វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លីមីត និង ភាពជាប់

នៃអនុគមន៍

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

២០១៣

ណែនាំដោយលោកសាស្ត្រាចារ្យ គង់ ប៊ុនអៀង

រៀបរៀងដោយ គរុនិស្សិតជំនាន់ទី ១៨

ឯកទេស គណិតវិទ្យា

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៚៚៚🕮៙៙៙

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ណែនាំដោយលោកសាស្ត្រាចារ្យ **គង់ ប៊ុនអៀង**

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតជំនាន់ទី ១៨ ឯកទេស គណិតវិទ្យា

លោក ប៉ែត ឡាពីន លោក លឹង សឿន លោក ទូច វ៉ាន់នី

លោក យឿ សុវណ្ណរិទ្ធ លោក លឹម ខេងឆាយ លោក ផៃ សុភ័ក្ត

លោក ពេះ វ៉ាន់ស៊ី លោក កែស ឡាំ កញ្ញា នាង ច័ន្ទសុរក្សា

លោក សេង ហួង លោក សេក អង្គារវុធ កញ្ញា សេង សុម៉ាភារី

លោក ឡយ វិជ្ជវ៉ា លោក ង៉ែត ធឿន អ្នកស្រី អោ មណីចន្ទ្រា

អារម្ភកថា

សៀវភៅដែលលោកគ្រូអ្នកគ្រូ មិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់កំពុងកាន់ក្នុងដៃនេះ ជាសៀវភៅដែលបានចងក្រងដោយក្រុមយើងខ្ញុំ ជាគរុនិស្សិតជំនាន់ទី១៨ ឯកទេស គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ក្រុមទី ០៣ ទៅលើប្រធានបទមួយស្ដីអំពី "**លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍**" ដែលជាប្រធានបទមួយដ៏មានសារៈសំខាន់នៅក្នុងការសិក្សា មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ក៏ដូចជាការសិក្សាទៅលើមុខវិជ្ជាដ៏ទៃៗ ផ្សេងទៀតដែលមានការពាក់ព័ន្ធ ហើយក៏មានទំនាក់ទំនងយ៉ាងខ្លាំងទៅនឹងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃផងដែរ។

ក្នុងសៀវភៅនេះ ក្រុមយើងខ្ញុំបានរៀបចំឡើងដោយបាន ធ្វើការបែងចែកជាផ្នែកៗ ដើម្បីជា ការងាយស្រួលយល់នូវខ្លឹមសារ។ ក្នុងនោះរួមមាន ផ្នែកមេរៀនសង្ខេប ជាផ្នែកដែលបានពន្យល់យ៉ាងលម្អិតអំពី និយមន័យ រូបមន្ត ការបកស្រាយរូបមន្ត ក៏ដូចជាគន្លឹះផ្សេងៗ ដោយភ្ជាប់មកជាមួយនូវឧទាហរណ៍និងដំណោះស្រាយងាយៗ ឆាប់យល់។ ចំណែកផ្នែកមួយទៀតនោះជាផ្នែកលំហាត់ចម្លើយ ដែលក្នុងផ្នែកនេះក្រុមយើងខ្ញុំបានខិតខំ ស្រង់យកនូវលំហាត់ល្អ ពីឯកសារជាច្រើនទាំងឯកសារជាតិ និងអន្តរជាតិ ជាមួយនឹងការបកស្រាយយ៉ាងលម្អិត ច្បាស់លាស់ និងត្រឹមត្រូវ ដែលនឹងជួយឲ្យអ្នកសិក្សាទាំងអស់ ងាយស្រួលយល់ពីរបៀបនៃការដោះស្រាយបញ្ហាផ្សេងៗទាក់ទងនឹងប្រធានបទនេះ។

ក្រុមយើងខ្ញុំ បានសម្រេចដោយជោគជ័យក្នុងការរៀបរៀងសៀវភៅនេះឡើងតែទោះបីជាយ៉ាង ណាក៏ដោយកំហុស ឆ្គងតែងតែកើតមាន នៅត្រង់ចំណុចណាមួយជាមិនខាន។ក្រុមយើង ខ្ញុំ នឹងរង់ចាំទទួលការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនា ពីសំណាក់មិត្តអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សាទាំងអស់ ដោយក្ដីរីករាយ ដើម្បីជួយកែលម្អកិច្ចការមួយនេះឲ្យកាន់តែត្រឹមត្រូវ និងប្រសើរឡើងដើម្បីទុកជាឯកសារប្រើប្រាស់នៅថ្ងៃអនាគត។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី២០ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០១៣

គរុនិស្សិត ជំនាន់ទី ១៨

ឯកទេសគណិតវិទ្យា ក្រុមទី០៣

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

កិច្ចការស្រាវជ្រាវទៅលើប្រធានបទ "**លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍**" ត្រូវបានបញ្ចប់ដោយជោគជ័យ ក្រោយពីបានចំណាយពេលវេលាអស់យ៉ាងច្រើន នៅក្នុងការស្រាវជ្រាវ ចងក្រងរៀបចំ រហូតបានក្លាយ ជាលទ្ធផលសម្រេចមួយនេះ។ភាពជោគជ័យនេះ ក៏ទទួលបានដោយសារ មានការជួយជ្រោមជ្រែងយ៉ាងសកម្ម ពីសំណាក់មនុស្ស មួយចំនួនដែលក្រុមយើងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណដល់ និងដឹងគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុត គ្មានថ្ងៃបំភ្លេចបាន៖

លោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ ដែលបានបង្កើត និងចិញ្ចឹមបីបាច់ ថែរក្សាកូនៗទាំងអស់គ្នា ហើយជំរុញលើកទឹកចិត្ត ផ្តល់ឱកាស និង ថវិកាយ៉ាងច្រើនដល់កូនៗឲ្យបានរៀនសូត្ររហូតមានចំណេះ ដូចថ្ងៃនេះ ដែលធ្វើឲ្យកូនៗមានឱកាសធ្វើ ឲ្យសម្រេចនូវស្នាដៃនេះឡើង។

ថ្នាក់ដឹកនាំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានផ្តល់ឱកាសឲ្យយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាបាន មករៀននៅទីនេះ រហូតមានឱកាស ធ្វើឲ្យសម្រេច បាននូវកិច្ចការស្រាវជ្រាវនេះទទួលបានជោគជ័យ ដើម្បីទុកជាស្នាដៃប្រើប្រាស់នៅពេលក្រោយៗទៀត។

លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលជាសាស្ត្រាចារ្យនៅ បឋមសិក្សា អនុវិទ្យាល័យ វិទ្យាល័យ សាកលវិទ្យាល័យ ក៏ដូចជានៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំទាំងអស់ ដែលបានខិតខំ ទាំងកម្លាំងកាយកម្លាំងចិត្តក្នុងការបង្រៀនយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាលើគ្រប់មុខវិជ្ជាទាំងអស់ រហូតយើងទាំងអស់គ្នាមានចំណេះដឹងដូចថ្ងៃនេះ ជាពិសេសនោះគឺលោកសាស្ត្រាចារ្យ **ឥង់ ប៊ុនរៀង** ដែលបានផ្តល់ជាមតិយោបល់ល្អៗ ដើម្បីជួយធ្វើឲ្យកិច្ចការស្រាវជ្រាវមួយនេះសម្រេចបានលទ្ធផលដោយជោគជ័យ។

ជាចុងបញ្ចប់សូមអរគុណដល់មិត្ត គរុនិស្សិតរួមក្រុមទាំងអស់គ្នាដែលបានជួយជ្រោមជ្រែង ផ្តល់ជាឯកសារផ្សេងៗ ដ៏មានសារៈសំខាន់ ក៏ដូចជាកម្លាំងចិត្ត និងប្រាក់កាសមួយចំនួនដើម្បីធ្វើឲ្យសម្រេចបាននូវកិច្ចការស្រាវជ្រាវមួយនេះ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី២០ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០១៣

គរុនិស្សិត ជំនាន់ទី ១៨

ឯកទេសគណិតវិទ្យា ក្រុមទី០៣

មាតិកា

១.និយមន័យលីមីត..២

២.លក្ខណៈនៃលីមីត..៦

៣.រូបមន្តសំខាន់ៗនៃលីមីត...៧

៤.ភាពជាប់នៃអនុគមន៍...៧

៥.លំហាត់និងដំណោះស្រាយ...១៤

លីមីត និង ភាពជាប់

នៃអនុគមន៍

១. និយមន័យលីមីត (Definition of Limit)

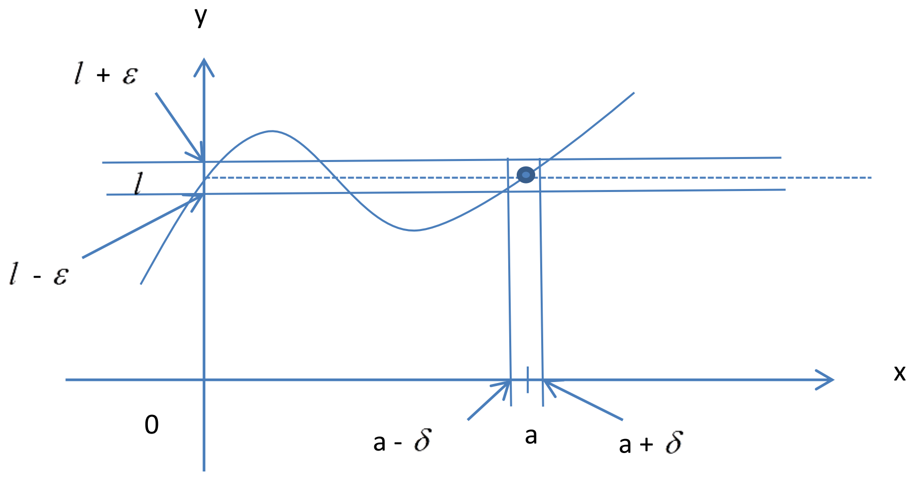
f ជាអនុគមន៍កំនត់បាន ក្នុងចន្លោះបើកណាមួយ ដែលផ្ទុកនូវចំនួនពិត a ។

គេនិយាយថា លីមីតនៃ f(x) ពេល x ខិតទៅរក a គឺ L ហើយយើងសរសេរ

$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ ,\exists\delta>0$ ដែល $|f(x)-L|<\varepsilon$ ពេល $0<|x-a|<\delta$

$\lim_{x\to a} f(x)=l$ មានន័យថាតម្លៃ $f(x)$ អាចយកកាន់តែជិតតម្លៃ l ពេលយើងយកតម្លៃ x កាន់តែជិត a (ប៉ុន្តែ មិនមែនស្មើ a ទេ) ។

$|x-a|$ ជាចំងាយពី x ទៅ a ហើយ $|f(x)-l|$ ជាចំងាយពី $f(x)$ ទៅ l



ឧទាហរណ៍ ៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$

ដំណោះស្រាយ ៖ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-3|<\delta$ គេបាន $|4x-5-7|<\varepsilon$

តែ $|4x-5-7|=|4(x-3)|=4|x-3|$ នោះ $4|x-3|<\varepsilon$ ឬ $|x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$ យើងយកតម្លៃ $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$ ។

លីមីតឆ្វេង

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \Leftrightarrow L \quad \forall \varepsilon > 0 ,\exists \delta > 0 \text{ ដែល } |f(x)-L| < \varepsilon \text{ ពេល } a-\delta < x < a$$

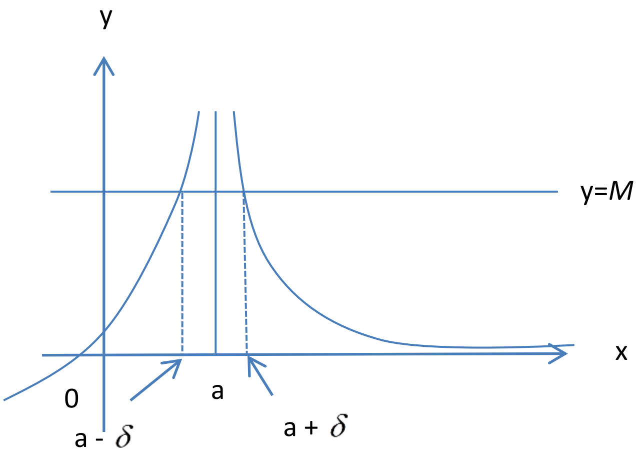
លីមីតស្តាំ

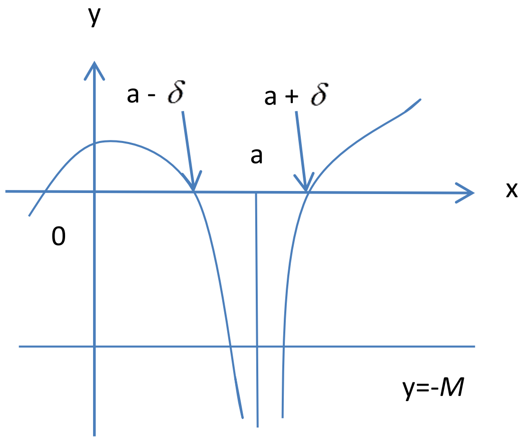
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 ,\exists \delta > 0 \text{ ដែល } |f(x)-L| < \varepsilon \text{ ពេល } a < x < a+\delta$$

លីមីតមានតម្លៃអនន្ត

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 ,\exists \delta > 0 \text{ ដែល } f(x) > M \text{ ពេល } 0 < |x-a| < \delta \text{ ។}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 ,\exists \delta > 0 \text{ ដែល } f(x) < -M \text{ ពេល } 0 < |x-a| < \delta$$





ឧទាហរណ៍៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖ ចំពោះ $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ ដែល $0 < |x-0| < \delta$ គេបាន $\frac{1}{x^2} > M$ នាំអោយ

$x^2 < \frac{1}{M}$

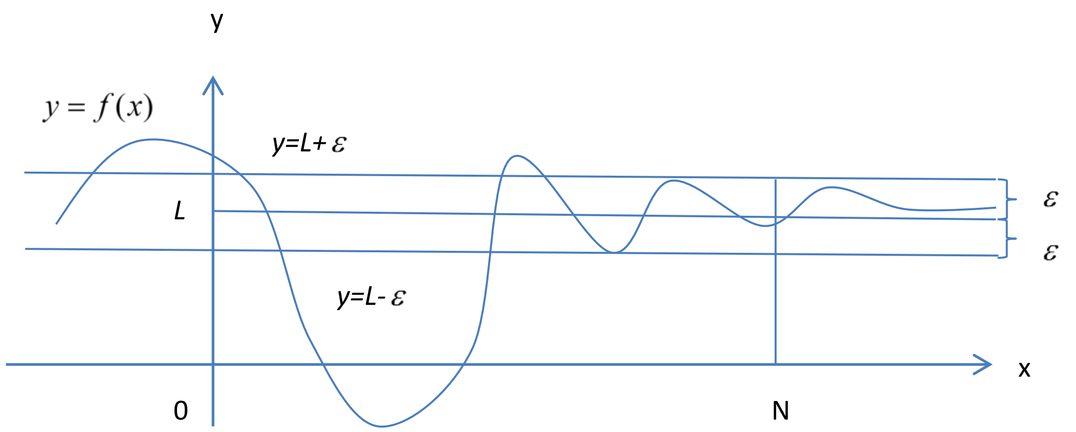
រឺ $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ យក $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ។

លីមីតត្រង់តម្លៃអនន្ត

ឧបមាអនុគមន៍ f អាចកំណត់បានលើចន្លោះ (a,+∞) នោះ៖

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall x>N$ ដែល $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។



ឧទាហរណ៍ ៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

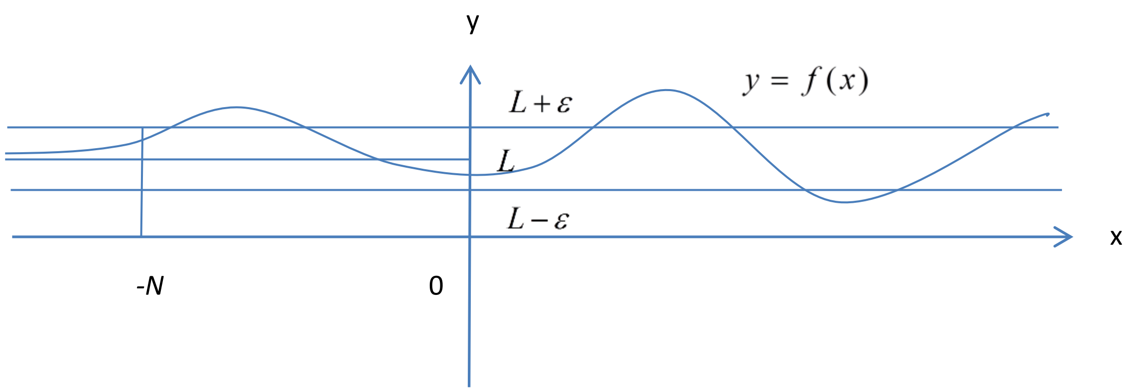
ដំណោះស្រាយ ៖ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x>N$ គេបាន $|\frac{1}{x}-0|<\varepsilon$ នាំអោយ $x>\frac{1}{\varepsilon}$

យក $N=\frac{1}{\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ។

ឧបមាអនុគមន៍ f អាចកំណត់បានលើចន្លោះ (-∞,a) នោះ៖

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall x<-N$ ដែល $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។



ឧទាហរណ៍៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$

ដំណោះស្រាយ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x<-N$ គេបាន $|\frac{x-1}{x+2}-1|<\varepsilon$

$$\Rightarrow|\frac{-3}{x+2}|<\varepsilon\Leftrightarrow|x+2|>\frac{3}{\varepsilon}$$

គេបាន $-x-2>\frac{3}{\varepsilon}\Leftrightarrow x<-\frac{3}{\varepsilon}-2=\frac{-3-2\varepsilon}{\varepsilon}$ យក $-N=\frac{-3-2\varepsilon}{\varepsilon}$

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$

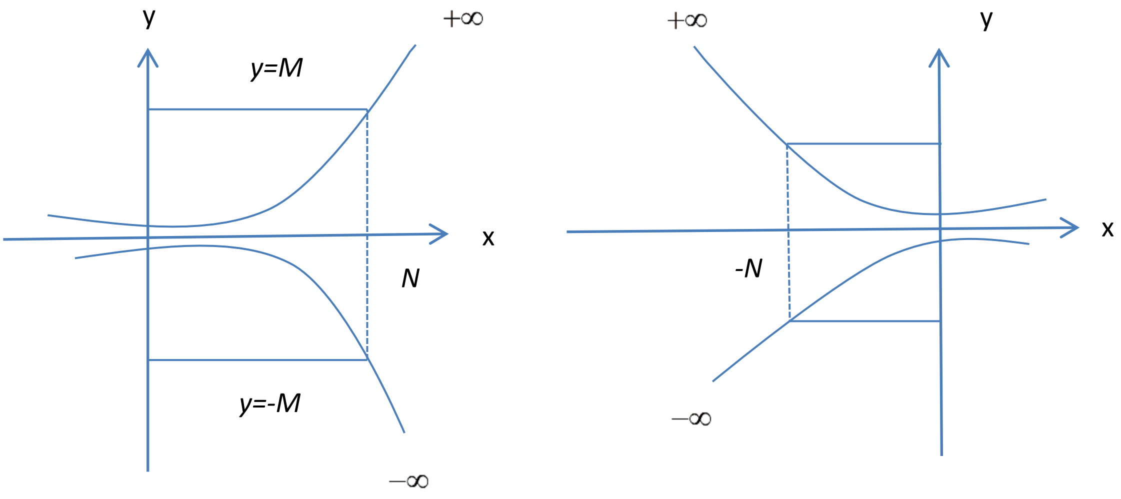
ឧបមាអនុគមន៍ f អាចកំណត់បានលើចន្លោះ(a,+∞) [រៀងគ្នា (-∞,a)]

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (រៀងគ្នា-∞) $\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N>0,\forall x>N\Rightarrow f(x)>M$

(រៀងគ្នា $f(x)<-M$)។

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (រៀងគ្នា-∞) $\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N>0,\forall x<-N\Rightarrow f(x)>M$

(រៀងគ្នា $f(x)<-M$)។



ឧទាហរណ៍៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

ដំណោះស្រាយ៖ ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0$ ដែល $x>N$ គេបាន $x^2-4x+3>M$

$\Rightarrow x^2-4x+3-M>0$

$\Delta^{'}=4-(3-M)=1+M$

$x_1=2+\sqrt{1+M}\,,x_2=2-\sqrt{1+M}$

$\Rightarrow x=]-\infty,2-\sqrt{1+M}[\cup]2+\sqrt{1+M},+\infty[$

តែ $x>0$ គេបាន $x\in]2+\sqrt{1+M},+\infty[$ នាំអោយ $x>2+\sqrt{1+M}=N$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

២. លក្ខណៈនៃលីមីត (limit law)

ឧបមាថា c ជាចំនួនថេរ ហើយលីមីត នៃ $\lim_{x\to a}f(x)$ និង $\lim_{x\to a}g(x)$ មានតម្លៃ គេបាន

- $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$ $(except\ the\ case\ (+\infty,-\infty))$
- $\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a}f(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$ $(except\ the\ case\ (0,\pm\infty))$
- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$, $\lim_{x\to a}g(x)\neq0$ $(except\ the\ case\ (0,0),(\pm\infty,\pm\infty))$
- $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim_{x\to a}f(x)]^n$, $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$ $(\lim_{x\to a}f(x)\geq0)$ $,n\in\mathbb{N}(1,2,3.......)$
- $\lim_{x\to a}c=c$, $\lim_{x\to a}x=a$
- $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(\lim_{x\to a}f(x))^{\lim_{x\to a}g(x)}$ $(except\ the\ case\ (1,\pm\infty),(\infty,0),(0,0))$

ទ្រឹស្តីបទ ១

- បើ f(x) ≤ g(x) ពេល x ខិតទៅរក a ហើយលីមីតនៃ f(x) និង g(x) មានតម្លៃនោះ

  $\lim_{x\to a}f(x)\leq\lim_{x\to a}g(x)$

- បើ f(x)≤g(x) ≤h(x) និង $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=l\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=l$

  (The Squeeze Theorem)

- $\lim_{x\to a}f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=l$

៣. រូបមន្តសំខាន់ៗនៃលីមីត

រាងដែលយើងមិនអាចរាយតម្លៃភ្លាមៗបាន 0^0, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, ∞^0, $\pm\infty\mp\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞

បើ $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ **នោះ**

1. $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$
2. $\lim_{x\to x_0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1$
3. $\lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1$
4. $\lim_{x\to x_0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$
5. $\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$
6. $\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$
7. $\lim_{x\to x_0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a,\ a>0$
8. $\lim_{x\to x_0}\frac{(1+f(x))^r-1}{f(x)}=r\ \ (r\in\mathbb{R})$

បើ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ **នោះ**

9. $\lim_{x\to x_0}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$
10. $\lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{f(x)}=0$

សម្គាល់ ៖ $\ln x<x^n<e^x$ ពេលដែល x ខិតទៅរក $+\infty$ ហើយ n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គេបាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ ហើយ $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\ \lim_{x\to0^+}x^n\ln x=0$

៤. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ (Continuity of Function)

យើងសង្កេតឃើញថាកាលណាតម្លៃលីមីត ពេល x ខិតទៅរកតម្លៃកំណត់ណាមួយ យើងក៏អាចគណនាតម្លៃនោះបាន តាមរយៈការគណនាតម្លៃអនុគមន៍ដោយផ្ទាល់ នៅត្រង់តម្លៃនោះដែរ។ អនុគមន៍ដែលមាន លក្ខណៈបែបនេះ ត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍ជាប់ ។ យើងនឹងឃើញថា ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ក្នុងន័យ គណិតវិទ្យា គឺឆ្លើយតបយ៉ាងស៊ីជម្រៅទៅនិង ភាពជាប់ ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃដែរ។ មានន័យថា ភាពជាប់សំដៅ លើអ្វីដែលកើតឡើងរហូត ដោយគ្មានការរំខានឡើយ ។

អនុគមន៍ f **ជាប់** ត្រង់ចំណុច a កាលណា

១. $f(a)$ អាចកំណត់បាន (មានន័យថា a នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f)

២. $\lim_{x\to a} f(x)$ មាន ៣. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

ឧទាហរណ៍: តើអនុគមន៍មួយណាដែល មិនជាប់ ?

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & if \quad x\neq 0\\ 1 & if \quad x=0\end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & if \quad x\neq 2\\ 1 & if \quad x=2\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ:

យើងឃើញថា f(2) គឺមិនអាចកំណត់បានទេ ដូចនេះ f(x) មិនជាប់ត្រង់ 2 ទេ។

ចំនុចនេះយើងបាន f(0)=1 គឺអាចកំណត់បាន តែ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ មិនមានតម្លៃទេ

ដូចនេះ f(x) មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 0 ទេ។

ចំនុចនេះយើងបាន f(2)=1 អាចកំណត់បាន ហើយ

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$ មានតម្លៃតែ $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

ដូចនេះ f(x) ក៏មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 2 ដែរ។

ចំណាំ៖ អនុគមន៍មួយជាអនុគមន៍ជាប់កាលណាយើងគូសក្រាបដោយគ្មានដកប៊ិចចេញពីក្រដាសទេផ្ទុយទៅវិញបើអនុគមន៍នោះមិនជាប់ទេការគូសក្រាបនឹងត្រូវដកប៊ិចចេញពីក្រដាស ព្រោះនឹងមាន ចំនុចដាច់ត្រង់ណាមួយជាមិនខាន។

និយមន័យ៖ អនុគមន៍ f ជាប់ពីខាងស្តាំនៃចំនុច a កាលណា $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

ហើយជាប់ពីខាងឆ្វេងនៃចំនុច a កាលណា $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

ឧទាហរណ៍៖ ចំពោះចំនួនគត់ណាមួយ n អនុគមន៍ $f(x)=[\![x]\!]$ គឺជាប់ពីខាងស្តាំ តែមិនជាប់ពីខាងឆ្វេង ព្រោះ $\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+}[\![x]\!]=n=f(n)$ តែ $\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-}[\![x]\!]=n-1\neq f(n)$ ។

និយមន័យ៖ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះណាមួយកាលណាវា **ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុច** លើចន្លោះនោះ។

វិធីសាស្ត្រ ៖ ដើម្បីបង្ហាញអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះណាមួយ

$f(x)$	f ជាប់លើ $]a,b[$	f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ a រឺ $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$	f ជាប់ខាងស្តាំឆ្វេង b រឺ $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$
ជាប់លើ $[a,b[$ b អាច $+\infty$	ពិត	ពិត	មិនគិត
ជាប់លើ $]a,b]$ a អាច $-\infty$	ពិត	មិនគិត	ពិត
ជាប់លើ $[a,b]$	ពិត	ពិត	ពិត

ឧទាហរណ៍ ៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ ជាប់លើចន្លោះ [-1,1]

ដំណោះស្រាយ៖បើ -1<a<1 គេបាន

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(1-\sqrt{1-x^2})=\lim_{x\to a}1-\lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{1-a^2}=f(a)$ យើងឃើញថារាល់តម្លៃ a នៅចន្លោះ]-1,1[សុទ្ធតែធ្វើអោយ f ជាប់។

ហើយ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1=f(-1)$ និង $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$

ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះ [-1,1] ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.២ ៖ ប្រសិនបើ f និង g ជាប់ត្រង់ចំនុច a ហើយ c ជាចំនួនថេរ នោះអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះក៏ជាប់ដែរ

$1.\ f\pm g \qquad 2.\ cf \qquad 3.\ fg \qquad 4.\ \frac{f}{g},\ g(a)\neq 0$

សំរាយ៖ ដោយ f និង g ជាប់ត្រង់ចំនុច a នោះ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

គេបាន $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$

នេះបង្ហាញឱ្យឃើញថា f+g ក៏ជាប់ត្រង់ a ដែរ ហើយដូចគ្នាចំពោះ 2 , 3 និង 4 ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៣ ៖

- រាល់អនុគមន៍ ពហុធាគឺជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$
- រាល់អនុគមន៍ អសនិទានជាអនុគមន៍ជាប់កាលណា តម្លៃវាអាចកំណត់បាន មានន័យថា វាជាប់លើ **ដែនកំណត់** របស់វា ។

សំរាយ ៖

អនុគមន៍ពហុធា ជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ដែល $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ ជាចំនួនថេរ ។

យើងឃើញថា $\lim_{x\to x_0} a_0=a_0$ និង $\lim_{x\to x_0} x^n=a^n$,n=1,2,3...,n

តែយើងដឹងថា $f(x)=x^n$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ តាមទ្រឹស្តីបទ ៤.២ $g(x)=cx^n$ ជាប់ និង P(x) ជាផលបូកនៃ អនុគមន៍ប្រភេទ $g(x)$ នាំឱ្យ P(x) ក៏ជាប់ ។

អនុគមន៍ អសនិទានជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ដែល $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា។ ដែនកំណត់នៃ $f(x)$ គឺ $D=\{x\in\mathbb{R}\mid Q(x)\neq 0\}$ ហើយយើងដឹងទៀតថា $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទ ៤.២ នោះ $f(x)$ ជាប់លើដែនកំណត់របស់វា ។

ចំណាំ ៖ អនុគមន៍ច្រាសនៃ អនុគមន៍ជាប់ ជាអនុគមន៍ជាប់ដែរ ព្រោះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស បានមកពីចំនុចឆ្លុះនៃអនុគមន៍ដើមធៀបទៅនឹង បន្ទាត់ y=x ។ ដូចនេះ បើ ក្រាបអនុគមន៍ដើម គ្មានចំនុចដាច់ទេនោះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសក៏គ្មានចំនុចដាច់ដែរ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤ ៖ ប្រភេទអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះ គឺជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុចក្នុងដែនកំណត់របស់វា៖

ពហុធា អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ,អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍លោការីត

ឧទាហរណ៍ ៖ តើអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x+\arctan x}{x^2-1}$ ជាប់នៅកន្លែងណាខ្លះ?

ដំណោះស្រាយ យើងដឹងថា អនុគមន៍ $\ln x$ ជាប់ចំពោះ x>0 ហើយ $\arctan x$ ជាប់ចំពោះតម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ។ដូចនេះ $\ln x+\arctan x$ ជាប់លើ (0,+∞) ម្យ៉ាងទៀត x^2-1 ជាប់ចំពោះតម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ។ ដូចនេះ f ជាប់ពេល $x^2-1\neq 0$ នោះ f ជាប់លើចន្លោះ (0,1) និង (1,+∞)។

វិធីម្យ៉ាងទៀតក្នុងការច្របាច់បញ្ចូលគ្នារវាងពីរអនុគមន៍ f និង g គឺអនុគមន៍បណ្តាក់

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៥ ៖ បើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ b និង $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ នោះ $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(b)$

មានន័យថា $$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)$$

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនា $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x})$?

ដំណោះស្រាយ ៖ ដោយ arcsin ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះយើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទ ៤.៥

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x})=\arcsin(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x})=\arcsin(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})})=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៦ ៖ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $g(a)$ ហើយ g ជាប់ត្រង់ a នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $f\circ g=f(g(x))$ ក៏ ជាប់ត្រង់ a ។

ឧទាហរណ៍ ៖

$\sqrt{x}$ ជាប់ត្រង់ $x_0>0$ ហើយ $\sin x$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះ $f(x)=\sin x$ ជាប់ត្រង់ $x_0>0$

$\sin x$ ជាប់ត្រង់ $\forall x_0\in\mathbb{R}$ ហើយ x^n ជាប់ត្រង់ $\forall y_0\in\mathbb{R}$ នោះ $f(x)=\sin^n x$ ជាប់ត្រង់ $\forall x\in\mathbb{R}$

ទ្រឹស្តីបទ ៤. ៧ ៖ គេអោយអនុគមន៍ f មានន័យត្រង់ voisinage នៃ x_0 លើកលែងត្រង់ x_0 ប៉ុន្តែ $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ នោះគេអាចបង្កើត **បន្លាយភាពជាប់** នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ x_0 បានដែលកំណត់ដោយអនុគមន៍ថ្មីគឺ g

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & if \quad x\neq x_0 \\ l & if \quad x=x_0 \end{cases}$$

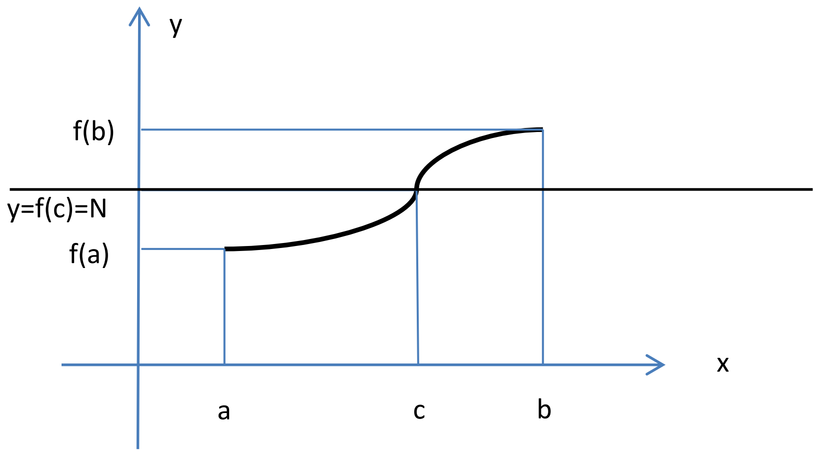
គឺ g ជាប់ត្រង់ x_0 ដោយ $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=l=g(x_0)$

ឧទាហរណ៍ ៖ រកបន្លាយភាពជាប់ នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ x_0 ដែល $f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$

ដំណោះស្រាយ ៖ ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi(1-x)}{x-1}=-\pi$

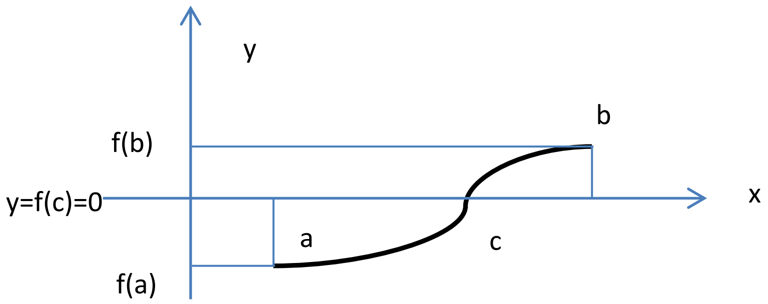
ដូចនេះបន្លាយភាពជាប់នៃ f ត្រង់ x_0 គឺ $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x-1} & if \quad x\neq 1 \\ -\pi & if \quad x=1 \end{cases}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ តម្លៃកណ្តាល ៖ ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានតម្លៃ N ណាមួយនៅចន្លោះ $[f(a), f(b)]$ ដែល $f(a)\neq f(b)$ ។ នោះប្រាកដជាមានតម្លៃ c យ៉ាងតិច មួយនៅចន្លោះ$[a,b]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c)=N$ ។



យើងឃើញថាទ្រឹស្តីបទនេះពិតជាត្រឹមត្រូវ ក្នុងន័យធរណីមាត្រ ព្រោះបើយើងគូសបន្ទាត់ $y=N$ កាត់ចន្លោះ $[f(a),f(b)]$ នោះបន្ទាត់ប្រាកដជាកាត់ ខ្សែកោង រឺ បន្ទាត់ដែលគ្មានចំនុចដាច់នោះ(f ជាប់)។ នេះបង្ហាញឱ្យឃើញថាមានតម្លៃណាមួយដែលនៅចន្លោះ $[a,b]$ ដែល $f(c)=N$ ។ទ្រឹស្តីបទនេះត្រូវបានបង្ហាញដោយលោក **Karl Weierstrass** [1]**(1815-1897)** ។

ករណីពិសេស ៖ ករណីដែល $f(a).f(b)<0$ នោះមានតម្លៃ c យ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ$[a,b]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c)=N=0$ ។ ករណីនេះភាគច្រើនត្រូវបានគេប្រើ ដើម្បីបង្ហាញថាសមីការមានរឹសនៅចន្លោះបិទណាមួយ។



ឧទាហរណ៍ ៖ បង្ហាញថាមានរឹសមួយនៃសមីការ $4x^3-6x^2+3x-2=0$ នៅចន្លោះ[1,2] ។

ដំណោះស្រាយ ៖ ដោយសមីការជាអនុគមន៍ពហុធានោះវាជាអនុគមន៍ជាប់ ដូចនេះ យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ។ ដោយ $f(1)=-1<0$ និង $f(2)=12>0$ នោះ $f(1).f(2)<0$ មានន័យថាមានតម្លៃ x ណាមួយនៅចន្លោះ[1,2]ដែលធ្វើឱ្យសមីការខាងលើស្មើសូន្យ រឺមានរឹស។

[1] Karl Weierstrass ជាអ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិអាឡឺម៉ង់ដែលបានស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល និង មូលដ្ឋានមួយចំនួននៃ Calculus ។ លោកត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាគ្រូបង្រៀនដ៏ល្អម្នាក់ ហើយអត្ថបទបង្រៀនរបស់គាត់ត្រូវបានពាំនាំទៅអ៊ឺរ៉ុបដោយកូនសិស្សរបស់គាត់ ម្យ៉ាងទៀតគាត់ក៏ជាស្ថាបនិកនៃ គណិតវិភាគទំនើបដែរ។

៥.លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើនិយមន័យគណនាលំហាត់ខាងក្រោម

១. $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}=0$

២. $\lim_{x\to-2}(x^2-2x-1)=-1$

៣. $\lim_{x\to2}(x^3-8)=0$

៤. $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2-x})=\sqrt{2}$

៥. $\lim_{x\to2}(3^x-1)=5$

៦. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

៧. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=+\infty$

៨. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}=-\infty$

៩. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{2x}=3$

១០. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$

១១. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

១២. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-2}=-1$

១៣. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

១៤. $\lim_{x\to+\infty}(-x^2-3x+2)=-\infty$

១៥. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+1}{x})=-\infty$

១៦. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2^x}-3)=+\infty$

ចំលើយ

ដោយប្រើនិយមន័យគណនាលំហាត់ខាងក្រោម

១. $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}=0$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-1|<\delta$ គេបាន $|\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}-0|<\varepsilon$ តែ $0<x<2$

គេបាន $x^2>0\Rightarrow x^2+1>1\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}<1$ នោះ

$|\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}|<|2x^2-4x+2|=2|x^2-2x+1|=2(|x-1|)^2<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ យក $\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2+1}=0$

២. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x-1)=7$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x+2|<\delta$ គេបាន $|x^2-2x-1-7|<\varepsilon$ រឺ $|x^2-2x-8|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow|(x+2)(x-4)|<\varepsilon$ តែ $-3<x<-1\Rightarrow x-4<-5\Rightarrow|(x+2)(x-4)|<5|x+2|<\varepsilon$ យក

$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x-1)=7$

៣. $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)=0$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ គេបាន $|x^3-8-0|<\varepsilon$ រឺ $|(x-2)(x^2+2x+4)|<\varepsilon$

តែ $1<x<3\Rightarrow|x^2+2x+4|<19$ គេបាន $|(x-2)(x^2+2x+4)|<19|x-2|<\varepsilon\Rightarrow|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{19}$

យក $\delta=\dfrac{\varepsilon}{19}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)=0$

៤. $\lim\limits_{x\to -1}(\sqrt{x^2-x})=\sqrt{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x+1|<\delta$ គេបាន $|\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}|<\varepsilon$ គេបាន

$\left|\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon$ រឺ $\left|\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon$ តែ $-2<x<0\Rightarrow\begin{cases}|-4|>|x-2|>|-2|\\ \sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}>1\end{cases}$ គេបាន

$\left|\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}\right|<|(x+1)(x-2)|<4|x+1|<\varepsilon\Rightarrow|x+1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ យក $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to -1}(\sqrt{x^2-x})=\sqrt{2}$

៥. $\lim\limits_{x\to 2}(3^x-1)=5$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ គេបាន $|3^x-1-5|<\varepsilon$ តែ $3^x-6<|3^x-6|$ យក

$3^x-6<\varepsilon\Rightarrow\dfrac{3^x}{3^2}-\dfrac{6}{9}<\dfrac{\varepsilon}{9}\Leftrightarrow 3^{x-2}<\dfrac{\varepsilon+6}{2}$ គេបាន $x-2<\log_3\dfrac{\varepsilon+6}{2}$ ដោយ $\dfrac{\varepsilon+6}{2}>3$

នាំអោយ $|x-2|<\log_3\frac{\varepsilon+6}{2}$ យក $\delta=\log_3\frac{\varepsilon+6}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}(3^x-1)=5$

៦. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-\frac{\pi}{2}|<\delta$ គេបាន $|\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|<\varepsilon$ តែ

$\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=2\sin(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ នាំអោយ

$|\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|=|2\sin(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|<2|\sin(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2})|$ ព្រោះ $|\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|\le 1$ ហើយ

$\sin|x|\le|\sin x|$ គេបាន $2\sin|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}|<\varepsilon\Rightarrow|x-\frac{\pi}{2}|<2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$ យក $\delta=2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

៧. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=+\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-1|<\delta$ គេបាន $\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}>M$ តែ $0<x<2$ នោះ

$x^2-2x+3>1\Rightarrow\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}>\frac{1}{(x-1)^2}>M$ នាំអោយ $|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ យក $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=+\infty$

៨. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}=-\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ គេបាន $\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}<-M$ តែ $1<x<3$ គេបាន

$x^2-8x>-23$ គេបាន $\frac{-23}{(x-2)^2}<-M\Rightarrow|x-2|<\sqrt{\frac{23}{M}}$ យក $\delta=\sqrt{\frac{23}{M}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}=-\infty$

៩. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{2x}=\frac{3}{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $|\frac{3x-4}{2x}-\frac{3}{2}|<\varepsilon\Leftrightarrow|\frac{-4}{2x}|<\varepsilon$ តែ $x\to+\infty$

គេបាន $\frac{4}{2x}<\varepsilon\Rightarrow x>\frac{4}{2\varepsilon}$ យក $N=\frac{4}{2\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{2x}=\frac{3}{2}$

១០. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $|\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}-\frac{1}{2}|<\varepsilon\Leftrightarrow|\frac{-2x+5}{2(2x^2-1)}|<\varepsilon$ តែ $x\to+\infty$

គេបាន $\frac{2x-5}{2(2x^2-1)}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{x}{2x^2-1}-\frac{5}{2(2x^2-1)}<\varepsilon$ តែ $\frac{5}{2(2x^2-1)}\to0$ ពេល $x\to+\infty$

គេបាន $\frac{x}{2x^2-1}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2x^2-1}{x}>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2\varepsilon}$ យក $N=\frac{1}{2\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$

១១. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $|\frac{1}{x^2}-0|<\varepsilon$ ដោយ $\frac{1}{x^2}>0$

គេបាន $\frac{1}{x^2}<\varepsilon\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}$ នាំអោយ $x\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},+\infty[$

ដោយ $x\to-\infty$ យក $x\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[$ នោះយើងអាចយក $-N=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

១២. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-2}=-1$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $|\frac{-x^2+x}{x^2-2}+1|<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{x-2}{x^2-2}|<\varepsilon$ តែ $x\to-\infty$

គេបាន $\frac{-x+2}{x^2-2}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{-\varepsilon x^2-x+2(1+\varepsilon)}{x^2-2}<\varepsilon$

គេបាន $x\in]-\infty,\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon}[\cup]\frac{1-\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon},+\infty[$ តែ $x\to-\infty$

$\Rightarrow x\in]-\infty,\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon}[$ យើងអាចយក $-N=\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-2}=-1$

១៣. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x}>M \Leftrightarrow \frac{x^2-Mx+1}{x}>0$

-ករណី $M\le 2$ គេបាន $x\in]0,+\infty[$ យើងអាចយក $N=0$

-ករណី $M>2$ គេបាន $x\in]-\infty,\frac{M-\sqrt{M^2-4}}{2}[\cup]\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2},+\infty[$ តែ $x\to+\infty$ នោះ

យើងយក $x\in]\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2},+\infty[$ យក $N=\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

១៤. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-3x+2)=-\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $-x^2-3x+2<-M \Leftrightarrow -x^2-3x+2+M<0$ គេបាន $x\in]-\infty,\frac{\sqrt{17+4M}-3}{2}[\cup]\frac{\sqrt{17+4M}+3}{2},+\infty[$ ដោយ $x\to+\infty$ នាំអោយ $x\in]\frac{\sqrt{17+4M}+3}{2},+\infty[$ យើងអាចយក $N=\frac{\sqrt{17+4M}+3}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-3x+2)=-\infty$

១៥. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+1}{x})=-\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x}<-M\Leftrightarrow\frac{x^2+Mx+1}{x}<0$

-ករណី $M\le 2$ នាំអោយ $x\in]-\infty,0[$ យើងអាចយក $N=0$

-ករណី $M>2$ នាំអោយ $x\in]-\infty,\frac{-M-\sqrt{M^2-4}}{2}[$ ព្រោះ $x\to-\infty$ យក $N=\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+1}{x})=-\infty$

១៦. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2^x}-3)=+\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $\frac{1}{2^x}-3>M\Leftrightarrow\frac{1}{M+3}>2^x\Rightarrow x<-\log_2(3+M)$

យក $N=\log_2(3+M)$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2^x}-3)=+\infty$

ភាពជាប់

១៧. កំណត់តម្លៃ m និង n ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty,+\infty[$

$$f(x)=\begin{cases} x & ,if\ x\le 1\\ mx+n & ,if\ 1<x<4\\ -2x & ,if\ x\ge 4\end{cases}$$

១៨. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & ,x>\pi\\ \cos x+m^2 & ,x\le\pi\end{cases}$ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\pi$ ។

១៩. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{\pi}{3}\right]$

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=\frac{\pi}{3}$ ដែរឬទេ?

២០. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)\frac{x}{|x|+3}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x_0=0$ ។

២១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-3x} &, x<0\\ ax^2+2x+1 &, x\geq 0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

២២. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ។ សិក្សាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ។ តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឲ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ បានដែរឬទេ?

២៣. គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ $\quad x\mapsto f(x)=\begin{cases}\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} &, x\neq 0\\ \sqrt{2} &, x=0\end{cases}$

តើអនុគមន៍ f នេះជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ឬទេ?

២៤. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}-2x+a &, x\leq 1\\ \log_3 x &, x>1\end{cases}$

២៥. រកតម្លៃ ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} &, if\ x\neq 1\\ a &, if\ x=1\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=1$ ។

២៦. អនុគមន៍ កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3+x &, if\ x\leq a\\ x^2+1 &, if\ x>a\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

២៧. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ ។

២៨. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\begin{cases}2e^{3x}-3e^x-4 &, if\ x\geq 0\\ 1+2x-3m &, if\ x<0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

២៩. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} &, if\ x\neq 0\\ a &, if\ x=0\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

៣០. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x-2+\dfrac{e}{\ln x}\ , if\ x>0, x\neq 1 \\ \ln(m-1)\ , if\ x=0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ ។

៣១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin\left[\sin(\sin x)\right]}{x}$ បើ $x\neq 0$ និង

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\ , if\ x\neq 0 \\ \log\left(k+\sqrt{6}\right)+\log\left(k-\sqrt{6}\right), if\ x=0 \end{cases}$$

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

១៧. កំណត់តម្លៃ m និង n ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty,+\infty[$

$$f(x)=\begin{cases} x\ \ , if\ x\leq 1 \\ mx+n\ \ , if\ 1<x<4 \\ -2x\ , if\ x\geq 4 \end{cases}$$

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty,+\infty[$ លុះត្រាតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ 1 និង 4៖

ករណីអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ 1

យើងមាន $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(mx+n)=\lim\limits_{x\to 1^-} x\Leftrightarrow m+n=1,\quad (1)$

ករណីអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ 4៖

យើងមាន $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}(mx+n)=\lim\limits_{x\to 4^-}(-2x)\Leftrightarrow 4m+n=-8,\quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $m=-3$ និង $n=4$

ដូចនេះ៖ $\boxed{m=-3\ ,\ n=4}$

១៨. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & , x>\pi \\ \cos x+m^2 & , x\le\pi\end{cases}$ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\pi$ ។

គេមាន $f(\pi)=\cos\pi+m^2=m^2-1$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2\sin^2\frac{x-\pi}{2}}{\frac{(x-\pi)^2}{4}\times 4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\left(\cos x+m^2\right)=m^2-1$$

ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\pi$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^-} f(x)=f(\pi)$

$$\Leftrightarrow m^2-1=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}}$

១៩. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{\pi}{3}\right]$

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=\frac{\pi}{3}$ ដែរឬទេ?

យើងមាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\left[2\left(2\cos^2 x-1\right)+1\right]\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{(2\cos x-1)(2\cos x+1)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(2\cos x+1)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ គេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឲ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=\frac{\pi}{3}$ បានដោយគ្រាន់តែបន្ថែម $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$ ។

២០. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)\dfrac{x}{|x|+3}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x_0=0$ ។

យើងមាន $f(x_0)=f(0)=0$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|+3}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x+3}=0$$ ព្រោះ $x\to0^+$ នោះ $|x|=x$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|+3}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x+3}=0$$ ព្រោះ $x\to0^-$ នោះ $|x|=-x$

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x_0=0$ ។

២១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-3x} & ,\ x<0\\ ax^2+2x+1 & ,\ x\geq0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=1$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(ax^2+2x+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+a)e^{-3x}=a$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(o)\Leftrightarrow a=1$

ដូចនេះ: $\boxed{a=1}$

២២. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ។ សិក្សាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ។ តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឲ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ បានដែរឬទេ?

សិក្សាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំត្រង់ចំនុច $x_0=0$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

បើ $x\to 0^+$ នោះ $\sin\frac{x}{2}>0\Rightarrow\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sin\frac{x}{2}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ លីមីតស្តាំនៃ $f(x)$ គឺ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\sqrt{2}}$

បើ $x\to 0^-$ នោះ $\sin\frac{x}{2}<0\Rightarrow\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sin\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=-\sqrt{2}$$

ដូចនេះ លីមីតឆ្វេងនៃ $f(x)$ គឺ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\sqrt{2}}$

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=0$ បានដែរឬទេ?

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\sqrt{2}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\sqrt{2}$ នេះបញ្ជាក់ថា $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

គ្មានលីមីតត្រង់ $x_0=0$ ទេ

ដូចនេះគេមិនអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=0$ បានទេ។

២៣. គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}\ , & x\neq 0\\ \sqrt{2}\ , & x=0\end{cases}$$

តើអនុគមន៍ f នេះជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ឬទេ?

យើងមាន $f(x_0)=f(0)=\sqrt{2}$

$$f(x)=\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sin x+\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x}=\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}$$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin x}\right)=\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin x}\right)=-\sqrt{2}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{2}\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\sqrt{2}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x_0=0$ ទេ។

២៤. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}-2x+a\ ,\ x\le 1\\ \log_3 x\ ,\ x>1\end{cases}$

យើងមាន $f(1)=-2+a$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-2x+a)=-2+a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\log_3 x=0$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -2+a=0\Rightarrow a=2$

ដូចនេះ $\boxed{a=2}$

២៥. រកតម្លៃ ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}\ ,\ if\ x\neq 1\\ a\ ,\ if\ x=1\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=1$ ។

យើងមាន $f(1)=a$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{6}$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{6}}$

២៦. អនុគមន៍ កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3+x\,,\ if\ x\le a\\ x^2+1\,,\ if\ x>a\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

យើងមាន $f(a)=3+a$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}(3+x)=3+a$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\left(x^2+1\right)=a^2+1$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=a$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(x)$$

$$\Leftrightarrow a^2+1=3+a$$

$$\Leftrightarrow a^2-a-2=0$$

$$\Rightarrow a=-1\,,\ a=2$$

ដូចនេះ $\boxed{a\in\{-1,2\}}$

២៧. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន

$f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\dfrac{\sin x}{x}+1\right)}{x^2\left(x-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)}=-2$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ លុះត្រា

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{a}\right)=-2=\ln e^{-2}\Rightarrow a=e^{-4}$$

ដូចនេះ: $\boxed{a=e^{-4}}$

២៨. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\begin{cases}2e^{3x}-3e^{x}-4\text{ , if } x\geq 0\\ 1+2x-3m\text{ , if } x<0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងមាន $g(0)=2-3-4=-5$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2e^{3x}-3e^{x}-4\right)=-5$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+2x-3m)=1-3m$$

g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)\Leftrightarrow 1-3m=-5\Rightarrow m=2$$

ដូចនេះ: $\boxed{m=2}$

២៩. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\text{ , if } x\neq 0\\ a\text{ , if } x=0\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=a$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow a=0$

ដូចនេះ $\boxed{a=0}$

៣០. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x-2+\dfrac{e}{\ln x}\ , if\ x>0, x\neq 1 \\ \ln(m-1)\ , if\ x=0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=\ln(m-1)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-2+\frac{e}{\ln x}\right)=-2$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow -2=\ln(m-1)\Rightarrow m=1+e^{-2}$$

ដូចនេះ $\boxed{m=1+e^{-2}}$

៣១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$ បើ $x\neq 0$ និង

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\ , if\ x\neq 0 \\ \log(k+\sqrt{6})+\log(k-\sqrt{6}), if\ x=0 \end{cases}$$

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin[\sin(\sin x)]}{\sin(\sin x)}\times\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\right\}=1$$

ដើម្បីឲ្យ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$

លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=\log(k+\sqrt{6})+\log(k-\sqrt{6})$

$$\Leftrightarrow 1 = \log\left(k^2 - 6\right) \Leftrightarrow k^2 - 6 = 10 \Rightarrow k = \pm 4$$

តែ $k = -4$ មិនយក

ដូចនេះ $\boxed{k = 4}$

លីមីតអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$\mathbf{A} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{tg}2x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$ *បើ* $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 0$

នោះយើងបាន:

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{tg}2x} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\operatorname{tg}\left[2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\operatorname{tg}(\pi - 2u)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin u}{-\operatorname{tg}2u}$$ ព្រោះ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$$= -\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u} \times \frac{2u}{\operatorname{tg}2u} \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{A = -\frac{1}{2}}$

$\mathbf{B} = \lim\limits_{x\to a}(a^2 - x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = a - x \Rightarrow x = a - u$ បើ $x \to a \Rightarrow u \to 0$

នោះយើងបាន:

$$B = \lim_{x\to a}(a^2 - x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = \lim_{x\to a}(a - x)(a + x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0} u(2a - u)\operatorname{tg}\left[\frac{\pi(a - u)}{2a}\right] = \lim_{u\to 0} u(2a - u)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2a}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0} u(2a - u)\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}$$ ព្រោះ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(2a - u)u}{\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2a}}$$ ព្រោះ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{\frac{\pi u}{2a}}{tg\frac{\pi u}{2a}}(2a-u)\frac{2a}{\pi}\right] = \frac{2a}{\pi}\times 2a = \frac{4a^2}{\pi}$$

ដូចនេះយើងបាន $B = \frac{4a^2}{\pi}$

C $= \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)$ រាងមិនកំណត់ $\infty \times 0$

តាង $u = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{u}$ បើ $n \to \infty \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\times\sin(\pi u) = \lim_{u\to 0}\frac{\sin\pi u}{\pi u}\times\pi = \pi$$

ដូចនេះយើងបាន $C = \pi$

D $= \lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ រាងមិនកំណត់ $\infty \times 0$

តាង $u = 1-x \Rightarrow x = 1-u$ បើ $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$D = \lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = \lim_{u\to 0} u\,tg\frac{\pi(1-u)}{2}$$

$$= \lim_{u\to 0} u\,tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right) = \lim_{u\to 0} u\,cotg\frac{\pi u}{2}$$

ព្រោះ $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cotg\alpha$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{tg\frac{\pi u}{2}}$$ ព្រោះ $cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi u}{2}}{tg\frac{\pi u}{2}}\right)\right] = \frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះយើងបាន $D = \frac{2}{\pi}$

E $= \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = \pi - x \Rightarrow x = \pi - u$ បើ $x \to \pi \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$E = \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x} = \lim_{u\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi-u}{2}\right)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}\right)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos\frac{u}{2}}{2}$$ ព្រោះ $\sin(\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{u}{4}\right)}{u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin\frac{u}{4}}{\frac{u}{4}}\times\sin\frac{u}{4}\times\frac{1}{2}\right) = 0$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{E = 0}$

F $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x.\,tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ រាងមិនកំណត់ $\infty\times 0$

តាង $u = \frac{\pi}{4}-x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}-u$ បើ $x\to\frac{\pi}{4} \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$F = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x.\,tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \lim_{u\to 0} tg2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\times tgu$$

$$= \lim_{u\to 0} tg\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)\times tgu = \lim_{u\to 0} cotg2u\times tgu$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{tgu}{tg2u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{tgu}{u}\times\frac{2u}{tg2u}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{F = \frac{1}{2}}$

G $= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin 3x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = \frac{\pi}{3}-x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}-u$ បើ $x\to\frac{\pi}{3} \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$G = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin 3x} = \lim_{u\to 0}\frac{1-2\cos\left(\frac{u}{3}-u\right)}{\sin 3(\pi-3u)}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-2\left[\cos\frac{\pi}{3}\times\cos u+\sin\frac{\pi}{3}\times\sin u\right]}{\sin 3u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-2\left[\frac{1}{2}\cos u+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin u\right]}{\sin 3u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u-\sqrt{3}\,\sin u}{\sin 3u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2\frac{u}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\sin 3u}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\lim_{u\to 0}\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\times\frac{3u}{\sin 3u}\left(\sin\frac{u}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{u}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{G = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\mathbf{H} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\text{tgx}$ រាងមិនកំណត់ $0\times\infty$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$ បើ $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$H = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\text{tgx} = \lim_{u\to 0}\text{utg}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

$= \lim\limits_{u\to 0}\text{ucotgu}$ ព្រោះ $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{cotg}\alpha$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\text{tgu}} = 1$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{H = 1}$

$\mathbf{I} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = 1 - x \Rightarrow x = 1 - u$ បើ $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$I = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin\pi(1-u)}{\sin 3\pi(1-u)}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi-\pi u)}{\sin(3\pi-3\pi u)}$$

$= \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin\pi u}{\sin 3\pi u}$ ព្រោះ $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{\frac{\sin\pi u}{u}}{\frac{\sin 3\pi u}{u}}\right] = \left[\frac{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin\pi u}{\pi u}\times\pi}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin 3\pi u}{3\pi u}\times 3\pi}\right] = \frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{I = \frac{1}{3}}$

$\mathbf{J} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^3-a^3}$ រាងមិនកនណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = x - a \Rightarrow x = u + a$ បើ $x \to a \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$J = \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^3-a^3} = \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\times\frac{1}{(u+a)^2+a(u+a)+a^2} = \frac{1}{(0+a)^2+a(0+a)+a^2}$$

$$= \frac{1}{a^2+a^2+a^2} = \frac{1}{3a^2}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{J = \frac{1}{3a^2}}$

$\mathbf{K} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2008x}{\sin 2009x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$K=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2008x}{\sin 2009x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2008x}{2008x}\times\frac{2009x}{\sin 2009x}\times\frac{2008}{2009}=\frac{2008}{2009}$$

ដូចនេះយើងបាន: $K=\frac{2008}{2009}$

$\mathbf{L}=\lim_{x\to0}\frac{\tan nx}{\sin mx}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\tan nx}{\sin mx}=\lim_{x\to0}\frac{\tan nx}{nx}\times\frac{mx}{\sin mx}\times\frac{n}{m}=\frac{n}{m}$$

ដូចនេះយើងបាន: $L=\frac{n}{m}$

$\mathbf{M}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x+2009\pi)}{\sin(4x+2008\pi)}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$M=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x+2009\pi)}{\sin(4x+2008\pi)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2009\pi+3x)}{\sin(2008\pi+4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin[2008\pi+(\pi+3x)]}{\sin(2008\pi+4x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi+3x)}{\sin 4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin 3x}{\sin 4x}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$$

ដូចនេះយើងបាន: $M=\frac{3}{4}$

$\mathbf{N}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin 2x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$N=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{x}{2}=0$$

ដូចនេះយើងបាន: $N=0$

$\mathbf{O}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x^2}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

តាមរូបមន្ត: $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

យើងបាន:

$$O=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{x+3x^2}{2}\sin\frac{x-3x^2}{2}}{\sin^2 x}$$

$$=-2\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x+3x^2}{2}\right)}{\frac{x+3x^2}{2}}\times\frac{\sin\left(\frac{x-3x^2}{2}\right)}{\frac{x-3x^2}{2}}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{(x-3x^2)(x+3x^2)}{4}\times\frac{1}{x^2}\right]$$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2-9x^4}{4x^2}=-2\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4}-\frac{9x^2}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះយើងបាន: $O=-\frac{1}{2}$

P $=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$F=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{4x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}$$ ព្រោះ $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ និង sinx

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\times\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos\frac{x}{2}\cos x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{3}{4}$$

ដូចនេះយើងបាន: $P=\frac{3}{4}$

Q $=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$Q=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}-\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} - \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\times\cos\frac{x}{2}\right)$$

បើ $x \to 0^+; \sin\frac{x}{2} > 0 \implies \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2}$

យើងបាន:

$$= 2\sqrt{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\cos\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

ដូចនេះ $Q=\sqrt{2}$ ចំពោះ $x \to 0^+$

បើ $x \to 0^-;\ \sin\frac{x}{2} < 0 \implies \left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\sin\frac{x}{2}$

យើងបាន:

$$= -2\sqrt{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\cos\frac{x}{2}\right) = -2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$= -\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $Q=-\sqrt{2}$ ចំពោះ $x \to 0^-$

$\mathbf{R} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin 3x}{2x - 3\sin 2x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$R = \lim_{x\to0}\frac{2\sin 3x}{2x-3\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{2\sin 3x}{x}}{\frac{2x-3\sin 2x}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{6\sin 3x}{3x}}{2-\frac{6\sin 2x}{2x}}$$

$$= \frac{6}{2-6} = -\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $R = -\frac{3}{2}$

$\mathbf{S} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 2009x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$S = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 2009x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\sqrt{x+9}+3(\sin 2009x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x+9-9}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)(\sin 2009x)} = \lim_{x\to0}\frac{x}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)(\sin 2009x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+9}+3)\dfrac{\sin 2009x}{2009x}\times 2009} = \frac{1}{12054}$$

ដូចនេះ: $S = \dfrac{1}{12054}$

$\mathbf{T} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំនត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន:

$$T = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $T = \dfrac{1}{2}$

$\mathbf{U} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}$ រាងមិនកំនត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន:

$$U = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1-\cos^2 x} - \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $U = \dfrac{1}{2}$

$\mathbf{V} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ រាងមិនកំនត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន:

$$V = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{(1-\cos x)}{x^2}\times\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $V = \dfrac{1}{2}$

អនុគមន៍សនិទាន និង អសនិទាន

គណនាលីមីតខាងក្រោម

៥៣. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}$

៥៤. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$

៥៥. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

៥៦. $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}$

៥៧. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^{2013}-2013}{x}$

៥៨. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2014x+1}{\ln x}\right)$

៥៩. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)$

៦០. $\lim_{\substack{x\to\infty\\x>0}}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{x}\right)$

៦១. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right]$

៦២. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)$

៦៣. $\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$

៦៤. $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]$

ចម្លើយ

៥៣. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2013}\left(2013-\dfrac{2}{x^{2012}}+\dfrac{1}{x^{2013}}\right)}{x^{2013}\left(1-\dfrac{2}{x^{2013}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2013-\dfrac{2}{x^{2012}}+\dfrac{1}{x^{2013}}\right)}{\left(1-\dfrac{2}{x^{2013}}\right)}=\boxed{2013}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}=2013$

៥៤. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0}{b_0}=\boxed{\frac{a_0}{b_0}}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}=\frac{a_0}{b_0}$

៥៥. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\boxed{1}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$

៥៦. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

$$=\left(\frac{x-\left(x^2-1\right)}{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

$$=\left(\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right)^n+\left(\frac{x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)^n$$

យើងបាន $|x|=\begin{cases}-x & ,x<0\\ x & ,x>0\end{cases}$

យើងចែកជាពីរករណីគឺ៖

❖ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^n+\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]=\boxed{(-1)^n}$

❖ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^n+\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]=\boxed{(-1)^n+2^n}$

៥៧. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{2013}-2013}{x}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{2013}-2013}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2013\ln x-2013}{x}=2013\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2013}{x}=\boxed{0}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{2013}-2013}{x}=0$

៥៨. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2014x+1}{\ln x}\right)$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2014x+1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2014+\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{x}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2014+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}=\boxed{2014}$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2014x+1}{\ln x}\right)=2014$

៥៩. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)$ មានរាង $-\infty+\infty$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2+3x-4\right)-x^2}{\sqrt{x^2+3x-4}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-x}$$

កាលណា $x\to-\infty,\ |x|=-x$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+1\right)}=-\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)=\boxed{-\dfrac{3}{2}}$

៦០. $\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0}}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{x}\right)$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

យើងបាន

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=\frac{ax^2+bx+c-ax^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}}=\frac{bx+c}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b+\frac{c}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}}+\sqrt{a}}$$

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}\right)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{b+\frac{c}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}}+\sqrt{a}}=\boxed{\dfrac{b}{2\sqrt{a}}}$

៦១. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

$$\sqrt[3]{3n^3-2n^2}-n=\frac{n^3-2n^2-n^3}{\left(\sqrt[3]{3n^3-2n^2}\right)^2+n\sqrt[3]{3n^3-2n^2}+n^2}$$

$$=\frac{-2n^2}{n^2\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1\right]}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{3n^3-2n^2}-n\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=\boxed{-\frac{2}{3}}$

៦២. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x=x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)+x$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}=o$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)=\boxed{+\infty}$

៦៣. $\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

យើងបាន $\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}.a}\right]$$

$$=\ln\left(e^a\right)$$

$$=a$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]=\boxed{a}$

៦៥. $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$

$$=\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{x-1}\right)$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=\ln 3$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]=\ln 3$

លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីត

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីតខាងក្រោម

65. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ 66. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$ 67. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

68. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ 69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$ 70. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

71. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}$ 72. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\ (a\neq b)$ 73. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}\ (a\neq b)$

74. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}$ 75. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$ 76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$

77. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$ 78. $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\ (a>0)$ 79. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$

80. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\lg(1+10x)}{x}$ 81. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$ 82. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

83. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ 84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{2x+1}$ 85. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos 4x-5}{\ln\left(1+4x^2\right)-3e^{4x^2}+3}$

86. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}$ 87. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}$ 88. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}$

89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x$ 90. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\sin x]{1+x}$ 91. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}$

92. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+e^{3x}\right)}{\sin x}$ 93. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2015x}-e^{\sin 2014x}}{\sin 2013x-\sin 2012x}$ 94. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}$

ចម្លើយ

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីតខាងក្រោម៖

65) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ មានរាងមិនកំណត់ 1^∞

តាមរូបមន្ត $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ យើងបាន:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2 \text{ ព្រោះ } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=e$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$ ។

66) គណនា $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)=\left(\frac{0^2-2(0)+3}{0^2-3(0)+2}\right)=\frac{3}{2} \text{ និង } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{2}$ ។

67) គណនា $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ មានរាងមិនកំណត់ 1^∞

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e$ ។

68) គណនា $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ មានរាងមិនកំណត់ 1^∞

យើងមាន: $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ នាំឱ្យ

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\times\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}$$

$$=e^{-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{-2\times 0}=e^0=1$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}=e$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x}{4}=1\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=1\times 0=0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=0$ ។

69) គណនា $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+e}$ មានរាងមិនកំណត់

យើងមាន:

$$\frac{x+a}{x+b}=\frac{(x+b)+a-b}{x+b}=1+\frac{a-b}{x+b}$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b}}\right]^{\frac{(a-b)(x+c)}{x+b}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)(x+c)}{x+b}}=e^{a-b}$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b}}=e$ និង

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)(x+c)}{x+b}=(a-b)\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{c}{x}\right)}{x\left(1+\frac{b}{x}\right)}=(a-b)\times1=a-b$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+e}=e^{a-b}$ ។

70) គណនា $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ មានរាងមិនកំណត់ 1^{∞}

យើងអាចសរសេរ:

$$\frac{x}{2}=\frac{2+x-2}{2}=1+\frac{x-2}{2}$$

នោះ $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

តាង $\propto=x-2 \Rightarrow x=\propto+2$ បើ $x\to2 \Rightarrow\propto\to0$

គេបាន $\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{\propto\to0}\left(1+\frac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\propto}}=\lim_{\propto\to0}\left(1+\frac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{\propto}{2}}\times\frac{1}{2}}=\lim_{\propto\to0}\left[\left(1+\frac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{\propto}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

ពីព្រោះ $\lim_{\propto\to0}\left(1+\frac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{\propto}{2}}}=e$

ដូចនេះ $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\sqrt{e}$ ។

71) គណនា $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u=e^{ax}-1 \Leftrightarrow e^{ax}=u+1$ បំពាក់លោការីលើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\ln e^{ax}=\ln(u+1)\Leftrightarrow ax=\ln(u+1)\Rightarrow x=\frac{\ln(u+1)}{a}$

បើ $x\to0 \Rightarrow u\to0$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{a}}=\lim_{u\to0}\frac{au}{\ln(u+1)}=\lim_{u\to0}\frac{a}{\frac{1}{u}\ln(u+1)}=\lim_{u\to0}\frac{a}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$

$$=\frac{a}{\ln\left[\lim_{u\to0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right]}=\frac{a}{\ln e}=a$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}=e$ និង $\ln e=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$ ។

72) គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a\neq b)$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងអាចសរសេរ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(e^{ax}-1)}{x}-\frac{(e^{bx}-1)}{x}\right]$$

$$=a-b$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{x}=b$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b$ ។

73) គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$ $(a\neq b)$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{ax}-e^{ax}}{x}}{\frac{\sin ax-\sin bx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{ax}}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a\sin ax}{ax}-\frac{b\sin bx}{bx}\right)}=\frac{a-b}{a-b}=1$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b$ (មើលសម្រាយខាងលើ) និង $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1;\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=1$ ។

74) គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}=\frac{e^{\sin x}-1-e^{tg2x}+1}{x}=\frac{(e^{\sin x}-1)-(e^{tg2x}-1)}{x}=\frac{e^{\sin x}-1}{x}-\frac{e^{tg2x}-1}{x}$ នោះ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-e^{tg2x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}-1)-(e^{tg2x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{tg2x}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{tg2x}-1}{tg2x}\right)\left(\frac{tg2x}{2x}\right)\times 2$$

$$=1\times 1-1\times 1\times 2=-1$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)=1;\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{tg2x}-1}{tg2x}\right)=1;\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1;\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}=-1$ ។

75) គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាមរូបមន្ត: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

យើងមាន: $\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\dfrac{7^x\left(\dfrac{8^x}{7^x}-1\right)}{5^x\left(\dfrac{6^x}{5^x}-1\right)}=\dfrac{7^x\left[\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1\right]}{5^x\left[\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1\right]}$

នោះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x\left[\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1\right]}{5^x\left[\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x\left[\dfrac{\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1}{x}\right]}{5^x\left[\dfrac{\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1}{x}\right]}=\dfrac{1\times\ln\dfrac{8}{7}}{1\times\ln\dfrac{6}{5}}=\dfrac{\ln\dfrac{8}{7}}{\ln\dfrac{6}{5}}$

ពីព្រោះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1}{x}=\ln\dfrac{8}{7}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1}{x}=\ln\dfrac{6}{5}$, $\lim\limits_{x\to 0}7^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}5^x=1$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\dfrac{\ln\dfrac{8}{7}}{\ln\dfrac{6}{5}}$ ។

76) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

យើងមាន:

$\ln(2x+1)-\ln(x+2)=\ln\dfrac{2x+1}{x+2}=\ln\dfrac{2x+4-3}{x+2}=\ln\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)$

នោះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)\right]=\ln 2$

ពីព្រោះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)=2$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]=\ln 2$ ។

77) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty\times\infty$

យើងមាន: $x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

នោះ: $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=\ln e=1$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=1$ ។

78) គណនា $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ $(a>0)$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty\times 0$

យើងមាន:

$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$

តាង $n=\frac{1}{t}$ នោះ $t=\frac{1}{n}$ កាលណា $n\to\infty$ នោះ $t\to 0$

នាំឱ្យ $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(a^{t}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(a^{t}-1\right)}{t}=\ln a$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$ ។

79) គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$\frac{\ln(1+kx)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+kx)=\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}$

នោះ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^{k}=\ln e^{k}=k$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}=\ln e$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k$ ។

80) គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាមរូបមន្តប្តូរគោល: $\log_a x=\log_a b\cdot\log_b x$

នោះគេបាន $\log(1+10x)=\log e\cdot\log_e(1+10x)=\log e\cdot\ln(1+10x)$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log e\cdot\ln(1+10x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\log e\cdot\frac{\ln(1+10x)}{x}\right]$

$=\log e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\times 10=\log e\times 1\times 10=10\log e$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}=10\log e$ ។

81) គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងអាចសរសេរ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1\times 2}{\ln\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$=\frac{2}{\ln e}=2$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$; $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}=2$ ។

82) គណនា $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន: $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

នោះគេអាចសរសេរ: $\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]$

$$=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\times\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}\right]=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$$

$$=\ln\left[e^{\lim_{x\to0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}\right]=\ln\left[e^{\lim_{x\to0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times4}\right)}\right]=\ln\left[e^{-\frac{2}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}\right]=\ln\left(e^{-\frac{1}{2}\times1}\right)=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=e$; $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ ។

83) គណនា $\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

ដោយដឹងថា: $x^x=e^{x\ln x}$

តាង $u=x\ln x$, កាលណា $x\to1$ នោះ $u\to0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=1$ ។

84) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+3}\right)^{2x+1}$ មានរាងមិនកំណត់ 1^{∞}

យើងអាចសរសេរ: $\frac{4x-3}{4x+3}=\frac{4x+3-3-3}{4x+3}=1-\frac{6}{4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+3}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{\left(-\frac{4x+3}{6}\right)\left(-\frac{6}{4x+3}\right)2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{-\frac{4x+3}{6}}\right]^{-\frac{6(2x+1)}{4x+3}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(2x+1)}{4x+3}}=e^{-\frac{12}{4}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{-\frac{4x+3}{6}}=e$ និង

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{6(2x+1)}{4x+3}=-\lim_{x\to\infty}\frac{6x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}=-\frac{6\times2}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+3}\right)^{2x+1}=\frac{1}{e^3}$ ។

85) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos4x-5}{\ln(1+4x^2)-3e^{4x^2}+3}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos4x-5}{\ln(1+4x^2)-3e^{4x^2}+3}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3+2\cos4x-2}{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3+2(\cos4x-1)}{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3+2\left(-2\sin^2 2x\right)}{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}\quad,\left(\begin{aligned}\cos4x-1&=-(1-\cos4x)\\&=-2\sin^2\frac{4x}{2}=-2\sin^2 2x\end{aligned}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sqrt{5x^4+9}-3-4\left(\sin^2 2x\right)}{x^2}}{\dfrac{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}-4\frac{\sin 2x}{x^2}}{\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}-3\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}-4\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}}$$

ដោយ $\bullet\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{5x^4+9}-3\right)\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}$

\

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{5x^4+9}\right)^2-3^2}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{5x^4+9-9}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5x^4}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{5x^2}{\sqrt{5x^4+9}+3}$$

$$=\frac{5\times0^2}{\sqrt{5\times0^4+9}+3}=\frac{0}{6}=0$$

$\bullet\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\times4=1\times4=4$, $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}=1\right)$

$\bullet\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{4x^2}\times4=1\times4=4$, $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{4x^2}=1\right)$

$\bullet\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\times4=1\times4=4$, $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}=1\right)$

គេបាន

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos 4x-5}{\ln\left(1+4x^2\right)-3e^{4x^2}+3}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}-4\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}}=\frac{0-4\times4}{4-3\times4}=\frac{-16}{-8}=2$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos 4x-5}{\ln\left(1+4x^2\right)-3e^{4x^2}+3}=2$ ។

86) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x-\ln(1+3x)}{x}}{\frac{x+\sin 3x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\dfrac{\sin 3x}{x}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}}$$

ដោយ

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}=\dfrac{1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}}=\dfrac{1-3}{1+3}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}=-\dfrac{1}{2}$ ។

87) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1+e^{2x^2}-e^{2x^2}}{x^2+\sin 3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-e^{2x^2}+e^{2x^2}-1}{x^2+\sin 3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x^2}(1-\cos 6x)+e^{2x^2}-1}{x^2+\sin 3x^2}\quad,\ \left(1-\cos 6x=2\sin^2\frac{6x}{2}=2\sin^2 3x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x^2}(2\sin^2 3x)+e^{2x^2}-1}{x^2+\sin 3x^2}$$

យកភាគយកនិងភាគបែងចែកនឹង x^2

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2e^{2x^2}\sin^2 3x+e^{2x^2}-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+\sin 3x^2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2e^{2x^2}\sin^2 3x}{x^2}+\dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2}}{1+\dfrac{\sin 3x^2}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(-2e^{2x^2}\right)\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x^2}}$$

ដោយ $\cdot\lim_{x\to 0}\left(-2e^{2x^2}\right)=-2e^{2\times 0^2}=-2e^0=-2\times 1=-2$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\times 9=1\times 9=9$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\times 2=1\times 2=2$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{3x^2}\times 3=1\times 3=3$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}=\frac{-2\times 9+2}{1+3}=\frac{-18+2}{4}=-4$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}=-4$ ។

88) $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^{3x}+2e^{3x}-2}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^{3x}+2\left(e^{3x}-1\right)}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3xe^{3x}+2\left(e^{3x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+\frac{2\left(e^{3x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}3e^{3x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}}$$

ដោយ $\cdot\lim_{x\to 0}3e^{3x}=3e^{3\times 0}=3e^0=3\times 1=1$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)}{3x}\times 3=1\times 3=3$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\times 6=1\times 6=6$

នោះ: $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}=\frac{3+2\times 3}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}=\frac{3}{2}$ ។

89) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x$ មានរាងមិនកំណត់ 1^∞

យើងមាន:

$$\frac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}=\frac{x^2-6x+3+x+5}{x^2-6x+3}=1+\frac{x+5}{x^2-6x+3}$$

គេបាន:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x^2-6x+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^{\frac{x^2-6x+3}{x+5}\times\frac{x(x+5)}{x^2-6x+3}}$$

តាមរូបមន្ត

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^{\frac{x^2-6x+3}{x+5}}\right]^{\frac{x^2+5x}{x^2-6x+3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x}{x^2-6x+3}}=e^1=e$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x=e$ ។

90) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\sin x]{1+x}$ មានរាងមិនកំណត់ 1^∞

យើងមាន:

$$\lim_{x\to0}\sqrt[\sin x]{1+x}=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}\times\frac{x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}}=e^1=e$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\sqrt[\sin x]{1+x}=e$ ។

91) $\lim_{x\to0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}$ មានរាងមិនកំណត់ 1^{∞}

យើងមាន:

$$\lim_{x\to0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}=\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{2\sin x}}$$ តាមរូបមន្ត $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\times\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}}$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}=e$

ដោយ

$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$ តាមរូបមន្ត $\left(\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{0}{2\times1}=0$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}=e^0=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}=1$ ។

92) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+3x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}$$

ដោយ

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\frac{3}{1}=3$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=3$ ។

93) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin 2013x-\sin 2012x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin 2013x-\sin 2012x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-1-e^{2014x}+1}{\sin 2013x-\sin 2012x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-1-\left(e^{2014x}-1\right)}{\sin 2013x-\sin 2012x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2015x}-1-\left(e^{2014x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin 2013x-\sin 2012x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2015x}-1}{x}-\frac{e^{2014x}-1}{x}}{\frac{\sin 2013x}{x}-\frac{\sin 2012x}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2014x}-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2013x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2012x}{x}}$$

ដោយ

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-1}{2015x}\times 2015=1\times 2015=2015$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2014x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2014x}-1}{2014x}\times 2014=1\times 2014=2014$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2013x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2013x}{2013x}\times 2013=1\times 2013=2013$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2012x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2012x}{2012x}\times 2012=1\times 2012=2012$$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin 2013x-\sin 2012x}=\frac{2015-2014}{2013-2012}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin 2013x-\sin 2012x}=1$ ។

94) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2013^x-1-2012^x+1}{2011^x-1-2010^x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2013^x-1-\left(2012^x-1\right)}{2011^x-1-\left(2010^x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2013^x-1-\left(2012^x-1\right)}{x}}{\dfrac{2011^x-1-\left(2010^x-1\right)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2013^x-1}{x}-\dfrac{2012^x-1}{x}}{\dfrac{2011^x-1}{x}-\dfrac{2010^x-1}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2012^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2011^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2010^x-1}{x}}$$

ដោយ $\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-1}{x}=\ln 2013$ (តាមរូបមន្ត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$)

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2012^x-1}{x}=\ln 2012$

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2011^x-1}{x}=\ln 2011$

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2010^x-1}{x}=\ln 2010$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}=\dfrac{\ln 2013-\ln 2012}{\ln 2011-\ln 2010}=\dfrac{\ln\dfrac{2013}{2012}}{\ln\dfrac{2011}{2010}}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}=\dfrac{\ln\dfrac{2013}{2012}}{\ln\dfrac{2011}{2010}}$ ។

លំហាត់បន្ថែម

គណនា

៩៥. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}), \pm\infty\mp\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+1-x^3+1}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}.\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{2}{x^2})}{x^2[\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^3})^2}]}$$

$$=\frac{2}{3}$$

៩៦. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}, \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{5x+10}{\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4}}{\frac{3x+6}{\sqrt{3x+10}+2}}=\frac{5}{3}\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{3x+10}+2}{\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4}=\frac{5}{9}$$

៩៧. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{K!.K}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{K!.K}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(K+1)!-K!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

៩៨. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=2}^{n}(1-\frac{1}{r^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=2}^{n}(\frac{r^2-1}{r^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=2}^{n}(\frac{(r-1)(1+1)}{r^2})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$$

៩៩.រកចំនួនពិត a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b)=0$$

ដោយ

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b)=0\Rightarrow b=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3-a^3n^3}{\sqrt[3]{(1-n^3)^2}+\sqrt[3]{an(1-n^3)}+\sqrt[3]{a^2n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(-1-a^3+\frac{1}{n^3})}{n^2[\sqrt[3]{(\frac{1}{n^2}-1)^2}+\sqrt[3]{a(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^2})}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{n^4}}]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-1-a^3+\frac{1}{n^3})}{[\sqrt[3]{(\frac{1}{n^2}-1)^2}+\sqrt[3]{a(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^2})}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{n^4}}]}$$

ប្រសិនបើ $-1-a^3\neq 0\Rightarrow b=\infty$ ដែលវាមិនមែនជាចំនួនពិតឡើយនោះ

$-1-a^3=0\Rightarrow a=-1$ នាំអោយ $b=0$

១០០. $p\in\mathbb{N}$ ហើយ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ ដែលជាចំនួនវិជ្ជមានផ្សេងៗគ្នា គណនា

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_p^n}$$

តាង $\alpha_j=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\},1\leq j\leq p$ គេបាន

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_p^n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_j\sqrt[n]{\frac{\alpha_1^n}{\alpha_j^n}+\frac{\alpha_2^n}{\alpha_j^n}+\cdots+\frac{\alpha_{j-1}^n}{\alpha_j^n}+1+\frac{\alpha_{j+1}^n}{\alpha_j^n}+\cdots+\frac{\alpha_p^n}{\alpha_j^n}}$$

$$=\alpha_j$$

$$=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$$

១០១. $a\in\mathbb{R}^*$ គណនា $\lim_{x\to-a}\frac{\cos x-\cos a}{x^2-a^2}$ $\quad(-\frac{\sin a}{2a})$

១០២. $n\in\mathbb{N}^*$ គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{nx},\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{nx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{x+x^2+\cdots+x^n}.\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{nx}=\lim_{x\to0}\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{1}{n}$$

១០៣. គណនា $\lim_{n\to\infty}(n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3})$

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3})=\lim_{n\to\infty}(n^2+n-2\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3})$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3})$$
$$=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3})$$
$$=\frac{5}{12}$$

១០៤.រកតម្លៃ $a\in\mathbb{R}^*$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

ដោយ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{\frac{a^2x^2}{4}}=\frac{a^2}{2}$ និង $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$

គេបាន $\frac{a^2}{2}=1\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$

១០៥.គណនា $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2+2-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=\frac{1}{12}$$

១០៦.$\lambda\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-\lambda^2(2n^2-n)}{\sqrt{2n^2+n}+\lambda\sqrt{2n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(1-\lambda^2)+(1+\lambda^2)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\lambda\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$
$$=\begin{cases}+\infty,\lambda\in(-\infty,1)\\ \frac{\sqrt{2}}{2},\lambda=1\\ -\infty,\lambda\in(1,+\infty)\end{cases}$$

១០៧.$a,b,c\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})$

-ករណី $a+b+c\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(a\sqrt{1+\frac{1}{x}}+b\sqrt{1+\frac{2}{x}}+c\sqrt{1+\frac{3}{x}})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(a+b+c)$$
$$=\begin{cases}-\infty, a+b+c<0\\+\infty, a+b+c>0\end{cases}$$

-ករណី $a+b+c=0$

$$\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})=\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}-a+b\sqrt{x+2}-b+c\sqrt{x+3}-c)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}+\frac{b+\frac{b}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}}+\frac{c+\frac{2c}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\frac{1}{x}}\right)$$
$$=0$$

១០៨.គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

យើងមាន $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, 1\le k\le n$

ពេលយើងបូកចំពោះតម្លៃ $k=\overline{1,n}$ គេបាន

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

តាមទ្រឹស្តីបទSqueeze គេបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$

១០៩.ចំពោះ $a>0, p\ge 2$ គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}$

ដូចគ្នានិងខាងលើដែរគេបាន $\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+na}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}\le\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+na}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}=1$ តាមទ្រឹស្តីបទSqueezeគេបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}=1$

១១០.គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}$ យើងដឹងថា

$$0\le\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}<\frac{n!}{1^2.2^2\ldots n^2}=\frac{n!}{(1.2\ldots n).(1.2\ldots n)}$$

$$\Leftrightarrow 0\le \frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\dots(1+n^2)}<\frac{n!}{(n!)^2}=\frac{1}{n!}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Squeeze គេបាន

$$0\le \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\dots(1+n^2)}<\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n!}=0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\dots(1+n^2)}=0$

១១១.គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$ $,1^\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{n-4}}\right]^{\frac{(n-4)(n^2-1)}{2n^3-2n^2+n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-4)(n^2-1)}{2n^3-2n^2+n}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}=\sqrt{e}$

១១២.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}}, \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x-\cos^2 x)(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{(1-1-\tan^2 x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{-\tan^2 x(\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x)}$$

$$=\frac{-2\cos^2 x(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}=-2$$

១១៣.គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x ,\infty^\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=e^{+\infty}=+\infty$$

១១៤.គណនា $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}},1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}-\tan\frac{x}{2}}=e^0=1$$

១១៥.គណនា $\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}},1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[e^x\left(1+\frac{\sin x}{e^x}\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}(e^x)^{\frac{1}{x}}.\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\sin x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{xe^x}}$$

$$=e.e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{xe^x}}=e^2$$

១១៦.បើ $a,b\in\mathbb{R}^*_+$ គណនា $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n,1^{\infty}$

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=\lim_{n\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right]^{\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}}$$

$$=e^{\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{\ln b}{a}}=b^{\frac{1}{a}}$$

១១៧.បើ $a>0$, គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-1}{x},\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}-1}{x\ln(a+x)}.\lim_{x\to 0}\ln(a+x)=\ln a$$

១១៨.គណនា

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\arctan\frac{1}{2k^2}$$

ដោយ $\arctan\dfrac{1}{2k^2}=\arctan\dfrac{k}{k+1}-\arctan\dfrac{k-1}{k}$ ព្រោះ៖

$$\tan\left(\arctan\frac{k}{k+1}-\arctan\frac{k-1}{k}\right)=\frac{\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{k-1}{k}}{1-\dfrac{k}{K+1}.\dfrac{k-1}{k}}=\frac{1}{2k^2}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\arctan\dfrac{1}{2k^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{\pi}{4}$

១១៩.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{4k^4+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^4+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n^2+2n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

១២០.គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}$, 0^0

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\frac{x}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^x\right)^{\frac{1}{x^2+1}}=1^1$ ព្រោះ៖ $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln x}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{-\ln t}{t}}=e^0=1$

ហើយ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}=1^0=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}=1$

១២១.គណនា $\lim_{x\to 0}\left(\cos(\sin(x))\right)^{\frac{1}{x^2}}, 1^{\infty}$

តាង

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\cos\sin x\right)^{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln\cos\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{\ln\cos\sin x}{\cos\sin x-1}.\frac{\cos\sin x-1}{\sin^2 x}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

ព្រោះ $\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1$; $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=-\frac{1}{2}$; $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\cos(\sin(x))\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

១២២.គណនា $\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}, \quad \frac{0}{0}$

តាង $L=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}.\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos x}{-\frac{1}{2}.\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}=\frac{1}{2}$

១២៣.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\cos^2 x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}, \quad \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\cos^2 x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(2^{\frac{x^2}{2}}\cos x+1\right)\left(2^{\frac{x^2}{2}}\cos x-1\right)}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{2^{\frac{x^2}{2}}\cos x-1}{x^2}$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\left[2^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right) + \frac{2^{\frac{x^2}{2}} - 1}{x^2}\right] = -2 + 2\lim_{x\to 0}\frac{2^{\frac{x^2}{2}} - 1}{\frac{x^2}{2}} = -2 + \ln 4$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{2^{\frac{x^2}{2}} - 1}{\frac{x^2}{2}} = \ln 2$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\cos^2 x - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} = -2 + \ln 4$

១២៤.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos^2 2x\ldots\cos^n nx}{x^2}$, $\frac{0}{0}$

ពិនិត្យ $b_k = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^k(kx)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k^3\cos^{k-1}(kx)}{2}.\left(\frac{\sin(kx)}{kx}\right) = \frac{k^3}{2}$ ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{Z}$

តាង

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos^2 2x\ldots\cos^n nx}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1-\cos^2 2x.\cos^3 3x\ldots\cos^n nx)}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x(1-\cos^3 3x.\cos^4 4x\ldots\cos^n nx)}{x^2}$$

$$= b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos^2 2x\ldots\cos^n nx}{x^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8}$

១២៥.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)}$, $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}.\sin x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\cos(x))\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin^2\frac{x}{2})}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\pi\sin^2\frac{x}{2})}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}.\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}.\frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=0$$

ដូចនេះ $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)}=0$$

សូមអរគុណ!

ឯកសារយោង

១.*Early Transcendentals Calculus By* James Stewart *6e, McMASTER UNIVERSITY, © 2008, 2003 Thomson Brooks/Cole.*

២.*3000 Solved Problems in Calculus by* Elliot Mendelson, Ph.D.
Professor of Mathematics,Queens College, City University of New York, © 1988 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

៣.*Calculus Concepts and Contexts 2nd Ed* -James Stewart

៤.*Schaum's Outline of Advanced Calculus,* ROBERT WREDE, Ph.D & MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D.
Professor and Chairman of Mathematics Rensselaer Polytechnic Institute Hartford Graduate Center,SECOND EDITION , © 2002, 1963 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

៥. *វិភាគចំនួនពិត ភាគ១,ដោយ លោកគ្រូ* សួន សុវ៉ាន់,*សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ* , ©២០០៧

៦. *លីមីត រៀបរៀងដោយ លោកគ្រូ* ស៊ាម ង៉ុន,*សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ*, © ២០០៦

៧.*www.artofproblemsolving.com*