mathcal{R}_2=\{(a,2),(1,a)\}$

   iii. $\mathcal{R}_3=\{(c,1),(c,2),(c,3)\}$

   iv. $\mathcal{R}_4=\{(1,a),(2,b),(2,c)\}$

   v. $\mathcal{R}_5=\{(a,2),(b,2)\}$

   vi. $\mathcal{R}_6=\varnothing$

2. គេឱ្យពីរសំណុំ $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$ ។ តើមានប៉ុន្មានទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។

3. រក $\mathcal{R}$ ដោយដឹងថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $A=\{1,2,3,4\}$ ដោយ $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x<y$ ។

   រួចរកទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាសនៃ $\mathcal{R}$ ។

   តាង $\mathcal{R}$ ដោយ Coordinate diagram , Matrix នៃទំនាក់ទំនង និង Arrow diagram ។

4. គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2,3,4,6\}$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ A ដោយ $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$ ។

   ក. សរសេរ $\mathcal{R}$ ជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ ។

   ខ. តាង $\mathcal{R}$ ដោយ Coordinate diagram និង គូ Directed graph នៃ $\mathcal{R}$ ។

   គ. រកទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាស $\mathcal{R}^{-1}$ នៃ $\mathcal{R}$ ។

5. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^2+a=b^2+b$ ។

   ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

6. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:E\to F$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E កំណត់ដោយ $x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x)=f(x')$

   ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

7. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$ ។

   ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

8. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ កំណត់ដោយ $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a.d=b.c$ ។

   ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

9. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a+b$ ជាចំនួនគូ ។

   ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

10. គេឱ្យអនុគមន៍ប្រកាន់ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ :

    $x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x)\le f(x')$ ។ ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

11. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\le b$ ។

    ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

12. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}^*$ កំណត់ដោយ $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a|b$ ។

    ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

13. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a\le c\wedge b\le d$ ។

    ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

14. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow [a<c\vee(a=c\wedge b\le d)]$

    ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

15. លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$ ។

    ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

16. គេឱ្យ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ E ។លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$ ។ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

1. ក្នុងចំណោមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុខាងក្រោម :

តើទំនាក់ទំនងមួយណាជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ $A=\{a,b,c\}$ ទៅសំណុំ $B=\{1,2\}$

i. $\mathcal{R}_1=\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$

ii. $\mathcal{R}_2=\{(a,2),(1,a)\}$

iii. $\mathcal{R}_3=\{(c,1),(c,2),(c,3)\}$

iv. $\mathcal{R}_4=\{(1,a),(2,b),(2,c)\}$

v. $\mathcal{R}_5=\{(a,2),(b,2)\}$

vi. $\mathcal{R}_6=\varnothing$

$\therefore$ $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_5$, $\mathcal{R}_6$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅ B

$\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ មិនមែនជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅ B ទេ

2. គេឱ្យពីរសំណុំ $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$ ។តើមានប៉ុន្មានទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B មានចំនួន 6 គឺ

$\mathcal{R}=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$$\therefore \quad \boxed{\mathcal{R} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}}$$

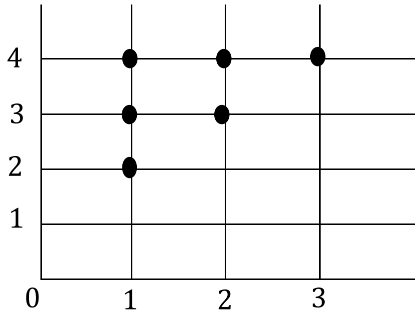
3\. រក $\mathcal{R}$ ដោយដឹងថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $A=\{1,2,3,4\}$ ដោយ $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x<y$ ។ រួចរកទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាសនៃ $\mathcal{R}$ ។

គាង $\mathcal{R}$ ដោយ Coordinate diagram , Matrix នៃទំនាក់ទំនង និង Arrow diagram ។

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $A=\{1,2,3,4\}$ គឺ $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាសនៃ $\mathcal{R}$ គឺ $\mathcal{R}^{-1} = \{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$

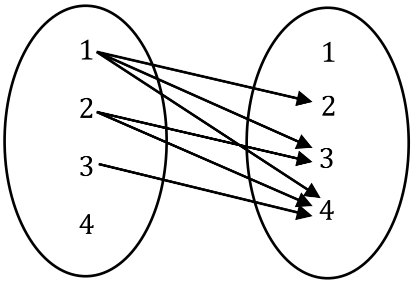
Coordinate diagram



Matrix

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

Arrow diagram



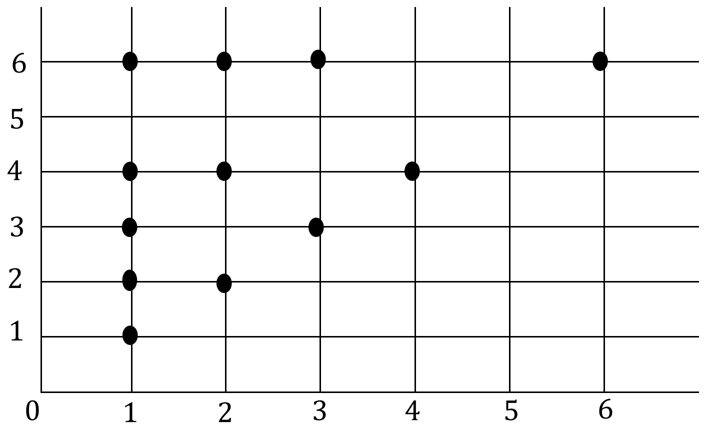
4. គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2,3,4,6\}$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ A ដោយ $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x|y$ ។

ក. សរសេរ $\mathcal{R}$ ជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ ។

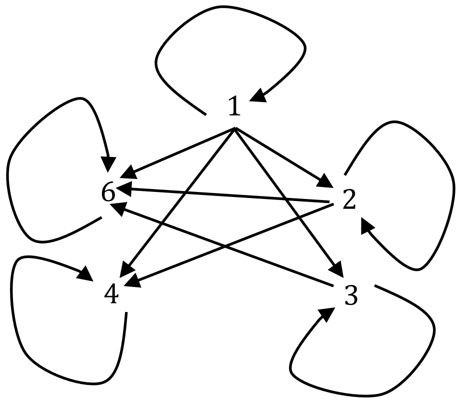
$\therefore$ $\mathcal{R}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(6,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$

ខ. តាង $\mathcal{R}$ ដោយ Coordinate diagram និង គូ Directed graph នៃ $\mathcal{R}$ ។

Coordinate diagram



Directed graph



គ. រកទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាស $\mathcal{R}^{-1}$ នៃ $\mathcal{R}$

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាស $\mathcal{R}^{-1}$ នៃ $\mathcal{R}$ គឺ

$\mathcal{R}^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(4,2),(6,2),(6,3)\}$

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{R}^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(6,6),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(4,2),(6,2),(6,3)\}}$

5. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^2+a=b^2+b$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x\in\mathbb{Z}\ :\ x^2+x=x^2+x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x,y\in\mathbb{Z}\ :\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2+x=y^2+y$

$$\Leftrightarrow y^2+y=x^2+x$$

$$\Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x,y\in\mathbb{Z}\ :\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=y^2+y \\ y^2+y=x^2+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x=y^2+y$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -(y+1) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x = y$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \ : \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ y^2 + y = z^2 + z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow x \mathcal{R} z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}$

6. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f: E \to F$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E កំណត់ដោយ $x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in E \ : \ f(x) = f(x) \Leftrightarrow x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in E \ : \ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$$\Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y \mathcal{R} x$$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x, y \in E \ : \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(x) \end{cases}$$

$$\not\Rightarrow x = y$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in E \ : \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(z)$$

$$\Leftrightarrow x \mathcal{R} z$$

$\therefore$ | $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើទេ |

7. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \mathcal{R} (x_1, x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ (x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$

$$\Leftrightarrow y_2 + x_1 = y_1 + x_2 \Leftrightarrow y_1 + x_2 = y_2 + x_1$$

$$\Leftrightarrow (y_1, y_2) \mathcal{R} (x_1, x_2)$$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ (x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \mathcal{R} (x_1, x_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_1 \\ y_1 + x_2 = y_2 + x_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$$

$$\not\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)\wedge(y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(z_1,z_2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+y_2=x_2+y_1\\y_1+z_2=y_2+z_1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=y_1-y_2\\y_1-y_2=z_1-z_2\end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1-x_2=z_1-z_2$

$\Leftrightarrow x_1+z_2=x_2+z_1$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(z_1,z_2)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើទេ

8. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ កំណត់ដោយ $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\Leftrightarrow a.d=b.c$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$: $x_1.x_2=x_2.x_1\Leftrightarrow(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$: $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1.y_2=x_2.y_1$

$\Leftrightarrow y_2.x_1=y_1.x_2\Leftrightarrow y_1.x_2=y_2.x_1$

$\Leftrightarrow (y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$: $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)\wedge(y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1.y_2=x_2.y_1\\y_1.x_2=y_2.x_1\end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1.y_2 = x_2.y_1 \not\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$(x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \mathcal{R} (z_1, z_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1.y_2 = x_2.y_1 \\ y_1.z_2 = y_2.z_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} \\ \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$

$\Leftrightarrow x_1.z_2 = x_2.z_1$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2) \mathcal{R} (z_1, z_2)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើទេ

9. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a + b$ ជាចំនួនគូ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in \mathbb{N}$: $x + x$ ជាចំនួនគូ (ព្រោះ $x + x = 2x$) $\Leftrightarrow x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in \mathbb{N}$: $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y$ ជាចំនួនគូ

$\Leftrightarrow y + x$ ជាចំនួនគូ

$\Leftrightarrow y \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x,y\in\mathbb{N}\ :\ x\mathcal{R}\,y\ \wedge\ y\mathcal{R}\,x$

$\Leftrightarrow x+y$ ជាចំនួនគូ $\wedge$ $y+x$ ជាចំនួនគូ

$\nRightarrow\ x=y$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x,y,z\in\mathbb{N}\ :\ x\mathcal{R}\,y\ \wedge\ y\mathcal{R}\,z$

$\Leftrightarrow x+y$ ជាចំនួនគូ $\wedge$ $y+z$ ជាចំនួនគូ

$x+y$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow$ (x ជាចំនួនគូ និង y ជាចំនួនគូ) ឬ (x ជាចំនួនសេស និង y ជាចំនួនសេស)

+ ករណី (x ជាចំនួនគូ និង y ជាចំនួនគូ)

$\Rightarrow z$ ជាចំនួនគូ (ព្រោះ $y+z$ ជាចំនួនគូ)

$\Rightarrow x+z$ ជាចំនួនគូ

$\Leftrightarrow\ x\mathcal{R}\,z$

+ ករណី (x ជាចំនួនសេស និង y ជាចំនួនសេស)

$\Rightarrow z$ ជាចំនួនសេស (ព្រោះ $y+z$ ជាចំនួនគូ)

$\Rightarrow x+z$ ជាចំនួនគូ

$\Leftrightarrow\ x\mathcal{R}\,z$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើទេ

10. គេឱ្យអនុគមន៍ប្រកាន់ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ :

$x\mathcal{R}\,x' \Leftrightarrow f(x)\le f(x')$ ។ ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)\le f(x)\Leftrightarrow\ x\mathcal{R}\,x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

$\nRightarrow f(y) \leq f(x)$

$\nRightarrow y \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(y) \leq f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

ដោយគេមានអនុគមន៍ប្រកាន់ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}$

$\Rightarrow x = y$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(y) \leq f(z) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) \leq f(z)$

$\Rightarrow x \mathcal{R} z$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះ ទេ

11. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \leq b$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq x \Leftrightarrow x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \le y$

$\nRightarrow y \le x$

$\nRightarrow y \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ : \ x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le z \end{cases}$$

$\Rightarrow x \le z$

$\Leftrightarrow x \mathcal{R} z$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះ ទេ

12. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}^*$ កំណត់ដោយ $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a | b$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in \mathbb{N}^* \ : \ x | x \Leftrightarrow x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \ : \ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x | y$

$\nRightarrow y | x$

$\nRightarrow y \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x,y\in\mathbb{N}^* \ : \ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x|y \\ y|x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x,y,z\in\mathbb{N}^* \ : \ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x|y \\ y|z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x|z$$

$$\Leftrightarrow x\mathcal{R}z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះ ទេ

13. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a\le c\wedge b\le d$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ x_1\le x_1\wedge x_2\le x_2 \Leftrightarrow (x_1,x_2)\mathcal{R}(x_1,x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ (x_1,x_2)\mathcal{R}(y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1\le y_1\wedge x_2\le y_2$

$$\not\Rightarrow y_1\le x_1\wedge y_2\le x_2$$

$$\not\Rightarrow (y_1,y_2)\mathcal{R}(x_1,x_2)$$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ (x_1,x_2)\mathcal{R}(y_1,y_2) \wedge (y_1,y_2)\mathcal{R}(x_1,x_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1\le y_1\wedge x_2\le y_2 \\ y_1\le x_1\wedge y_2\le x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le y_1 \wedge y_1 \le x_1 \\ x_2 \le y_2 \wedge y_2 \le x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$(x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1,y_2) \wedge (y_1,y_2)\ \mathcal{R}\ (z_1,z_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le y_1 \wedge x_2 \le y_2 \\ y_1 \le z_1 \wedge y_2 \le z_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le y_1 \wedge y_1 \le z_1 \\ x_2 \le y_2 \wedge y_2 \le z_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \le z_1 \wedge x_2 \le z_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (z_1,z_2)$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះ ទេ

14. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ :

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow [a<c \vee (a=c \wedge b \le d)]$$

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $[x_1 < x_1 \vee (x_1 = x_1 \wedge x_2 \le x_2)]$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (x_1,x_2)$$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $(x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1,y_2)$

$$\Leftrightarrow [x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \le y_2)]$$

$$\not\Rightarrow [y_1 < x_1 \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \le x_2)]$$

$\not\Rightarrow\ (y_1,y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1,x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ (x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1,y_2)\ \wedge\ (y_1,y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1,x_2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[x_1<y_1\vee(x_1=y_1\wedge x_2\le y_2)]\\ [y_1<x_1\vee(y_1=x_1\wedge y_2\le x_2)]\end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌនេះតម្រូវឱ្យ $x_1=y_1$ និង $x_2=y_2$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :$

$(x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1,y_2)\ \wedge\ (y_1,y_2)\ \mathcal{R}\ (z_1,z_2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[x_1<y_1\vee(x_1=y_1\wedge x_2\le y_2)]\\ [y_1<z_1\vee(y_1=z_1\wedge y_2\le z_2)]\end{cases}$$

$\Rightarrow\ x_1<z_1\ \vee\ (x_1=z_1\wedge x_2\le z_2)$

$\Leftrightarrow\ (x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (z_1,z_2)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះ ទេ

15. លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x\,\mathcal{R}\,y\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x\in\mathbb{R}^*\ :\ x+\dfrac{1}{x}=x+\dfrac{1}{x}\ \Leftrightarrow\ x\,\mathcal{R}\,x$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x,y\in\mathbb{R}^*\ :\ x\,\mathcal{R}\,y\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$

$$\Leftrightarrow y+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x,y\in\mathbb{R}^* \ : \ x\mathcal{R}\, y \ \wedge \ y\mathcal{R}\, x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y} \\ y+\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \ x-y=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ x-y=\frac{x-y}{xy}$$

$$\Leftrightarrow \ x-y-\frac{x-y}{xy}=0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 1-\dfrac{1}{xy}=0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 1=\dfrac{1}{xy} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=\dfrac{1}{y} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \ x=y$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^* \quad : \ x \mathcal{R} y \ \wedge \ y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y} \\ y + \dfrac{1}{y} = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ x + \frac{1}{x} = z + \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow \ x \mathcal{R} z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $\mathbb{R}^*$

16. គេឱ្យ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ E ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$ ។ ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall X \in \mathcal{P}(E) : \ A \cap X = A \cap X \ \Leftrightarrow X \mathcal{R} X$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E) : \ X \mathcal{R} Y$

$\Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \ \Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \ \Leftrightarrow Y \mathcal{R} X$

លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E) : \ X \mathcal{R} Y \ \wedge \ Y \mathcal{R} X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ A \cap Y = A \cap X \end{cases} \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \nRightarrow X = Y$$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(E) : \ X \mathcal{R} Y \ \wedge \ Y \mathcal{R} Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ A \cap Y = A \cap Z \end{cases} \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X \mathcal{R} Z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង , លក្ខណៈឆ្លុះ , លក្ខណៈឆ្លង តែគ្មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើ ទេ

ទំនាក់ទំនងសមមូល

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f:E\to F$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E កំណត់ដោយ :

   $x\,\mathcal{R}\,x' \Leftrightarrow f(x)=f(x')$ ។

   ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E ។

   ខ. បើ $E=F=\mathbb{R}$ និង $f(x)=\sin x$ ។ ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a\in\mathbb{R}$ ។

2. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$ ។

   ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ។

   ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(2,3)\in\mathbb{N}^2$ ។

3. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ កំណត់ដោយ $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\Leftrightarrow a.d=b.c$ ។

   តើ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ ឬទេ ?

4. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $a\,\mathcal{R}\,b\Leftrightarrow a+b$ ជាចំនួនគូ ។

   ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}$ ។

   ខ.ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $p\in\mathbb{N}$ ។

5. លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x\,\mathcal{R}\,y\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$ ។

   ក. ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$ ។

   ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a\in\mathbb{R}^*$ ។

6. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a \in \mathbb{R}$ ។

7. លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$ ។

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a \in \mathbb{R}^*$ ។

8. គេឱ្យ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ E ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathcal{P}(E)$ ។

9. លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : A \mathcal{R} B \Leftrightarrow n(A \Delta B)$ ជាចំនួនគត់គូ ។

បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathcal{P}(E)$ ។

10. គេឱ្យ M_0 ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ P ។ លើប្លង់ P គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$\forall M, M' \in P : M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow M_0 , M , M'$ រត់ត្រង់គ្នា ។

ក. តើ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ P ឬទេ ?

ខ. គេតាង $P^* = P - \{M_0\}$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ P^* ។

រួចរកថ្នាក់សមមូលនៃចំណុច M មួយរបស់ P^* ។

11. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ កំណត់ដោយ :

$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : (x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : x' = k.x \wedge y' = k.y$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ។

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(1,2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ។

12. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E មានលក្ខណៈខ្លួនឯង និង លក្ខណៈឆ្លង ។

លើ E គេកំណត់ទំនាក់ទំនង $\mathcal{T}$ មួយទៀតដោយ :

$\forall x, y \in E : x \mathcal{T} y \Leftrightarrow x \mathcal{R} y \ \wedge y \mathcal{R} x$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{T}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f : E \to F$ និង $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E កំណត់ដោយ :

$x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall x \in E \quad : \quad f(x) = f(x) \Leftrightarrow \ x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall x, y \in E \quad : \quad x \mathcal{R} y$

$$\Leftrightarrow \ f(x) = f(y)$$
$$\Leftrightarrow \ f(y) = f(x)$$
$$\Leftrightarrow \ y \mathcal{R} x$$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall x, y, z \in E \quad : \quad x \mathcal{R} y \ \wedge \ y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases} \Rightarrow \ f(x) = f(z) \ \Leftrightarrow \ x \mathcal{R} z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E

ខ. បើ $E=F=\mathbb{R}$ និង $f(x)=\sin x$ ។ ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a\in\mathbb{R}$ ។

ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a តាងដោយ $\bar{a}=\{\ x\in\mathbb{R}:\ a\,\mathcal{R}\,x\ \}$

$\Leftrightarrow\ \ \bar{a}=\{\ x\in\mathbb{R}:\ f(a)=f(x)\ \}$

$\Leftrightarrow\ \ \bar{a}=\{\ x\in\mathbb{R}:\ \sin a=\sin x\ \}$

$\Leftrightarrow\ \ \bar{a}=\{a+2k\pi\,,\pi-a+2k\pi\}$

$\therefore$ ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a គឺ $\bar{a}=\{a+2k\pi\,,\pi-a+2k\pi\}$

2. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ :\ x_1+x_2=x_2+x_1\Leftrightarrow(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ :\ (x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)$

$$\Leftrightarrow\ x_1+y_2=x_2+y_1$$
$$\Leftrightarrow\ y_2+x_1=y_1+x_2$$
$$\Leftrightarrow\ y_1+x_2=y_2+x_1$$
$$\Leftrightarrow\ (y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ :$

$(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)\ \wedge\ (y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(z_1,z_2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+y_2=x_2+y_1\\ y_1+z_2=y_2+z_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=y_1-y_2\\ y_1-y_2=z_1-z_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x_1-x_2=z_1-z_2$$

$$\Rightarrow\ x_1+z_2=x_2+z_1$$

$$\Leftrightarrow\ (x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(z_1,z_2)$$

$\therefore$ | $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(2,3)\in\mathbb{N}^2$ ។

ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(2,3)$ តាងដោយ $\overline{(2,3)}=\{\ (x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2\ :\ (2,3)\ \mathcal{R}\ (x_1,x_2)\ \ \}$

$\Leftrightarrow\ \ \overline{(2,3)}=\{\ (x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2\ :\ 2+x_2=3+x_1\ \ \}$

$\Leftrightarrow\ \ \overline{(2,3)}=\{\ (x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2\ :\ x_2=x_1+1\ \ \}$

$\Leftrightarrow\ \ \overline{(2,3)}=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\ldots\}$

$\therefore$ | ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(2,3)$ គឺ $\overline{(2,3)}=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\ldots\}$

3. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ កំណត់ដោយ $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\Leftrightarrow a.d=b.c$ ។

តើ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ ឬទេ ?

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\ :\ x_1.x_2=x_2.x_1\Leftrightarrow (x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\ :\ (x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1,y_2)$

$$\Leftrightarrow\ x_1.y_2=x_2.y_1$$

$$\Leftrightarrow\ y_2.x_1=y_1.x_2$$

$$\Leftrightarrow\ y_1.x_2=y_2.x_1$$

$$\Leftrightarrow\ (y_1,y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1,x_2)$$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\ :$

$(x_1,x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1,y_2)\ \wedge\ (y_1,y_2)\ \mathcal{R}\ (z_1,z_2)$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x_1.y_2=x_2.y_1\\ y_1.z_2=y_2.z_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} \\ \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\Rightarrow x_1.z_2 = x_2.z_1$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) \mathcal{R} (z_1, z_2)$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

4. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a + b$ ជាចំនួនគូ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall x \in \mathbb{N}$: $x + x$ ជាចំនួនគូ (ព្រោះ $x + x = 2x$ ជាចំនួនគូ)

$\Leftrightarrow x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall x, y \in \mathbb{N}$: $x \mathcal{R} y$

$\Leftrightarrow x + y$ ជាចំនួនគូ

$\Leftrightarrow y + x$ ជាចំនួនគូ

$\Leftrightarrow y \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$: $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$

$\Leftrightarrow x + y$ ជាចំនួនគូ និង $y + z$ ជាចំនួនគូ

$x + y$ ជាចំនួនគូ នោះគេបាន (x គូ និង y គូ) ឬ (x សេស និង y សេស)

- x គូ និង y គូ

  $\Rightarrow$ z គូ (ព្រោះ $y+z$ ជាចំនួនគូ)

  $\Rightarrow$ $x+z$ ជាចំនួនគូ

  $\Leftrightarrow$ $x \mathcal{R} z$

- x សេស និង y សេស

  $\Rightarrow$ z សេស (ព្រោះ $y+z$ ជាចំនួនគូ)

  $\Rightarrow$ $x+z$ ជាចំនួនគូ

  $\Leftrightarrow$ $x \mathcal{R} z$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}$

ខ.ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $p \in \mathbb{N}$ ។

ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ p តាងដោយ $\overline{p} = \{ x \in \mathbb{N} : p \mathcal{R} x \}$

$\Leftrightarrow$ $\overline{p} = \{ x \in \mathbb{N} : p + x$ ជាចំនួនគូ $\}$

$\Leftrightarrow$ $\overline{p} = \{ x \in \mathbb{N} : p + x = 2k \}$

$\Leftrightarrow$ $\overline{p} = \{ x \in \mathbb{N} : x = 2k - p \}$

$\therefore$ ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ p គឺ $\overline{p} = \{ 2k - p \, , \, k, p \in \mathbb{N} \}$

5. លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall x \in \mathbb{R}^* \;:\; x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \; x \mathcal{R} x$$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall x, y \in \mathbb{R}^* \;:\; x \mathcal{R} y$

$$\Leftrightarrow \; x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \; y + \frac{1}{y} = x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \; y \mathcal{R} x$$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^* \;:\; x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$

$\Leftrightarrow \; x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ និង $y + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \; x + \frac{1}{x} = z + \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow \; x \mathcal{R} z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a \in \mathbb{R}^*$ ។

ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a តាងដោយ $\bar{a} = \{ \; x \in \mathbb{R}^* \;:\; a \mathcal{R} x \; \}$

$$\Leftrightarrow \; \bar{a} = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^* \;:\; a + \frac{1}{a} = x + \frac{1}{x} \; \right\}$$

$$\Leftrightarrow \; \bar{a} = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^* \;:\; a - x = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \; \right\}$$

$$\Leftrightarrow \; \bar{a} = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^* \;:\; a - x = \frac{a - x}{ax} \; \right\}$$

$$\Leftrightarrow \; \bar{a} = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^* \;:\; a - x - \frac{a - x}{ax} = 0 \; \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a} = \left\{ \ x \in \mathbb{R}^* : \ (a-x)\left(1-\frac{1}{ax}\right) = 0 \ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a} = \left\{ \ x \in \mathbb{R}^* : \ x = a \ , \ x = \frac{1}{a} \ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a} = \left\{ a \ , \frac{1}{a} \right\}$$

$\therefore$ ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a គឺ $\bar{a} = \left\{ a \ , \frac{1}{a} \right\}$

6. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall x \in \mathbb{R} \ : \quad x^2 - x^2 = x - x$

$$\Leftrightarrow \quad x \mathcal{R} x$$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \quad x \mathcal{R} y$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \quad \Rightarrow \quad -\left(x^2 - y^2\right) = -(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - x^2 = y - x$$

$$\Leftrightarrow \quad y \mathcal{R} x$$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad : \quad x \mathcal{R} y \ \wedge \ y \mathcal{R} z$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \ \text{ និង } \ y^2 - z^2 = y - z$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x = y^2 - y \ \text{ និង } \ y^2 - y = z^2 - z$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x = z^2 - z$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - z^2 = x - z$$

$$\Leftrightarrow \quad x \mathcal{R} z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a \in \mathbb{R}$ ។

ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a តាងដោយ $\bar{a} = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ a \mathcal{R} x \ \}$

$\Leftrightarrow \ \bar{a} = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ a^2 - x^2 = a - x \ \}$

$\Leftrightarrow \ \bar{a} = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ a^2 - x^2 - (a - x) = 0 \ \}$

$\Leftrightarrow \ \bar{a} = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ (a - x)(a + x) - (a - x) = 0 \ \}$

$\Leftrightarrow \ \bar{a} = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ (a - x)(a + x - 1) = 0 \ \}$

$\Leftrightarrow \ \bar{a} = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ x = a \ , \ x = 1 - a \ \}$

$\Leftrightarrow \ \bar{a} = \{ a \ , 1 - a \}$

$\therefore$ ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a គឺ $\bar{a} = \{ a \ , 1 - a \}$

7. លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{x^2} = y^2 - \dfrac{1}{y^2}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall x \in \mathbb{R}^* \ : \ x^2 - \dfrac{1}{x^2} = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \ x \mathcal{R} x$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall x, y \in \mathbb{R}^* \ : \ x \mathcal{R} y$

$$\Leftrightarrow \ x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2-\frac{1}{y^2}=x^2-\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y\,\mathcal{R}\,x$$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^*$: $x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-\frac{1}{x^2}=y^2-\frac{1}{y^2} \text{ និង } y^2-\frac{1}{y^2}=z^2-\frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\frac{1}{x^2}=z^2-\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,\mathcal{R}\,z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $a\in\mathbb{R}^*$ ។

ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a តាងដោយ $\bar{a}=\{\ x\in\mathbb{R} : a\,\mathcal{R}\,x\ \}$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}=\left\{\ x\in\mathbb{R}^* : a^2-\frac{1}{a^2}=x^2-\frac{1}{x^2}\ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}=\left\{\ x\in\mathbb{R}^* : a^2-x^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}\ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}=\left\{\ x\in\mathbb{R}^* : a^2-x^2=\frac{x^2-a^2}{(ax)^2}\ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}=\left\{\ x\in\mathbb{R}^* : a^2-x^2-\frac{x^2-a^2}{(ax)^2}=0\ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}=\left\{\ x\in\mathbb{R}^* : a^2-x^2+\frac{a^2-x^2}{(ax)^2}=0\ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}=\left\{\ x\in\mathbb{R}^* : \left(a^2-x^2\right)\left(1+\frac{1}{(ax)^2}\right)=0\ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a} = \left\{ \ x \in \mathbb{R}^* : \ (a-x)(a+x)\left(1+\frac{1}{(ax)^2}\right)=0 \ \right\}$$

ដោយ $1+\dfrac{1}{(ax)^2} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a} = \left\{ \ x \in \mathbb{R}^* : \ x = a \ , x = -a \ \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a} = \{a \ , -a\}$$

$\therefore$ ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ a គឺ $\bar{a} = \{a \ , -a\}$

8. គេឱ្យ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ E ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathcal{P}(E)$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall X \in \mathcal{P}(E) : \ A \cap X = A \cap X \ \Leftrightarrow X \mathcal{R} X$

លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E) : \ X \mathcal{R} Y$

$\Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \ \Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \ \Leftrightarrow Y \mathcal{R} X$

លក្ខណៈឆ្លង $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(E) : \ X \mathcal{R} Y \wedge Y \mathcal{R} Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ A \cap Y = A \cap Z \end{cases} \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X \mathcal{R} Z$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathcal{P}(E)$

9. លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : A \mathcal{R} B \Leftrightarrow n(A \Delta B)$ ជាចំនួនគត់គូ ។

បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathcal{P}(E)$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$: $n(A\Delta A) = n(\varnothing) = 0$ ជាចំនួនគត់គូ

(ព្រោះ $A\Delta A = \varnothing$)

$\Leftrightarrow A \mathcal{R} A$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \mathcal{R} B$

$\Leftrightarrow n(A\Delta B)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Leftrightarrow n(B\Delta A)$ ជាចំនួនគត់គូ

(ព្រោះ $A\Delta B = B\Delta A$)

$\Leftrightarrow B \mathcal{R} A$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$: $A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C$

$\Leftrightarrow n(A\Delta B)$ ជាចំនួនគត់គូ និង $n(B\Delta C)$ ជាចំនួនគត់គូ

$n(A\Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Rightarrow n(A) + n(B)$ ជាចំនួនគត់គូ

$n(B\Delta C) = n(B) + n(C) - 2n(B \cap C)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Rightarrow n(B) + n(C)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Rightarrow [n(A) + n(B)] + [n(B) + n(C)] = n(A) + n(C) + 2n(B)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Rightarrow n(A) + n(C)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Rightarrow n(A) + n(C) - 2n(A \cap C) = n(A\Delta C)$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Leftrightarrow A \mathcal{R} C$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathcal{P}(E)$

10. គេឱ្យ M_0 ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ P ។ លើប្លង់ P គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathcal{R}$ មួយដោយ :

$\forall M, M' \in P : M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow M_0, M, M'$ រត់ត្រង់គ្នា ។

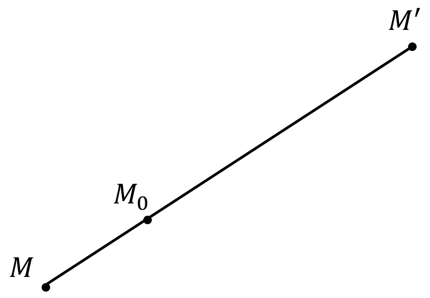
ក. តើ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ P ឬទេ ?

លក្ខណៈខ្លួនឯង :

ចំពោះគ្រប់ចំណុច M នៃប្លង់ P គេបាន : ចំណុច $M_0\,, M\,, M'$ រត់ត្រង់គ្នាជានិច្ច

(ព្រោះចំណុចទាំងបីនេះនៅលើបន្ទាត់តែមួយ) ។

$\Leftrightarrow \quad M \mathcal{R} M$



លក្ខណៈឆ្លុះ : $M \mathcal{R} M'$ នោះគេបាន $M_0\,, M\,, M'$ រត់ត្រង់គ្នា

$\Rightarrow M_0\,, M'\,, M$ រត់ត្រង់គ្នា

$\Leftrightarrow \quad M' \mathcal{R} M$

លក្ខណៈឆ្លង : $\mathcal{R}$ គ្មានលក្ខណៈឆ្លងទេ

(ព្រោះជាទូទៅ $M \mathcal{R} M'$ និង $M' \mathcal{R} M''$ មិននាំឱ្យ $M \mathcal{R} M''$ ទេ)

ឧទាហរណ៍ : បើគេយក $M \neq M''$ ហើយ $M' = M_0$ និង $M_0 \notin (MM'')$ នោះគេបាន :

$M \mathcal{R} M'$ និង $M' \mathcal{R} M''$ តែ $M \mathcal{R} M''$ មិនពិតទេ

តែនៅក្នុង $P^* = P - \{M_0\}$ នោះទើប $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លង

(ព្រោះក្នុងករណីនេះ $M \mathcal{R} M'$ និង $M' \mathcal{R} M''$ នាំឱ្យ $M \mathcal{R} M''$) ។

$\therefore$ $\mathcal{R}$ មិនមែនជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ P ទេ

ខ. គេតាង $P^* = P - \{M_0\}$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ P^* ។

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ខាងលើយើងឃើញថានៅក្នុង P^* ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង លក្ខណៈឆ្លុះ និង លក្ខណៈឆ្លង ។

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{R} \text{ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ } P^*}$

- $cl(M) = \left\{ M' \in P^* \mid M \,\mathcal{R}\, M' \right\}$ = សំណុំនៃចំណុច M' ទាំងឡាយដែលរត់ត្រង់គ្នាជាមួយ M_0 និង M

$\therefore$ $\boxed{cl(M) = \text{ បន្ទាត់ } (M_0M) \text{ ដែលគ្មានចំណុច } M_0}$

11. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ កំណត់ដោយ :

$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : (x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : x' = k.x \wedge y' = k.y$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ។

លក្ខណៈខ្លួនឯង : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \;:\; \exists k = 1 \in \mathbb{R}^* : x_1 = 1.x_1 \wedge x_2 = 1.x_2$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2) \,\mathcal{R}\, (x_1, x_2)$

លក្ខណៈឆ្លុះ : $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \;:\; (x_1, x_2) \,\mathcal{R}\, (y_1, y_2)$

$\exists k \in \mathbb{R}^* : y_1 = k.x_1 \wedge y_2 = k.x_2$

$\Rightarrow \exists k' = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}^* : x_1 = \frac{1}{k}.y_1 = k'.y_1 \wedge x_2 = \frac{1}{k}.y_2 = k'.y_2$

$\Leftrightarrow (y_1, y_2) \,\mathcal{R}\, (x_1, x_2)$

លក្ខណៈឆ្លង : $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \;:$

$(x_1, x_2) \,\mathcal{R}\, (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \,\mathcal{R}\, (z_1, z_2)$

$\Leftrightarrow\ \exists k_1 \in \mathbb{R}^* : y_1 = k_1.x_1 \wedge y_2 = k_1.x_2$ និង $\exists k_2 \in \mathbb{R}^* : z_1 = k_2.y_1 \wedge z_2 = k_2.y_2$

$\Rightarrow \exists\, k' = k_1.k_2 \in \mathbb{R}^* : z_1 = (k_1.k_2).x_1 = k'.x_1 \wedge z_2 = (k_1.k_2).x_2 = k'.x_2$

$\Leftrightarrow\ (x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (z_1, z_2)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

ខ. ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(1,2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ។

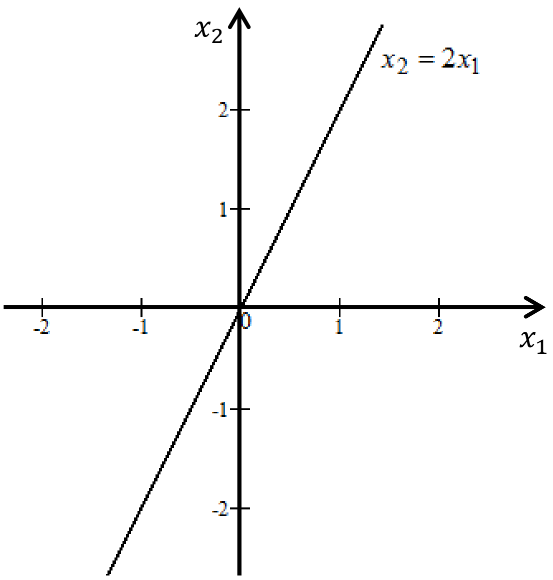
ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $(1,2)$ តាងដោយ $cl[(1,2)] = \{\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : (1,2)\,\mathcal{R}\,(x_1, x_2)\ \}$

$\Leftrightarrow\ cl[(1,2)] = \{\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : \exists k \in \mathbb{R}^* : x_1 = k \wedge x_2 = 2k\ \}$

$\Leftrightarrow\ cl[(1,2)] = \{\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : \exists k \in \mathbb{R}^* : x_2 = 2x_1\ \}$

ដូច្នេះ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ដែលសមមូលនឹង $(1,2)$ តាម $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈ $x_2 = 2x_1$

$\therefore$ (x_1, x_2) ជាធាតុនៃបន្ទាត់ D ដែលមានសមីការ $x_2 = 2x_1$ ក្រៅពីចំណុច $(0,0)$



12. គេឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E មានលក្ខណ:ខ្លួនឯង និង លក្ខណ:ឆ្លង ។

លើ E គេកំណត់ទំនាក់ទំនង $\mathcal{T}$ មួយទៀតដោយ :

$\forall x,y \in E:\ x\,\mathcal{T}\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,x$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{T}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E ។

លក្ខណ:ខ្លួនឯង : $\forall x \in E \ :\ x\,\mathcal{R}\,x \wedge x\,\mathcal{R}\,x$

$\Leftrightarrow\ x\,\mathcal{T}\,x$

ព្រោះ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E មានលក្ខណ:ខ្លួនឯង $\forall x \in E:\ x\,\mathcal{R}\,x$

លក្ខណ:ឆ្លុះ : $\forall x,y \in E \ :\ x\,\mathcal{T}\,y$

$\Leftrightarrow\ x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,x$

$\Leftrightarrow\ y\,\mathcal{R}\,x \wedge x\,\mathcal{R}\,y$

$\Leftrightarrow\ y\,\mathcal{T}\,x$

លក្ខណ:ឆ្លង : $\forall x,y,z \in E \ :\ x\,\mathcal{T}\,y \wedge y\,\mathcal{T}\,z$

$\Leftrightarrow\ x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,x$ និង $y\,\mathcal{R}\,z \wedge z\,\mathcal{R}\,y$

$\Leftrightarrow\ x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z$ និង $z\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,x$

ដោយ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ E មានលក្ខណ:ឆ្លង

$\Rightarrow\ x\,\mathcal{R}\,z \wedge z\,\mathcal{R}\,x$

$\Leftrightarrow\ x\,\mathcal{R}\,z$

$\therefore$ | $\mathcal{T}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E |

ប្រមាណវិធី

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

1. លើ $\mathbb{N}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall x, y \in \mathbb{N} : x * y = x + 3y$

   ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{N}$ ឬទេ ?

   ខ. តើ $\mathbb{N}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

   គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{N}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

2. លើ $\mathbb{Q}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall a, b \in \mathbb{Q} : a * b = a + b - a.b$

   ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}$ ឬទេ ?

   ខ. តើ $\mathbb{Q}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

   គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

3. លើ $\mathbb{Z}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = 2x - 5y$

   ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

   ខ. តើ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

   គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

4. លើ $\mathbb{Q}^*$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall a, b \in \mathbb{Q}^* : a * b = a + \frac{1}{b}$

   ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^*$ ឬទេ ?

   ខ. តើ $\mathbb{Q}^*$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

   គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}^*$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

5. លើ $\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ដោយ :

$$\forall (a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2 : (a,b)*(a',b')=(a.a'-b.b',ab'+a'b)$$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឃ. តាង $E=\{\ (a,0) : a\in\mathbb{R}\ \}$ ។

i. បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ii. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\ \mathbb{R}\ ,\ \bullet\ )$ ជា Isomorphisme ។

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

6. លើ $\mathbb{Q}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ដោយ :

$$\forall (a,b),(a',b')\in\mathbb{Q}^2 : (a,b)*(a',b')=(a.a',a'b+b')$$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^2$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{Q}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឃ. តាង $E=\{\ (a,0) : a\in\mathbb{Q}\ \}$ ។

i. បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{Q}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ii. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\ \mathbb{Q}\ ,\ \bullet\ )$ ជា Isomorphisme ។

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

7. លើ $\mathbb{Z}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ : $\forall x,y\in\mathbb{Z} : x*y=x+y+xy$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឃ. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង ប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

8. លើ $\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ និង $\perp$ ដោយ :

$$\forall (a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2 \;:\; (a,b)*(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$(a,b)\perp(a',b')=(a.a'-b.b',a.b'+a'b)$$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$, $\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$, $\perp$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$, $\perp$?

ឃ. តើប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ង. តាង $E=\{\ (a,0) : a\in\mathbb{R}\ \}$ ។

i. បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ និង $\perp$ ។

ii. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\ \mathbb{R}\ ,\ +\ )$ និង $f:(E,\perp)\to(\ \mathbb{R}\ ,\ \bullet\ )$ ជា Isomorphisme

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a \qquad\qquad (a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

9. លើ $\mathbb{R}_+$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ : $\forall x,y\in\mathbb{R}_+ \;:\; x*y=\sqrt{x^2+y^2}$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}_+$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}_+$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}_+$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឃ. តើប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{R}_+$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ង. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(\ \mathbb{R}_+\ ,\ *\ )\to(\ \mathbb{R}_+\ ,\ +\ )$ ជា Isomorphisme ។

$$x\mapsto f(x)=x^2$$

ច. ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}_+$ គណនា $\underbrace{x*x*\cdots\cdots*x}_{n\text{ តួ}}$ ។

10. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall x,y\in\mathbb{R} \;:\; x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

11. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\begin{cases}0*a=-a\\ a*(b*c)=c*(b*a)\end{cases}$

បង្ហាញថា $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ គេបាន $a*(b*c)=(a*b)*(-c)$ ។

12. គេឱ្យសំណុំ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $\bullet$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ហើយ x, y ជាពីរធាតុរបស់សំណុំ E ដែល $x.y=y.x$ ។ បង្ហាញថា $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$ គេបាន $x^n.y^p=y^p.x^n$ ។

13. គេឱ្យ $f:(E,*)\to(F,\perp)$ ជា Homomorphisme ។

ក. បង្ហាញថាបើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $f(A)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបើ B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ នោះគេបាន $f^{-1}(B)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ ។

14. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល :

$\forall A,B\in\mathcal{P}(E)\ :\ A*B=\{x*y:x\in A\wedge y\in B\}$ ។

ក. បង្ហាញថា $\forall A,A',B,B'\in\mathcal{P}(E)$ បើ $(A\subset A'\wedge B\subset B')\Rightarrow A*B\subset A'*B'$ ។

ខ. បង្ហាញថាបើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E នោះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathcal{P}(E)$ ។

គ. បង្ហាញថាបើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E នោះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathcal{P}(E)$

ឃ. បង្ហាញថាបើ e ជាធាតុណឺតនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $\{e\}$ ជាធាតុណឺតនៃ $(\mathcal{P}(E),*)$ ។

15. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)\ :\ A*B=\{x*y:x\in A\wedge y\in B\}$ ។

បង្ហាញថាចំពោះ $\forall a,b\in E$ គេបាន :

$\{a\}*E$, $E*\{b\}$, $\{a\}*E*\{b\}$, $E*\{a\}*E$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

16. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)\ :\ A*B=\{x*y:x\in A\wedge y\in B\}$ ។ ចំពោះ $\forall A,B,C\in\mathcal{P}(E)$ ចូរប្រៀបធៀប

ក. $A*(B\cap C)$ និង $(A*B)\cap(A*C)$

17. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ។ លើ $\wp(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង$*$ មួយដែល $\forall A,B\in\wp(E)$: $A*B=\{x*y : x\in A\wedge y\in B\}$ ។

ក. បង្ហាញថា បើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ នោះគេបាន $A*A$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ផ្នែក A នៃ E គេតាង $A^c=\{x\in E : \forall a\in A , a*x=x*a\}$ ។

បង្ហាញថា A^c ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

18. គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ តាង $A=\{x\in E : \forall(y,z)\in E , x*(y*z)=(x*y)*z\}$

ក. បង្ហាញថា A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ខ. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ A ។

19. គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ។ តាង $C=\{x\in E : \forall y\in E , x*y=y*x\}$

ក. បង្ហាញថា C ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ខ. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ C ។

20. គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ និង $\le$ ជាទំនាក់ទំនងលើ E ។

ឧបមាថាចំពោះ $\forall(a,b,c)\in E^3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

i. $a*b\le a$

ii. $a*b\le b$

iii. $\begin{cases} x\le a \\ x\le b \end{cases} \Rightarrow \quad x\le a*b$

ក. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E ។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in E$ គេបាន $x*x=x$ Idempotent ។

គ. បង្ហាញថា $\forall a,b,c\in E$ គេបាន $a\le b \Rightarrow a*c\le b*c$

ឃ. បង្ហាញថា $\forall a,b,c,d\in E$ គេបាន $\begin{cases} a\le b \\ c\le d \end{cases} \Rightarrow a*c\le b*d$

ង. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

1. លើ $\mathbb{N}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall x, y \in \mathbb{N} : x * y = x + 3y$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{N}$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : (x * y) * z = x * (y * z)$

$(x * y) * z = (x + 3y) * z = x + 3y + 3z$

$x * (y * z) = x * (y + 3z) = x + 3(y + 3z) = x + 3y + 9z$

$\Rightarrow (x * y) * z \neq x * (y * z)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{N}$ ទេ

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall x, y \in \mathbb{N} : x * y = y * x$

$x * y = x + 3y$

$y * x = y + 3x$

$\Rightarrow x * y \neq y * x$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{N}$ ទេ

ខ. តើ $\mathbb{N}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall x \in \mathbb{N} : x * e = e * x = x$

$x * e = x \Leftrightarrow x + 3e = x \Rightarrow e = 0$

$e * x = e + 3x = 0 + 3x = 3x \neq x$

$\therefore$ | $\mathbb{N}$ គ្មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ |

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{N}$ មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ដោយ $\mathbb{N}$ គ្មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

នោះ $\mathbb{N}$ ក៏គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ដែរ

$\therefore$ | $\mathbb{N}$ គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ |

2. លើ $\mathbb{Q}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall a,b\in\mathbb{Q} : a*b=a+b-a.b$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Q}$ កាលណា $\forall x,y,z\in\mathbb{Q} : (x*y)*z=x*(y*z)$

$$(x*y)*z=(x+y-x.y)*z=x+y-x.y+z-(x+y-x.y).z$$
$$=x+y-xy+z-xz-yz+xyz$$
$$x*(y*z)=x*(y+z-y.z)=x+y+z-y.z-x.(y+z-y.z)$$
$$=x+y+z-yz-xy-xz+xyz$$
$$\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$$

$\therefore$ | ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Q}$ |

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}$ កាលណា $\forall x,y\in\mathbb{Q} : x*y=y*x$

$$x*y=x+y-x.y=x+y-xy$$
$$y*x=y+x-y.x=y+x-yx$$
$$\Rightarrow x*y=y*x$$

$\therefore$ | ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}$ |

ខ. តើ $\mathbb{Q}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall x \in \mathbb{Q}: \ x*e = e*x = x$

$x*e = x \iff x + e - x.e = x$

$\Rightarrow e - x.e = 0$

$\Rightarrow e(1-x) = 0$

$\Rightarrow e = 0$

$e*x = e + x - e.x = 0 + x - 0.x = x$

$\therefore$ $\mathbb{Q}$ មានធាតុណឺត ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឧបមាថា a មានចម្រាស a^{-1}

$\forall a \in \mathbb{Q}: \ a*a^{-1} = a^{-1}*a = e \iff a*a^{-1} = a^{-1}*a = 0$

$a*a^{-1} = 0 \iff a + a^{-1} - a.a^{-1} = 0$

$\Rightarrow a^{-1}(1-a) = -a$

$\Rightarrow a^{-1} = \dfrac{-a}{1-a} = \dfrac{a}{a-1}$

$a^{-1}*a = a^{-1} + a - a^{-1}.a = \dfrac{a}{a-1} + a - \dfrac{a}{a-1} \times a = \dfrac{a + a^2 - a - a^2}{a-1} = 0$

$\Rightarrow a*a^{-1} = a^{-1}*a = 0$

$\therefore$ $\mathbb{Q}$ មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

3. លើ $\mathbb{Z}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = 2x - 5y$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Z}$ កាលណា $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x * y) * z = x * (y * z)$

$(x * y) * z = (2x - 5y) * z = 2(2x - 5y) - 5z = 4x - 10y - 5z$

$x * (y * z) = x * (2y - 5z) = 2x - 5(2y - 5z) = 2x - 10y + 25z$

$\Rightarrow (x * y) * z \neq x * (y * z)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Z}$ ទេ

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ កាលណា $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = y * x$

$x * y = 2x - 5y$

$y * x = 2y - 5x$

$\Rightarrow x * y \neq y * x$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ទេ

ខ. តើ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall x \in \mathbb{Z} : x * e = e * x = x$

$x * e = x \Leftrightarrow 2x - 5e = x \Rightarrow -5e = -x$

$\Rightarrow e = \dfrac{x}{5}$

$e * x = 2e - 5x = 2 \times \dfrac{x}{5} - 5x = \dfrac{2x - 25x}{5} = -\dfrac{23x}{5} \neq x$

$\therefore$ $\mathbb{Z}$ គ្មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ដោយ $\mathbb{Z}$ គ្មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

នោះ $\mathbb{Z}$ ក៏គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ដែរ

$\therefore$ $\mathbb{Z}$ គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ

4. លើ $\mathbb{Q}^*$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall a,b\in \mathbb{Q}^*$: $a*b=a+\dfrac{1}{b}$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^*$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Q}^*$ កាលណា $\forall x,y,z\in\mathbb{Q}^*$: $(x*y)*z=x*(y*z)$

$$(x*y)*z=\left(x+\frac{1}{y}\right)*z=x+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xyz+z+y}{yz}$$

$$x*(y*z)=x*\left(y+\frac{1}{z}\right)=x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=x+\frac{1}{\frac{yz+1}{z}}=x+\frac{z}{yz+1}=\frac{xyz+x+z}{yz+1}$$

$$\Rightarrow\ (x*y)*z\neq x*(y*z)$$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Q}^*$ ទេ

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^*$ កាលណា $\forall x,y\in\mathbb{Q}^*$: $x*y=y*x$

$$x*y=x+\frac{1}{y}=\frac{xy+1}{y}$$

$$y*x=y+\frac{1}{x}=\frac{xy+1}{x}$$

$$\Rightarrow\ x*y\neq y*x$$

∴ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^*$ ទេ

ខ. តើ $\mathbb{Q}^*$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall x \in \mathbb{Q}^* : \ x * e = e * x = x$

$$x * e = x \ \Leftrightarrow x + \frac{1}{e} = x \Rightarrow e.x + 1 = e.x$$

$\Rightarrow \nexists e$ ដែល $e.x + 1 = e.x$

∴ $\mathbb{Q}^*$ គ្មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}^*$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ដោយ $\mathbb{Q}^*$ គ្មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

នោះ $\mathbb{Q}^*$ ក៏គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ដែរ

∴ $\mathbb{Q}^*$ គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ

5. លើ $\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ដោយ :

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2 : (a,b) * (a',b') = (a.a' - b.b', ab' + a'b)$$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}^2$ កាលណា

  $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$:

  $$[(x_1,x_2) * (y_1,y_2)] * (z_1,z_2) = (x_1,x_2) * [(y_1,y_2) * (z_1,z_2)]$$

- $[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)=(x_1y_1-x_2y_2\ ,x_1y_2+y_1x_2)*(z_1,z_2)$

  $=(x_1y_1z_1-x_2y_2z_1-x_1y_2z_2-y_1x_2z_2\ ,x_1y_1z_2-x_2y_2z_2+x_1y_2z_1+y_1x_2z_1)$

- $(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]=(x_1,x_2)*(y_1z_1-y_2z_2\ ,y_1z_2-z_1y_2)$

  $=(x_1y_1z_1-x_1y_2z_2-x_2y_1z_2+x_2z_1y_2\ ,x_1y_1z_2-x_1z_1y_2+x_2y_1z_1-x_2y_2z_2)$

  $\Rightarrow [(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)\neq (x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}^2$ ទេ

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ កាលណា

  $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:\ (x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(y_1,y_2)*(x_1,x_2)$

- $(x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2\ ,x_1y_2+y_1x_2)$
- $(y_1,y_2)*(x_1,x_2)=(y_1x_1-y_2x_2\ ,y_1x_2+x_1y_2)$

  $\Rightarrow\ (x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(y_1,y_2)*(x_1,x_2)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$

ខ. តើ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា (e_1,e_2) ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ (x_1,x_2)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$

$(x_1,x_2)*(e_1,e_2)=(x_1,x_2)$

$\Leftrightarrow (x_1e_1-x_2e_2\ ,x_1e_2+e_1x_2)=(x_1,x_2)$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1e_1-x_2e_2=x_1 & (1)\\ x_1e_2+e_1x_2=x_2 & (2)\end{cases}$$

$(1)\ \Rightarrow\ e_1=\dfrac{x_1+x_2e_2}{x_1}$

$$(2) \Rightarrow e_2 = \frac{x_2 - e_1 x_2}{x_1} = \frac{x_2(1-e_1)}{x_1} = \frac{x_2\left(1 - \frac{x_1 + x_2 e_2}{x_1}\right)}{x_1} = \frac{x_2(x_1 - x_1 - x_2 e_2)}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow e_2 x_1^2 = -x_2^2 e_2$$

$$\Rightarrow e_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow e_2 = 0$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{x_1 + x_2 \times 0}{x_1} = 1$$

$$(e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (e_1 x_1 - e_2 x_2\ , e_1 x_2 + e_2 x_1) = (1 \times x_1 - 0 \times x_2\ , 1 \times x_2 + 0 \times x_1)$$
$$= (x_1\ , x_2)$$

$\therefore$ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឧបមាថា (a_1, a_2) មានចម្រាស $\left(a_1^{-1}\ , a_2^{-1}\right)$

$$\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 :\ (a_1, a_2) * \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) * (a_1, a_2) = (e_1, e_2) = (1,0)$$

$$(a_1, a_2) * \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = (1,0)$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1 a_1^{-1} - a_2 a_2^{-1}\ , a_1 a_2^{-1} + a_2 a_1^{-1}\right) = (1\ , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 a_1^{-1} - a_2 a_2^{-1} = 1 & (1) \\ a_1 a_2^{-1} + a_2 a_1^{-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1^{-1} = \frac{1 + a_2 a_2^{-1}}{a_1}$$

$$\Rightarrow a_2^{-1} = -\frac{a_2 a_1^{-1}}{a_1} = -\frac{a_2 \times \frac{1 + a_2 a_2^{-1}}{a_1}}{a_1} = -\frac{a_2 + a_2^2 a_2^{-1}}{a_1^2}$$

$$\Rightarrow a_1^2 a_2^{-1} = -a_2 - a_2^2 a_2^{-1}$$

$$\Rightarrow a_2^{-1}\left(a_1^2+a_2^2\right)=-a_2$$

$$\Rightarrow a_2^{-1}=-\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}$$

$$\Rightarrow a_1^{-1}=\frac{1+a_2\times\left(-\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)}{a_1}=\frac{a_1^2+a_2^2-a_2^2}{a_1\left(a_1^2+a_2^2\right)}=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}$$

$$\left(a_1^{-1},a_2^{-1}\right)*\left(a_1,a_2\right)=\left(a_1^{-1}a_1-a_2^{-1}a_2\ ,\ a_1^{-1}a_2+a_2^{-1}a_1\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}\times a_1-\left(-\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)\times a_2\ \ ,\ \ \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}\times a_2+\left(-\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)\times a_1\right)$$

$$=\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\ ,\ \frac{a_1a_2-a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)=(1\ ,0)$$

$\therefore$ | $\mathbb{R}^2$ មានធាតុបញ្ច្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$ |

ឃ. តាង $E=\{\ (a,0):a\in\mathbb{R}\ \}$ ។

i. បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

- $\forall(x,0),(y,0)\in E\ \ :\ (x,0)*(y,0)\in E$

$$(x,0)*(y,0)=(x\times y-0\times 0\ ,x\times 0+0\times y)=(xy\ ,0)\in E$$

$\therefore$ | E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ |

ii. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\mathbb{R},\bullet)$ ជា Isomorphisme ។

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

- $f[(x,0)*(y,0)]=f[(xy,0)]=xy=f[(x,0)]\bullet f[(y,0)]$
- $f[(x,0)]=f[(y,0)]\Leftrightarrow x=y\Rightarrow(x,0)=(y,0)$
- $f(E)=\{f[(x,0)]:(x,0)\in E\}=\{x:x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$\therefore$ អនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\mathbb{R},\bullet)$ ជា Isomorphisme

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

6. លើ $\mathbb{Q}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ដោយ :

$$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{Q}^2:(a,b)*(a',b')=(a.a',a'b+b')$$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^2$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Q}^2$ កាលណា

$$\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{Q}^2:$$

$$[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)=(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]$$

$$[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)=(x_1y_1,y_1x_2+y_2)*(z_1,z_2)$$

$$=(x_1y_1z_1,y_1x_2z_1+z_1y_2+z_2)$$

$$(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]=(x_1,x_2)*(y_1z_1,z_1y_2+z_2)$$

$$=(x_1y_1z_1,x_2y_1z_1+z_1y_2+z_2)$$

$$\Rightarrow[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)=(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]$$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Q}^2$

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^2$ កាលណា

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^2 : \ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$

$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1 \ , x_2 y_1 + y_2)$

$(y_1, y_2) * (x_1, x_2) = (x_1 y_1 \ , x_1 y_2 + x_2)$

$\Rightarrow \ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) \neq (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^2$ ទេ

ខ. តើ $\mathbb{Q}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា (e_1, e_2) ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 : \ (x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

- $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$

$\Leftrightarrow (x_1 e_1 \ , x_2 e_1 + e_2) = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 e_1 = x_1 & (1) \\ x_2 e_1 + e_2 = x_2 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow e_1 = 1$

$(2) \ \Rightarrow e_2 = x_2 - x_2 e_1 = x_2 - x_2 \times 1 = 0$

$\Rightarrow e_2 = 0$

- $(e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (e_1 x_1 \ , e_2 x_1 + x_2) = (1 \times x_1 \ , 0 \times x_1 + x_2) = (x_1 \ , x_2)$

$\Rightarrow (x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

$\therefore$ $\mathbb{Q}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឧបមាថា (a_1 , a_2) មានចម្រាស $\left(a_1^{-1} , a_2^{-1}\right)$

$\forall (a_1 , a_2) \in \mathbb{Q}^2 :\ (a_1 , a_2) * \left(a_1^{-1} , a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1} , a_2^{-1}\right) * (a_1 , a_2) = (e_1 , e_2) = (1,0)$

- $(a_1 , a_2) * \left(a_1^{-1} , a_2^{-1}\right) = (1,0)$

$\Leftrightarrow \left(a_1 a_1^{-1} , a_2 a_1^{-1} + a_2^{-1}\right) = (1 , 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 a_1^{-1} = 1 & (1) \\ a_2 a_1^{-1} + a_2^{-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a_1^{-1} = \dfrac{1}{a_1}$

$(2) \Rightarrow a_2^{-1} = -a_2 a_1^{-1} = -a_2 \times \dfrac{1}{a_1} = -\dfrac{a_2}{a_1}$

- $\left(a_1^{-1} , a_2^{-1}\right) * (a_1 , a_2) = \left(a_1^{-1} a_1 , a_1 a_2^{-1} + a_2\right) = \left(\dfrac{1}{a_1} \times a_1 , a_1 \times \left(-\dfrac{a_2}{a_1}\right) + a_2\right) = (1 , 0)$

$\therefore$ $\mathbb{Q}^2$ មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

ឃ. តាង $E = \{\ (a,0) : a \in \mathbb{Q}\ \}$ ។

i. បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{Q}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

- $\forall (x,0) , (y,0) \in E \ :\ (x,0) * (y,0) \in E$

$(x,0) * (y,0) = (x \times y , y \times 0 + 0) = (xy , 0) \in E$

$\therefore$ E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{Q}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

ii. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\mathbb{Q},\bullet)$ ជា Isomorphisme ។

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

- $f[(x,0)*(y,0)]=f[(xy,0)]=xy=f[(x,0)]\bullet f[(y,0)]$
- $f[(x,0)]=f[(y,0)]\Leftrightarrow x=y\Rightarrow(x,0)=(y,0)$
- $f(E)=\{f[(x,0)]:(x,0)\in E\}=\{x:x\in\mathbb{Q}\}=\mathbb{Q}$

$\therefore$ $f:(E,*)\to(\mathbb{Q},\bullet)$ ជា Isomorphisme

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

7. លើ $\mathbb{Z}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ : $\forall x,y\in\mathbb{Z}: x*y=x+y+xy$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Z}$ កាលណា $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}:\ (x*y)*z=x*(y*z)$

$$(x*y)*z=(x+y+xy)*z=x+y+xy+z+(x+y+xy).z$$
$$=x+y+xy+z+xz+yz+xyz$$
$$x*(y*z)=x*(y+z+yz)=x+y+z+yz+x.(y+z+yz)$$
$$=x+y+z+yz+xy+xz+xyz$$
$$\Rightarrow\ (x*y)*z=x*(y*z)$$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Z}$

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ កាលណា $\forall x,y\in\mathbb{Z}:\ x*y=y*x$
- $x*y=x+y+xy$
- $y*x=y+x=yx$

$\Rightarrow\ x*y=y*x$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$

ខ. តើ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall x\in\mathbb{Z}:\ x*e=e*x=x$

$x*e=x\ \Leftrightarrow x+e+x.e=x\ \Rightarrow e(1+x)=0$

$\Rightarrow\ e=0$

$e*x=e+x+e.x=0+x+0\times x=x$

$\Rightarrow\ x*e=e*x=x$

$\therefore$ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឧបមាថា a មានចម្រាស a^{-1}

$\forall a\in\mathbb{Z}:\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=e\ \Leftrightarrow\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=0$

$a*a^{-1}=0\Leftrightarrow\ a+a^{-1}+a.a^{-1}=0\ \Rightarrow\ a^{-1}(1+a)=-a$

$$\Rightarrow\ a^{-1}=-\frac{a}{1+a}$$

$$a^{-1}*a=a^{-1}+a+a^{-1}.a=-\frac{a}{1+a}+a+\frac{-a}{1+a}\times a=\frac{-a+a+a^2-a^2}{1+a}=0$$

$\Rightarrow\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=0$

$\therefore$ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

ឃ. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង ប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

$$\forall x,y,z\in\mathbb{Z}:\begin{cases}x*(y+z)=(x*y)+(x*z)\\(y+z)*x=(y*x)+(z*x)\end{cases}$$

- $x*(y+z)=x+y+z+x.(y+z)=x+y+z+xy+xz$
- $(x*y)+(x*z)=(x+y+xy)+(x+z+xz)=2x+y+z+xy+xz$

$\Rightarrow x*(y+z)\neq(x*y)+(x*z)$

- $(y+z)*x=y+z+x+(y+z).x=y+z+x+yx+zx$
- $(y*x)+(z*x)=(y+x+yx)+(z+x+zx)=2x+y+z+yx+zx$

$\Rightarrow (y+z)*x\neq(y*x)+(z*x)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូកនៃ $\mathbb{Z}$ ទេ

$$\forall x,y,z\in\mathbb{Z}:\begin{cases}x*(y.z)=(x*y).(x*z)\\(y.z)*x=(y*x).(z*x)\end{cases}$$

- $x*(y.z)=x+yz+xyz$
- $(x*y).(x*z)=(x+y+xy).(x+z+xz)$

$$=x^2+xz+x^2z+yx+yz+xyz+x^2y+xyz+x^2yz$$

$\Rightarrow x*(y.z)\neq(x*y).(x*z)$

- $(y.z)*x=yz+x+yzx$
- $(y*x).(z*x)=(y+x+yx).(z+x+zx)$

$$=yz+yx+yzx+xz+x^2+zx^2+yxz+yx^2+yzx^2$$

$\Rightarrow (y.z)*x\neq(y*x).(z*x)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{Z}$ ទេ

8. លើ $\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ និង $\perp$ ដោយ :

$$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2 : (a,b)*(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$(a,b)\perp(a',b')=(a.a'-b.b',a.b'+a'b)$$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$, $\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}^2$ កាលណា

  $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$:

  $[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)=(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]$

- $[(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2)=(x_1+y_1\ ,x_2+y_2)*(z_1,z_2)$

  $=(x_1+y_1+z_1\ ,x_2+y_2+z_2)$

- $(x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]=(x_1,x_2)*(y_1+z_1\ ,y_2+z_2)$

  $=(x_1+y_1+z_1\ ,x_2+y_2+z_2)$

  $\Rightarrow [(x_1,x_2)*(y_1,y_2)]*(z_1,z_2) = (x_1,x_2)*[(y_1,y_2)*(z_1,z_2)]$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}^2$

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ កាលណា

  $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 :\ (x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(y_1,y_2)*(x_1,x_2)$

- $(x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(x_1+y_1\ ,x_2+y_2)$
- $(y_1,y_2)*(x_1,x_2)=(y_1+x_1\ ,y_2+x_2)$

  $\Rightarrow (x_1,x_2)*(y_1,y_2)=(y_1,y_2)*(x_1,x_2)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$

- ប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}^2$ កាលណា

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$:

$[(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2)] \perp (z_1, z_2) = (x_1, x_2) \perp [(y_1, y_2) \perp (z_1, z_2)]$

- $[(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2)] \perp (z_1, z_2) = (x_1y_1 - x_2y_2 \ , x_1y_2 + x_2y_1) \perp (z_1, z_2)$

$= (x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 \ , x_1y_1z_2 - x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1)$

- $(x_1, x_2) \perp [(y_1, y_2) \perp (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) \perp (y_1z_1 - y_2z_2 \ , y_1z_2 + y_2z_1)$

$= (x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 \ , x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2)$

$\Rightarrow [(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2)] \perp (z_1, z_2) = (x_1, x_2) \perp [(y_1, y_2) \perp (z_1, z_2)]$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}^2$

- ប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ កាលណា

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2) = (y_1, y_2) \perp (x_1, x_2)$

- $(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2 \ , x_1y_2 + x_2y_1)$
- $(y_1, y_2) \perp (x_1, x_2) = (y_1x_1 - y_2x_2 \ , y_1x_2 + y_2x_1)$

$\Rightarrow (x_1, x_2) \perp (y_1, y_2) = (y_1, y_2) \perp (x_1, x_2)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$

ខ. តើ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$, $\perp$ ឬទេ ?

ឧបមាថា (e_1, e_2) ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \perp (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \perp (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

$(x_1, x_2) \perp (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$

$\Leftrightarrow (x_1e_1 - x_2e_2 \ , x_1e_2 + x_2e_1) = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1e_1 - x_2e_2 = x_1 & (1) \\ x_1e_2 + x_2e_1 = x_2 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{x_1 + x_2e_2}{x_1}$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{x_2 - x_2e_1}{x_1} = \frac{x_2 - x_2 \times \frac{x_1 + x_2e_2}{x_1}}{x_1} = \frac{x_1x_2 - x_1x_2 - x_2{}^2e_2}{x_1{}^2}$$

$$\Rightarrow e_2x_1{}^2 + x_2{}^2e_2 = 0$$

$$\Rightarrow e_2\left(x_1{}^2 + x_2{}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow e_2 = 0$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{x_1 + x_2 \times 0}{x_1} = 1$$

$$(e_1, e_2) \perp (x_1, x_2) = (e_1x_1 - e_2x_2\ , e_1x_2 + e_2x_1)$$

$$= (1\times x_1 - 0\times x_2\ , 1\times x_2 + 0\times x_1) = (x_1\ , x_2)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \perp (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \perp (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$\therefore$ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$

ឧបមាថា (e_1, e_2) ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ (x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + e_1\ , x_2 + e_2) = (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + e_1 = x_1 & (1) \\ x_2 + e_2 = x_2 & (2) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

$$(e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (e_1 + x_1\ , e_2 + x_2) = (0 + x_1\ , 0 + x_2) = (x_1\ , x_2)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$\therefore$ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$, $\perp$?

ឧបមាថា (a_1, a_2) មានចម្រាស់ $\left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right)$

$\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$: $(a_1, a_2) * \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) * (a_1, a_2) = (e_1, e_2) = (0,0)$

$(a_1, a_2) * \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \left(a_1 + a_1^{-1}, a_2 + a_2^{-1}\right) = (0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1^{-1} = 0 & (1) \\ a_2 + a_2^{-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a_1^{-1} = -a_1$

$(2) \Rightarrow a_2^{-1} = -a_2$

$\left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) * (a_1, a_2) = \left(a_1^{-1} + a_1, a_2^{-1} + a_2\right) = (-a_1 + a_1, -a_2 + a_2) = (0, 0)$

$\Rightarrow (a_1, a_2) * \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) * (a_1, a_2) = (0,0)$

$\therefore$ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

ឧបមាថា (a_1, a_2) មានចម្រាស $\left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right)$

$\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$: $(a_1, a_2) \perp \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) \perp (a_1, a_2) = (e_1, e_2) = (1,0)$

$(a_1, a_2) * \left(a_1^{-1}, a_2^{-1}\right) = (1,0)$

$\Leftrightarrow \left(a_1 a_1^{-1} - a_2 a_2^{-1}, a_1 a_2^{-1} + a_2 a_1^{-1}\right) = (1, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 a_1^{-1} - a_2 a_2^{-1} = 1 & (1) \\ a_1 a_2^{-1} + a_2 a_1^{-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a_1{}^{-1} = \frac{1 + a_2 a_2{}^{-1}}{a_1}$$

$$(2) \Rightarrow a_2{}^{-1} = -\frac{a_2 a_1{}^{-1}}{a_1} = -\frac{a_2 \times \dfrac{1 + a_2 a_2{}^{-1}}{a_1}}{a_1} = -\frac{a_2 + a_2{}^2 a_2{}^{-1}}{a_1{}^2}$$

$$\Rightarrow a_1{}^2 a_2{}^{-1} = -a_2 - a_2{}^2 a_2{}^{-1}$$

$$\Rightarrow a_2^{-1}\left(a_1^2 + a_2^2\right) = -a_2$$

$$\Rightarrow a_2^{-1} = -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\Rightarrow a_1^{-1} = \frac{1 + a_2 \times \left(-\dfrac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right)}{a_1} = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_2^2}{a_1\left(a_1^2 + a_2^2\right)} = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\left(a_1{}^{-1}, a_2{}^{-1}\right) \perp (a_1, a_2) = \left(a_1^{-1} a_1 - a_2^{-1} a_2 \ , a_1^{-1} a_2 + a_2^{-1} a_1\right)$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \times a_1 - \left(-\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) \times a_2 \ , \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \times a_2 + \left(-\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) \times a_1\right)$$

$$= \left(\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \ , \ \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2) \perp \left(a_1{}^{-1}, a_2{}^{-1}\right) = \left(a_1{}^{-1}, a_2{}^{-1}\right) \perp (a_1, a_2) = (1, 0)$$

$\therefore$ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$

ឃ. តើប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

- $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \perp [(y_1, y_2) * (z_1, z_2)] = [(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2)] * [(x_1, x_2) \perp (z_1, z_2)]$$

- $(x_1 , x_2)\perp[(y_1 , y_2)*(z_1 , z_2)]=(x_1 , x_2)\perp(y_1+z_1 , y_2+z_2)$

$=(x_1y_1+x_1z_1-x_2y_2-x_2z_2 , x_1y_2+x_1z_2+x_2y_1+x_2z_1)$

- $[(x_1 , x_2)\perp(y_1 , y_2)]*[(x_1 , x_2)\perp(z_1 , z_2)]$

$=(x_1y_1-x_2y_2 , x_1y_2+x_2y_1)*(x_1z_1-x_2z_2 , x_1z_2+x_2z_1)$

$=(x_1y_1-x_2y_2+x_1z_1-x_2z_2 , x_1y_2+x_2y_1+x_1z_2+x_2z_1)$

$\Rightarrow (x_1 , x_2)\perp[(y_1 , y_2)*(z_1 , z_2)]=[(x_1 , x_2)\perp(y_1 , y_2)]*[(x_1 , x_2)\perp(z_1 , z_2)]$

- $\forall(x_1 ,x_2),(y_1 ,y_2),(z_1 ,z_2)\in\mathbb{R}^2$:

$[(y_1 , y_2)*(z_1 , z_2)]\perp(x_1 , x_2)=[(y_1 , y_2)\perp(x_1 , x_2)]*[(z_1 , z_2)\perp(x_1 , x_2)]$

- $[(y_1 , y_2)*(z_1 , z_2)]\perp(x_1 , x_2)=(y_1+z_1 , y_2+z_2)\perp(x_1 , x_2)$

  $=[(y_1+z_1).x_1-(y_2+z_2).x_2 , (y_1+z_1).x_2+(y_2+z_2).x_2]$

  $=(y_1x_1+z_1x_1-y_2x_2-z_2x_2 , y_1x_2+z_1x_2+y_2x_1+z_2x_1)$

- $[(y_1 , y_2)\perp(x_1 , x_2)]*[(z_1 , z_2)\perp(x_1 , x_2)]$

  $=(y_1x_1-y_2x_2 , y_1x_2+y_2x_1)*(z_1x_1-z_2x_2 , z_1x_2+z_2x_1)$

  $=(y_1x_1-y_2x_2+z_1x_1-z_2x_2 , y_1x_2+y_2x_1+z_1x_2+z_2x_1)$

  $\Rightarrow [(y_1 , y_2)*(z_1 , z_2)]\perp(x_1 , x_2)=[(y_1 , y_2)\perp(x_1 , x_2)]*[(z_1 , z_2)\perp(x_1 , x_2)]$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$

ង. តាង $E=\{\ (a,0) : a\in\mathbb{R}\ \}$ ។

1. បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ និង $\perp$ ។

- $\forall(x,0),(y,0)\in E$: $(x,0)*(y,0)\in E$

$(x , 0)*(y , 0)=(x+y , 0)\in E$

$\therefore$ E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

- $\forall (x,0),(y,0)\in E \;:\; (x,0)\perp(y,0)\in E$

  $(x,0)\perp(y,0)=(xy,0)\in E$

$\therefore$ E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$

2. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍

$f:(E,*)\to(\mathbb{R},+)$ និង $f:(E,\perp)\to(\mathbb{R},\bullet)$ ជា Isomorphisme

$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$ $\qquad$ $(a,0)\mapsto f(a,0)=a$

- $f[(x,0)*(y,0)]=f[(x+y,0)]=x+y=f[(x,0)]+f[(y,0)]$
- $f[(x,0)]=f[(y,0)] \Leftrightarrow x=y$

  $\Rightarrow (x,0)=(y,0)$
- $f(E)=\{\, f[(x,0):(x,0)\in E\,]=\{\, x:x\in\mathbb{R}\,\}=\mathbb{R}$

$\therefore$ អនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\mathbb{R},+)$ ជា Isomorphisme

$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$

- $f[(x,0)\perp(y,0)]=f[(xy,0)]=xy=f[(x,0)]\bullet f[(y,0)]$
- $f[(x,0)]=f[(y,0)] \Leftrightarrow x=y$

  $\Rightarrow (x,0)=(y,0)$
- $f(E)=\{\, f[(x,0):(x,0)\in E\,]=\{\, x:x\in\mathbb{R}\,\}=\mathbb{R}$

$\therefore$ អនុវត្តន៍ $f:(E,\perp)\to(\mathbb{R},\bullet)$ ជា Isomorphisme

$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$

9. លើ $\mathbb{R}_+$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ : $\forall x,y\in\mathbb{R}_+ : x*y=\sqrt{x^2+y^2}$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}_+$ ឬទេ ?

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}_+$ កាលណា $\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+ : (x*y)*z=x*(y*z)$
- $(x*y)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $x*(y*z)=x*\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}_+$

- ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}_+$ កាលណា $\forall x,y\in\mathbb{R}_+ : x*y=y*x$
- $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$
- $y*x=\sqrt{y^2+x^2}$

$\Rightarrow x*y=y*x$

$\therefore$ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}_+$

ខ. តើ $\mathbb{R}_+$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \ x * e = e * x = x$

- $x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + e^2} = x \Leftrightarrow x^2 + e^2 = x^2 \Rightarrow e = 0$
- $e * x = \sqrt{e^2 + x^2} = \sqrt{0 + x^2} = x$
  $\Rightarrow x * e = e * x = x$

$\therefore$ $\mathbb{R}_+$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}_+$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$?

ឧបមាថា a មានចម្រាស a^{-1}

$\forall a \in \mathbb{R}_+ : \ a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \ \Leftrightarrow \ a * a^{-1} = a^{-1} * a = 0$

$a * a^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (a^{-1})^2} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + (a^{-1})^2 = 0$

$\Rightarrow (a^{-1})^2 = -a^2$

$\Rightarrow \nexists\, a^{-1}$ ដែល $(a^{-1})^2 = -a^2$

$\therefore$ $\mathbb{R}_+$ គ្មានចម្រាស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ទេ

ឃ. តើប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{R}_+$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+ : \begin{cases} x.(y*z) = (x.y)*(x.z) \\ (y*z).x = (y.x)*(z.x) \end{cases}$

- $x.(y*z) = x.\left(\sqrt{y^2+z^2}\right) = x.\sqrt{y^2+z^2}$

- $(x.y)*(x.z) = \sqrt{(xy)^2+(xz)^2} = \sqrt{x^2\left(y^2+z^2\right)} = x.\sqrt{y^2+z^2}$

  $\Rightarrow \; x.(y*z) = (x.y)*(x.z)$

- $(y*z).x = \left(\sqrt{y^2+z^2}\right).x$

- $(y.x)*(z.x) = \sqrt{(yx)^2+(zx)^2} = \sqrt{x^2\left(y^2+z^2\right)} = x.\sqrt{y^2+z^2}$

  $\Rightarrow \; (y*z).x = (y.x)*(z.x)$

$\therefore$ **ប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{R}_+$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$**

ង. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f : (\mathbb{R}_+ , *) \to (\mathbb{R}_+ , +)$ ជា Isomorphisme ។

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \; f(x*y) = f(x) + f(y)$

- $f(x*y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 = f(x)+f(y)$

- $f(x) = f(y) \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$

  $\Rightarrow \; x = y$

$f(\mathbb{R}_+) = \{ f(x) : x \in \mathbb{R}_+ \} = \left\{ x^2 : x \in \mathbb{R}_+ \right\} = \mathbb{R}_+$

$\therefore$

អនុវត្តន៍ $f:(\ \mathbb{R}_+\ ,\ *\ )\to(\ \mathbb{R}_+\ ,\ +\ )$ ជា Isomorphisme $x\mapsto f(x)=x^2$

ច. ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}_+$ គណនា $\underbrace{x*x*\cdots\cdots*x}_{n\text{ តួ}}$ ។

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\ :\quad f\left(\underbrace{x*x*\cdots\cdots*x}_{n\text{ តួ}}\right)=\underbrace{f(x)+f(x)+\cdots\cdots f(x)}_{n\text{ តួ}}$$

$$=\underbrace{x^2+x^2+\cdots\cdots+x^2}_{n\text{ តួ}}=nx^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x*x*x*\cdots\cdots*x}_{n\text{ តួ}}=f^{-1}\left(nx^2\right)$$

គេមាន $f(x)=x^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(nx^2\right)=\sqrt{nx^2}=\sqrt{n}.x$$

$\therefore$

$\underbrace{x*x*x*\cdots\cdots*x}_{n\text{ តួ}}=\sqrt{n}.x$

10. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ $\forall x,y\in\mathbb{R}\ :\ x*y=xy+\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ , លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?

- $(-1*0)*2=\left((-1)\times 0+\left((-1)^2-1\right)\left(0^2-1\right)\right)*2=0*2$
  $=0\times 2+\left(0^2-1\right)\left(2^2-1\right)=-3$
- $(-1)*(0*2)=(-1)*\left(0\times 2+\left(0^2-1\right)\left(2^2-1\right)\right)=(-1)*(-3)$
  $=(-1)(-3)+\left((-1)^2-1\right)\left((-3)^2-1\right)=3$

$$\Rightarrow (-1*0)*2 \neq (-1)*(0*2)$$

$\therefore$ | ប្រមាណវិធី $*$ គ្មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}$ ទេ |

ខ. តើ $\mathbb{R}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ x*e = e*x = x$$

$$x*e = x$$

$$x.e + (x^2-1)(e^2-1) = x$$

$$x.e + x^2e^2 + 1 - x^2 - e^2 - x = 0$$

$$e^2(x^2-1) + x(e-1) - (x^2-1) = 0$$

$$(x^2-1)(e^2-1) + x(e-1) = 0$$

$$(e-1)\big((e+1)(x^2-1) + x\big) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} e = 1 \\ e = \dfrac{x}{1-x^2} - 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} e = 1 \\ e = \dfrac{x^2+x-1}{1-x^2} \end{array}\right.$$

- $e = 1$

$$e*x = e.x + (e^2-1)(x^2-1) = 1\times x + (1^2-1)(x^2-1) = x$$

- $e = \dfrac{x^2+x-1}{1-x^2}$

$$e*x = \frac{x^2+x-1}{1-x^2}\times x + \left(\left(\frac{x^2+x-1}{1-x^2}\right)^2 - 1\right)(x^2-1)$$

$$=\frac{x^3+x^2-x}{1-x^2}+\left(\frac{(x^2+x-1)^2}{(1-x^2)^2}-1\right).(x^2-1)$$

$$=\frac{x^3+x^2-x}{1-x^2}+\left(\frac{(x^2+x-1)^2-(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}\right).(x^2-1)$$

$$=\frac{x^3+x^2-x+(x^2+x-1)^2-(1-x^2)^2}{1-x^2}$$

$$=\frac{x^3+x^2-x+x^4+x^2+1+2x^3-2x^2-2x-(1-2x^2+x^4)}{1-x^2}$$

$$=\frac{x^3+x^2-x+x^4+x^2+1+2x^3-2x^2-2x-1+2x^2-x^4}{1-x^2}$$

$$=\frac{3x^3+2x^2-3x}{1-x^2}\neq x$$

$\therefore$ $\mathbb{R}$ មានធាតុណឺត $e=1$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

11. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\begin{cases}0*a=-a\\ a*(b*c)=c*(b*a)\end{cases}$

បង្ហាញថា $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ គេបាន $a*(b*c)=(a*b)*(-c)$ ។

- $a*(b*c)=[0*(-a)]*(b*c)=[0*(0*a)]*(b*c)=[a*(0*0)]*(b*c)$

$$=(a*0)*(b*c)=c*[b*(a*0)]=c*[0*(a*b)]=(a*b)*(0*c)=(a*b)*(-c)$$

$\therefore$ $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ គេបាន $a*(b*c)=(a*b)*(-c)$

12. គេឱ្យសំណុំ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $\bullet$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ហើយ x , y ជាពីរធាតុរបស់សំណុំ E ដែល $x.y=y.x$ ។ បង្ហាញថា $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$ គេបាន $x^n.y^p=y^p.x^n$ ។

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ x^n.y=y.x^n$

ចំពោះ $n=1\Rightarrow x.y=y.x$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $x^n.y=y.x^n$

យើងនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ $x^{n+1}.y=y.x^{n+1}$

គេមាន $x^n.y=y.x^n$

$\Rightarrow x.(x^n.y)=x.(y.x^n)$

$\Leftrightarrow (x.x^n).y=(xy).x^n \Leftrightarrow x^{n+1}.y=(yx).x^n \Leftrightarrow x^{n+1}.y=y.(x.x^n) \Leftrightarrow x^{n+1}.y=y.x^{n+1}$

ដូច្នេះ $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ x^n.y=y.x^n$

ដោយយក $n=p$, $x=y$ និង $y=x^n$ គេបាន :

$x^n.y^p=y^p.x^n$

$\therefore$ $\boxed{\forall n,p\in\mathbb{N}^* \text{ គេបាន } x^n.y^p=y^p.x^n}$

13. គេឱ្យ $f:(E,*)\to(F,\perp)$ ជា Homomorphisme ។

ក. បង្ហាញថាបើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $f(A)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ ។

- ដោយ $f:(E,*)\to(F,\perp)$ ជា Homomorphisme

គេបាន : $\forall x,y\in E:\ f(x*y)=f(x)\perp f(y)$

- ដោយ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$

គេបាន $\forall x,y\in A\quad x*y\in A$

- $f(A)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ កាលណា

$\forall f(x), f(y)\in f(A) \quad f(x)\perp f(y)\in f(A)$

គេមាន $f(x)\perp f(y)= f(x*y)$

គេមាន $x*y\in A$

នាំឱ្យ $f(x*y)\in f(A) \Rightarrow f(x)\perp f(y)\in f(A)$

$\therefore$ | បើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $f(A)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$

ខ. បង្ហាញថាបើ B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ នោះគេបាន $f^{-1}(B)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ ។

- ដោយ B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$

គេបាន $\forall x,y\in B \ x\perp y\in B$

- $f^{-1}(B)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ កាលណា

$\forall f^{-1}(x), f^{-1}(y)\in f^{-1}(B) \quad f^{-1}(x)* f^{-1}(y)\in f^{-1}(B)$

គេមាន $f\left[f^{-1}(x)* f^{-1}(y)\right]= f\left[f^{-1}(x)\right]\perp f\left[f^{-1}(y)\right]= x\perp y$

គេមាន $x\perp y\in B$

នាំឱ្យ $f^{-1}(x)* f^{-1}(y)\in f^{-1}(B)$

$\therefore$ | បើ B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ នោះគេបាន $f^{-1}(B)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$

14. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។

លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល :

$\forall A,B\in \mathcal{P}(E) \ : \ A*B=\{x*y : x\in A\wedge y\in B\}$ ។

ក. បង្ហាញថា $\forall A,A',B,B'\in \mathcal{P}(E)$ បើ $(A\subset A' \wedge B\subset B') \Rightarrow A*B\subset A'*B'$ ។

- $\forall (x*y)\in (A*B)\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ y\in B$

តែគេមាន $\begin{cases} A\subset A' \\ B\subset B' \end{cases}$

$\Rightarrow x\in A' \ \wedge \ y\in B'$

$\Rightarrow (x*y)\in (A'*B')$

$\Rightarrow A*B\subset A'*B'$

$\therefore$ $\boxed{\forall A,A',B,B'\in \wp(E) \text{ បើ } (A\subset A' \wedge B\subset B') \Rightarrow A*B\subset A'*B'}$

ខ. បង្ហាញថាបើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E នោះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\wp(E)$ ។

ដោយប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E គេបាន : $\forall x,y,z\in E \ : \ (x*y)*z=x*(y*z)$

- $\forall A,B,C\in \wp(E) \ : \ (A*B)*C=A*(B*C)$
- $\forall (x*y)*z\in (A*B)*C$

$\Leftrightarrow (x*y)\in (A*B) \ \wedge \ z\in C$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B) \ \wedge \ z\in C$

$\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ (y\in B\wedge \ z\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ (y*z)\in (B*C)$

$\Leftrightarrow \ x*(y*z)\in A*(B*C)$

$\Leftrightarrow (x*y)*z\in A*(B*C)$

$\Rightarrow (A*B)*C\subset A*(B*C)$

- $\forall x*(y*z)\in A*(B*C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge (y\in B\wedge z\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B) \ \wedge \ z\in C$

$\Leftrightarrow (x*y)\in (A*B)\wedge z\in C$

$\Leftrightarrow (x*y)*z\in (A*B)*C$

$\Leftrightarrow \ x*(y*z)\in A*(B*C)$

$\Rightarrow A*(B*C)\subset(A*B)*C$

នាំឱ្យ $(A*B)*C=A*(B*C)$

$\therefore$ បើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E នោះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\wp(E)$

គ. បង្ហាញថាបើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E នោះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\wp(E)$

ដោយប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E គេបាន : $\forall x,y\in E$: $x*y=y*x$

- $\forall A,B\in\wp(E)$: $A*B=B*A$
- $\forall(x*y)\in(A*B)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Leftrightarrow y\in B\wedge x\in A$

$\Leftrightarrow (y*x)\in(B*A)$

$\Rightarrow A*B\subset B*A$

- $\forall(y*x)\in(B*A)$

$\Leftrightarrow y\in B\wedge x\in A$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Leftrightarrow (x*y)\in(A*B)$

$\Rightarrow B*A\subset A*B$

នាំឱ្យ $A*B=B*A$

$\therefore$ បើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E នោះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\wp(E)$

ឃ. បង្ហាញថាបើ e ជាធាតុណឺតនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $\{e\}$ ជាធាតុណឺតនៃ $(\wp(E),*)$ ។

ដោយ e ជាធាតុណឺតនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $\forall x\in E$: $x*e=e*x=x$

$\{e\}$ ជាធាតុណឺតនៃ $(\mathcal{P}(E),*)$ កាលណា : $\forall A\in\mathcal{P}(E)$: $A*\{e\}=\{e\}*A=A$

- $A*\{e\}=\{\,x*e : x\in A\wedge e\in\{e\}\,\}=A$
- $\{e\}*A=\{\,e*x : e\in\{e\}\wedge x\in A\,\}=A$

$\therefore$ | បើ e ជាធាតុណឺតនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $\{e\}$ ជាធាតុណឺតនៃ $(\mathcal{P}(E),*)$

15. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ។

លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល :

$\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$: $A*B=\{x*y : x\in A\wedge y\in B\}$ ។

បង្ហាញថាចំពោះ $\forall a,b\in E$ គេបាន :

$\{a\}*E$, $E*\{b\}$, $\{a\}*E*\{b\}$, $E*\{a\}*E$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

- $(a*x)*(a*y)=a*(x*a*y)\in\{a\}*E$
- $(x*e)*(y*b)=(x*b*y)*b\in E*\{b\}$
- $(a*x*b)*(a*y*b)=a*(x*b*a*y)*b\in\{a\}*E*\{b\}$
- $(x*a*y)*(x'*a*y')=x*a*(y*x'*a*y')\in E*\{a\}*E$

$\therefore$ | $\{a\}*E$, $E*\{b\}$, $\{a\}*E*\{b\}$, $E*\{a\}*E$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

16. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដែល $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$: $A*B=\{x*y : x\in A\wedge y\in B\}$ ។ ចំពោះ $\forall A,B,C\in\mathcal{P}(E)$ ចូរប្រៀបធៀប

ក. $A*(B\cap C)$ និង $(A*B)\cap(A*C)$

គេមាន $\begin{cases} B\cap C\subset B \\ B\cap C\subset C \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} A*(B\cap C)\subset A*B \\ A*(B\cap C)\subset A*C \end{cases}$

នាំឱ្យ $A*(B\cap C)\subset(A*B)\cap(A*C)$

$\therefore$ $\boxed{A*(B\cap C)\subset(A*B)\cap(A*C)}$

17. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ។ លើ $\wp(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង$*$ មួយដែល $\forall A,B\in\wp(E)$: $A*B=\{x*y : x\in A\wedge y\in B\}$ ។

ក. បង្ហាញថាបើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ នោះគេបាន $A*A$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ដោយ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ នោះគេបាន $\forall x,y\in A$: $x*y\in A$

- $A*A$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ កាលណា :

$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in A*A$: $(a_1,a_2)*(b_1,b_2)\in A*A$

គេមាន $\begin{cases} a_1*a_2\in A \\ b_1*b_2\in A \end{cases}$

នាំឱ្យ $(a_1*a_2)*(b_1*b_2)\in A*A$

$\therefore$ | បើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ នោះគេបាន $A*A$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ |

ខ. ចំពោះគ្រប់ផ្នែក A នៃ E គេតាង $A^c=\{x\in E : \forall a\in A, a*x=x*a\}$ ។

បង្ហាញថា A^c ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

- A^c ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ កាលណា : $\forall x,y\in A^c$: $x*y\in A^c$

$\forall a\in A$: $(x*y)*a=x*(y*a)=x*(a*y)=(x*a)*y=(a*x)*y=a*(x*y)$

នាំឱ្យ $x*y\in A^c$

∴ A^c ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

18. គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។

តាង $A=\{x\in E:\forall(y,z)\in E\ ,x*(y*z)=(x*y)*z\}$

ក. បង្ហាញថា A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

- $\forall a_1\ ,a_2\in A\ ,\ \forall y\ ,z\in E$:

$$((a_1*a_2)*y)*z=(a_1*(a_2*y))*z=a_1*((a_2*y)*z)=a_1*(a_2*(y*z))$$
$$=(a_1*a_2)*(y*z)$$

គេមាន $\begin{cases}a_1*a_2\in A\\ y*z\in A\end{cases}$

នាំឱ្យ $(a_1*a_2)*(y*z)\in A$

∴ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

ខ. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ A ។

ចំពោះ $\forall x,y,z\in A$ គេបាន : $(x*y)*z=x*(y*z)$ ដែល $x\in A$, $\forall y\ ,z\in E$

∴ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ A

19. គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ ។

តាង $C=\{x\in E:\forall y\in E\ ,x*y=y*x\}$

ក. បង្ហាញថា C ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

- $\forall a_1,a_2\in C$:

$$(a_1*a_2)*x=a_1*(a_2*x)=a_1*(x*a_2)=(a_1*x)*a_2=(x*a_1)*a_2=x*(a_1*a_2)$$

នាំឱ្យ $a_1*a_2\in C$

$\therefore$ | C ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ |

ខ. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ C ។

ចំពោះ $\forall a,b\in C$ គេបាន : $a*b=b*a$ ដែល $a\in C$, $\forall y,b\in E$

$\therefore$ | ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ C |

21. គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ និង $\le$ ជាទំនាក់ទំនងលើ E ។

ឧបមាថាចំពោះ $\forall(a,b,c)\in E^3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

i. $a*b\le a$

ii. $a*b\le b$

iii. $\begin{cases} x\le a \\ x\le b \end{cases} \Rightarrow x\le a*b$

ក. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E ។

គេមាន $\begin{cases} a*b\le b \\ a*b\le a \end{cases} \Rightarrow a*b\le b*a$

គេមាន $\begin{cases} b*a\le a \\ b*a\le b \end{cases} \Rightarrow b*a\le a*b$

$\therefore$ | ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E |

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in E$ គេបាន $x*x=x$ Idempotent ។

គេមាន $a*a\le a$

គេមាន $\begin{cases} a\le a \\ a\le a \end{cases} \Rightarrow a\le a*a$

$\therefore$ $\boxed{\forall x \in E \text{ គេបាន } x * x = x \text{ Idempotent}}$

គ. បង្ហាញថា $\forall a, b, c \in E$ គេបាន $a \le b \Rightarrow a * c \le b * c$

គេមាន $\begin{cases} a * c \le a \le b \\ a * c \le c \end{cases} \Rightarrow a * c \le b * c$

$\therefore$ $\boxed{\forall a, b, c \in E \text{ គេបាន } a \le b \Rightarrow a * c \le b * c}$

ឃ. បង្ហាញថា $\forall a, b, c, d \in E$ គេបាន $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow a * c \le b * d$

គេមាន $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a * c \le a \le b \\ a * c \le c \le d \end{cases} \Rightarrow a * c \le b * d$

$\therefore$ $\boxed{\forall a, b, c, d \in E \text{ គេបាន } \begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow a * c \le b * d}$

ង. បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E ។

គេមាន $\begin{cases} b * c \le b \Rightarrow a * (b * c) \le a * b \\ a * (b * c) \le b * c \le c \end{cases} \Rightarrow a * (b * c) \le (a * b) * c$

គេមាន $\begin{cases} (a * b) * c \le a * b \le a \\ a * b \le b \Rightarrow (a * b) * c \le b * c \end{cases} \Rightarrow (a * b) * c \le a * (b * c)$

$\therefore$ $\boxed{\text{ប្រមាណវិធី } * \text{ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ } E}$

៙៙៙៙ 🕮 ៚៚៚៚