អក្ខរក្រមខ្មែរ

ជំពូកទី ១

ចំណេះដឹងទូទៅ

1. ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Antiderivatives and Indefinite Integrals)

1.1 ព្រីមីទីវ (Antiderivatives)

និយមន័យ (Definition)

$F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កាលណា $F'(x)=f(x)$

1.2 អាំងតេក្រាល (Integrals)

ឧទាហរណ៍

គេមានអនុគមន៍ $F(x)=x^4+x^3+7$ និង $G(x)=x^4+x^3+2002$ ។

តើ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=4x^3+3x^2$ ឬ ទេ?

ចំលើយ

- $F(x)=x^4+x^3+7$ នោះ $F'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$ (1)
- $G(x)=x^4+x^3+2002$ នោះ $G'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន :

$F'(x)=G'(x)=f(x)$

ដូចនេះ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=4x^3+3x^2$ ហើយដែលព្រីមីទីវទាំងនោះខុសគ្នាតែចំនួនថេរប៉ុណ្ណោះ ។

អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺជា សំនុំព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ (ឬគ្រួសារព្រីមីទីវនៃ $f(x)$) ។

គេកំនត់សរសេរ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ជាទូទៅ

> អាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃ $f(x)$ គឺ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ហើយ c ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

$\int f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលនៃ អនុគមន៍ $f(x)$ ។

លក្ខណៈអាំងតេក្រាល (Properties of Integrals)

$i)\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0$

$ii)\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ ។

ការគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួយ (Integration of Integrals By Substitution)

គុនាឃណ៍

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម÷

$a)\ I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

តាង $t = 1-x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2x}dt$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2x}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$
$$= -\sqrt{t} + c$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + c$$

ដូចនេះ $I = -\sqrt{1-x^2} + c$ ។

រូបមន្ត

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + c$$

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក (Integration By Parts)

បើគេមាន អនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល យើងបាន :

$$\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$
$$\int \frac{d}{dx}(f(x).g(x))dx = \int g(x)\frac{d}{dx}f(x)dx + \int f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx$$
$$f(x).g(x) = \int g(x)\frac{d}{dx}f(x)dx + \int f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx$$

ឬ $\int f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x)\frac{d}{dx}f(x)dx$

ឬ $\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)d(x)$

ឬ $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ ។

គន្លាចរណ៍

គណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្តែកខាងក្រោម÷

$a) I = \int \ln x dx$

តាង $u(x) = \ln x$ នោះ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = 1$ នោះ $V(x) = x$

$I = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c$

ដូចនេះ $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$

កំណត់សំគាល់

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$

- បើ $P(x) \cdot \begin{bmatrix} \cos(ax+b) \\ \sin(ax+b) \\ e^{ax+b} \end{bmatrix}$ ដែល $p(x)$ ជាពហុធា នោះយើងតាង $u = p(x)$ ។
- បើ $P(x) \cdot \begin{bmatrix} Arc\sin x \\ Arc\tan x \\ \ln(ax+b) \end{bmatrix}$ ដែល $p(x)$ ជាពហុធា នោះយើងតាង $dv = P(x)dx$ ។

តារាងប្រមន្ត

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x dx = \sin x + c$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot g^2 x) dx = -\cot gx + c$

10) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

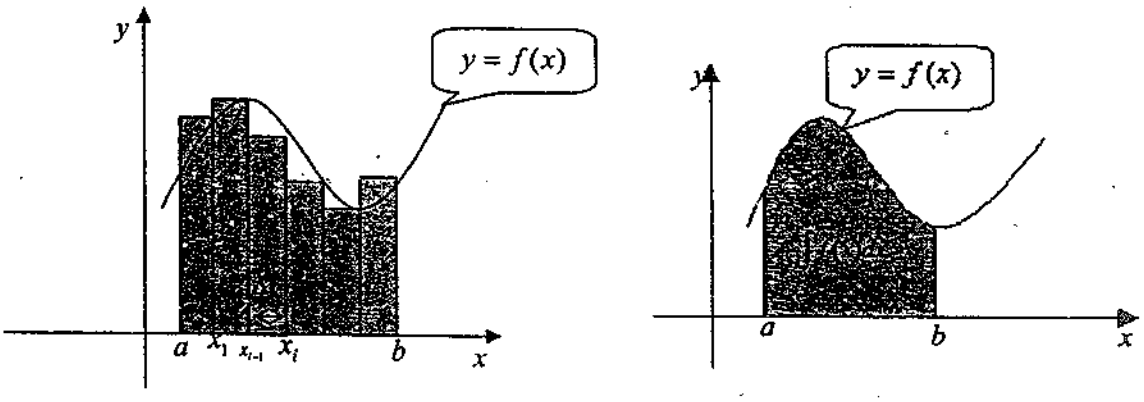
11) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} Arc \tan \frac{x}{a} + c$

12) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = Arc \sin \frac{x}{a} + c$

13) $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$

2.អាំងតេក្រាលកំនត់ *(Definite Integrals)*

និយមន័យ (Definition)



តែអោយអនុគមន៏ $y=f(x)$ ជាប់លើអង្គត់ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $]a,b[$

-តែចែកអង្គត់ $[a,b]$ ជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស៊ុីតកំនត់ (x_i):

$a=x_0<x_1<x_2<.....<x_{n-1}<x_n=b$ ដែល $x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$ ហើយ

$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}\quad (i=0,1,2,3,.....,n)$

នោះ តែបាន ផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងទាំងអស់ គឺ :

$$S_n=(x_1-x_0).f(x_1)+(x_2-x_1).f(x_2)+.....+(x_n-x_{n-1}).f(x_n)$$

ដោយ $x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=.....=x_n-x_{n-1}=\dfrac{b-a}{n}=\Delta x$

$$\begin{aligned}S_n&=(x_1-x_0).f(x_1)+(x_2-x_1).f(x_2)+.....+(x_n-x_{n-1}).f(x_n)\\&=\Delta x.f(x_1)+\Delta x.f(x_2)+.....+\Delta x.f(x_n)\\&=(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+.....+f(x_n))\Delta x\\&=\Delta x\cdot\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\qquad \text{ដែល } x_k=a+k\frac{b-a}{n}\quad (k=1,2,3,4,.....)\end{aligned}$$

តែបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\Delta x=\int\limits_a^b f(x)dx$

តែកំនត់ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int\limits_a^b f(x)dx$ ហើយហៅថាអាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៏ f នៅលើអង្គត់ $[a,b]$ ។

ឧទាហរណ៍

ដោយប្រើនិយមន័យខាងលើ គណនា $I=\int_0^1 x^2dx$

គេយក $[0,1]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្ទីត $0=x_0<x_1<x_2<.....<x_{n-1}<x_n=1$

យើងបាន :

$x_i=0+i\frac{1-0}{n}=\frac{i}{n}$ ហើយ $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

ដូចនេះ $\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+.....+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+.....+n^2\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ ។

រូបមន្តញ៉ូតុន-លែបនីស (Newton-Leibniz)

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ដែល F ជាព្រីមីទីវនៃ f ។

លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំនត់ (Properties of Definite Integrals)

1) $\int_a^a f(x)dx=0$ ។

2) $\forall k\in\mathbb{R}\quad\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ ។

3) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ។

4) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\qquad(a<c<b)$ ។

5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

រូបមន្តអថេរជំនួយ (Formula by substitution)

បើ g ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក $]a,b[$ នោះ

$\int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b$ ដែល F ជាព្រីមីទីវនៃ f ។

រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក (Formula by parts)

បើ f និង g សុទ្ធតែជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក $]a,b[$ នោះ

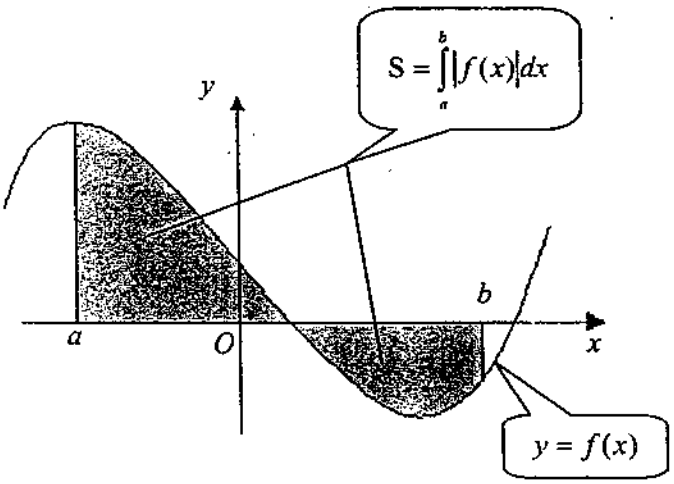
$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x).f'(x)dx$

ផ្ទៃក្រឡា (The Area)

១- ផ្ទៃក្រឡាកំនត់ដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៏ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើគេមានអនុគមន៏ $y = f(x)$ ដែលមានខ្សែកោង (c) ធៀបនឹងអ័ក្ស (ox) ហើយខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x = a$; $x = b$ ។ គេបាន ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់រវាងខ្សែកោង (c) និង (ox) ក្នុង $[a;b]$ គឺ

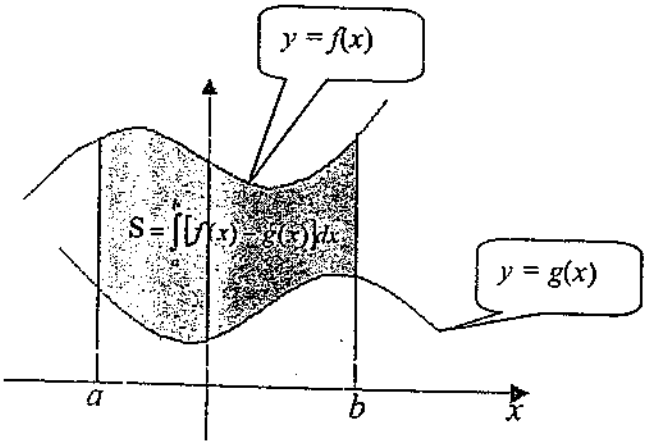
$S = \int_a^b |f(x)|dx$



២- ផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

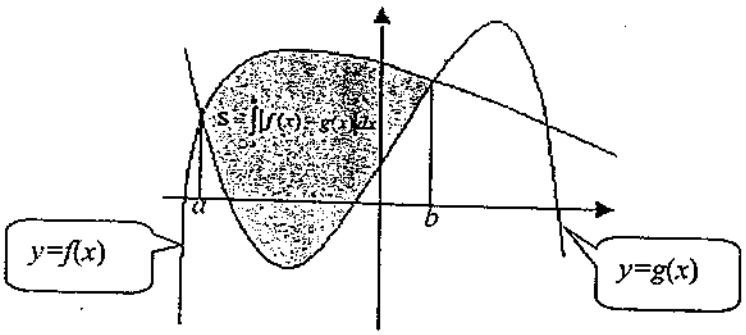
ប្រសិនបើមាន អនុគមន៍ ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរគឺ

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x=a$ និង $x=b$ នោះ គេបាន ផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោងទាំងពីរគឺ

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



ក្រណាត់ប្រវែងខ្សែកោង (The Length of Curve)

តាង L ជាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $f(x)$ ដែល $a \le x \le b$ ។

តាង $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

$P_0(x, f(x))$ និង $a \le x < x + \Delta x \le b$

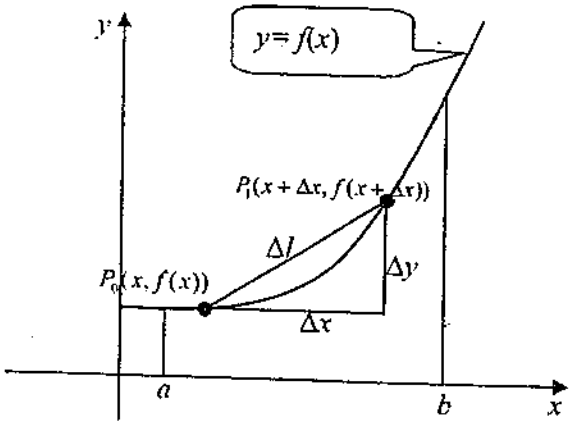
ប្រវែង $P_0P_1 = \Delta l$ ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយ

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x+\Delta x) - f(x)]^2}$$

ដោយតាង $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\Delta l = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)(\Delta x)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} \cdot \Delta x$$



$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

ប្រសិនបើយើងកំនត់ពី $x=a$ ទៅ $x=b$ យើងនឹងបាន ប្រវែង L ។

ដូចនេះ $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.dx$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

ប្រសិនបើ x និង y ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយចំរាំមែត្រ t ; $x=f(t)$ ហើយ $y=g(t)$ ដែល

$\alpha \le t \le \beta$ ដែល $a=f(\alpha)$, $b=g(\beta)$

នោះគេបានប្រវែងខ្សែកោងដូចខាងក្រោម :

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)^2}\,f'(t)dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$$ ។

សំគាល់

នៅក្នុងការគណនាយើងប្រើ

- Δx សំរាប់កំនើនកំនត់ (finite increment)
- dx សំរាប់កំនើនតូចបំផុត (infinitesimal increment)

ចំណូលដៅ

1) ប្រវែងខ្សែកោង L នៃអនុគមន៍ f ចំពោះ $a \le x \le b$ កំនត់ដោយ

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2) ប្រវែងខ្សែកោង L នៃ $x=f(t)$ និង $y=g(t)$ ចំពោះ $\alpha \le t \le \beta$ កំនត់ដោយ

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$$ ។

អាំងតេក្រាល

ជំពូកទី ២

លំហាត់

1. អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (*Indefinite Integrals*)

លំហាត់ទី 1: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ 2) $J=\int \frac{dx}{1-x^2}$

លំហាត់ទី 2: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $L=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $M=\int \frac{1}{1+x^2}dx$

លំហាត់ទី 3: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int x(x+1)^{2002}dx$ 2) $J=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ 3) $k=\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

លំហាត់ទី 4: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 2) $k=\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

លំហាត់ទី 5: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int\frac{1}{\sin x}dx$ 2) $J=\int\frac{dx}{\cos x}$ 3) $K=\int\frac{dx}{\cos^6 x}$

លំហាត់ទី 6: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

បង្ហាញថា $\int\frac{1}{(1+x^2)^n}dx=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ ។ រួចគណនា $\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}$ ។

លំហាត់ទី 7: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $\int x\sqrt{1+x}dx$ 2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1+\sqrt{1+x}}$ ។

លំហាត់ទី 8: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$ 2) $J=\int x^3 Arc\tan 3x dx$ 3) $K=\int\frac{Arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

លំហាត់ទី 9: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int\frac{dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}$ 2) $J=\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$ 3) $K=\int\frac{dx}{\sin^4 x.\cos^4 x}$

លំហាត់ទី 10: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx$ 2) $J=\int\frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{dx}{x}$ 3) $K=\int\frac{1}{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x}dx$ ។

លំហាត់ទី 11: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$I=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$ $J=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$ ។

លំហាត់ទី 12: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$I=\int\sin(\ln x)dx$ $J=\int\cos(\ln x)dx$ ។

លំហាត់ទី 13: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ $J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ ។

2. អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

លំហាត់ទី 14: និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់ (Definition of Definite Integrals)

ដោយប្រើនិយមន័យ ចូរគណនា :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+3^k+.....+n^k}{n^{k+1}}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+.....+\dfrac{1}{n+n}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\dfrac{n}{n^2+9}+....+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

លំហាត់ទី 15: និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់ (Definition of Definite Integrals)

គេមាន $u_n=\dfrac{1^2}{2^3+n^3}+\dfrac{2^2}{4^3+n^3}+.....+\dfrac{n^2}{(2n)^3+n^3}$

1) បង្ហាញថា $u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)$

2) គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

លំហាត់ទី 16: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx$ ។

2) $I_n=\int\limits_n^{n+a}\dfrac{\cos x}{x}dx,\ n\in\mathbb{N}$ បើយ $a>0$ បង្ហាញថា $|I_n|\le\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$ ។

3) គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$ ។

លំហាត់ទី 17: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

2) បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\leq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b g(x)dx$

លំហាត់ទី 18: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) ចូរបង្ហាញថា បើ $|x|\leq 1$ នោះ $\sqrt{1-x^2}\leq\sqrt{1-x^{2n}}$ $(n\geq 1)$

2) បង្ហាញថា $\frac{1}{2}\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\leq\frac{\pi}{6}$

លំហាត់ទី 19: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

បង្ហាញថា $-\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\leq\int_0^1\frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx\leq\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

លំហាត់ទី 20: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញថា $\frac{\pi}{6}\leq\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\leq\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

2) បង្ហាញថា $2\sqrt{2}<\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}<4$

3) បង្ហាញថា $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx\right|\leq\sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$

លំហាត់ទី 21: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញថា $\forall x \geq 0$ គេបាន $e^x \geq 1+x$ ។

2) បង្ហាញថា $\forall x \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}$ ។

3) បង្ហាញថា $\forall x \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $e \geq \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!}$ ។

លំហាត់ទី 22: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) ចូរស្រាយបញ្ជាក់បើគេមានពីរអនុគមន៍ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$

នោះគេបាន $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$ ។

2) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ ។

លំហាត់ទី 23: ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល (Intermediate Value Theorem)

1) ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល **(Intermediate Value Theorem)** :

បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានតំលៃ k មួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$

$(f(a) \leq k \leq f(b))$ នោះមានចំនួន $c \in [a,b]$ ដែល $f(c)=k$ ។

2) តំលៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល **(Mean Value Theorem for Integral)**

បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះមានចំនួន $c \in [a,b]$ ដែល $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$ ។

លំហាត់ទី 24: ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល (Intermediate Value Theorem)

ល្បឿនសំលេង $S(x)$ គិតជា $\frac{m}{s}$ មានសមីការ

$$S(x)=\begin{cases}-4x+341\ ,\ 0\le x\le 11{,}5\\ 295\qquad\ ,\ 11{,}5\le x\le 22\\ \frac{3}{4}x+278{,}5, 22\le x<32\\ \frac{3}{2}x+254{,}5\ ,\ 32\le x<50\\ -\frac{3}{2}x+404{,}5\ ,\ 50\le x\le 80\end{cases}$$ ដែល x គឺជាកំពស់គិតជា km

ចូរគណនាល្បឿនមធ្យមនៅលើចន្លោះ $[0,80]$

លំហាត់ទី 25: អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស (Integral of even and odd functions)

បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះ I ដែលមាន a , នោះ $\forall x$ នៅក្នុងចន្លោះ I យើងបាន :

$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$ ។ គណនា $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt\right)$ និង គណនាដេរីវេនៃ $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos t\,dt$

លំហាត់ទី 26: អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស (Integral of even and odd functions)

តែអោយ f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[-a,a]$ បង្ហាញថា :

1) បើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

2) បើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ $\int_{-a}^{a}f(x)dx-2\int_{0}^{a}f(x)dx$

ចូរគណនា $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x\cos x+\sin x\cos x)dx$ ។

លំហាត់ទី 27: អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស(Integral of even and odd functions)

1) បង្ហាញថា បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ជាអនុគមន៍គូ ។

2) បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ តើ $G(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសដែរឬទេ? ។

លំហាត់ទី 28: អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស(Integral of even and odd functions)

គេអោយ $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

1) បង្ហាញថា f ជា អនុគមន៍សេស ។

2) គណនា $f(\frac{\pi}{2})-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$ ។

លំហាត់ទី 29: សរាយបញ្ជាក់សមភាពអាំងតេក្រាល(Proof of Equalities)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t(t^2+1)}dt=1$, $\tan x>0$

លំហាត់ទី 30: សរាយបញ្ជាក់សមភាពអាំងតេក្រាល(Proof of Equalities)

គេអោយ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,b]$ ។ បង្ហាញថា $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx=\frac{b}{2}$ ។

រួចគណនា $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx$ ។

លំហាត់ទី 31: សរសេរបញ្ជាក់សមភាពអាំងតេក្រាល (Proof of Equalities)

1) បង្ហាញថា $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2) បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

3) បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

លំហាត់ទី 32: អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

គេអោយ $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{\sin x} & ,x>0 \\ n & ,x=0 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ តាង $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ ។

1) បង្ហាញថា $I_{2k+1} = I_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ ។

2) គណនា I_{2003} ។

លំហាត់ទី 33: អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

គណនា $I = \int_0^{2\pi} (|\sin x| + |\cos x|)dx$ ។

លំហាត់ទី 34: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយស៊ីត (u_n)កំនត់ដោយ $u_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$ និង $u_n=\frac{u_{n-1}-3}{2}$ $n\in\mathbb{N}$ ។

1) គេអោយ (v_n) ជាស៊ីតមួយកំនត់ដោយ $v_n=u_n+3$ ។ចូរបង្ហាញថា(v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និងកំនត់រេសុងរបស់វា។

2) រក v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

លំហាត់ទី 35: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយ $I_n=\int_0^1 x^n\sin\pi x dx$ $n\in\mathbb{N}$ ។

1) គណនា I_0 ។

2) បង្ហាញថា $I_n\geq I_{n+1}$ $n\in\mathbb{N}$ ។

3) បង្ហាញថា $I_{n+2}=\frac{1}{\pi}-\frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\cdot I_n$ ، $n\in\mathbb{N}$ ។

4) គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$ ។

លំហាត់ទី 36: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយ $I_{n,m}=\int_0^1 x^n.(1-x)^m dx$ ، $n,m\in\mathbb{N}$ ។

1) បង្ហាញថា $I_{n,m}=I_{m,n}$ ។ រួចគណនា $I_{1,5}$ ។

2) បង្ហាញថា $I_{n,m}=\frac{m}{n+1}\cdot I_{n+1,m-1}$ ، $n\geq 0$, $m\geq 1$ ។

3) គណនា $I_{n,m}$ ។

លំហាត់ទី 37: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តែអោយអនុគមន៏ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ និង ផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខ័ណ្ឌ $f(x)=f(2a-x)$ ចំពោះ $\forall \in \mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនថេរ ។

1) បង្ហាញថា $\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = 2a\int_{a}^{a+m} f(x)dx \quad (\forall m>0)$ ។

2) គណនា $\int_{0}^{\pi} x\sin x\cos^4 xdx$ ។

លំហាត់ទី 38: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តែអោយ f ជាអនុគមន៏ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

1) បង្ហាញថា $\int_{0}^{a} x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{a^2} xf(x)dx$ ។

2) គណនា $\int_{0}^{1} x^3 Arc\tan x^2 dx$ ។

លំហាត់ទី 39: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តែអោយ $I=\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x+m+2}}dx$ (m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ) ។

1) កំនត់ m ដើម្បី អោយមានអាំងតេក្រាល I ។

2) គណនា I ពេល $m>-1$ ។

លំហាត់ទី 40: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយ អាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n = \int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx$ $J_n = \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi} -e^{-x}\sin 2x dx$,$n \in \mathbb{N}$ ។

1) ចំពោះ $\forall n > 0$ បង្ហាញថា (I_n) និង (J_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ។

2) តាង $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} J_k$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$, $\lim_{n\to+\infty} T_n$ ។

លំហាត់ទី 41: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

1) បង្ហាញថា $\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

2) ពីលទ្ធផលខាងលើបង្ហាញថា :

a) $666,6 < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < 676$ ។

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right) = \frac{2}{3}$ $\left((10,049)^2 = 101\right)$ ។

លំហាត់ទី 42: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយស្ទីត (u_n) កំនត់ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}$

1) បង្ហាញថា $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 0$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃស្ទីត(u_n)

1) កំនត់ចំនួនពិតa ផ្សេងថ្នាត់ $\frac{1}{1+2x+4x^2} \le a$, $\forall x \in [0,1]$ ទាញរក $\lim_{n\to+\infty} u_n$

លំហាត់ទី 43: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តែអោយ $I_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ ។

1) គណនា I_n រួចបង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ ។

2) តែតាង $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots\ldots + I_n$ ។គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

លំហាត់ទី 44: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៏ដែលកំនត់ដោយ $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$ ។ គណនា $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ ។

លំហាត់ទី 45: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បើយើងកំនត់ I_n ដោយ $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)\cos nxdx$ ។

កំនត់តំលៃ $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ ។

លំហាត់ទី 46: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តាង a ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន។ បើ $0 \le t \le 1$ រកតំលៃអប្បបរមានៃអនុគមន៏ $\int_0^{\pi} (ax - t\sin x)^2 dx$ ។

លំហាត់ទី 47: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

កំនត់តំលៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃអនុគមន៍ $F(t)=\int_t^{t+\frac{\pi}{2}}|\sin 2x+2\cos x|dx$ ដែល $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី 48: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

រកតំលៃអតិបរមាធ្យើប និង អប្បបរមាធ្យើបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^3+3\int_0^1|\sqrt{t}-x|dt$ ។

លំហាត់ទី 49: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

រកតំលៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)=\int_1^e|\ln t-x|dt$ ដែល $x>0$

លំហាត់ទី 50: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

ចូរឆ្លើយសំនួរខាងក្រោម :

1) គណនា $\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x}dx$ ។

2) រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}\int_0^2\{f(t)-2\}tdt$ ។

លំហាត់ទី 51: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x)=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)dt$ ។

1) យក $a=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos t dt$ និង $b=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin t dt$ កំនត់ $f(x)$ ដោយប្រើ a, b, $\cos x$ និង $\sin x$ ។

2)គណនា $\int_0^{\pi}\cos t\sin t dt$, $\int_0^{\pi}\cos^2 t dt$, $\int_0^{\pi}\sin^2 t dt$ ។

3) រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

លំហាត់ទី 52: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

f ជាអនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 នៃ x ។ F ជាអនុគមន៍ កំនត់ដោយ $F(x)=\int_0^{x} f(\sin\theta)d\theta$ ចំពោះគ្រប់ x ។

ឧបមាថា $F(x)$ ជាអនុគមន៍ខូប ដែលមានខូបស្មើ 2π ហើយ $F(x)$ មានតំលៃបរមា (extremum)ស្មើនឹង $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ត្រង់ $x=\frac{\pi}{6}$ ។

រកអនុគមន៍ $F(x)$ និងតំលៃអតិបរមា និង អប្បបរមារបស់វា ។

លំហាត់ទី 53: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

ឆ្លើយនឹងសំនួរខាងក្រោម :

1) ចំពោះ $k\geq a>0$ គណនា $S=\int_0^{k}|a-x|e^{-x}dx$ ។

2)កំនត់តំលៃ $\lim_{k\to\infty} S$ ។(អ្នកអាចប្រើ $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ ដោយមិនបាច់ស្រាយបញ្ជាក់) ។

លំហាត់ទី 54: *អាំងតេក្រាលកំនត់* **(Definite Integrals)**

ស៊ីតេ $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx$ ដែល $n = 1, 2, 3, \cdots$ ។ កំនត់ $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ ។

លំហាត់ទី 55: *អាំងតេក្រាលកំនត់* **(Definite Integrals)**

ស៊ីតេ $\{A_n\}$ កំនត់ដោយ $A_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |k\tan x - \sin kx| dx$ ដែល $k = 1, 2, 3, \cdots$ ។

លំហាត់ទី 56: *អាំងតេក្រាលកំនត់* **(Definite Integrals)**

1) គណនាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ លើចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ។

2) គណនាប្រវែងនៃខ្សែកោង $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ $(-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3})$ ។

លំហាត់ទី 57: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

រកផ្ទៃក្រឡាកំនត់ដោយខ្សែកោង $y = f(x) = 4 - x^2$ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[-2, 2]$ ។

លំហាត់ទី 58: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

រកផ្ទៃក្រឡាកំនត់ដោយខ្សែកោង $y = -\sqrt{x-2}$ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[2, 6]$ ។

លំហាត់ទី 59: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយ ប៉ារ៉ាបូល $(p)\ y=x^2+2x$ និង បន្ទាត់ $(d)\ y=x+2$ ដោយខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x=-2$ និង $x=1$

លំហាត់ទី 60: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x^2-3x+2$ និងបន្ទាត់ $y=x-1,\ x=0,\ x=2$ ។

លំហាត់ទី 61: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ និង $y=x^4$ ។

លំហាត់ទី 62: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y=\sin^3 x$ និង $y=\cos^3 x$ នៅចន្លោះ $x=\frac{\pi}{4}$ និង $x=\frac{5\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី 63: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

កំនត់តំបន់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $C_1: y=\sin x\ (0\le x\le \pi)$ និង $C_2: y=\sin 3x\ (0\le x\le \pi)$ ។

លំហាត់ទី 64: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})-2$ ។

1) រកដែនកំនត់នៃ x ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌវិសមីការ $f(x)\le 0$

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x)$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

លំហាត់ទី 65: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=x\sqrt{8-x^{2}}$ ។

1) ពិនិត្យភាពកើន ចុះ និងតំលៃអប្បបរមាធ្យើប និងអតិបរមាធ្យើបនៃ $f(x)$ រួចសង់ក្រាបនៃ f ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x)$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

លំហាត់ទី 66: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយ $y=\frac{1}{2x-1}$, $y=\frac{2}{4x+1}$, $x=1$ និង $x=2$ ។

លំហាត់ទី 67: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

ពិនិត្យខ្សែកោង $y=\sin 2x$ និង $y=\cos x$ ដែល $0\le x\le \pi$ ។

1) រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងនេះ ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងនេះ ។

លំហាត់ទី 68: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y = e^{2x-1}$ និង l ជាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ចំនុច $P(1, e)$ ។

1) រកសមីការបន្ទាត់ l ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C បន្ទាត់ l និង អ័ក្សអរដោនេ ។

លំហាត់ទី 69: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y = xe^x$, l_1 និង l_2 ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ដែលកួសចេញពីចំនុច $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ។

1) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ដែលកាត់តាមចំនុច $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ។

2) រកផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ប៉ះដែលមាននៅក្នុងសំនួរទី 1 ។

លំហាត់ទី 70: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y = x\sin 2x$ កំនត់ចំពោះ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ។ ឧបមាថា l ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំនុច $(a, a\sin 2a)$ ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ហើយដែល l កាត់តាមគល់តំរុយ $O(0, 0)$ ។

1) រកសមីការបន្ទាត់ l ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ប៉ះ l ។

លំហាត់ទី 71: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C_1 និង C_2 ជាខ្សែកោងដែលកំណត់ដោយ $y = \sin x$ និង $y = 2\sin 2x$ រៀងគ្នា ។ បើ $0 \le x \le \pi$ រកក្រឡាផ្ទៃ S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C_1 និង C_2 ។

លំហាត់ទី 72: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

បើ $0 \le x \le 2\pi$ គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y = \sqrt{2}\sin x + 1$ និង $y = \sqrt{\cos 2x + 1}$ ។

លំហាត់ទី 73: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស អ័ក្សអរដោនេ និងខ្សែកោង $y = \cos x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ ។ បើខ្សែកោង $y = a\sin x$ $(a > 0)$ ចែក S ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នា នោះរកតំលៃនៃ a

លំហាត់ទី 74: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y = \sin x$ ដែល $x \ge 0$ និង l ជាបន្ទាត់ $y = mx$ ដែលកាត់ចំនុច $O(0, 0)$ និង $(\alpha, \sin\alpha)$ ដែល $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ។ ឧបមាថា S_1 ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង C និង l ដែល $0 \le x \le \alpha$ ដែល S_2 ផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង C, l និងបន្ទាត់ $x = \frac{\pi}{2}$ ដែល $x \ge \alpha$ ហើយដែល $S = S_1 + S_2$ ។

1) បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា S ជាអនុគមន៍នៃ α ។
2) រកតំលៃនៃ α ដែលធ្វើអោយ S អប្បបរមា ។

លំហាត់ទី 75: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = e^{-x}\sin x$ តាង a_n ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង $f(x)$ ចំពោះ $(n-1)\pi \le x \le n\pi$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

1) រកតួទូទៅនៃស៊ីគ្មង់ $\{a_n\}$ ។
2) កំនត់តំលៃ $\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}\right) \div \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ ។

លំហាត់ទី 76: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាស ដែលខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងខ្សែកោងខាងក្រោមលើបួង (xoy) ។

$x = 2\sqrt{2}\cos\theta, y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ ដែល $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី 77: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

ពិនិត្យខ្សែកោងដែលកំនត់ដោយ $x = 3t^2$ និង $y = 3t - t^3$ ដែល t ជាចំរ៉ាំម៉ែត្រ ។

1) សង់ក្រាបនៃខ្សែកោងនេះលើបួង (xoy) ។ (អ្នកអាចគូរវាដោយមិនចាច់កំនត់ភាពច្បោងរឺ ផត)

2) គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងនេះ ។

លំហាត់ទី 78: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

តាង C ជាខ្សែកោង លើបួង xy កំនត់ដោយ $x = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ និង $y = \sin(2t + \pi)$

ដែល t ជាចំរ៉ាំម៉ែត្រដែល $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

1) សង់ក្រាបនៃខ្សែកោង C ។

2) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ C ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះធំបំផុត ។

3) រកក្រឡាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះដែលបង្ហាញក្នុងសំនួរទី 2 និង ពីរបន្ទាត់ $x = \sqrt{2}$ និង $x = -\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី 79: *ការគណនាមាឌ* (Calculating Volume)

ឧបមាថា $a > 1$ និង $x \geq 0$ តាង $V(a)$ ជាមាឌសូលីតដែលបង្កើតឡើងដោយការបង្វិលផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌ ដោយបន្ទាត់ $y = ax$, $y = \frac{x}{a}$ និងខ្សែកោង $y = \frac{1}{ax}$ ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។រកតំលៃអតិបរមានៃ $V(a)$ ។

លំហាត់ទី 80: *ការគណនាមាឌ* (Calculating Volume)

ឧបមាថា $a > 0$ និង $b > 0$ តាង S ជាតំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y = x^2 - ax + 4$ និង $y = -x^2 + bx + 4$ ។

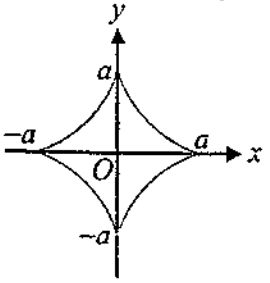
1) រកលក្ខខណ្ឌដែលធ្វើអោយ S គ្មានចំនុចរួមជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។
2) ពេល S គ្មានចំនុចរួមជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសគណនាមាឌ V នៃសូលីតដែលបង្កើតឡើងដោយការបង្វិល S ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសដោយប្រើ a និង b ។

លំហាត់ទី 81: *ការគណនាមាឌ* (Calculating Volume)

រកក្រឡាផ្ទៃខាង S នៃស្វ៊ែដែលមានកាំ r ។

លំហាត់ទី 82: *ការគណនាមាឌ* (Calculating Volume)

រូបដែលបង្ហាញនៅខាងស្តាំហៅថា "asteroid" និងបង្ហាញដោយ សមីការ : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ ។
រកក្រឡាផ្ទៃខាង S នៃសូលីតដែលបង្កើតឡើងដោយការបង្វិល asteroid ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។



ប្រវត្តិអក្សរសាស្ត្រ

ភាគទី ៣

ចំណេះ

1. អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

លំហាត់ទី 1: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ 2) $J=\int\frac{dx}{1-x^2}$

ចំណើយ

1) $I=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

តាង $t=\sin x+\cos x\Rightarrow dt=(\cos x-\sin x)dx$

$\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos x-\sin x}$

$I=\int\frac{\cos x-\sin x}{t}\cdot\frac{dt}{\cos x-\sin x}$

$=\int\frac{1}{t}dt$

$=\ln|t|+c$

$=\ln|\sin x+\cos x|+c$

រូបមន្ត

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

ដូចនេះ $J=\ln|\sin x+\cos x|+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2) $J=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx$

តាង $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$

$\Rightarrow dx=-dt$

តាង $u=1+x\Rightarrow du=dx$

$J=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}(-dt)$

រូបមន្ត

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

$$=\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|t|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|1-x|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$$

ដូចនេះ $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 2: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $L=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $M=\int\frac{1}{1+x^2}dx$

ចំលើយ

1) $L=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

តាង $x=\sin t$ ដែល $(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ នោះ $dx=\cos t dt$, $(t=Arc\sin x)$

$$L=\int\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt$$
$$=\int\frac{\cos t}{\cos t}dt$$
$$=\int dt$$
$$=t+c$$
$$=Arc\sin x+c$$

ដូចនេះ $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=Arc\sin x+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2) $M=\int\frac{1}{1+x^2}dx$

តាង $x=\tan t$ ដែល $(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ នោះ $dx=(1+\tan^2 t)dt$, $(t=Arc\tan x)$

$$M = \int \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t} dt$$
$$= \int dt$$
$$= t + c$$
$$= Arc\tan x + c$$

ដូចនេះ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = Arc\tan x + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ពីធី 3: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I = \int x(x+1)^{2002} dx$ 2) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ 3) $k = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

ចំលើយ

1) $I = \int x(x+1)^{2002} dx$

$$I = \int (x+1-1)(x+1)^{2002} dx$$
$$= \int (x+1)^{2003} dx - \int (x+1)^{2002} dx$$

តាង $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$

$$I = \int t^{2003} dt - \int t^{2002} dt$$
$$= \frac{1}{2003+1} t^{2003+1} - \frac{1}{2002+1} t^{2002+1} + c$$
$$= \frac{1}{2004}(x+1)^{2004} - \frac{1}{2003}(x+1)^{2003} + c$$

ដូចនេះ $I = \int x(x+1)^{2002} dx = \frac{1}{2004}(x+1)^{2004} - \frac{1}{2003}(x+1)^{2003} + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

រូបមន្ត

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

2) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

តាង $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int \frac{2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} dx$$
$$J = 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= 2Arc\sin t + c$$
$$= 2Ar\sin\sqrt{x} + c$$

ដូចនេះ $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2Arc\sin\sqrt{x}+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

3) $K=\int\frac{1}{a^2-x^2}dx$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{x+a-x+a}{(a-x)(a+x)}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{x+a}{(a-x)(a+x)}dx+\int\frac{a-x}{(a-x)(a+x)}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{(a-x)}dx+\int\frac{1}{(a+x)}dx\right)$$

តាង $u=a-x\Rightarrow du=-dx$

$t=a+x\Rightarrow dt=dx$

$$I=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{-du}{u}+\int\frac{dt}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}(-\ln|u|+\ln|t|)+c$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t}{u}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

ដូចនេះ $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 4: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 2) $k=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

ចំណើយ

1) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

តាង $x=\frac{a}{\sin t}\Rightarrow dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$

$$I=\int\frac{-a\cos t}{\sin^2 t\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}}dt$$

$$= -a\int \frac{\cos t \sin t}{a\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}}dt$$

$$= -\int \frac{1}{\sin t}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)}{1-\cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)}\right| + c$$

ដូចនេះ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)}{1-\cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)}\right| + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2) $J = \int \sqrt{a^2-x^2}dx$

តាង $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$

$$J = \int \sqrt{a^2-(a\sin t)^2} \times a\cos t dt$$

$$= a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t} \times \cos t dt$$

$$= a^2\int \cos^2 t dt$$

$$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\sin 2Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\sin 2Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c$$

ដូចនេះ $J = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{4}\left(Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\sin 2Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c$

លំហាត់ទី 5: អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ (Indefinite Integrals)

គណនា អាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I = \int \frac{1}{\sin x}dx$ 2) $J = \int \frac{dx}{\cos x}$ 3) $K = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$

ចំលើយ

1) $I = \int \frac{1}{\sin x}dx$

$$= \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c$$

ដូចនេះ $I = \int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2) $J = \int \frac{dx}{\cos x}$

$$J = \int \frac{1}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$$

ដូចនេះ $J = \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$

3) $K = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \times \left(\frac{1}{\cos^4 x} \right) dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^2 \times \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (1+2\tan^2 x + \tan^4 x) \times \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

ដូចនេះ $K = \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 6: អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ (Indefinite Integrals)

បង្ហាញថា $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ ។ រួចគណនា $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ ។

ចំលើយ

➢ បង្ហាញថា $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$$

តាង $u = x$ នោះ $du = dx$

$dv = \frac{x}{(1+x^2)^n}dx$ នោះ $v = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx = -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(1-x^2)^n}$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(1-x^2)^n}$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \left(\frac{1}{2(1-n)}+1\right)\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \left(\frac{1+2-2n}{2(1-n)}\right)\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

ដូចនេះ $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$

➢ គណនា $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

តាមការស្រាយបញ្ជាក់ខាងលើ យើងបាន :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{2(3-1)(1+x^2)^{3-1}} + \frac{2.3-3}{2(3-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3-1}}$$

$$= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{2.2-3}{2(2-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{2-1}}\right]$$

$$= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)}$$

$$=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3}{8}Arc\tan x+c$$

ដូចនេះ $\int\frac{1}{(1+x^2)^3}dx=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3}{8}Arc\tan x+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ពិធី 7: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $\int x\sqrt{1+x}dx$ 2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1+\sqrt{1+x}}$ ។

ចំលើយ

1) $I=\int x\sqrt{1+x}dx$

តាង $t^2=1+x\Rightarrow 2tdt=dx$

$t^2=1+x\Rightarrow x=t^2-1$

$I=\int 2t^2(t^2-1)dt$

$=2\int(t^4-t^2)dt$

$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+c$

$=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+c$

$=\frac{2}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x}-\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+c$

$=\frac{2}{15}(1+x)\sqrt{1+x}(3x+3-5)+c$

$=\frac{2}{15}(1+x)\sqrt{1+x}(3x-2)+c$

ដូចនេះ $I=\frac{2}{15}(1+x)\sqrt{1+x}(3x-2)+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2) $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1+\sqrt{1+x}}$

$J=\int\frac{1}{\sqrt{x}+1+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}dx$

$=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(\sqrt{x}+1)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}dx$,

$$=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{x+2\sqrt{x}+1-1-x}dx$$

$$=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$$

➢ $\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$

តាង $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ។ $t^2=x\Rightarrow\sqrt{t^2+1}=\sqrt{x+1}$

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}dx=\int\sqrt{1+t^2}dt$$

តាង $t=\tan\alpha\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$ ដែល $(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}dx=\int\sqrt{1+t^2}dt$$

$$=\int\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$=\int\frac{1}{\cos^3\alpha}d\alpha$$

$$=\int\frac{\cos\alpha}{\cos^4\alpha}d\alpha$$

$$=\int\frac{\cos\alpha}{\cos^4\alpha}d\alpha$$

$$=\int\frac{\cos\alpha}{(1-\sin^2\alpha)^2}d\alpha$$

តាង $s=\sin\alpha\Rightarrow ds=\cos\alpha d\alpha$

$$\int\sqrt{1+t^2}dt=\int\frac{\cos\alpha}{(1-\sin^2\alpha)^2}d\alpha=\int\frac{ds}{(1-s^2)^2}$$

ដោយ $1=(1-s^2)^2+s^2(1-s^2)+s^2$

$$\int\frac{\cos\alpha}{(1-\sin^2\alpha)^2}d\alpha=\int\frac{ds}{(1-s^2)^2}$$

$$=\int\frac{(1-s^2)^2+s^2(1-s^2)+s^2}{(1-s^2)^2}ds$$

$$=\int ds+\int\frac{s^2}{(1-s^2)}ds+\int\frac{s^2}{(1-s^2)^2}ds$$

$$= \int ds + \int \frac{s^2 - 1 + 1}{(1-s^2)} ds + \int \frac{s^2}{(1-s^2)^2} ds$$

$$= \int ds - \int ds + \int \frac{1}{(1-s^2)} ds + \int \frac{s^2}{(1-s^2)^2} ds$$

$$= \int \frac{1}{(1-s^2)} ds + \int \frac{s^2}{(1-s^2)^2} ds$$

តាង $u = s \Rightarrow du = ds$

$$dv = \frac{s}{(1-s^2)^2} ds \Rightarrow v = \frac{1}{2(1-s^2)}$$

$$= \int \frac{1}{(1-s^2)} ds + \frac{s}{2(1-s^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-s^2)} ds$$

$$= \frac{s}{2(1-s^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-s^2)} ds$$

$$= \frac{s}{2(1-s^2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right| + c$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2(1-\sin^2\alpha)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \right| + c$$

$$= \frac{\sin(Arc\tan t)}{2\cos^2(\arctan t)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin(Arc\tan t)}{1-\sin(Arc\tan t)} \right| + c$$

$$= \frac{\sin(Arc\tan\sqrt{x})}{2\cos^2(\arctan\sqrt{x})} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin(Arc\tan\sqrt{x})}{1-\sin(Arc\tan\sqrt{x})} \right| + c$$

ដូចនេះ $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \frac{\sin(Arc\tan\sqrt{x})}{2\cos^2(\arctan\sqrt{x})} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin(Arc\tan\sqrt{x})}{1-\sin(Arc\tan\sqrt{x})} \right| + c$

(c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 8: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I = \int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$ 2) $J = \int x^3 Arc\tan 3x dx$ 3) $K = \int \frac{Arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

ចំណើយ

1) $I = \int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$

តាង $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv=\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx \Rightarrow v=-\frac{1}{\sin x}$

$I=x\left(-\frac{1}{\sin x}\right)+\int\frac{dx}{\sin x}$

$=-\frac{x}{\sin x}+\int\frac{dx}{\sin x}$

$=-\frac{x}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c$ $\left(\text{តាមសំរាយខាងលើ } \int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c\right)$

ដូចនេះ $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{x}{\sin x}+c$

2) $J=\int x^3 Arc\tan 3x dx$

តាង $Arc\tan 3x=u \Rightarrow du=\frac{3}{1+(3x)^2}dx$

$x^3dx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{4}x^4$ យើងបាន :

$J=\frac{1}{4}x^4 Arc\tan 3x+\frac{1}{4}\int\frac{3x^4}{1+(3x)^2}dx$

$=\frac{x^4 Arc\tan 3x}{4}-\frac{1}{4.3^3}\int\frac{(3x)^4+1-1}{1+(3x)^2}dx$

$=\frac{x^4 Arc\tan 3x}{4}-\frac{1}{108}\left[\int\frac{(3x)^4-1}{1+(3x)^2}dx+\int\frac{1}{1+(3x)^2}dx\right]$

$=\frac{x^4 Arc\tan 3x}{4}-\frac{1}{108}\left[\int\frac{1}{1+(3x)^2}dx+\int\left[(3x)^2-1\right]dx\right]$

$=\frac{x^4 Arc\tan 3x}{4}-\frac{1}{108}\left[\frac{1}{3}Arc\tan 3x+3x^3-x\right]+c$

$=\frac{x^4 Arc\tan 3x}{4}-\frac{1}{324}Arc\tan 3x-\frac{1}{36}x^3-\frac{1}{108}x+c$

ដូចនេះ $J=\frac{x^4 Arc\tan 3x}{4}-\frac{1}{324}Arc\tan 3x-\frac{1}{36}x^3-\frac{1}{108}x+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

3) $K=\int\frac{Arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

តាង $u=Arc\sin\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{1-x}\right)}dx$

$dv=\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \Rightarrow v=-2\sqrt{1-x}$

$K=-2\sqrt{1-x}Arc\sin\sqrt{x}+2\int\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$

$=-2\sqrt{1-x}Arc\sin\sqrt{x}+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=-2\sqrt{1-x}Arc\sin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$

ដូចនេះ $K = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}Arc\sin\sqrt{x} + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 9: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ 2) $J = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$ 3) $K = \int \frac{dx}{\sin^4 x.\cos^4 x}$

ចំណេះ

1) $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \int \frac{dx}{\cos 2x}$

$= \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 2x} dx$

$= \int \frac{\cos 2x}{1 - \sin^2 2x} dx$

តាង $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx$ ឬ $\frac{dt}{2} = \cos 2x dx$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t^2)}$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right| + c$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right| + c$

2) $J = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$

$= \int \frac{\sin x(1+\sin^2 x)}{2\cos^2 x - 1} dx$

$= \int \frac{\sin x(1+1-\cos^2 x)}{2\cos^2 x - 1} dx$

$= \int \frac{\sin x(2-\cos^2 x)}{2\cos^2 x - 1} dx$

តាង $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$J = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-1-3}{2t^2-1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{2t^2-1}{2t^2-1}dt-\int\frac{3}{2t^2-1}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left|\frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right|\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right|\right)+c$$

ដូចនេះ $J=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right|\right)+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

3) $K=\int\frac{dx}{\sin^4 x.\cos^4 x}$

$$=\int\frac{16}{16\sin^4 x.\cos^4 x}dx$$

$$=\int\frac{16}{\sin^4 2x}dx$$

$$=16\int\frac{1+\cot g^2 2x}{\sin^2 2x}dx$$

$$=16\left(\int\frac{1}{\sin^2 2x}dx+\int\frac{\cot g^2 2x}{\sin^2 2x}dx\right)$$

$$=8\left(\int\frac{2dx}{\sin^2 2x}+\int\frac{2\cot g^2 2x}{\sin^2 2x}dx\right)$$

$$=-8\cot g2x+8\int\frac{2\cot g^2 2x}{\sin^2 2x}dx$$

តាង $u=\cot g2x\Rightarrow du=-\frac{2}{\sin^2 2x}dx$ ឬ $-du=\frac{2}{\sin^2 2x}dx$

$$K=-8\cot g2x+8\int\frac{2\cot g^2 2x}{\sin^2 2x}dx$$

$$= -8\cot g2x - 8\int u^2 du$$

$$= -8\cot g2x - \frac{8u^3}{3} + c$$

$$= -8\cot g2x - 8\frac{\cot g^3 2x}{3} + c$$

ដូចនេះ $\int \frac{dx}{\sin^4 x.\cos^4 x} = -\frac{1}{3}\left(24\cot g2x + 8\cot g^3 2x\right) + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 10: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1) $I = \int\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx$ 2) $J = \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}.\frac{dx}{x}$ 3) $K = \int \frac{1}{a^2\sin^2 x - b^2\cos^2 x}dx$ ។

ចំណើយ

1) $I = \int\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx$

$$= \int \frac{1}{\ln^2 x}dx - \int \frac{1}{\ln x}dx$$

➢ $\int \frac{1}{\ln x}dx$ តាង $u = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x\ln^2 x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int \frac{1}{\ln x}dx = x\cdot\frac{1}{\ln x} + \int x\cdot\frac{dx}{x\ln^2 x}$$

$$= \frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln^2 x}$$

$$I = \int \frac{1}{\ln^2 x}dx - \frac{x}{\ln x} - \int \frac{1}{\ln^2 x}dx = -\frac{x}{\ln x} + c$$

ដូចនេះ $I = \int\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = -\frac{x}{\ln x} + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2) $J = \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}.\frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln 4 + \ln x}.\frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{\ln 4 + \ln x - \ln 2}{\ln 4 + \ln x}.\frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\ln 2}{\ln 4 + \ln x}.\frac{dx}{x}$$

$$= \ln|x| - \ln 2\int \frac{1}{\ln 4 + \ln x}.\frac{dx}{x}$$

តាង $t = \ln 4 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$ យើងបាន :

$$J = \ln|x| - \ln 2 \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \ln|x| - \ln 2.\ln|t| + c$$

$$= \ln|x| - \ln 2.\ln(\ln 4 + \ln x) + c$$

$$= \ln|x| - \ln 2.\ln(\ln 4x) + c$$

ដូចនេះ $J = \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x} = \ln|x| - \ln 2.\ln(\ln 4x) + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

3) $K = \int \frac{1}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{1}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\cos^2 x \left(\tan^2 x - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

តាង $u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$K = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{b}{a}} \ln \left| \frac{\frac{b}{a} - u}{\frac{b}{a} + u} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b - au}{b + au} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b - a\tan x}{b + a\tan x} \right| + c$$

ដូចនេះ $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b - a\tan x}{b + a\tan x} \right| + c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 11: អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \qquad J = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$$ ។

ចំលើយ

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx \qquad J=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$$

យើងយក

$$\begin{cases} I-J=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int dx & (1)\\ I+J=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx & (2) \end{cases}$$

យើងយក (1)+(2) យើងបាន :

$$\begin{aligned} 2I&=\int dx+\int\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx\\ &=\int dx+\int\frac{1}{\cos 2x}dx\\ &=x+\int\frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx\\ &=x+\frac{1}{2}\int\frac{2\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx \end{aligned}$$

តាង $u=\sin 2x\Rightarrow du=2\cos 2xdx$

$$\begin{aligned} 2I&=x+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u^2}\\ &=x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+c\\ &=x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|+c\\ I&=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|+c \end{aligned}$$

ដោយ $I-J=\int dx\Rightarrow J=I-\int dx$

$$\begin{aligned} J&=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|-\int dx+c\\ &=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|-x+\frac{x}{2}+c\\ &=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|-\frac{x}{2}+c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|+c \qquad J=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right|-\frac{x}{2}+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 12: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់(Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$I=\int \sin(\ln x)dx$ $J=\int \cos(\ln x)dx$ ។

ចំលើយ

$I=\int \sin(\ln x)dx$ $J=\int \cos(\ln x)dx$

➢ $I=\int \sin(\ln x)dx$

តាង $u=\sin(\ln x)\Rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

$I=x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-J$ (1)

➢ $J=\int \cos(\ln x)dx$

តាង $t=\cos(\ln x)\Rightarrow dt=-\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln x)dx$

$ds=dx\Rightarrow s=x$

$J=x\cos(\ln x)+\int \sin(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+I$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$\begin{cases} I=x\sin(\ln x)-J & (1)\\ J=x\cos(\ln x)+I & (2)\end{cases}$

យើងយក (1)−(2)

$I=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-I$

$2I=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)$

$I=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+c$

$J=x\cos(\ln x)+\frac{x}{2}\sin(\ln x)-\frac{x}{2}\cos(\ln x)+c$

$=\frac{x}{2}\sin(\ln x)+\frac{x}{2}\cos(\ln x)+c$

ដូចនេះ $I=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+c$, $J=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right)+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

លំហាត់ទី 13: អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite Integrals)

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \qquad J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

ចំលើយ

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \qquad J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

យើង យក

$$\begin{cases} I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx & (1)\\ J-I=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx & (2)\end{cases}$$

យើងយក $(1)+(2)$ យើងបាន

$$2J=\int dx+\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=x+\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

តាង $t=\cos x+\sin x\Rightarrow dt=(\cos x-\sin x)dx$

$$\begin{aligned}2J&=x+\int\frac{dt}{t}\\&=x+\ln|t|+c\\&=x+\ln|\cos x+\sin x|+c\end{aligned}$$

$$J=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+c$$

ដោយ $I+J=\int dx$ នោះ

$$I+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|=\int dx$$

$$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+c \quad (c \text{ ជាចំនួនថេរ})$$

ដូចនេះ $I=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+c,\ J=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+c$ (c ជាចំនួនថេរ)

2. អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

លំហាត់ទី 14: *និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់* **(Definition of Definite Integrals)**

ដោយប្រើនិយមន័យ ចូរគណនា :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+3^k+.....+n^k}{n^{k+1}}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+.....+\dfrac{1}{n+n}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\dfrac{n}{n^2+9}+....+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

ចំលើយ

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+3^k+.....+n^k}{n^{k+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1^k+2^k+3^k+.....+n^k}{n^k}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^k+\left(\dfrac{2}{n}\right)^k+\left(\dfrac{3}{n}\right)^k+.....+\left(\dfrac{n}{n}\right)^k\right)$

បើយើងយក អង្គត់$[0,1]$ចែកជាn ចន្លោះស្មើៗគ្នាដោយស្វ៊ីតកំនត់ $\{x_i\}$ នោះយើងបាន :

➢ $x_0=0+0\cdot\dfrac{1-0}{n}=0\,,x_1=0+1\cdot\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}\,,.....,x_n=0+n\cdot\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{n}{n}$

ដូចនេះ $\left(\dfrac{1}{n}\right)^k+\left(\dfrac{2}{n}\right)^k+\left(\dfrac{3}{n}\right)^k+.....+\left(\dfrac{n}{n}\right)^k=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^k=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^k$

➢ $\Delta x=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^k+\left(\dfrac{2}{n}\right)^k+\left(\dfrac{3}{n}\right)^k+.....+\left(\dfrac{n}{n}\right)^k\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^k\cdot\Delta x\quad,\quad\left[f(x_i)=\dfrac{i}{n}=x_i\right]$

$=\int\limits_0^1(x)^k\,dx$

$=\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1$

$$=\frac{1}{k+1}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+.....+n^k}{n^{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1}$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+.....+\frac{1}{n+n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+.....+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)}+.....+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right]$$

បើយើងយក អង្គត់$[0,1]$ចែកជាn ចន្លោះស្មើគ្នាដោយស្វ៊ីតកំនត់ $\{x_i\}$ នោះយើងបាន :

➢ $x_0=0+0\cdot\frac{1-0}{n}=0$, $x_1=0+1\cdot\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$, ..., $x_n=0+n\cdot\frac{1-0}{n}=\frac{n}{n}$

ហើយ $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)}+.....+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+.....+\frac{1}{1+x_n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\cdot\Delta x$$

ដូចនេះ យើងបាន :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+.....+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\cdot\Delta x \qquad \left[f(x_k)=\frac{1}{1+x_k}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\ln 2$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+.....+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+....+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} + \frac{n}{n^2\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)} + \frac{n}{n^2\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)} + \ldots + \frac{n}{n^2\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)} + \frac{1}{n\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)} + \frac{1}{n\left(1+\left(\frac{3}{n}\right)^2\right)} + \ldots + \frac{1}{n\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)} + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)} + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{3}{n}\right)^2\right)} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)} \right)$$

បើយើងយក អង្គត់[0,1]ចែកជាn ចន្លោះស្មើគ្នាដោយស្វ័តកំនត់ $\{x_i\}$ នោះយើងបាន :

➢ $x_0 = 0 + 0 \cdot \frac{1-0}{n} = 0$, $x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, ..., $x_n = 0 + n \cdot \frac{1-0}{n} = \frac{n}{n}$

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)} + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)} + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{3}{n}\right)^2\right)} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\left(1+(x_1)^2\right)} + \frac{1}{\left(1+(x_2)^2\right)} + \frac{1}{\left(1+(x_2)^2\right)} + \ldots + \frac{1}{\left(1+(x_n)^2\right)} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x \qquad \left(f(x_k) = \frac{1}{1+x_k^2} \right)$$

$$= \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= Arc\tan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$

លំហាត់ទី 15: *និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់* **(Definition of Definite Integrals)**

តែមាន $u_n = \frac{1^2}{2^3+n^3} + \frac{2^2}{4^3+n^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n^2}{(2n)^3+n^3}$

1) បង្ហាញថា $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

2) គណនា $\lim_{n\to\infty} u_n$

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

$$u_n=\frac{1^2}{2^3+n^3}+\frac{2^2}{4^3+n^3}+.....+\frac{n^2}{(2n)^3+n^3}$$

$$=\frac{1^2}{n^3\left(\frac{2^3}{n^3}+1\right)}+\frac{2^2}{n^3\left(\frac{4^3}{n^3}+1\right)}+\frac{3^2}{n^3\left(\frac{6^3}{n^3}+1\right)}+.....+\frac{n^2}{n^3\left(\frac{(2n)^3}{n^3}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n\left(\left(\frac{2}{n}\right)^3+1\right)}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{n\left(\left(\frac{4}{n}\right)^3+1\right)}+\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{n\left(\left(\frac{6}{n}\right)^3+1\right)}+.....+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{n\left(\left(\frac{2n}{n}\right)^3+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{n\left(8\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+1\right)}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{n\left(8\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3+1\right)}+\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{n\left(8\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^3+1\right)}+.....+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{n\left(8\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^3+1\right)}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\left(8x_i^3+1\right)} \qquad \left(x_i=\frac{i}{n},\ i=1,2,3,.....\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \qquad \left(f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{x_i^2}{\left(8x_i^3+1\right)}\right)$$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ $\left(f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{x_i^2}{\left(8x_i^3+1\right)}\right)$

2) គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

បើយើងយក អង្គត់$[0,1]$ចែកជាn ចន្លោះស្មើគ្នាដោយស្វ័តកំនត់ នោះយើងបាន :

$$x_0=0+0\cdot\frac{1-0}{n}=0\ ,x_1=0+1\cdot\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}\ ,.....,x_n=0+n\cdot\frac{1-0}{n}=\frac{n}{n}$$

ហើយ $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

ដូច្នេះ

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\Delta x$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}dx$$

តាង $u = 8x^3+1 \Rightarrow du = 24x^2dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 9$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{24x^2}{8x^3+1}dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_1^9 \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{24}\ln|u|\Big|_1^9$$

$$= \frac{1}{24}(\ln 9 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{24}\cdot \ln 9$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{24}\cdot \ln 9$ ។

015

លំហាត់ទី 16: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ ។

2) $I_n = \int_n^{n+a} \frac{\cos x}{x}dx$, $n \in \mathbb{N}$ ហើយ $a > 0$ បង្ហាញថា $|I_n| \le \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ ។

3) គណនា $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

យើងមាន $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty}(f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n))\Delta x$$

ដោយ $|f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n)| \le |f(x_1)|+|f(x_2)|+.....+|f(x_n)|$

$$|f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n)|\Delta x \le (|f(x_1)|+|f(x_2)|+.....+|f(x_n)|)\Delta x \ (\Delta x=\frac{b-a}{n}>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n)|\Delta x \le \lim_{n\to\infty}|f(x_1)|+|f(x_2)|+.....+|f(x_n)|\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right|\cdot\Delta x \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|\cdot\Delta x$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

ដូចនេះ បើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ ។

b) $I_n=\int_n^{n+a}\frac{\cos x}{x}dx,\ n\in\mathbb{N}$ ហើយ $a>0$ បង្ហាញថា $|I_n|\le \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$

$$|I_n|=\left|\int_n^{a+n}\frac{\cos x}{x}dx\right| \le \int_n^{n+a}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx \le \int_n^{n+a}\left|\frac{1}{x}\right|dx \le \int_n^{a+n}\frac{1}{x}dx \quad (|\cos x|\le 1, x>0)$$

$$|I_n| \le \ln x\Big|_n^{n+a} = \ln(n+a)-\ln n = \ln\left(\frac{n+a}{n}\right)$$

ដូចនេះ $|I_n|\le \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$

c) គណនា $\lim_{n\to+\infty} I_n$

$$|I_n| \le \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

$$-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \le I_n \le \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty} I_n \le \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} I_n \le 0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

លំហាត់ទី 17: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

2) បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\le g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

ចំលើយ

1) បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

យើងយកអង្គត់ $[a,b]$ ចែកជា n ចន្លោះស្មើគ្នាជាស៊ុីគកំនត់ $a=x_0<x_1<.....<x_{n-1}<x_n=b$

ហើយមានប្រវែង $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,3,.....)$

នោះ យើងបាន ផលបូកនៃក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកែងនិមួយៗ គឺ

$$S_n=\Delta x.f(x_1)+\Delta x.f(x_2)+.....+\Delta x\,f(x_n)$$
$$=(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+.....+f(x_n))\Delta x$$

ដោយ $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$ នោះ $f(x_1)\geq 0$, $f(x_2)\geq 0$, ..., $f(x_n)\geq 0$

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+.....+f(x_n)\geq 0$$
$$(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+.....+f(x_n))\Delta x\geq 0 \qquad (\Delta x>0)$$
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\geq 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\geq 0$$
$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

2) បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\leq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

តាង $h(x)=g(x)-f(x)\geq 0$ $(f(x)\leq g(x))$

នោះ $\int_a^b h(x)dx\geq 0$ (តាមលំហាត់ទី4.1)

$$\int_a^b (g(x)-f(x))dx\geq 0$$
$$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\geq 0$$
$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

ដូចនេះ បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\leq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

លំហាត់ទី 18: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) ចូរបង្ហាញថា បើ $|x|\le 1$ នោះ $\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-x^{2n}}$ $(n\ge 1)$

2) បង្ហាញថា $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}$

ចំលើយ

1) ចូរបង្ហាញថា បើ $|x|\le 1$, $\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-x^{2n}}$ $(n\ge 1)$

បើ $|x|\le 1$ នោះ $x^{2n}\le x^2$

$$-x^2\le -x^{2n}$$
$$1-x^2\le 1-x^{2n}$$
$$\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-x^{2n}}$$

ដូចនេះ $|x|\le 1$ នោះ $\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-x^{2n}}$

2) បង្ហាញថា $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}$

តាមសំរាយខាងលើ យើងបាន :

$$\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-x^{2n}}\le 1$$
$$1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\left[Arc\sin x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le Arc\sin\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx\le\frac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី 19: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

បង្ហាញថា $-\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

ចំលើយ

បង្ហាញថា $-\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

យើងមាន $|a\cos x+b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$|au+bv| \le \sqrt{(a^2+b^2)(u^2+v^2)}$

$$\left|\frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}\right| \le \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}$$

$$-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1} \le \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1} \le \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}$$

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}dx \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}dx$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\left(Arc\tan x\right)_0^1 \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \sqrt{a^2+b^2}\left(Arc\tan x\right)_0^1$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\left(Arc\tan 1\right) \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \sqrt{a^2+b^2}\left(Arc\tan 1\right)$$

$$-\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$$

ដូចនេះ $-\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{x^2+1}dx \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$ ។

លំហាត់ទី 20: វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ (Inequality of Definite Integral)

1) បង្ហាញថា $\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \le \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

2) បង្ហាញថា $2\sqrt{2} < \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}} < 4$

3) បង្ហាញថា $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos x}dx\right| \le \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \le \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

$\forall x \in [0;1]$ យើងបាន :

$0 \le x^3 \le x^2$

$-x^2 \le -x^3 \le 0$

$4-x^2-x^2 \le 4-x^2-x^3 \le 4-x^2$

$\sqrt{4-2x^2} \le \sqrt{4-x^2-x^3} \le \sqrt{4-x^2}$

$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}dx$

$Arc\sin\frac{x}{2}\Big|_0^1 \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \frac{1}{\sqrt{2}} Ar\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1$

$Arc\sin\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \frac{1}{\sqrt{2}} Ar\sin\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

2) បង្ហាញថា $2\sqrt{2} < \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}} < 4$

$\forall x \in [3,7]$ យើងបាន :

$3 \le x \le 7$

$e < 3 \le x \le 7 < e^2$

$e < x < e^2$

$1 < \ln x < 2$

$1 < \sqrt{\ln x} < \sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{\ln x}} < 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_3^4 dx < \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx < \int_3^4 dx$

$\frac{7-3}{\sqrt{2}} < \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx < 7-3$

ដូចនេះ $2\sqrt{2} < \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx < 4$

3) បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos x}dx \le \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$

តាមវិសមភាព ***Cauchy*** យើងបាន :

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos x}dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt[4]{\cos x}\right)^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx$$

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\, dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\, dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos x}\, dx\right)^2 \le \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos x}\, dx \le \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}} = \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt[4]{\cos x}\right)^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos x}\, dx \le \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$ ។

លំហាត់ទី 21: *វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់* **(Inequality of Definite Integral)**

1) បង្ហាញថា $\forall x \ge 0$ គេបាន $e^x \ge 1+x$ ។

2) បង្ហាញថា $\forall x \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $e^x \ge 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}$ ។

3) បង្ហាញថា $\forall x \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $e \ge \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!}$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\forall x \geq 0$ យើងបាន $e^x \geq 1+x$

តាង $f(x)=e^x-x-1$

$f'(x)=e^x-1\geq 0 \quad \forall x\geq 0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើន $\forall x\geq 0$

យើងបាន $\forall x\geq 0 \quad f(x)\geq f(0)=0$

$f(x)=e^x-x-1\geq 0$

ហើយ $e^x\geq x+1$

ដូចនេះ $\forall x\geq 0$ យើងបាន $e^x\geq 1+x$

2) បង្ហាញថា $\forall x\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ យើងបាន :

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}$$

- បើ $n=0$ យើងបាន $e^x\geq 1$ ពិត ចំពោះ $\forall x\geq 0$
- បើ $n=1$ តាមសំនួរ $a)$ យើងបាន $e^x\geq 1+x$ ពិត ចំពោះ $\forall x\geq 0$

.....

.....

.....

- ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ :

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^k}{k!} \quad \forall x\geq 0 \qquad (*)$$

យើងនិងស្រាយថាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ :

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall x\geq 0$$

តាម $(*)$ យើងបាន :

$$e^t\geq 1+t+\frac{t^2}{2!}+.....+\frac{t^k}{k!} \qquad \forall t\geq 0$$

$$\int_0^x e^t dt\geq \int_0^x\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+.....+\frac{t^k}{k!}\right)dt \quad \forall x\geq 0$$

$$e^t\Big|_0^x\geq t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2!3}+.....+\frac{t^{k+1}}{k!(k+1)}\Big|_0^x$$

$$e^x-1\geq x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^{k-1}}{(k+1)!}$$

ដូចនេះ ចំពោះ $\forall x \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ យើងបាន $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}$ ។

3) បង្ហាញថា $\forall n \in \mathbb{N}$ យើងបាន :

$$e \geq \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!}$$

តាម $b)$ គេមាន $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}$ ចំពោះ $\forall x \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $\forall x \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}$

$$\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}\right)dx$$

$$e^x\Big|_0^1 \geq x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_0^1$$

$$e-1 \geq 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$e \geq \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!} \qquad (0!=1\ ,\ 1!=1)$$

ដូច្នេះ $\forall n \in \mathbb{N}$ យើងបាន $e \geq \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{(n+1)!}$

លំហាត់ទី 22: *វិសមភាពនៃអាំងតេក្រាលកំនត់* **(Inequality of Definite Integral)**

1) ចូរស្រាយបញ្ជាក់បើគេមានពីរអនុគមន៍ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$

នោះគេបាន $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$ ។

2) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ ។

ចំលើយ

1) $\forall k \in \mathbb{R}, (kf(x)+g(x))^2 \geq 0$

$$k^2 f^2(x)+2kf(x).g(x)+g^2(x) \geq 0$$

បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ តាមលំហាត់ទី 4 យើងបាន :

$$k^2\int_a^b f^2(x)dx+2k\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\geq 0 \quad (1)$$

ដើម្បីអោយ (1) ពិត $\forall k\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\leq 0$$

ដូចនេះ $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

2) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^1\sqrt{1+x^3}dx\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$

យើងបាន :

$$\left(\int_0^1\sqrt{1+x^3}dx\right)^2\leq\int_0^1 dx\int_0^1(1+x^3)dx$$

$$\leq\int_0^1(1+x^3)dx$$

$$=\left(1+\frac{x^4}{4}\right)_0^1=1+\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\int_0^1\sqrt{1+x^3}dx\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$ ។

លំហាត់ទី 23: ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល (Intermediate Value Theorem)

1) ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល **(Intermediate Value Theorem)** :

បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានតំលៃ k មួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ $(f(a)\leq k\leq f(b))$ នោះមានចំនួន $c\in[a,b]$ ដែល $f(c)=k$ ។

2) តំលៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល **(Mean Value Theorem for Integral)**

បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះមានចំនួន $c\in[a,b]$ ដែល $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$ ។

ចំលើយ

1) ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល (*Intermediate Value Theorem*)

តាង $g(x)=f(x)-k$ យើងបាន

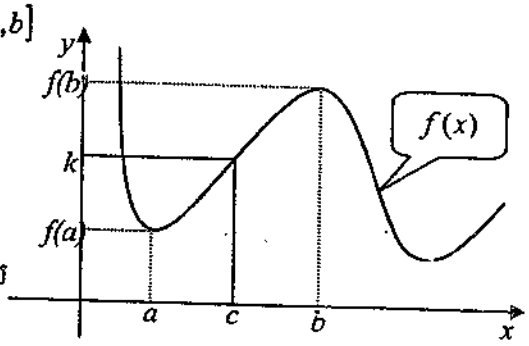
- $x=a$ នោះ $g(a)=f(a)-k\le 0 \quad (f(a)\le k)$
- $x=b$ នោះ $g(b)=f(b)-k\ge 0 \quad (f(b)\ge k)$

ដូចនេះ $g(x)$ អាចស្មើសូន្យត្រង់ចំនុចណាមួយនៅលើចន្លោះ$[a,b]$

ឧបមាថា $g(x)=0$ ត្រង់$c\in[a,b]$ នោះ

$$g(c)=f(c)-k=0$$

$$f(c)=k$$

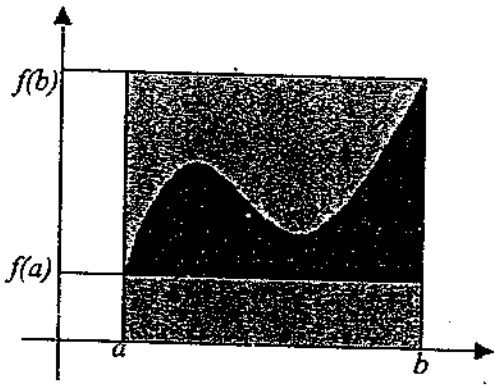


ដូចនេះ បើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ$[a,b]$ ហើយមានតំលៃ k មួយ នៅចន្លោះ$f(a)$ និង $f(b)$ នោះ $\exists c\in[a,b]$ដែល $f(c)=k$

2) **តំលៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល (Mean Value Theorem for Integral)**

a. បើ f ជាអនុគមន៏ថេរលើចន្លោះ$[a,b]$ នោះមានc នៅក្នុងចន្លោះ$[a,b]$ ។

b. បើ f ជាប់លើចន្លោះ$[a,b]$ នោះ f មានអតិបរមានិងអប្បបរមាលើ ចន្លោះ$[a,b]$ ។



តាង$m=f(a)$ ជាតំលៃអប្បបរមានៃ f

តាង$M=f(b)$ ជាតំលៃអតិបរមានៃ f

យើងបាន :

$$m\le f(x)\le M$$

$$m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx$$

$$(b-a)m\le\int_a^b f(x)dx\le(b-a)M$$

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល

បើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$, $f(a)\le k\le f(b)$ នោះ មាន $c\in[a,b]$, $f(c)=k$

ដូចនេះ មាន$c\in[a,b]$, $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$ ។

លំហាត់ទី 24: ទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល (Intermediate Value Theorem)

ល្បឿនសំលេង $S(x)$ គិតជា $\frac{m}{s}$ មានសមីការ

$$S(x)=\begin{cases}-4x+341\ ,\ 0\le x\le 11,5\\ 295\qquad\ ,\ 11,5\le x\le 22\\ \frac{3}{4}x+278,5, 22\le x<32\\ \frac{3}{2}x+254,5\ ,\ 32\le x<50\\ -\frac{3}{2}x+404,5\ ,\ 50\le x\le 80\end{cases}$$ ដែល x គឺជាកំពស់គិតជា km

ចូរគណនាល្បឿនមធ្យមនៅលើចន្លោះ $[0,80]$

ចំលើយ

- $\int_0^{11,5} S(x)dx=\int_0^{11,5}(-4x+341)dx=3657$
- $\int_{11,5}^{22} S(x)dx=\int_{11,5}^{22}295dx=3097,5$
- $\int_{22}^{32} S(x)dx=\int_{22}^{32}(\frac{3}{4}x+278,5)dx=2987,5$
- $\int_{32}^{50} S(x)dx=\int_{32}^{50}(-\frac{3}{2}x+254,5)dx=5688$
- $\int_{50}^{80} S(x)dx=\int_{50}^{80}(\frac{3}{2}x+404,5)dx=9210$
- $\int_0^{80} S(x)dx=24640$

ល្បឿនមធ្យមនៃ សំលេងគឺ $\frac{1}{80}\int_0^{80} S(x)dx=\frac{24640}{80}=308\ ^{Km}/_{s}$ ។

លំហាត់ទី 25: អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស(Integral of even and odd functions)

បង្ហាញថាបើ f ជាប់លើចន្លោះ I ដែលមាន a , នោះ $\forall x$ នៅក្នុងចន្លោះ I យើងបាន :

$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$ ។ គណនា $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt\right)$ និង គណនាដេរីវេនៃ $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos t dt$

ចំលើយ

តាង $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{\Delta x+x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^a f(t)dt+\int_a^{\Delta x+x} f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{\Delta x+x} f(t)dt$$

តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល យើងបាន :

$c\in[x,x+\Delta x]$, $\Delta x\to 0\Rightarrow c\to x$

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=(x+\Delta x-x)f(c)=\Delta x.f(c)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{\Delta x+x} f(t)dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(f(c).\Delta x)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)$$

$$=f(x)$$

ដូចនេះ $\Delta x>0\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$ ។

➢ គណនា $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt\right)$

ដោយ $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ យើងបាន :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt\right)=\sqrt{1+x^2}$$

➢ គណនា ដេរីវេ នៃ $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos t dt$ ។

ដោយ $f(t)=\cos t$ ជាប់លើ$\mathbb{R}$ យើងបាន :

តាង $u=x^3$

$$F'(x)=\frac{dF}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{d}{du}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos t dt\right).\frac{du}{dx}$$
$$=\cos u.\left(3x^2\right)$$
$$=3x^2\cos x^3$$

ដូចនេះ $F'(x)=3x^2\cos x^3$

លំហាត់ទី 26: អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស(Integral of even and odd functions)

គេអោយ f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[-a,a]$ បង្ហាញថា :

1) បើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

2) បើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

ចូរគណនា $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x\cos x+\sin x\cos x)dx$ ។

ចំលើយ

1) បើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$?

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_{-a}^{0}f(-x)dx+\int_{-a}^{0}f(x)dx$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $f(-x)=-f(x)$

តាង $u=-x\Rightarrow du=-dx$

$x=0$ នោះ $u=0$, $x=-a$ នោះ $u=a$

$$-\int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_{a}^{0} f(u)du$$

$$= \int_{a}^{0} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= 0$$

ដូចនេះ ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ ។

2) បើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{0} f(x)dx$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx$$

តាង $u = -x \Rightarrow -du = dx$

$$\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_{a}^{0} f(u)du$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

ដូចនេះ ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ ។

➢ គណនា $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x \cos x + \sin x \cos x)dx$

តាង $f(x)=\sin^3 x\cos x+\sin x\cos x$

$$\begin{aligned}f(-x)&=-\sin^3 x\cos x-\sin x\cos x\\&=-(\sin^3 x\cos x+\sin x\cos x)\\&=-f(x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍សេស យើងបាន

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x\cos x+\sin x\cos x)dx=0$$ ។

លំហាត់ទី 27: *អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស*(Integral of even and odd functions)

1) បង្ហាញថា បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ជាអនុគមន៍គូ ។

2) បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ តើ $G(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសដែរឬទេ? ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ជាអនុគមន៍គូ

បើ F ជាអនុគមន៍គូ នោះ $F(x)=F(-x)\Leftrightarrow\int_a^x f(t)dt=\int_a^{-x} f(t)dt$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

តាង $u=-t\Rightarrow du=-dt$

$t=a$ នោះ $u=-a$

$t=x$ នោះ $u=-x$

$$F(x)=-\int_{-a}^{-x} f(-u)du$$

ប្តូរពី u ទៅ t យើងបាន :

$$F(x)=-\int_{-a}^{-x} f(-t)dt$$

ដោយ $f(t)$ ជា អនុគមន៍សេស នោះ $f(t)=-f(-t)$

$$F(x)=\int_{-a}^{-x} f(t)dt$$

$$= \int_{-a}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt$$

ដោយ $f(t)$ ជា អនុគមន៍សេស នោះ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

$$F(x) = \int_{a}^{-x} f(t)dt$$

$$= F(-x)$$

ដូចនេះ បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍គូ

2) បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ តើ $G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសដែរឬទេ?

$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ ជាអនុគម៍សេស នោះ $G(-x) = \int_{a}^{-x} f(t)dt = -G(x) = -\int_{a}^{x} f(t)dt$

$$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

តាង $v = -t \Rightarrow -dv = dt$

$t = a$ នោះ $v = -a$

$t = x$ នោះ $v = -x$

$$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

$$= -\int_{-a}^{-x} f(-v)dv$$

ប្តូរពី v ទៅ t

$$G(x) = -\int_{-a}^{-x} f(-t)dt$$

ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ នោះ $f(-t) = f(t)$

$$G(x) = -\int_{a}^{-x} f(t)dt$$

➢ បើ $a = 0$ នោះ $G(x) = -\int_{0}^{-x} f(t)dt$

$$= -G(-x) \qquad \left(G(-x) = \int_{0}^{-x} f(t)dt\right)$$

ដូចនេះ $G(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ ជាអនុគមន៍ សេស

➢ បើ $a \neq 0$ នោះ $G(x) = -\int_{-a}^{-x} f(t)dt$

$$= -\int_{-a}^{a} f(t)dt - \int_{a}^{-x} f(t)dt$$

ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ នោះ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

$$G(x) = -2\int_{0}^{a} f(t)dt - \int_{a}^{-x} f(t)dt$$

$$= -2\int_{0}^{a} f(t)dt - G(-x)$$

ដូចនេះ $G(x) \neq -G(-x)$

ដូចនេះ G មិនគូ ហើយមិនសេស

ដូចនេះ បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $G(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ ជាអនុគមន៍ សេសពេល $a = 0$ ។

លំហាត់ទី 28: *អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ សេស*(Integral of even and odd functions)

គេអោយ $f(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ។

1) បង្ហាញថា f ជា អនុគមន៍សេស ។

2) គណនា $f(\frac{\pi}{2}) - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}} dt$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា f ជា អនុគមន៍សេស

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

តាង $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$

$f(t)$ ជាប់កំនត់លើ $t \in \mathbb{R}$

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(-t)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \quad ; \quad (\cos(-t) = \cos t)$$

$= f(t)$

ដូចនេះ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ដូចនេះ $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$ ជាអនុគមន៍សេស (តាមលំហាត់ទី 13)

2) គណនា $f(\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

$$f(\tfrac{\pi}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$$

តាង $u = \cos t \Rightarrow -du = \sin t dt$

$t = 0$ នោះ $u = 1$

$t = \frac{\pi}{2}$ នោះ $u = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

ដូចនេះ $f(\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt = \ln(1+\sqrt{2})$ ។

លំហាត់ទី 29: *សរសេរបញ្ជាក់សមភាពអាំងតេក្រាល*(Proof of Equalities)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t(t^2+1)}dt = 1 \quad , \tan x > 0$

ចំលើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t(t^2+1)}dt = 1 \quad , \tan x > 0$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t(t^2+1)}dt = \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{\cot x}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t(t^2+1)}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \left(\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t(t^2+1)}\right)dt + \int_{\cot x}^{\tan x} \frac{t}{t^2+1}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t}dt + \int_{\cot x}^{\tan x} \frac{t}{t^2+1}dt$$

$$= \ln|t|_{\frac{1}{e}}^{\cot x} + \frac{1}{2}\int_{\cot x}^{\tan x} \frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$= \ln(\cot x) + \ln e + \frac{1}{2}\int_{\cot x}^{\tan x} \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}$$

$$= \ln(\cot x) + 1 + \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_{\cot x}^{\tan x}$$

$$= \ln(\cot x) + 1 + \frac{1}{2}\ln(\tan^2 x + 1) - \frac{1}{2}\ln(\cot^2 x + 1)$$

$$= 1 + \ln(\cot x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)^2$$

$$= 1 + \ln(\cot x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$= 1 + \ln(\cot x) - \frac{1}{2}\cdot 2\ln\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= 1 + \ln(\cot x) - \ln(\cot x) = 1$$

ដូចនេះ $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{1}{t(t^2+1)}dt = 1 \quad , \tan x > 0$ ។

***លំហាត់ទី 30: សរសេរបញ្ជាក់សមភាពអាំងតេក្រាល*(Proof of Equalities)**

គេអោយ f ជាប៉ាលើចន្លោះ $[0,b]$ ។ បង្ហាញថា $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \frac{b}{2}$ ។

រួចគណនា $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx$ ។

ចំណើយ

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \int_0^b \frac{f(b-x)+f(x)-f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

$$= \int_0^b dx - \int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

$$= b - \int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

តាង $t = b-x \Rightarrow dx = -dt$

$x = b$ នោះ $t = 0$

$x = 0$ នោះ $t = b$

$$\int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \int_b^0 \frac{f(t)}{f(b-t)+f(t)}(-dt)$$

$$= \int_0^b \frac{f(t)}{f(t)+f(b-t)}dt$$

ប្តូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$\int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = b - \int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

$$2\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = b$$

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \frac{b}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \frac{b}{2}$

➢ គណនា $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx$

តាមសំរាយខាងលើយើងបាន :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx = \frac{1}{2}$$ ។

លំហាត់ទី 31: សំរាយបញ្ជាក់សមភាពអាំងតេក្រាល(Proof of Equalities)

1) បង្ហាញថា $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2) បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

3) បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$

តាង $t = a+b-x \Rightarrow -dt = dx$

$x = a$ នោះ $t = b$

$x = b$ នោះ $t = a$

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(t)dt$$

ប្តូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2) បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

តាង $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow -dt = dx$

$x = 0$ នោះ $t = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ នោះ $t = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)\right]dt$$

ដោយ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$$

ប្តូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

3) បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

តាង $t = \pi - x \Rightarrow -dt = dx$

$x = 0$ នោះ $t = \pi$

$x = \pi$ នោះ $t = 0$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^0 (\pi - t)f[\sin(\pi - t)]dt$$

$$= -\int_{\pi}^0 \pi f(\sin t)dt + \int_{\pi}^0 tf(\sin t)dt \qquad [\sin(\pi - t) = \sin t]$$

ប្តូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^0 \pi f(\sin x)dx + \int_{\pi}^0 xf(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx + \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx + \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \qquad (1)$$

➢ $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

យើងមាន $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx\right]$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$$

តាង $t=\pi-x\Rightarrow -dt=dx$

$x=\frac{\pi}{2}$ នោះ $t=\frac{\pi}{2}$

$x=\pi$ នោះ $t=0$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\pi-t)]dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$$

ប្តូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

ដូចនេះ $\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ · (2)

តាម(1) និង (2) យើងបាន

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

➢ គណនា $k=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

យើងមាន $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{1+\cos^2 x}$$

តាង $u=\cos x\Rightarrow -du=\sin xdx$

$x=0$ នោះ $u=1$

$x=\frac{\pi}{2}$ នោះ $u=0$

$$k=-\pi\int_1^0\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\pi\int_0^1\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\pi Arc\tan u\Big|_0^1$$

$$=\pi Arc\tan 1$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}$$

$$k=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$$ ។

លំហាត់ទី 32: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តែអោយ $f_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin nx}{\sin x} & ,x>0\\ n & ,x=0\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ តាង $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx$ ។

1) បង្ហាញថា $I_{2k+1}=I_{2k-1}$, $k\in\mathbb{N}$ ។

2) គណនា I_{2003} ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $I_{2k+1}=I_{2k-1}$

យើងមាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x}=n$

ដូចនេះ អនុគមន៏ $f_n(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx$$

$$I_{2k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_{2k+1}(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}dx$$

$$I_{2k-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_{2k-1}(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}dx$$

$$I_{2k+1}-I_{2k-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2kx.\sin x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2kxdx$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0$$

ដូចនេះ $I_{2k+1}=I_{2k-1}$

2) គណនា I_{2003}

តាម $I_{2k+1}=I_{2k-1}$ យើងបាន

$$I_{2003}=I_{2001}=I_{1999}=I_{1997}=.....=I_1$$

ដូចនេះ $I_{2003}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

ដូចនេះ $I_{2003}=\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ធី 33: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គណនា $I=\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|+|\cos x|\right)dx$ ។

ចំណើយ

គណនា $I=\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|+|\cos x|\right)dx$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx-\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(-\sin x+\cos x)dx$$

$$= (\sin x - \cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x - \cos x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - (\sin x - \cos x)_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + (\sin x + \cos x)_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 - \cos\pi + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} - \cos\pi + \cos 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 1+1+1+1+1+1+1+1$$

ដូចនេះ $I = \int_0^{2\pi} (|\sin x| + |\cos x|)dx = 8$ ។

លំហាត់ទី 34: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយស៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $u_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}dx$ និង $u_n = \frac{u_{n-1} - 3}{2}$ $n \in \mathbb{N}$ ។

1) គេអោយ (v_n) ជាស៊ីតមួយកំនត់ដោយ $v_n = u_n + 3$ ។ចូរបង្ហាញថា(v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និងកំនត់រេសុងរបស់វា។

2) រក v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ចំលើយ

1) គេអោយ (v_n) ជាស៊ីតមួយកំនត់ដោយ $v_n = u_n + 3$ ។ ចូរបង្ហាញថា(v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និងកំនត់

រេសុងរបស់វា ។

គេមាន $v_n = u_n + 3$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3$$
$$= \frac{u_n - 3}{2} + 3$$
$$= \frac{1}{2}(u_n + 3)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot v_n$$

ដូចនេះ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលសងរួម $q = \frac{1}{2}$ ។

2) រក v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=\frac{1}{2}$

យើងមាន $v_n=u_n+3$

$$v_0=u_0+3$$

$$=3+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$$

តាង $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$

តាង $t=\frac{\pi}{2}-x$, $-dt=dx$

$x=0$ នោះ $t=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}$ នោះ $t=0$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 t}{\cos^5 t+\sin^5 t}dt$$

បូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x}dx=J$$

ដូចនេះ $I-J=0$ (1)

➢ $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $I+J=\frac{\pi}{2}$ (2)

តាម(1) និង (2) យើងបាន :

$$\begin{cases} I-J=0 & (1)\\ I+J=\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$$

ដូចនេះ $2I = \frac{\pi}{2}$

$I = \frac{\pi}{4}$

$v_0 = 3 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}$

$= 4$

ដូចនេះ $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ដូចនេះ $\lim_{n \to +\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

យើងមាន $v_n = u_n + 3$ នោះយើងបាន :

$u_n = v_n - 3$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$

ដូចនេះ $\lim_{n \to +\infty}\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\right] = -3$

ដូចនេះ $u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = -3$ ។

លំហាត់ទី 35: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តែអោយ $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx \quad n \in \mathbb{N}$ ។

1) គណនា I_0 ។

2) បង្ហាញថា $I_n \geq I_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$ ។

3) បង្ហាញថា $I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} \cdot I_n \quad , n \in \mathbb{N}$ ។

4) គណនា $\lim_{n \to +\infty} I_n$ ។

ចំលើយ

1) គណនា I_0

$I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx \quad n \in \mathbb{N}$

$$I_0 = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos \pi x \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ $I_0 = \frac{2}{\pi}$ ។

2) បង្ហាញថា $I_n \geq I_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [0,1]$ យើងបាន $x^n \geq x^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [0,1]$ យើងបាន $0 \leq \pi x \leq \pi$

ដូចនេះ $\sin \pi x \geq 0$

$\forall x \in [0,1]$ យើងបាន :

$x^n \sin \pi x \geq x^{n+1} \sin \pi x$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^1 x^n \sin \pi x dx \geq \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x dx$$

ដូចនេះ $I_n \geq I_{n+1}$ ។

3) បង្ហាញថា $I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} \cdot I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

គេមាន $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \sin \pi x dx$

តាង $u = x^{n+2} \rightarrow du = (n+2)x^{n+1}$

$dv = \sin \pi x \rightarrow v = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x$

$$I_{n+2} = -\frac{1}{\pi}x^{n+2}\cos \pi x \Big|_0^1 + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos \pi x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos \pi x dx$$

➢ $\int_0^1 x^{n+1}\cos \pi x dx$

តាង $t = x^{n+1} \rightarrow dt = (n+1)x^n$

$ds = \cos \pi x dx \rightarrow s = \frac{1}{\pi}\sin \pi x$

$$\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx = \frac{1}{\pi}x^{n+1}\sin\pi x\Big|_0^1 - \frac{n+1}{\pi}\int_0^1 x^n \sin\pi x dx$$

$$= -\frac{n+1}{\pi}\cdot I_n$$

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\cdot\left(-\frac{n+1}{\pi}\right)I_n$$

ដូចនេះ $I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\cdot I_n$

4) គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le \sin\pi x\le 1$

$\forall x\in[0,1]\quad x^n\ge 0$

ដូចនេះ $-x^n \le x^n\sin\pi x \le x^n$

$$-\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n\sin\pi x dx \le \int_0^1 x^n dx$$

$$-\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \le \int_0^1 x^n\sin\pi x dx \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right) \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le 0$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ ។

លំហាត់ទី 36: អាំងតេក្រាលកំណត់(Definite Integrals)

តែអោយ $I_{n,m} = \int_0^1 x^n.(1-x)^m dx$, $n,m\in\mathbb{N}$ ។

1) បង្ហាញថា $I_{n,m} = I_{m,n}$ ។ រួចគណនា $I_{1,5}$ ។

2) បង្ហាញថា $I_{n,m} = \frac{m}{n+1}\cdot I_{n+1,m-1}$, $n\ge 0$, $m\ge 1$ ។

3) គណនា $I_{n,m}$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $I_{n,m}=I_{m,n}$ រួចគណនា $I_{1,5}$

យើងមាន $I_{n,m}=\int_0^1 x^n.(1-x)^m dx$, $n,m\in\mathbb{N}$

តាង $x=1-t\Rightarrow dx=-dt$

$x=0$ នោះ $t=1$

$x=1$ នោះ $t=0$

$$I_{n,m}=-\int_1^0 (1-t)^n t^m dt$$
$$=\int_0^1 t^m(1-t)^n dt$$
$$=I_{m,n}$$

ដូចនេះ $I_{n,m}=I_{m,n}$

➢ គណនា $I_{1,5}$

តាមសំរាយខាងលើយើងបាន

$$I_{1,5}=I_{5,1}$$
$$=\int_0^1 x^5(1-x)dx$$
$$=\int_0^1 (x^5-x^6)dx$$
$$=\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$
$$=\frac{1}{42}$$

ដូចនេះ $I_{1,5}=\frac{1}{42}$ ។

2) បង្ហាញថា $I_{n,m}=\frac{m}{n+1}\cdot I_{n+1,m-1}$, $n\geq 0$, $m\geq 1$

យើងមាន $I_{n,m}=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

តាង $u=(1-x)^m\Rightarrow du=-m(1-x)^{m-1}dx$

$dv=x^n dx\Rightarrow v=\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$

$$I_{n,m}=\frac{1}{n+1}(1-x)^m x^{n+1}\Big|_0^1+\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}dx$$

$$=\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$

ដូចនេះ $I_{n,m}=\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$ ។

3) គណនា $I_{n,m}$

$$I_{n,m}=\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$

$$I_{n+1,m-1}=\frac{m-1}{n+2}I_{n+2,m-2}$$

$$I_{n+2,m-2}=\frac{m-2}{n+3}I_{n+3,m-3}$$

.....

.....

.....

$$I_{n+(m-1),1}=\frac{1}{m+n}I_{n+m,0}$$

គុណអង្គនីមអង្គយើងបាន

$$I_{n,m}=\frac{m.(m-1)(m-1).....1}{(n+1)(n+2)(n+3).....(n+m)}\cdot I_{n+m,0}$$

$$I_{n+m,0}=\int_0^1 x^{m+n}dx$$

$$=\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{m+n+1}$$

$$I_{n,m}=\frac{m.(m-1)(m-1).....1}{(n+1)(n+2)(n+3).....(n+m)}\cdot\frac{1}{(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!}{(n+1)(n+2)(n+3).....(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!(1.2.3.4.....n)}{(1.2.3.4.....n)(n+1)(n+2)(n+3).....(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

ដូចនេះ $I_{n,m}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ ។

លំហាត់ទី 37: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ និង ផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខ័ណ្ឌ $f(x)=f(2a-x)$ ចំពោះ $\forall \in \mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនថេរ។

1) បង្ហាញថា $\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = 2a\int_{a}^{a+m} f(x)dx$ $(\forall m>0)$ ។

2). គណនា $\int_{0}^{\pi} x\sin x\cos^4 xdx$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = 2a\int_{a}^{a+m} f(x)dx$ $(\forall m>0)$

$f(x)=f(2a-x)$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនថេរ

តាង $t=2a-x \Rightarrow -dt=dx$

$x=a-m$ នោះ $t=a+m$

$x=a+m$ នោះ $t=a-m$

$$\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = -\int_{a+m}^{a-m}(2a-t)f(2a-t)dt$$

$$= \int_{a-m}^{a+m}(2a-t)f(t)dt \qquad (f(2a-t)=f(t))$$

$$= 2a\int_{a-m}^{a+m} f(t)dt - \int_{a-m}^{a+m} tf(t)dt$$

$$= 2a\int_{a-m}^{a+m} f(t)dt - \int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx$$

ដូចនេះ $2\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = 2a\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx$

$$\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = a\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx = a\int_{a-m}^{a} f(x)dx + a\int_{a}^{a+m} f(x)dx \qquad (1)$$

➢ $\int_{a-m}^{a} f(x)dx$

តាង $x=2a-t \Rightarrow -dt=dx$

$x=a-m$ នោះ $t=a+m$

x ត្រូវ a នោះ $t=a$

$$\int_{a-m}^{a} f(x)dx = -\int_{a+m}^{a} f(2a-t)dt$$

$$= \int_{a}^{a+m} f(t)dt$$

$$= \int_{a}^{a+m} f(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_{a-m}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{a+m} f(x)dx$

តាម (1) និង (2) យើងបាន :

$$\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = a\int_{a}^{a+m} f(x)dx + a\int_{a}^{a+m} f(x)dx$$

$$= 2a\int_{a}^{a+m} f(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_{a-m}^{a+m} xf(x)dx = 2a\int_{a}^{a+m} f(x)dx$ ។

2) គណនា $\int_{0}^{\pi} x\sin x\cos^4 xdx$

តាង $f(x) = \sin x\cos^4 x$

យើងមាន $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - x\right)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) = \sin x\cos^4 x = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - x\right)\cos^4\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$= f\left(2\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\int_{0}^{\pi} x\sin x\cos^4 xdx = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} xf\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - x\right)dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin xCos^4 xdx$$

$$= -\frac{\pi}{5}Cos^5 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{5}$$ ។

លំហាត់ទី 38: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

1) បង្ហាញថា $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$ ។

2) គណនា $\int_0^1 x^3 Arc\tan x^2 dx$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

តាង $t = x^2 \Rightarrow \frac{dt}{2} = xdx$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = a \Rightarrow t = a^2$

$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt$

ប្តូរពី t ទៅ xយើងបាន :

ដូចនេះ $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$ ។

2) គណនា $\int_0^1 x^3 Arc\tan x^2 dx$

តាង $f(x) = Arc\tan x \Rightarrow f(x^2) = Arc\tan x^2$

$\int_0^1 x^3 Arc\tan x^2 dx = \int_0^1 x^3 f(x^2)dx$

តាមសំរាយ 1) ខាងលើ យើងបាន :

$$\int_0^1 x^3 Arc\tan x^2 dx = \int_0^1 x^3 f(x^2)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xArc\tan xdx$$

តាង $t = Arc\tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$ds = x \Rightarrow s = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x Arc\tan x dx = \frac{1}{4}x^2 Arc\tan x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}Arc\tan 1 - \frac{1}{4}\int_0^1 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x\Big|_0^1 + \frac{1}{4}Arc\tan x\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 x^3 Arc\tan x^2 dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី 39: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

តេអោយ $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}}dx$ (m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ) ។

1) កំនត់ m ដើម្បី អោយមានអាំងតេក្រាល I ។

2) គណនា I ពេល $m > -1$ ។

ចំលើយ

1) កំនត់ m ដើម្បី អោយមានអាំងតេក្រាល I

ដើម្បីអោយ I មានអត្ថិភាព លុះត្រាតែ

$f(x) = \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,\pi]$

$m\cos^2 x + m + 2 > 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$

តាង $t = \cos^2 x \to 0 \le t \le 1$

ដូចនេះ $mt + m + 2 > 0 \qquad \forall t \in [0,1]$

យក $A(0, m+2) \quad B(1, 2m+2)$

យើងបាន $[AB]$ជាអង្គត់តាងដោយសមីការ $y = mt + m + 2$, $t \in [0,1]$ ។

ដើម្បីអោយ $mt + m + 2 > 0$, $t \in [0,1]$ លុះត្រាតែ$[AB]$នៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសទាំងស្រុង ពោលគឺ

$$\begin{cases} y_A > 0 \\ y_B > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+2 > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > -2 \\ m > -1 \end{cases}$$

$$m > -1$$

ដូចនេះ ដើម្បីអោយ I មានអត្ថិភាពលុះត្រាតែ $m > -1$ ។

2) គណនា I ពេល $m > -1$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

តាង $t = \pi - x \Rightarrow -dt = dx$

$$x = 0 \Rightarrow t = \pi$$

$$x = \pi \Rightarrow t = 0$$

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{\sqrt{m\cos^2(\pi - t) + m + 2}} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{\sqrt{m\cos^2 t + m + 2}} dt$$

ប្តូរពី t ទៅ x យើងបាន :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx - I$$

ដូចនេះ $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

តាង $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = \pi \Rightarrow u = -1$$

$$I = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{-\sin x dx}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{mu^2+m+2}}$$

តាង $f(u)=\frac{1}{\sqrt{mu^2+m+2}}$ យើងបាន :

$$f(-u)=\frac{1}{\sqrt{m(-u)^2+m+2}}=\frac{1}{\sqrt{mu^2+m+2}}$$

ដូចនេះ $f(u)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

តាមលំហាត់ទី 26 យើងបាន :

$$I=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{mu^2+m+2}}=\pi\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{mu^2+m+2}}$$ ។

➢ បើ $-1<m<0$ យើងបាន

$$I=\pi\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{mu^2+m+2}}$$

$$=\pi\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{m\left(u^2+\frac{m+2}{m}\right)}}$$

$$=\pi\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{-m\left(-u^2+\frac{m+2}{-m}\right)}}$$

$$=\pi\frac{1}{\sqrt{-m}}\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{m+2}{-m}}\right)^2-u^2}}$$

$$=\pi\frac{1}{\sqrt{-m}}Arc\sin\sqrt{\frac{-m}{m+2}}\,u\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{-m}}Arc\sin\sqrt{\frac{-m}{m+2}}$$ ។

➢ បើ $m=0$ យើងបាន :

$$I=\pi\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}u\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$ ។

➢ បើ $m>0$ យើងបាន :

$$I=\pi\int_0^1\frac{du}{\sqrt{mu^2+m+2}}$$
$$=\pi\int_0^1\frac{du}{\sqrt{m\left(u^2+\frac{m+2}{m}\right)}}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{m}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u^2+\left(\sqrt{\frac{m+2}{m}}\right)^2}}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{m}}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{m+2}{m}}\right)_0^1$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{m}}\left[\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{m+2}{m}}\right)-\ln\sqrt{\frac{m+2}{m}}\right]$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{m}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{2m+2}}{\sqrt{m}}\right)-\ln\sqrt{\frac{m+2}{m}}\right]$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{m}}\ln\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{2m+2}}{\sqrt{m+2}}\right)$$ ។

លំហាត់ទី 40: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

គេអោយ អាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n=\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin 2xdx$ $J_n=\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}-e^{-x}\sin 2xdx$,$n\in\mathbb{N}$ ។

1) ចំពោះ $\forall n>0$ បង្ហាញថា (I_n) និង (J_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ។

2) តាង $S_n=\sum_{k=0}^{n}I_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}J_k$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}S_n$, $\lim_{n\to+\infty}T_n$ ។

ចំលើយ

1) ចំពោះ $\forall n>0$ បង្ហាញថា (I_n) និង (J_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

$$I_n=\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin 2xdx$$

តាង $u=\sin 2x\Rightarrow du=2\cos 2xdx$

$dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$

$$I_n=-e^{-x}\sin 2x\Big|_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}+2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos 2xdx$$

$$= 2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x dx \quad \left(-e^{-x}\sin 2x\Big|_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0\right)$$

➢ $K = 2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x dx$

តាង $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2\sin 2x dx$

$ds = e^{-x}dx \Rightarrow s = -e^{-x}$

$$K = -2e^{-x}\cos 2x\Big|_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} - 4\int_{n\pi}^{(2n-1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx$$

$$= 2e^{-n\pi}\cos 2n\pi - 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cos 2(2n+1)\pi - 4I_n$$

$$= 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2e^{-n\pi} - 4I_n$$

ដូចនេះ $I_n = 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2e^{-n\pi} - 4I_n$

$$I_n = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + e^{-n\pi}\right)$$

$$I_{n+1} = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+3)\frac{\pi}{2}} + e^{-(n+1)\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1+2)\frac{\pi}{2}} + e^{-(n+1)\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)}e^{-\pi} + e^{-n\pi}e^{-\pi}\right) = e^{-\pi}\left[\frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)} + e^{-n\pi}\right)\right]$$

$$= e^{-\pi}I_n$$

ដូចនេះ $\frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{-\pi}$

ដូចនេះ (I_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = \frac{1}{e^{\pi}}$

$$J_n = \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi} -e^{-x}\sin 2x dx = \int_{(n-1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx$$

តាង $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$J_n = -e^{-x}\sin 2x\Big|_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2\int_{(n-1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x dx$$

$$= 2\int_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x dx \quad \left(-e^{-x}\sin 2x\Big|_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0\right)$$

តាង $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2\sin 2x dx$

$ds = e^{-x}dx \Rightarrow s = -e^{-x}$

$$J_n = -2e^{-x}\cos 2x\Big|_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} - 4\int_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx$$

$$= 2e^{-(n+1)\pi}\cos 2(n+1)\pi - 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cos(n+1)\pi - 4J_n$$

$$= 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2e^{-(n+1)\pi} - 4J_n$$

ដូចនេះ យើងបាន ៖

$$5J_n = 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2e^{-(n+1)\pi}$$

$$J_n = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + e^{-(n+1)\pi}\right)$$

$$J_{n+1} = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+3)\frac{\pi}{2}} + e^{-(n+1+1)\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)}e^{-\pi} + e^{-(n+1)}e^{-\pi}\right)$$

$$= e^{-\pi}J_n$$

ដូចនេះយើងបាន $\frac{J_{n+1}}{J_n} = e^{-\pi}$

ដូចនេះ (J_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = \frac{1}{e^{\pi}}$ ។

2) តាង $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} J_k$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

ដោយ $(I_n),(J_n)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = \frac{1}{e^{\pi}}$

$$S_n = I_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, T_n = J_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

ដោយ $0 < q = e^{-\pi} < 1$ នោះ $q^n \to 0$ ពេល $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{I_1}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{J_1}{1-q}$$

$$I_1 = \frac{5}{2}\left(e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-\pi}\right) \qquad J_1 = \frac{5}{2}\left(e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-2\pi}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{5}\cdot\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{5}\cdot\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-2\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

លំហាត់ទី 41: អាំងតេក្រាលកំណត់(Definite Integrals)

1) បង្ហាញថា $\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ។

2) ពីលទ្ធផលខាងលើបង្ហាញថា :

a) $666,6 < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < 676$ ។

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right) = \frac{2}{3}$ $\left((10,049)^2 = 101\right)$ ។

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [k-1,k] \quad k-1 \le x \le k$

$\sqrt{x} \le \sqrt{k}$

$\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}dx \le \int_{k-1}^{k} \sqrt{k}dx \qquad (*)$

➢ បើ $k=1 \quad \int_0^1 \sqrt{x}dx \le \sqrt{1}$

$k=2 \quad \int_1^2 \sqrt{x}dx \le \sqrt{2}$

$k=3 \quad \int_2^3 \sqrt{x}dx \le \sqrt{3}$

.....

.....

$k=n \quad \int_{n-1}^{n} \sqrt{x}dx \le \sqrt{n}$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងបាន :

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 \sqrt{x}dx + \int_2^3 \sqrt{x}dx + \ldots\ldots + \int_{n-1}^{n} \sqrt{x}dx \le \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots\ldots + \sqrt{n}$$

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \qquad (1)$$

$\forall x \in [k,k+1] \quad k \le x \le k+1$

$$\sqrt{k} \le \sqrt{x}$$

$$\int_k^{k+1} \sqrt{k}dx \le \int_k^{k+1} \sqrt{x}dx$$

➢ បើ $k=1$ $\quad \sqrt{1} \le \int_1^2 \sqrt{x}dx$

$k=2$ $\quad \sqrt{2} \le \int_2^3 \sqrt{x}dx$

$k=3$ $\quad \sqrt{3} \le \int_3^4 \sqrt{x}dx$

$k=4$ $\quad \sqrt{3} \le \int_4^5 \sqrt{x}dx$

.....

.....

.....

$k=n$ $\quad \sqrt{n} \le \int_n^{n+1} \sqrt{x}dx$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងបាន :

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+.....+\sqrt{n} \le \int_1^2 \sqrt{x}dx + \int_2^3 \sqrt{x}dx + \int_3^4 \sqrt{x}dx + ... + \int_n^{n+1} \sqrt{x}dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx \qquad (2)$$

តាម(1) និង(2) យើងបាន :

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) ពីលទ្ធផលខាងលើបង្ហាញថា

a) $666{,}6 < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < 676$

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^n \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{n+1}$$

យក $n=100$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{100} \le \sum_{k=1}^{100} \sqrt{k} \le \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{101}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(100^{\frac{3}{2}}\right)\le\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\cdot\left(101^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$\frac{2}{3}\cdot 10^3\le\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\cdot\left((10{,}049)^{\frac{3}{2}}-1\right)\qquad\left((10{,}049)^2=101\right)$$

$$666{,}6<\frac{2.1000}{3}-\le\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\cdot\left((10{,}049)^3-1\right)$$

$$666{,}6<\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}\le 675{,}84<676$$

$$666{,}6<\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}<676$$

ដូចនេះ $666{,}6<\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}<676$ ។

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)=\frac{2}{3}$

$$\int_0^n\sqrt{x}dx\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\int_1^{n+1}\sqrt{x}dx$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n^3}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{(n+1)^3}-1\right)$$

ចែកអង្គទាំង 3 នឹង $\sqrt{n^3}$

$$\frac{2}{3}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{(n+1)^3}-1\right)}{\sqrt{n^3}}$$

$$\frac{2}{3}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{(n+1)^3}-1\right)}{\sqrt{n^3}}$$

$$\frac{2}{3}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{2}{3}$ ។

លំហាត់ទី 42: អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

គេអោយស៊ុីត (u_n) កំនត់ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ដែល $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+2x+4x^2}$

1) បង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\ge 0$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃស៊ុីត (u_n)

1) កំនត់ចំនួនពិត a ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{1+2x+4x^2}\le a$, $\forall x\in[0,1]$ ទាញរក $\lim_{n\to+\infty}u_n$

ចំលើយ

1) បង្ហាញថា $\forall n \in \mathbb{N}\,.\, u_n \geq 0$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃស៊ុីត(u_n)

(u_n) កំនត់ $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq x \leq 1$

$x^n \geq 0$

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} dx \geq 0$

$u_n \geq 0$

ដូចនេះ $u_n \geq 0$

➢ សិក្សាអថេរភាព(u_n)

តែមាន $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}$

$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2}$

$\forall x \in [0,1] \quad x^n \geq x^{n+1}$

$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \geq \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2}$

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2} dx$

$u_n \geq u_{n+1}$

ដូចនេះ (u_n)ជាស៊ុីតចុះ

2) កំនត់ចំនួនពិតa ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{1+2x+4x^2} \leq a$, $\forall x \in [0,1]$ ទាញរក $\lim_{n\to+\infty} u_n$

តាង $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 8x + 2$

$f'(x) = 0 \to x = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		+		+		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗					$+\infty$

តាមតារាង យើងបាន :

f កើនលើ $[0,1]$

$$\forall x\in[0,1]\quad f(0)\le f(x)\le f(1)$$
$$1\le f(x)\le 7$$
$$\frac{1}{7}\le\frac{1}{f(x)}\le 1$$

ដូចនេះ មាន $a=1$ ដែល $\frac{1}{1+2x+4x^2}\le a$, $\forall\in[0,1]$ ។

➢ ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

តាមសំនួរ a) យើងបាន $0\le u_n$ (1)

យើងមាន $\frac{1}{1+2x+4x^2}\le 1$

$$\frac{x^n}{1+2x+4x^2}\le x^n$$
$$\int_0^1\frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx\le\int_0^1 x^n dx$$
$$u_n\le\frac{1}{n+1}\qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន :

$$0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$$
$$0\le\lim_{n\to\infty}u_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$
$$0\le\lim_{n\to\infty}u_n\le 0$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ ។

លំហាត់ទី 43: *អាំងតេក្រាលកំនត់* **(Definite Integrals)**

គេអោយ $I_n=\int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx\qquad \forall n\in\mathbb{N}$ ។

1) គណនា I_n រួចបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ ។

2) គេតាង $S_n=I_0+I_1+I_2+.....+I_n$ ។គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

ចំលើយ

1) គណនា I_n រួចបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ ។

យើងមាន $I_n = \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

តាង $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$I_n = -(x+1)e^{-x}\Big|_n^{n+1} + \int_n^{n+1} e^{-x}dx$

$= (n+1)e^{-n} - (n+2)e^{-(n+1)} - e^{-x}\Big|_n^{n+1}$

$= (n+1)e^{-n} - (n+2)e^{-(n+1)} - e^{-n+1} + e^{-n}$

$= (n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}$

ដូចនេះ $I_n = (n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}$ ។

➢ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{e^n} - \frac{n+3}{e^{n+1}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{e^n} - \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{e^{n+1}}$

$= 0+0$

$= 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) តែតាង $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots\ldots + I_n$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

$I_n = \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$

$S_n = \int_0^1 (x+1)e^{-x}dx + \int_1^2 (x+1)e^{-x}dx + \int_2^3 (x+1)e^{-x}dx + \ldots\ldots + \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$

$= \int_0^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$

តាង $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$S_n = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{n+1} + \int_0^{n+1} e^{-x}dx$

$$=1-(n+2)e^{-(n+1)}-e^{-x}\Big|_0^{n+1}$$
$$=1-(n+2)e^{-(n+1)}-e^{-(n+1)}+1$$
$$=2-(n+2)e^{-(n+1)}-e^{-(n+1)}$$
$$=2-\frac{n+2}{e^{(n+1)}}-\frac{1}{e^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{n+2}{e^{(n+1)}}-\frac{1}{e^{n+1}}\right)$$
$$=2-\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{e^{n+1}}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n+1}}$$
$$=2-0-0$$
$$=2$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}S_n=2$ ។

លំហាត់ទី 44: អាំងតេក្រាលកំណត់ (Definite Integrals)

បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលកំនត់ដោយ $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$ ។ គណនា $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ ។

ចំលើយ

[វិធីទី 1]

បើយើងយក $f^{-1}(x)=t$ នោះ $f(t)=x$ យើងបាន :

$$x=\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

$$dx=\frac{1}{1+t^2}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+t^2}-\sqrt{2}t\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t\right)dt=\frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\left(\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)(\sqrt{1+t^2})}dt$$
$$=\sqrt{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}dt$$

ពេល $x=0$, $x=1$ យើងបាន $t=0$, $t=1$ តាម (i) ។

ដូចនេះ យើងបាន :

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1 t\cdot\sqrt{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1(1+t^2)'(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[-2(1+t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^1=-1+\sqrt{2}$$

[វិធីទី 2]

យក $y = f^{-1}(x)$ នោះ

$$f(y) = x$$
$$\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{1+y^2}} = x$$

នោះ

$$x^2(1+y^2) = 2y^2$$
$$(2-x^2)y^2 = x^2$$

ដោយ $y \geq 0$ ចំពោះ $x \geq 0$ យើងបាន :

$$y = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \text{ ដែល } 0 \leq x \leq 1 \text{ ។}$$

ដូចនេះ

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(2-x^2)'}{\sqrt{2-x^2}}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{2-x^2}\right]_0^1$$
$$= -1 + \sqrt{2} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី 45: *អាំងតេក្រាលកំនត់*(Definite Integrals)

តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បើយើងកំនត់ I_n ដោយ $I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)\cos nxdx$ ។

កំនត់តំលៃ $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ ។

ចំលើយ

កំនត់តំលៃ $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ ។

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)\cos nxdx$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx - \int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx - \int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx - \int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

ប៉ុន្តែ

$$\int x\cos nxdx = \frac{x\sin nx}{n} - \int\frac{\sin nx}{n}dx$$

$$= \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C \text{ (}C\text{: ចំនួនថេរ)}$$

ដូចនេះ

$$I_n = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi} - \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{n^2}\{1-(-1)^n\} - 0 - \frac{1}{n^2}\{(-1)^n - 1\}$$

$$= \frac{2}{n^2}\{1-(-1)^n\}$$

ដូចនេះ

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4 + 0 + \frac{4}{9} + 0 = \frac{40}{9}$$ ។

លំហាត់ទី 46: អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

តាង a ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន ។ បើ $0 \le t \le 1$ រកតំលៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $\int_0^{\pi}(ax - t\sin x)^2 dx$ ។

ចំលើយ

យក $f(t) = \int_0^{\pi}(ax - t\sin x)^2 dx$ នោះ

$$f(t) = \int_0^{\pi}(a^2x^2 - 2axt\sin x + t^2\sin^2 x)dx$$

$$= a^2\int_0^{\pi}x^2dx - 2at\int_0^{\pi}x\sin xdx + t^2\int_0^{\pi}\sin^2 xdx$$

ប៉ុន្តែ

$$a^2\int_0^{\pi}x^2dx = a^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{a^2\pi^3}{3}$$

$$2at\int_0^{\pi}x\sin xdx = 2at\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - 2at\int_0^{\pi}(-\cos x)dx = 2at\pi - 2at\left[-\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= 2a\pi t$$

$$t^2\int_0^{\pi}\sin^2 xdx = t^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = t^2\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}t^2$$

ដូចនេះ $f(t) = \frac{a^2\pi^3}{3} - 2a\pi t + \frac{\pi}{2}t^2$

$$= \frac{\pi}{2}(t-2a)^2 - 2a^2\pi + \frac{a^2\pi^3}{3}$$ ដែល $0 \le t \le 1$ ។

យើងបានពីរករណី

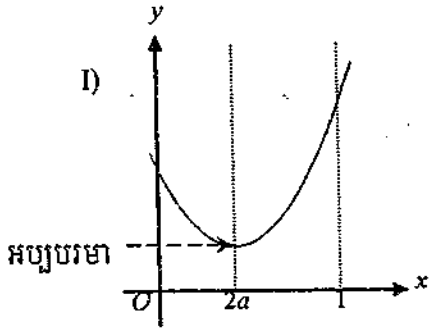
i) ករណី $0 < 2a \le 1$ អនុគមន៍ $f(t)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $t = 2a$ ។ ដូចនេះ តំលៃអប្បបរមាគឺ

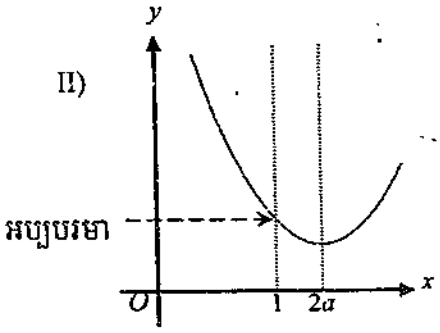
$f(2a) = -2a^2\pi + \frac{a^2\pi^3}{3}$ ។

ii) ករណី $1 < 2a$ អនុគមន៍ $f(t)$ អប្បបរមាត្រង់ $t = 1$ តំលៃអប្បបរមាគឺ

$f(1) = \frac{a^2\pi^3}{3} - 2a\pi + \frac{\pi}{2}$ ។

➲ ករណីទី i) និង ii) ខាងលើបង្ហាញក្នុងរូបទី I) និង II) ខាងក្រោម :





លំហាត់ទី 47: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

កំនត់តំលៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃអនុគមន៍ $F(t) = \int_t^{t+\frac{\pi}{2}} |\sin 2x + 2\cos x| dx$ ដែល $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ។

ចំលើយ

ដោយ $\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x(\sin x + 1)$ យើងបាន :

$\sin 2x + 2\cos x \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \ge 0 \quad$ (ព្រោះ $\sin x + 1 \ge 0$)

$\sin 2x + 2\cos x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \le 0 \quad$ (ព្រោះ $\sin x + 1 \ge 0$)

ដោយ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ យើងបាន $\frac{\pi}{2} \le t + \frac{\pi}{2} \le \pi$ ។

ដូចនេះ

$$F(t) = \int_t^{t+\frac{\pi}{2}} |\sin 2x + 2\cos x| dx$$

$$= \int_t^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + 2\cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{t+\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + 2\cos x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + 2\sin x\right]_t^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + 2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t+\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin t\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 5 + \frac{1}{2}\cos 2t - 2\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos t$$
$$= 5 - 2(\sin t + \cos t)$$
$$= 5 - 2\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

ដោយ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ យើងបាន $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$ ។

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = 0, \frac{\pi}{2}$$
$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $F(t)$ មានអតិបរមាត្រង់ $t = 0$ រឺ $\frac{\pi}{2}$ និង តំលៃអតិបរមាស្មើ 3 ។

$F(t)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $t = \frac{\pi}{4}$ និងតំលៃអប្បបរមាស្មើ $5 - 2\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី 48: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

រកតំលៃអតិបរមាធ្យើប និង អប្បបរមាធ្យើបនៃអនុគមន៏ $f(x) = x^3 + 3\int_0^1 |\sqrt{t} - x| dt$ ។

ចំលើយ

i) ករណី $x \le 0$ យើងបាន:

$|\sqrt{t} - x| = \sqrt{t} - x$ ចំពោះ $0 \le t \le 1$ ។

ដូចនេះ

$$f(x) = x^3 + 3\int_0^1 |\sqrt{t} - x| dt = x^3 + 3\int_0^1 (\sqrt{t} - x) dt$$
$$= x^3 + 3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - xt\right]_0^1$$
$$= x^3 - 3x + 2$$

ii) ករណី $0 \le x \le 1$ យើងបាន :

$|\sqrt{t} - x| = -(\sqrt{t} - x)$ ចំពោះ $0 \le t \le x^2$

$|\sqrt{t} - x| = \sqrt{t} - x$ ចំពោះ $x^2 \le t \le 1$

ដូចនេះ

$$f(x) = x^3 + 3\int_0^1 (\sqrt{t} - x) dt$$

$$= x^3 - 3\int_0^{x^2}(\sqrt{t}-x)dt + 3\int_{x^2}^{1}(\sqrt{t}-x)dt$$

$$= x^3 - 3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - xt\right]_0^{x^2} + 3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - xt\right]_{x^2}^{1}$$

$$= x^3 - 3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - xt\right]_0^{x^2} + 3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - xt\right]_{x^2}^{1}$$

$$= x^3 - 3\left(\frac{2}{3}x^3 - x^3\right) + 3\left(\frac{2}{3} - x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\right)$$

$$= 3x^3 - 3x + 2 \text{ ។}$$

iii) ករណី $1 \le x$ យើងបាន :

$$|\sqrt{t}-x| = -(\sqrt{t}-x)$$

ដូចនេះ

$$f(x) = x^3 + 3\int_0^1 |\sqrt{t}-x|dt = x^3 - 3\int_0^1(\sqrt{t}-x)dt$$

$$= x^3 - 3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - xt\right]_0^1$$

$$= x^3 + 3x - 2$$

ដូចនេះ ដើរវៀន $f(x)$ ក្នុងតំលៃនិមួយៗក្នុង ចន្លោះ

$f'(x) = 3(x^2 - 1)$ ចំពោះ $x < 0$

$f'(x) = 3(3x^2 - 1)$ ចំពោះ $0 < x < 1$

$f'(x) = 3(x^2 + 1)$ ចំពោះ $1 < x$

ដូចនេះ យើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

x		-1		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	$2-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	2	↗

ដូចនេះ

អតិបរមាធៀប : $f(-1) = 4$ ។

អប្បបរមាធៀប : $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ។

លំហាត់ទី 49: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

រកតំលៃអប្បបរមានៃអនុគមន៏ $f(x)=\int_1^e|\ln t-x|dt$ ដែល $x>0$

ចំលើយ

ឧបមាថា k ជាចំនួនពិតដែល $\ln k=x$ នោះយើងបាន $k=e^x$ ។

i) ករណី $1<k<e$ យើងបាន $0<x<1$ នោះ

$\ln t-x\le 0$ ចំពោះ $1\le t\le k$

$\ln t-x\ge 0$ ចំពោះ $k\le t\le e$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}f(x)=\int_1^e|\ln t-x|dt&=-\int_1^k(\ln t-x)dt+\int_k^e(\ln t-x)dt\\&=-\left[t\ln t-t-xt\right]_1^k+\left[t\ln t-t-xt\right]_k^e\\&=-(k\ln k-k-kx)+(0-1-x)+(e-e-ex)-(k\ln k-k-kx)\\&=-2k\ln k+2k+2kx-1-x-ex\\&=-2e^xx+2e^x+2e^xx-1-x-ex\\&=2e^x-1-x-ex\\&=2e^x-(e+1)x-1\end{aligned}$$

ii) ករណី $e\le k$ យើងបាន $1\le x$ នោះ $\ln t-x\le 0$ ។

ដូចនេះ

$$\begin{aligned}f(x)=\int_1^e|\ln t-x|dt&=-\int_1^e(\ln t-x)dt\\&=-\left[t\ln t-t-xt\right]_1^e\\&=-(e-e-ex)+(0-1-x)\\&=(e-1)x-1\end{aligned}$$

ដោយ $e-1>0$ អនុគមន៏ $f(x)$ កើនដាច់ខាតចំពោះ $1\le x$ និង $f(1)=e-2$ ។

ពេល $0<x<1$ យើងបាន

$f'(x)=2e^x-e-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\ln\frac{e+1}{2}$

ដូចនេះ យើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

x	0		$\ln\frac{e+1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

ដូចនេះ $f\left(\ln\frac{e+1}{2}\right)<f(1)$ ។

ដូចនេះ $f(x)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln\frac{e+1}{2}$ ហើយតំលៃអប្បបរមាគឺ

$f\left(\ln\frac{e+1}{2}\right)=e-(e+1)\ln\frac{e+1}{2}$ ។

លំហាត់ទី 50: អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

ចូរដើ្ធយសំនួរខាងក្រោម :

1) គណនា $\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x}dx$ ។

2) រកអនុគមន៏ $f(x)$ ដែល $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}\int_0^2\{f(t)-2\}tdt$ ។

ចំលើយ

1) $\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x}dx=\left[x\cdot(-2e^{-\frac{1}{2}x})\right]_0^2-\int_0^2(x)'(-2e^{-\frac{1}{2}x})dx$

$=\left[-2xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2-\int_0^2(-2e^{-\frac{1}{2}x})dx$

$=-\frac{4}{e}-\left[4e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2=-\frac{4}{e}-\frac{4}{e}+4$

$=4-\frac{8}{e}$

2) យក $A=\int_0^2\{f(t)-2\}tdt$ ។

នោះ A គឺជាចំនួនថេរ ហើយ $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}A$ ។

ដូចនេះ

$A=\int_0^2\left\{e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{3}{2}A-2\right\}tdt$

$=\int_0^2 te^{-\frac{1}{2}t}dt+\left(\frac{3}{2}A-2\right)\int_0^2 tdt$

$=4-\frac{8}{e}+\left(\frac{3}{2}A-2\right)\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$ (តាមសំនួរទី 1)

$=3A-\frac{8}{e}$

យើងបាន $A = \frac{4}{e}$

ដូចនេះ

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2}\int_0^2 \{f(t) - 2\}tdt$$

$$= e^{\frac{1}{2}x} + \frac{6}{e}$$ ។

លំហាត់ទី 51: អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite Integrals)

អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x) = \cos x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)dt$ ។

1) យក $a = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt$ និង $b = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt$ កំនត់ $f(x)$ ដោយប្រើ a, b, $\cos x$ និង $\sin x$ ។

2)គណនា $\int_0^{\pi}\cos t\sin tdt$, $\int_0^{\pi}\cos^2 tdt$, $\int_0^{\pi}\sin^2 tdt$ ។

3) រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ចំណើយ

1) $f(x) = \cos x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)dt$

$= \cos x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)(\sin x\cos t - \sin t\cos x)dt$

$= \cos x + \frac{\sin x}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt - \frac{\cos x}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt$

$= \cos x + a\sin x - b\cos x$

$= (1-b)\cos x + a\sin x$ ។

2) $\int_0^{\pi}\cos t\sin tdt = \int_0^{\pi}\frac{\sin 2t}{2}dt = \left[-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^{\pi} = 0$

$\int_0^{\pi}\cos^2 tdt = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi}\sin^2 tdt = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ ។

3) តាមសំនួរទី 1 និង 2 យើងបាន :

$$a = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{(1-b)\cos t + a\sin t\}\cos tdt$$

$$= \frac{1-b}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt + \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\sin t\,dt$$

$$= \frac{1-b}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + 0$$

$$= \frac{1-b}{2}$$

$$b = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{(1-b)\cos t + a\sin t\}\sin t\,dt$$

$$= \frac{1-b}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\sin t\,dt + \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$= 0 + \frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{a}{2}$$

ដូចនេះ

$$a = \frac{1-b}{2} \text{ និង } b = \frac{a}{2}$$

ទាំអោយ

$$a = \frac{2}{5} \text{ និង } b = \frac{1}{5}$$

ដូចនេះ

$$f(x) = (1-b)\cos x + a\sin x$$

$$= \frac{4}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x \text{ ។}$$

លំហាត់ទី 52: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

f ជាអនុគមន៏ដឺក្រេទី 2 នៃ x ។ F ជាអនុគមន៏ កំនត់ដោយ $F(x) = \int_0^x f(\sin\theta)d\theta$ ចំពោះគ្រប់ x ។

ឧបមាថា $F(x)$ ជាអនុគមន៏ខួប ដែលមានខួបស្មើ 2π ហើយ $F(x)$ មានតំលៃបរមា (extremum)ស្មើនឹង $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ត្រង់ $x = \frac{\pi}{6}$ ។

រកអនុគមន៏ $F(x)$ និងតំលៃអតិបរមា និង អប្បបរមារបស់វា ។

ចំលើយ

យក $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ នោះ យើងបាន :

$$F(x) = \int_0^x f(\sin\theta)d\theta = \int_0^x (a\sin^2\theta + b\sin\theta + c)d\theta$$

$$= a\int_0^x \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta + b\int_0^x \sin\theta d\theta + c\int_0^x d\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^x + b[-\cos\theta]_0^x + c[\theta]_0^x$$

$$= \frac{a}{2}x - \frac{a\sin 2x}{4} - b\cos x + b + cx$$

$$= -\frac{a\sin 2x}{4} - b\cos x + \left(\frac{a}{2}+c\right)x + b$$

ដោយ $F(x)$ ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួបស្មើ 2π យើងបាន :

$F(0) = F(2\pi)$

ប៉ុន្តែ

$$F(0) = -\frac{a\sin 0}{4} - b\cos 0 + \left(\frac{a}{2}+c\right)\cdot 0 + b = -b + b = 0$$

$$F(2\pi) = -\frac{a\sin 4\pi}{4} - b\cos 2\pi + \left(\frac{a}{2}+c\right)\cdot 2\pi + b = -b + \left(\frac{a}{2}+c\right)\cdot 2\pi + b$$

$$= 2\pi\left(\frac{a}{2}+c\right)$$

ដូចនេះយើងបាន :

$$\frac{a}{2}+c = 0 \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

ដូចនេះ

$$F(x) = -\frac{a\sin 2x}{4} - b\cos x + b \cdots\cdots \text{(ii)}$$

ដោយ $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ យើងបាន :

$$-\frac{a}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + b = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \cdots\cdots \text{(iii)}$$

ម្យ៉ាងទៀតតាម (ii) យើងបាន :

$$F'(x) = -\frac{a\cos 2x}{2} + b\sin x$$

ដោយ $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ យើងបាន :

$$-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} + b\cdot\frac{1}{2} = 0 \text{ ឬ } b = \frac{a}{2} \quad \cdots\cdots \text{(iv)}$$

តាមសំនួរទី (iii) និង (iv) យើងបាន :

$$a = -\frac{2(9+4\sqrt{3})}{11}, b = -\frac{9+4\sqrt{3}}{11}$$

ដូចនេះតាម (ii) យើងបាន :

$$F(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{22}\sin 2x + \frac{9+4\sqrt{3}}{11}\cos x - \frac{9+4\sqrt{3}}{11}$$ ។

$$= \frac{9+4\sqrt{3}}{22}(\sin 2x + 2\cos x - 2)$$

យក $k = \frac{9+4\sqrt{3}}{22}$ នោះ

$$F'(x) = k(2\cos 2x - 2\sin x) = 2k(1-2\sin^2 x - \sin x)$$
$$= -2k(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

ដោយ $F(x)$ ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួបស្មើ 2π វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីកំនត់ភាពកើន ចុះនៃ $F(x)$ ចំពោះ $0 \le x \le 2\pi$ ។

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	0	+	+
$f(x)$	0	↗	$F\left(\frac{\pi}{6}\right)$	↘	$F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	↗	$F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	↗	0

ដោយ $F(0) = F(2\pi)$ យើងបាន :

អតិបរមានៃ $F(x)$ ..... $F\left(\frac{\pi}{6} \pm 2n\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ និង

អប្បបរមានៃ $F(x)$ ..... $F\left(\frac{5\pi}{6} \pm 2n\pi\right) = -\frac{72+43\sqrt{3}}{44}$

ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

លំហាត់ទី 53: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

ឆ្លើយនឹងសំនួរខាងក្រោម :

1) ចំពោះ $k \ge a > 0$ គណនា $S = \int_0^k |a-x|e^{-x}dx$ ។

2)កំនត់តំលៃ $\lim_{k\to\infty} S$ ។(អ្នកអាចប្រើ $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ ដោយមិនបាច់ស្រាយបញ្ជាក់) ។

ចំលើយ

1) $S = \int_0^k |a-x|e^{-x}dx = \int_0^a (a-x)e^{-x}dx - \int_a^k (a-x)e^{-x}dx$

$$= \int_0^a (a-x)e^{-x}dx + \int_k^a (a-x)e^{-x}dx$$

ប៉ុន្តែ

$$\int (a-x)e^{-x}dx = -(a-x)e^{-x} - \int e^{-x}dx = -(a-x)e^{-x} + e^{-x} + C$$

$$= (x-a+1)e^{-x} + C \quad (C: \text{ចំនួនថេរ})$$

ដូចនេះ

$$S = \left[(x-a+1)e^{-x}\right]_0^a + \left[(x-a+1)e^{-x}\right]_k^a$$
$$= 2e^{-a} + a - 1 - (k-a+1)e^{-k}$$

2) ដោយ $\lim_{k\to\infty} ke^{-k} = 0$ និង $\lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0$ យើងបាន :

$$\lim_{k\to\infty} S = 2e^{-a} + a - 1$$

➲ អាំងតេក្រាលដែលមានចំរង់ $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, និ $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ ហៅថា "improper អាំងតេក្រាល" ហើយកំនត់ដោយ

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\right)$$

លំហាត់ទី 54: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

ស៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx$ ដែល $n = 1, 2, 3, \cdots$ ។ កំនត់ $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ ។

ចំលើយ

វិធីទី ១

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{1}{n}} - \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{2}\sin 2x dx\right)$$
$$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n} - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n} + \frac{1}{8}\left(\cos\frac{2}{n} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n} - \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{n}$$

ដូចនេះ

$$n^2 a_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{4}\sin\frac{2}{n} - \frac{n^2}{4}\sin^2\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

ដូចនេះ

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$ ។

[វិធីទី 2]

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \cdots$, យើងអាចយក $0 \le x \le \frac{1}{n} \le \frac{\pi}{2}$ ។

ដោយ $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍ចុះជាចំខាត $0 \le x \le \frac{1}{n} \le \frac{\pi}{2}$ យើងបាន :

$$\cos 0 \ge \cos x \ge \cos\frac{1}{n} \ge \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

ដូចនេះ

$$\cos^2 0 \ge \cos^2 x \ge \cos^2\frac{1}{n}$$

$$x\cdot 1^2 \ge x\cos^2 x \ge x\cos^2\frac{1}{n}$$ ចំពោះ $0 \le x \le \frac{1}{n} \le \frac{\pi}{2}$

ដោយមានអាំងតេក្រាលចំពោះ $0 \le x \le \frac{1}{n}$ យើងបាន :

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx \ge \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^3 x\,dx \ge \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2\frac{1}{n}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx \ge a_n \ge \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2\frac{1}{n}\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} \ge a_n \ge \cos^2\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{2n^2} \ge a_n \ge \frac{1}{2n^2}\cos^2\frac{1}{n}$$

ដូចនេះ

$$\frac{1}{2} \ge n^2 a_n \ge \frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{n}$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{1}{n} = 1$

ដូច្នេះ

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី 55: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

ស៊ីតេ $\{A_n\}$ កំនត់ដោយ $A_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |k\tan x - \sin kx|dx$ ដែល $k = 1, 2, 3, \cdots$ ។

ចំណើយ

យក $f(x) = k\tan x - \sin kx$ ចំពោះ $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ ។

នោះ

$$f'(x) = \frac{k}{\cos^2 x} - k\cos kx = k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos kx\right) \ge k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \ge 0$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

ដោយ $f(0) = 0$ យើងបាន $f(x) \ge 0$ ចំពោះ $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ។

ហើយ $f(-x) = k\tan(-x) - \sin k(-x) = -k\tan x + \sin kx = -f(x)$

ដូចនេះ

$$A_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |k\tan x - \sin kx|dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (k\tan x - \sin kx)dx$$

$$= 2k\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin kx dx = 2k\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2k\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{k}\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{2}{k}$$

$$= k\ln 2 + \frac{2}{k}\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{2}{k}$$

ដូចនេះ

$$\frac{1}{k}A_k = \ln 2 + \frac{2}{k^2}\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{2}{k^2}$$

ដូចនេះ $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}A_k = \ln 2$ ។

លំហាត់ទី 56: អាំងតេក្រាលកំនត់(Definite Integrals)

1) គណនាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ លើចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ។

2) គណនាប្រវែងនៃខ្សែកោង $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ $(-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3})$ ។

ចំលើយ

1) គណនាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ លើចន្លោះ $\left[\frac{1}{2},2\right]$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ យើងបាន :

$$L=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{4+x^4-2+\frac{1}{x^4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{6}+\frac{47}{24}\right)$$

$$=\frac{33}{16}$$

2) គណនាប្រវែងនៃខ្សែកោង $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ $(-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3})$

$x=3t^2$, $y=3t-t^3$ $(-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3})$

$x=3t^2$, $dx=6tdt$

$y=3t-t^3$, $dy=(3-3t^2)dt$

$$L=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{(6t)^2+\left(3-3t^2\right)^2}\,dt$$

$$=3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt$$

$$=3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$=3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt$$

$$=3t+t^3\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

ដូចនេះប្រវែងខ្សែកោង $L=12\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី 57: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* (Calculating Areas)

រកផ្ទៃក្រឡាកំនត់ដោយខ្សែកោង $\mathcal{C}: f(x) = 4 - x^2$ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[-2, 2]$ ។

ចំលើយ

រកផ្ទៃក្រឡាកំនត់ដោយខ្សែកោង $y = f(x) = 4 - x^2$ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[-2,2]$ ។

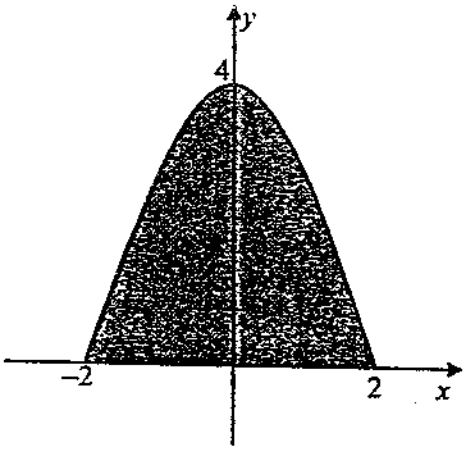
ដោយ $\forall x \in [-2,2], f(x) = 4 - x^2 \geq 0$ នោះ

ផ្ទៃក្រឡា $A = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$

$$= 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 4.2 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{32}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ។



លំហាត់ទី 58: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* (Calculating Areas)

រកផ្ទៃក្រឡាកំនត់ដោយខ្សែកោង $y = -\sqrt{x-2}$ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[2, 6]$ ។

ចំលើយ

ផ្ទៃក្រឡា S ដែលត្រូវគណនានោះ គឺ

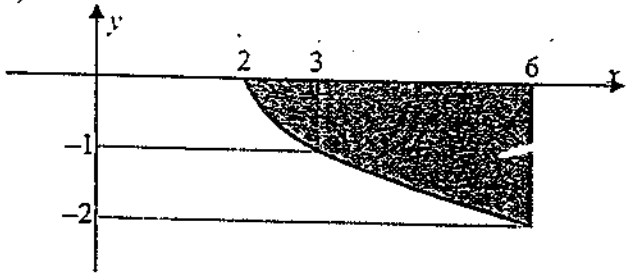
$$S = -\int_{2}^{6} -\sqrt{x-2}dx$$

$$= \int_{2}^{6} \sqrt{x-2}dx = \int_{2}^{6} \sqrt{x-2}d(x-2)$$

$$= \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_{2}^{6} = \frac{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_{2}^{6}$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{16}{3}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{16}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ។

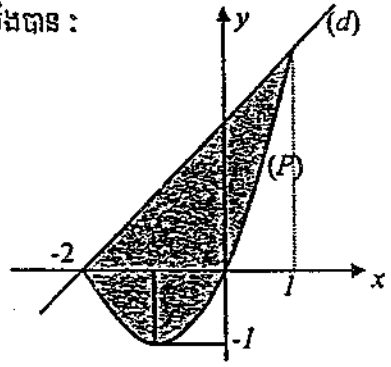


លំហាត់ទី 59: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយ ប៉ារ៉ាបូល (p) $y=x^2+2x$ និង បន្ទាត់ (d) $y=x+2$ ដោយខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x=-2$ និង $x=1$

ចំណេះ

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយ ប៉ារ៉ាបូល (p) $y=x^2+2x$ និង បន្ទាត់ (d) $y=x+2$ ដោយខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x=-2$ និង $x=1$ ហើយ $\forall x\in[-2,1]$ ក្រាបតាងសមីការបន្ទាត់តាង (d) នៅលើ ក្រាបតាងប៉ារ៉ាបូល (P) នោះយើងបាន :



$$S=\int_{-2}^{1}\left[(x+2)-(x^2+2x)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(2-x-x^2\right)dx$$

$$=2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $S=\frac{9}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី 60: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

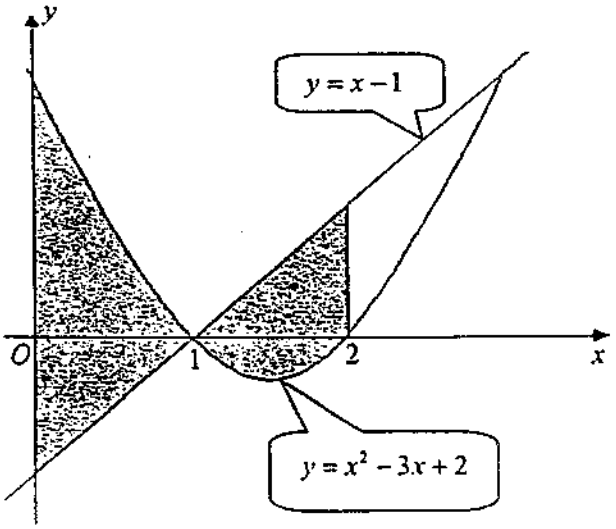
គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x^2-3x+2$ និងបន្ទាត់ $y=x-1$, $x=0$, $x=2$ ។

ចំណេះ

សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (P) និង (d) គឺ

$$x^2-3x+2=x-1$$
$$(x-1)(x-2-1)=0$$
$$(x-1)(x-3)=0$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡា A គឺ



$$A=\int_{0}^{1}(x^2-4x+3)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\Big|_{0}^{1}-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\Big|_{1}^{2}$$

$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{8}{3} + 8 - 6 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 2$ ឯកតាផ្ទៃ។

លំហាត់ទី 61: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y = \sin\frac{\pi}{2}x$ និង $y = x^4$ ។

ចំណើយ

ក្រាបនៃខ្សែកោងនេះបង្ហាញនៅខាងស្តាំ

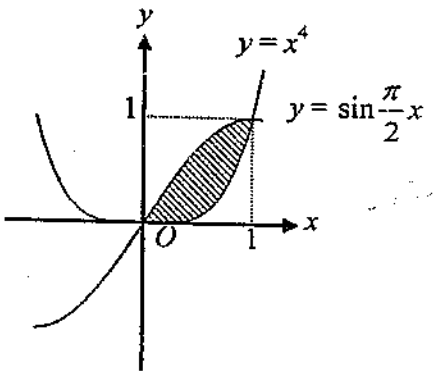
ហើយខ្សែកោង នេះកាត់គ្នាត្រង់ពីរចំនុចគត់គឺ (0, 0)

និង (1, 1) ។

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរនេះគឺ

$$\int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}x - x^4\right)dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{2}{\pi}$$ ឯកតាផ្ទៃ។



លំហាត់ទី 62: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y = \sin^3 x$ និង $y = \cos^3 x$ នៅចន្លោះ $x = \frac{\pi}{4}$ និង $x = \frac{5\pi}{4}$ ។

ចំណើយ

យក $f(x) = \sin^3 x - \cos^3 x$ យើងបាន :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 0$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x\cos x + 3\cos^2 x\sin x = 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x)$$

$$= \frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

ចំពោះ $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$ យើងបាន :

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	0	−	−
$f(x)$	0	↗	1	↘		↗	1	↘	0

ប៉ុន្តែ $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

ដូចនេះ $f(x) > 0$ ចំពោះ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាតឺ

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin^3 x - \cos^3 x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin^2 x \cdot \sin x - \cos^2 x \cdot \cos x)dx$$

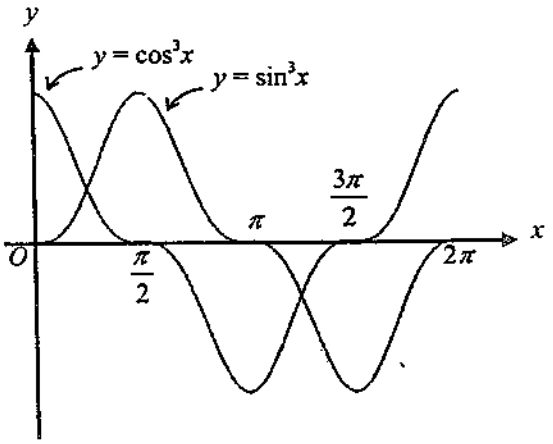
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \{-(1-\cos^2 x)\cdot(\cos x)' - (1-\sin^2 x)\cdot(\sin x)'\}dx$$

$$= \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\right)$$

$= \frac{5\sqrt{2}}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ។

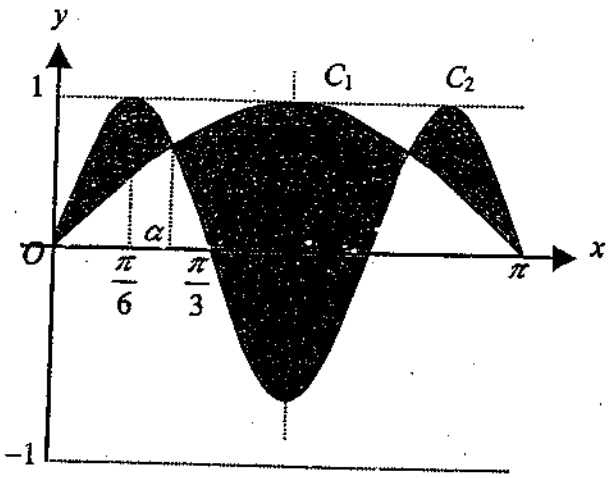
➲ ក្រាប $y = \sin^3 x$ និង $y = \cos^3 x$ បង្ហាញដោយរូបខាងស្តាំ។



លំហាត់ទី 63: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

កំនត់តំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $C_1: y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$ និង $C_2: y = \sin 3x\ (0 \le x \le \pi)$ ។

ចំលើយ



ក្រាបនៃ C_1 និង C_2 បង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ ។

តាង α ជាអាប់ស៊ីសនៃចំនុចប្រសព្វរវាង C_1 និង C_2

ក្នុងចន្លោះ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។ យើងបាន :

$\sin\alpha = \sin 3\alpha$

ដោយ $0 < \alpha < 3\alpha < \frac{3\pi}{2}$ យើងបាន :

$\pi - \alpha = 3\alpha$

ដូចនេះ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ យើងសង្កេតឃើញថាផ្ទៃ

ដែលពាសដូចបង្ហាញក្នុងរូប ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $x = \frac{\pi}{2}$ ។

$x = \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាដែលចង់រកគឺ :

$$2\left\{\int_0^{\alpha}(\sin 3x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \sin 3x)dx\right\}$$

$$= 2\left\{\int_0^{\alpha}(\sin 3x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}(\sin 3x - \sin x)dx\right\}$$

$$= 2\left\{\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right]_0^{\alpha} + \left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\right\}$$

$$= 2\left\{2\left(-\frac{1}{3}\cos 3\alpha + \cos\alpha\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right\}$$

$$= 2\left\{2\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3}\right\} = 2\left\{\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\right\}$$

$= \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី 64: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* (Calculating Areas)

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 2$ ។

1) រកដែនកំនត់នៃ x ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌវិសមីការ $f(x) \le 0$

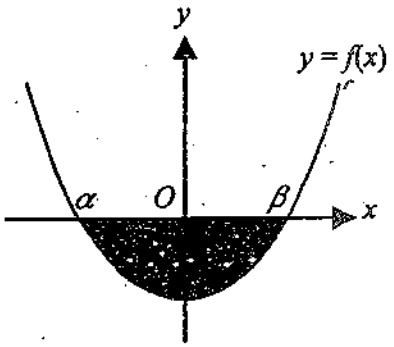
2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x)$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ចំលើយ

1) $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-2\le 0 \Leftrightarrow e^x+e^{-x}-4\le 0 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+1\le 0$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}\le e^x\le 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \ln(2-\sqrt{3})\le x\le \ln(2+\sqrt{3})$



2) យក $\alpha=\ln(2-\sqrt{3})$ និង $\beta=\ln(2+\sqrt{3})$ ។

នោះក្រាបនៃ $f(x)$ គឺរូបដែលបង្ហាញនៅខាងស្តាំ

ដូចនេះ

$$S=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx=-\int_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-2\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})-2x\right]_\alpha^\beta$$

$$=-\frac{1}{2}(e^\beta-e^{-\beta})+\frac{1}{2}(e^\alpha-e^{-\alpha})+2(\beta-\alpha)$$

ប៉ុន្តែ

$$-\alpha=-\ln(2-\sqrt{3})=\ln\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\ln(2+\sqrt{3})=\beta$$

ដូចនេះ

$e^\alpha=e^{-\beta}$ និង $e^\beta=e^{-\alpha}$

ដូចនេះ

$$S=-\frac{1}{2}(e^\beta-e^\alpha)+\frac{1}{2}(e^\alpha-e^\beta)+2(\beta-\alpha)$$

$$=(e^\alpha-e^\beta)+2(\beta-\alpha)$$

$$=\{(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\}+2\{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})\}$$

$=-2\sqrt{3}+4\ln(2+\sqrt{3})$ ឯកតាផ្ទៃ ។

➲ ខ្សែកោងដែលមានសមីការ $y=-\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ ហៅថា **"catenary"** ខ្សែកោងបានមកដោយព្យួរកូនចំងាំងដែលមានសណ្ឋានទៅនឹងខ្សែភ្ជាប់នឹងចំនុចពីរ ។ ដូចជាខ្សែក ។

លំហាត់ទី 65: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ ។

1) ពិនិត្យភាពកើន ចុះ និងតំលៃអប្បបរមាធ្យៀប និងអតិបរមាធ្យៀបនៃ $f(x)$ ហើយសង់ក្រាបនៃ f។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x)$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ចំលើយ

1) អនុគមន៍ $f(x) = x\sqrt{8-x^2} = x(8-x^2)^{\frac{1}{2}}$ កំណត់ក្នុងចន្លោះ $-2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}$ ។

ដើរវែរបស់វាគឺ

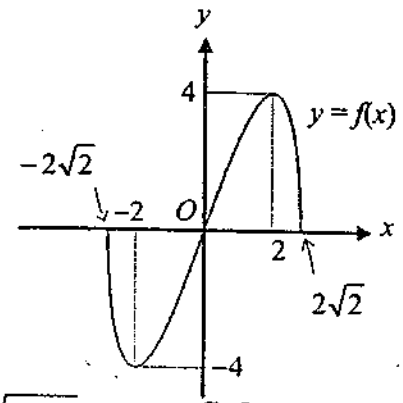
$$f'(x) = (8-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\cdot\frac{1}{2}(8-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = (8-x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(8-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$$

ដូចនេះយើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

x	$-2\sqrt{2}$		-2		2		$2\sqrt{2}$
$f'(x)$	គ្មានន័យ	$-$	0	$+$	0	$-$	គ្មានន័យ
$f(x)$	0	↘	-4	↗	4	↘	0

ដូចនេះ ក្រាបនៃ $y = f(x)$ បង្ហាញក្នុងរូបខាងក្រោម :



2) ខ្សែកោង $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ ឆ្លុះគ្នាធ្យៀបនឹងផ្ចិត O ។ យើងបាន :

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{2}} f(x)dx = 2\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{8-x^2}\,dx$$

$$= -\int_0^{2\sqrt{2}} (8-x^2)'(8-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\left[\frac{2}{3}(8-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី 66: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយ $y=\frac{1}{2x-1}, y=\frac{2}{4x+1}, x=1$ និង $x=2$ ។

ចំលើយ

ចំពោះ $1\le x\le 2$ យើងបាន $2x-1>0$ និង $4x+1>0$ ។ យើងបាន :

$$\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{4x+1}=\frac{3}{(2x-1)(4x+1)}>0$$

ដូចនេះ

$$S=\int_1^2\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{4x+1}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)'}{2x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(4x+1)'}{4x+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)-\frac{1}{2}\ln(4x+1)\right]_1^2=\frac{1}{2}\cdot\ln 3-\frac{1}{2}\cdot\ln 9-\frac{1}{2}\cdot\ln 1+\frac{1}{2}\cdot\ln 5$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)$$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី 67: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

ពិនិត្យខ្សែកោង $y=\sin 2x$ និង $y=\cos x$ ដែល $0\le x\le\pi$ ។

1) រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងនេះ ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងនេះ ។

ចំលើយ

1) $\sin 2x=\cos x\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow \cos x(1-2\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \text{ ឬ } \sin x=\frac{1}{2}$$

ដោយ $0\le x\le\pi$ យើងបាន :

$$x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}$$

ដោយ $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{\pi}{2}=0,$ និង $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

កូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វគឺ

$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$

2) ក្រាបនៃខ្សែកោងទាំងនេះបង្ហាញនៅខាងស្តាំ

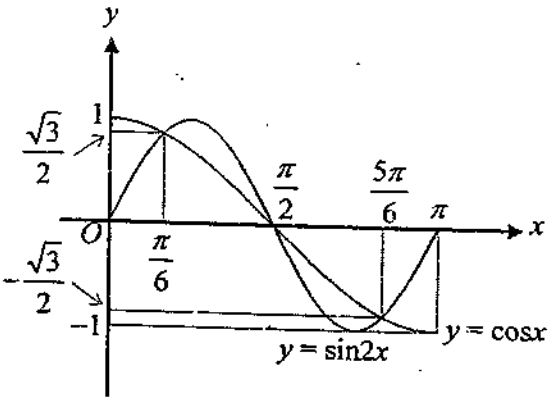
ដោយខ្សែកោងឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំនុច $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ យើងបាន :

$$S=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$=\frac{1}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ



លំហាត់ទី 68: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

តាង C ជាខ្សែកោង $y=e^{2x-1}$ និង l ជាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ចំនុច $P(1,e)$ ។

1) រកសមីការបន្ទាត់ l ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង C បន្ទាត់ l និង អ័ក្សអរដោនេ ។

ចំលើយ

1) ចំពោះ $y=e^{2x-1}$ យើងបាន $y'=2e^{2x-1}$ ។

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ $P(1,e)$ គឺ

$y-e=2e(x-1)$

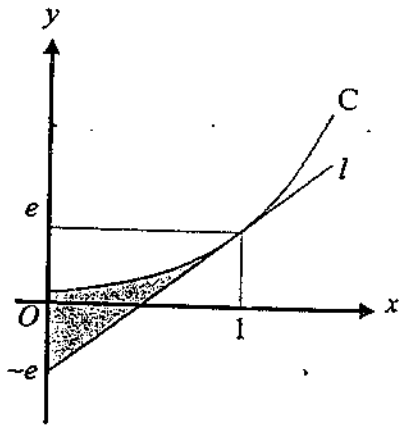
$y=2ex-e$

2) ក្រាបខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ l ដែលបង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ ។

យើងបាន :

$$S=\int_0^1\{e^{2x-1}-(2ex-e)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x-1}-ex^2+ex\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$$ ឯកតាផ្ទៃ ។



លំហាត់ទី 69: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y = xe^x$, l_1 និង l_2 ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ដែលគូសចេញពីចំនុច $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ។

1) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ដែលកាត់តាមចំនុច $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ។

2) រកផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ប៉ះដែលមាននៅក្នុងស៊ុមរូបទី 1 ។

ចំលើយ

1) ចំពោះ $y = xe^x$ យើងបាន :

$y' = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ (t, te^t) គឺ

$y - te^t = (1 + t)e^t(x - t)$

$y = (1 + t)e^t x - (1 + t)te^t + te^t$

$y = (1 + t)e^t x - t^2e^t$ ..... (i)

ដោយបន្ទាត់ប៉ះកាត់តាមចំនុច $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ យើងបាន :

$$0 = \frac{1}{2}(1 + t)e^t - t^2e^t \Leftrightarrow (1 + t)e^t - 2t^2e^t = 0 \Leftrightarrow (1 + t) - 2t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t + 1)(t - 1) = 0]$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ ឬ } -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ តាម (i) សមីការបន្ទាត់ប៉ះ

$y = 2ex - e$ និង $y = \frac{1}{2\sqrt{e}}x - \frac{1}{4\sqrt{e}}$ ។

2) ចំពោះ $y = xe^x$ យើងបាន :

$y' = (1 + x)e^x$

$y'' = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

ដូចនេះ យើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

x		-2		-1	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	$-2e^{-2}$	↘	$-e^{-1}$	↗

យើងបាន :

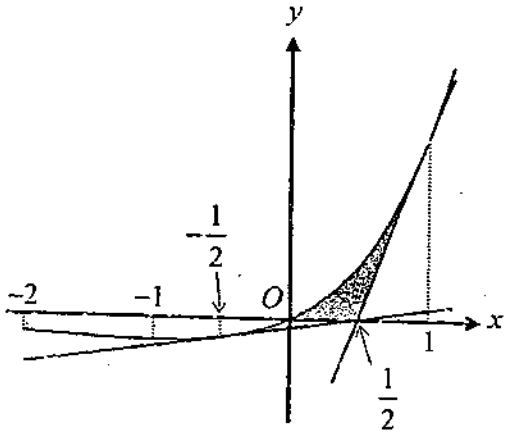
$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$$

ដូចនេះ ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះក្នុងសំនួរទី 1 បានបង្ហាញនៅខាងស្តាំ ។

ដូចនេះ

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{xe^x-\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}x-\frac{1}{4\sqrt{e}}\right)\right\}dx$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{xe^x-(2ex-e)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}xe^x dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}x-\frac{1}{4\sqrt{e}}\right)dx$$
$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2ex-e)dx$$



ប៉ុន្តែ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}xe^x dx=\left[xe^x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}e^x dx=e+\frac{1}{2\sqrt{e}}-\left[e^x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=e+\frac{1}{2\sqrt{e}}-e+\frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{e}}$$

ដូចនេះ

$$S=\frac{3}{2\sqrt{e}}-\left[\frac{1}{4\sqrt{e}}x^2-\frac{1}{4\sqrt{e}}x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\left[ex^2-ex\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{e}}+\frac{1}{4\sqrt{e}}-\frac{e}{4}$$
$$=\frac{7}{4\sqrt{e}}-\frac{e}{4}$$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី 70: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y=x\sin 2x$ កំនត់ចំពោះ $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ។ ឧបមាថា l ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំនុច $(a, a\sin 2a)$ ដែល $0<a<\frac{\pi}{2}$ ហើយដែល l កាត់តាមគល់តំរុយ $O(0, 0)$ ។

1) រកសមីការបន្ទាត់ l ។

2) គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ប៉ះ l ។

ចំលើយ

1)យក $f(x) = x\sin 2x$ នោះ

$f'(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ l គឺ

$y - a\sin 2a = f'(a)(x - a)$

$y - a\sin 2a = (\sin 2a + 2a\cos 2a)(x - a)$

$y = (\sin 2a + 2a\cos 2a)x - 2a^2\cos 2a$ ..... (i)

ដោយបន្ទាត់ l កាត់តាម $O(0, 0)$ យើងបាន :

$0 = (\sin 2a + 2a\cos 2a)\cdot 0 - 2a^2\cos 2a$

$2a^2\cos 2a = 0$

ដូចនេះ យើងបាន $a = \frac{\pi}{4}$ ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ l គឺ

$y = x$ (តាម (i))

2)តាមសំនួរ 1 បន្ទាត់ l គឺជាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ និងកាត់ C ត្រង់ $O(0, 0)$ យើងបាន

$x - x\sin 2x = x(1 - \sin 2x) \geq 0$ ចំពោះ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

ដោយ $x(1 - \sin 2x) > 0$ $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$

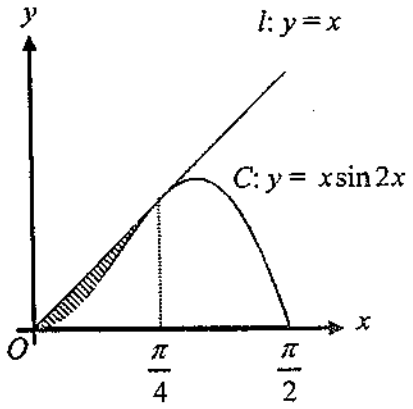
ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាចំណែលខ័ណ្ឌដោយ C និងបន្ទាត់ប៉ះ l បង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ ។ (សំគាល់ថា l និង C មិនកាត់គ្នាទេពេល $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$)

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាគឺ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x - x\sin 2x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} + \left[-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$$



លំហាត់ទី 71: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C_1 និង C_2 ជាខ្សែកោងដែលកំណត់ដោយ $y = \sin x$ និង $y = 2\sin 2x$ រៀងគ្នា។ បើ $0 \le x \le \pi$ រកក្រឡាផ្ទៃ S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C_1 និង C_2 ។

ចំលើយ

ក្រាប C_1 និង C_2 បង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ

តាង α ជាអាប់ស៊ីសនៃចំនុចប្រសព្វរវាង C_1 និង C_2

ក្នុងចន្លោះ $0 < x < \pi$ នោះ

$2\sin 2\alpha = \sin\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$

ដោយ $0 < x < \pi$ យើងបាន $\sin\alpha \neq 0$ ។

យើងបាន $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ ..... (i)

ផ្ទៃក្រលាគឺ :

$$\int_0^{\alpha}(2\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - 2\sin 2x)dx$$

$$= \int_0^{\alpha}(2\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\pi}^{\alpha}(2\sin 2x - \sin x)dx$$

$$= \left[-\cos 2x + \cos x\right]_0^{\alpha} + \left[-\cos 2x + \cos x\right]_{\pi}^{\alpha}$$

$$= 2(-\cos 2\alpha + \cos\alpha) + 2$$

$$= 2\{-(2\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha\} + 2$$

$$= 2\{-2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 2\}$$

$$= 2\left\{-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 2\right\} \quad \text{(តាម (i))}$$

$= \frac{17}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ។

លំហាត់ទី 72: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

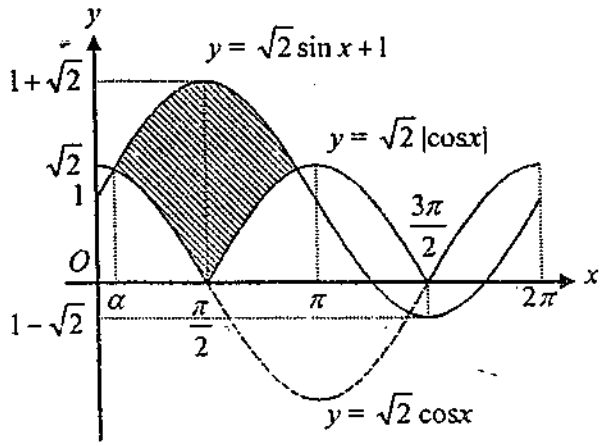
បើ $0 \le x \le 2\pi$ គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពី $y = \sqrt{2}\sin x + 1$ និង $y = \sqrt{\cos 2x + 1}$ ។

ចំលើយ

ដោយ

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\cos 2x+1} \\ &= \sqrt{(2\cos^2 x-1)+1} \\ &= \sqrt{2\cos^2 x} \\ &= \sqrt{2}\,|\cos x| \end{aligned}$$

ក្រាបនៃ $y=\sqrt{2}\sin x+1$ និង $y=\sqrt{\cos 2x+1}$ បង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ។



ដោយខ្សែកោងគ្មានចំនុចកាត់ក្នុងចន្លោះ $\pi \le x \le 2\pi$

យើងយកតែផ្ទៃនៃតំបន់ដែលឆ្លុតដែលបង្ហាញ ក្នុងរូប ប៉ុន្តែតំបន់ដែលឆ្លុតឆ្លុះគ្នាធ្យៀបនឹង $x=\frac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះ ឧបមាថាក្រាបកាត់គ្នាក្នុងចន្លោះ $0<x<\frac{\pi}{2}$ ពេល $x=\alpha$ ផ្ទៃក្រលា S គឺ

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{(\sqrt{2}\sin x+1)-\sqrt{2}\cos x\}dx = 2\left[-\sqrt{2}\cos x+x-\sqrt{2}\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)-(-\sqrt{2}\cos\alpha+\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha\right\} \\ &= \pi-2\sqrt{2}-2\alpha+2\sqrt{2}\,(\sin\alpha+\cos\alpha) \\ &= \pi-2\sqrt{2}-2\alpha+4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

ដោយ $x=\alpha$ គឺជារឹសនៃសមីការ $\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\sin x+1$ យើងបាន

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha+1 \\ &\sqrt{2}\,(\sin\alpha-\cos\alpha)=-1 \\ &2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \\ &\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដោយ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ យើងបាន $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ ។

ដូចនេះ

$$\begin{aligned} &\alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6} \\ &\alpha=\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបាន :

$$S=\pi-2\sqrt{2}\ -2\alpha+4\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\pi-2\sqrt{2}\ -2\cdot\frac{\pi}{12}+4\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{5\pi}{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$ ឯកតាផ្ទៃ។

ខ) បើយើងត្រូវបង្ហាញថាក្រាបមានចំនុចប្រសព្វតែពីរតត់ក្នុងចន្លោះ $0\le x\le 2\pi$ យើងកំនត់ភាពកើនចុះនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{2}\sin x+1-\sqrt{2}\,|\cos x|$ ។

លំហាត់ទី 73: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

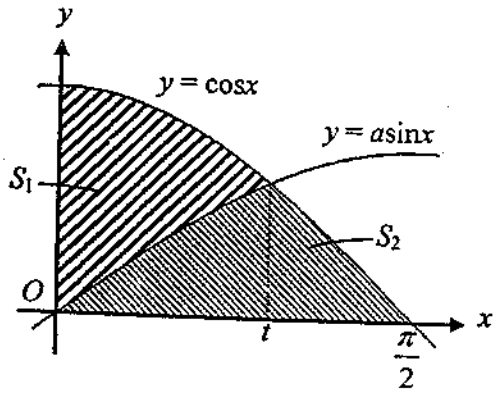
តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស អ័ក្សអរដោនេ និងខ្សែកោង $y=\cos x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ ។ បើខ្សែកោង $y=a\sin x$ $(a>0)$ ចែក S ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នា នោះរកតំលៃនៃ a

ចំលើយ

ឧបមាថា $x=t$ គឺជាអាប់ស៊ីសនៃចំនុចប្រសព្វរវាង $y=\cos x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ និង $y=a\sin x$ $(a>0)$ នោះយើងបាន $\cos t=\sin t$

ដោយ $a\neq 0$ យើងបាន :

$$a=\frac{\cos t}{\sin t}\quad\cdots\cdots\text{(i)}$$



តាង S_1 និង S_2 ជាផ្ទៃដែលបង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ ។ នោះ

$$S=S_1+S_2$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1$$

$$S_1=\int_0^{t}(\cos x-a\sin x)dx=\left[\sin x+a\cos x\right]_0^{t}$$

$$=\sin t+a\cos t-a$$

ដោយ $S=S_1+S_2=2S_1$ យើងបាន :

$$2(\sin t+a\cos t-a)=1$$

ដូចនេះ តាម (i) យើងបាន :

$$2\sin t+2\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\cos t-2\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=1$$

$$2\sin^2 t+2\cos^2 t-2\cos t=\sin t$$

$$\sin t=2(1-\cos t)\quad\cdots\cdots\text{(ii)}$$

ដូចនេះ

$$2^2(1-\cos t)^2+\cos^2 t=1$$

$4(1-2\cos t+\cos^2 t)+\cos^2 t=1$

$5\cos^2 t-8\cos t+3=0$

$(5\cos t-3)(\cos t-1)=0$

ដោយ $0<t<\frac{\pi}{2}$ យើងបាន $\cos t=\frac{3}{5}$ ។

ដូចនេះ តាម (ii)យើងបាន :

$$\sin t=2\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

ដូចនេះតាម (i) យើងបាន :

$$a=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{3}{4}$$ ។

លំហាត់ទី 74: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

តាង C ជាខ្សែកោង $y=\sin x$ ដែល $x\geq 0$ និង l ជាបន្ទាត់ $y=mx$ ដែលកាត់ចំនុច $O(0,0)$ និង $(\alpha,\sin\alpha)$ ដែល $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ។ ឧបមាថា S_1 ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C និង l ដែល $0\leq x\leq\alpha$ ដែល S_2 ផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C, l និងបន្ទាត់ $x=\frac{\pi}{2}$ ដែល $x\geq\alpha$ ហើយដែល $S=S_1+S_2$ ។

1) បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា S ជាអនុគមន៍នៃ α ។
2) រកតំលៃនៃ α ដែលធ្វើអោយ S អប្បបរមា ។

ចំណើយ

1) $S=\int_0^{\alpha}(\sin x-mx)dx$

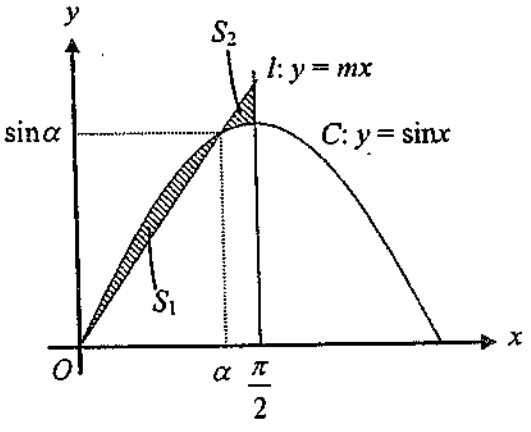
$$=\left[-\cos x-\frac{1}{2}mx^2\right]_0^{\alpha}$$

$$=-\cos\alpha-\frac{1}{2}m\alpha^2+1$$

$$S_2=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(mx-\sin x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}mx^2+\cos x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}m\pi^2-\frac{1}{2}m\alpha^2-\cos\alpha$$



$$S = S_1 + S_2 = -\cos\alpha - \frac{1}{2}m\alpha^2 + 1 + \frac{1}{8}m\pi^2 - \frac{1}{2}m\alpha^2 - \cos\alpha$$

$$= -2\cos\alpha - m\alpha^2 + 1 + \frac{1}{8}m\pi^2$$

ដោយ $y = mx$ កាត់ $y = \sin x$ ត្រង់ចំនុច $(\alpha, \sin\alpha)$ យើងបាន :

$$m\alpha = \sin\alpha$$

$$m = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

ដូចនេះ $S = -2\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\alpha^2 + 1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\pi^2$

$$= \left(\frac{\pi^2}{8\alpha} - \alpha\right)\sin\alpha - 2\cos\alpha + 1$$

2) $\frac{dS}{d\alpha} = \left(-\frac{\pi^2}{8\alpha^2} - 1\right)\sin\alpha + \left(\frac{\pi^2}{8\alpha} - \alpha\right)\cos\alpha + 2\sin\alpha$

$$= \frac{8\alpha^2 - \pi^2}{8\alpha^2}\sin\alpha - \frac{8\alpha^2 - \pi^2}{8\alpha}\cos\alpha = \frac{8\alpha^2 - \pi^2}{8\alpha^2}\sin\alpha - \frac{8\alpha^2 - \pi^2}{8\alpha^2}\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{8\alpha^2 - \pi^2}{8\alpha^2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

យក $f(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha$ ។

នោះ $f'(\alpha) = \cos\alpha - \cos\alpha + \alpha\sin\alpha$

$$= \alpha\sin\alpha$$

ដូចនេះ $f'(\alpha) > 0$ ចំពោះ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ហើយ $f(\alpha)$ កើនដាច់ខាតក្នុងចន្លោះ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ។

ដោយ $f(0) = 0$ យើងបាន $f(\alpha) > 0$ ចំពោះ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះ $\frac{dS}{d\alpha} = 0$ ពេល $8\alpha^2 - \pi^2 = 0$ ឬ $\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ។

យើងបាន :

$$\alpha < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dS}{da} < 0$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dS}{da} > 0$$

ដូចនេះ S មានអប្បបរមាត្រង់ $\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី 75: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

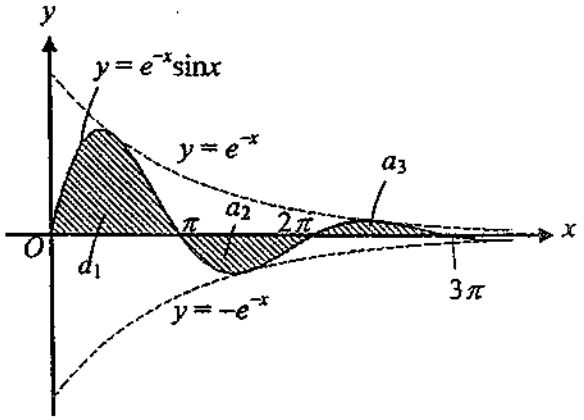
f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=e^{-x}\sin x$ តាង a_n ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង $f(x)$ ចំពោះ $(n-1)\pi \le x \le n\pi$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

1) រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

2) កំនត់តំលៃ $\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\right)\div\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$ ។

ចំលើយ

1) ក្រាបនៃ $f(x)$ បង្ហាញនៅខាងស្តាំ



ចំពោះ $(n-1)\pi \le x \le n\pi$ យើងបាន :

$e^{-x}\sin x \ge 0$ when $n = 1, 3, 5$

$e^{-x}\sin x \le 0$ when $n = 2, 4, 6$

ដូចនេះ យើងបាន :

$$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|e^{-x}\sin x|dx$$

$$=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x dx\right|$$

ប៉ុន្តែ

$(e^{-x}\sin x)' = e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$(e^{-x}\cos x)' = e^{-x}(-\cos x-\sin x)$

ដូចនេះ

$(e^{-x}\sin x)' + (e^{-x}\cos x)'$

$= e^{-x}(-\sin x+\cos x)+e^{-x}(-\cos x-\sin x)$

$\{e^{-x}(\sin x+\cos x)\}' = -2e^{-x}\sin x$

$$e^{-x}\sin x=\left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right)'$$

ដូចនេះ

$$a_n=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|e^{-n\pi}\cdot(-1)^n-e^{-(n-1)\pi}\cdot(-1)^{(n-1)}\right|=\frac{1}{2}\left|(-1)^n(e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi})\right|$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi})$$

$$= \frac{(1+e^{\pi})e^{-n\pi}}{2}$$

តាមសំនួរទី 1 យើងបាន :

$$a_n = \frac{(1+e^{\pi})e^{-n\pi}}{2} = \frac{(1+e^{\pi})e^{-\pi}}{2}\cdot(e^{-\pi})^{n-1} = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot(e^{-\pi})^{n-1}$$

$$a_{2n-1} = \frac{(1+e^{\pi})e^{-(2n-1)\pi}}{2} = \frac{(1+e^{\pi})e^{\pi}}{2}\cdot(e^{-2\pi})^{n} = \frac{(1+e^{\pi})e^{\pi}e^{-2\pi}}{2}\cdot(e^{-2\pi})^{n-1}$$

$$= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot(e^{-2\pi})^{n-1}$$

ដូចនេះ ស៊ីត $\{a_k\}$ និង $\{a_{2k-1}\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធ្យៀបរួមគឺ $e^{-\pi}$ និង $e^{-2\pi}$ រៀងគ្នា ដោយ $0 < e^{-2\pi} < e^{-\pi} < 1$ ស៊ីតទាំងពីរជាស៊ីតរួម ។

តាង $a_1 = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$ យើងបាន :

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\right) \div \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\right) = \frac{a_1}{1-(e^{-\pi})^2} \div \frac{a_1}{1-e^{-\pi}} = \frac{1-e^{-\pi}}{1-(e^{-\pi})^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\pi}}$$

លំហាត់ទី 76: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

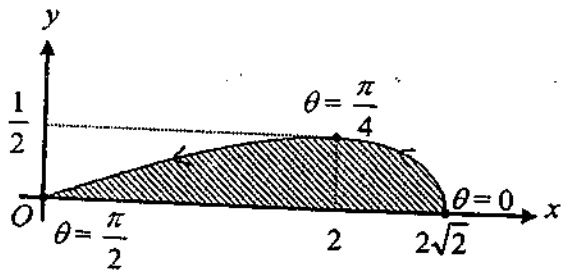
គណនាផ្ទៃក្រឡាស ដែលខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងខ្សែកោងខាងក្រោមលើប្លង់ (xoy) ។

$x = 2\sqrt{2}\cos\theta, y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ ដែល $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ។

ចំលើយ

ពេលតំលៃ θ ប្រែប្រួលពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$ តំលៃនៃ x និង y ប្រែប្រួលតាមតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x	$2\sqrt{2}$	↘	2	↘	0
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0



ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ឆ្នូតដែលបង្ហាញក្នុងរូបខាង ស្មើគឺ

$$\int_0^{2\sqrt{2}} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\sin 2\theta(-2\sqrt{2}\sin\theta)d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin\theta d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta (\sin\theta)' d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ។

➲ ដើម្បីគូរក្រាបខាងលើជាក្រាបអោយបានសុក្រិត យើងត្រូវកំនត់ភាពប៉ោងនិង ភាពផុតនៃអនុគមន៍។ ប៉ុន្តែអ្នកមិនចាំបាច់ធ្វើដូចនេះទេក្នុងសំនួរនេះ ពីព្រោះសំនួរនេះមិនបានតំរូវអោយសង់ក្រាបទេ។ វាគ្រប់គ្រាន់ហើយ ត្រឹមតែអ្នកគូរក្រាបតាមទ្រង់ទ្រាយ ដើម្បីទសទាយតំលៃនៃ x និង y ចំពោះ $\theta = 0, \frac{\pi}{4}$ និង $\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី 77: ការគណនាផ្ទៃក្រឡា (Calculating Areas)

ពិនិត្យខ្សែកោងដែលកំនត់ដោយ $x = 3t^2$ និង $y = 3t - t^3$ ដែល t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

1) សង់ក្រាបនៃខ្សែកោងនេះលើប្លង់ (xoy) ។ (អ្នកអាចគូរវាដោយមិនចាំបាច់កំនត់ភាពប៉ោង រឺ ផុត)

2) គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងនេះ។

ចំលើយ

1) ដោយ $x = 3t^2$ គឺជាអនុគមន៍គូ $y = 3t - t^3$ ជាអនុគមន៍សេស ចំនុចនៅលើប្លង់ xy ទាក់ទងទៅនឹង $t = u$ និង $t = -u$ ស៊ីមេទ្រីគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដូចនេះខ្សែកោងនេះ ស៊ីមេទ្រីគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

យើងបាន :

$y = 0 \Leftrightarrow t = 0$ រឺ $t = \pm\sqrt{3}$

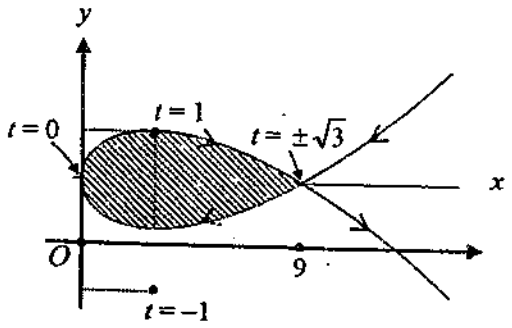
$\Leftrightarrow x = 0$ រឺ 9

$y' = 3 - 3t^2 = 3(1 - t)(1 + t)$

ដូចនេះ យើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x	$+\infty$	↘	9	↘	3	↘	0	↗	3	↗	9	↗	$+\infty$
y'	$+\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0	↘	$+\infty$

ដូចនេះ យើងបានខ្សែកោងបង្ហាញនៅខាងស្តាំ ។



2) ដោយខ្សែកោងនេះស៊ីមេទ្រីគ្នាធ្យៀបនឹងអ័ក្ស

អាប់ស៊ីស យើងបាន :

$$2\int_0^9 y\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} (3t-t^3)\cdot 6t\,dt$$

$$= 12\int_0^{\sqrt{3}} (3t^2-t^4)dt$$

$$= 12\left[t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{3}} = 12\left(3\sqrt{3}-\frac{9}{5}\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{72}{5}\sqrt{3}$$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី 78: *ការគណនាផ្ទៃក្រឡា* **(Calculating Areas)**

តាង C ជាខ្សែកោង លើប្លង់ xy កំនត់ដោយ $x = 2\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ និង $y = \sin(2t+\pi)$

ដែល t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែល $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

1) សង់ក្រាបនៃខ្សែកោង C ។

2) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ C ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះធំបំផុត ។

3) រកក្រឡាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះដែលបង្ហាញក្នុងសំនួរទី 2 និង ពីរបន្ទាត់ $x = \sqrt{2}$ និង $x = -\sqrt{2}$ ។

ចំលើយ

1)ដោយ $x = 2\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ និង $y = \sin(2t+\pi)$ យើងបាន :

$$x = 2\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin t$$

$$y = \sin(2t+\pi) = -\sin 2t = -2\sin t\cos t = -2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ យើងបាន $-2 < x < 2$។

ដូចនេះ

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = \frac{-2x(\sqrt{4-x^2}) - (2-x^2)\cdot\frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2} = \frac{x^3-6x}{(\sqrt{4-x^2})^3} = \frac{x(x^2-6)}{(\sqrt{4-x^2})^3}$$

ដូចនេះ យើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម :

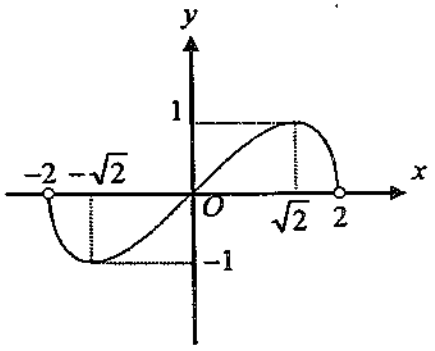
x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
y'	---	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	---
y''	---	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	---
y	---	⤵	-1	∧	0	⤴	1	⤵	---

ដោយ $\lim_{x\to 2^-} y' = \lim_{x\to -2^+} y' = -\infty$, ក្រាបនៃខ្សែកោង C គឺជារូបភាពដែលបង្ហាញខាងស្តាំ។

1) តាមតារាងយើងបាន សំនួរទី 1 តំលៃអតិបរមានៃ y'

គឺ 1 ត្រង់ $x = 0$។

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ C ដែលមានមេគុណធំបំផុតគឺ $y = x$។



2) ដោយ $y = x$ និង $y = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង $O(0, 0)$

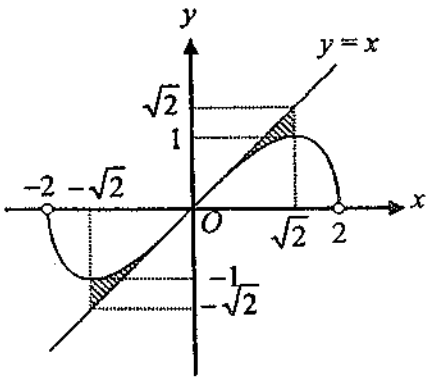
យើងបានផ្ទៃក្រឡាគឺ

$$2\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\right\}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (4-x^2)'(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}$$ ឯកតាផ្ទៃ។

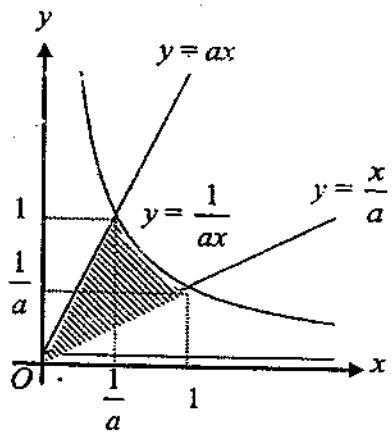


លំហាត់ទី 79: ការគណនាមាឌ (Calculating Volume)

ឧបមាថា $a>1$ និង $x\ge 0$ តាង $V(a)$ ជាមាឌសូលីតដែលបង្កើតឡើងដោយការបង្វិលផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=ax,\ y=\frac{x}{a}$ និងខ្សែកោង $y=\frac{1}{ax}$ ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។រកតំលៃអតិបរមានៃ $V(a)$ ។

ចំលើយ

ដោយ $x\ge 0$ ខ្សែកោង $y=\frac{1}{ax}$ កាត់បន្ទាត់ $y=ax$ និង $y=\frac{x}{a}$ ត្រង់ $\left(\frac{1}{a},1\right)$ និង $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ រៀងគ្នា ។ យើងបាន :



$$V(a)=\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{a}+\int_{\frac{1}{a}}^{1}\pi\left(\frac{1}{ax}\right)^2dx-\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot 1$$

$$=\frac{\pi}{3a}+\int_{\frac{1}{a}}^{1}\pi\left(\frac{1}{ax}\right)^2dx-\frac{\pi}{3a^2}$$

$$=\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi}{a^2}\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{1}{x^2}dx-\frac{\pi}{3a^2}$$

$$=\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi}{a^2}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{a}}^{1}-\frac{\pi}{3a^2}=\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi}{a^2}(-1+a)-\frac{\pi}{3a^2}$$

$$=\frac{4\pi}{3a}-\frac{4\pi}{3a^2}=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{4\pi}{3}\left\{-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

$$\le\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{3}\quad\text{(វិសមីការពិតបើ }\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=0\text{ (i.e. }a=2\text{) ។)}$$

ដូចេ្នះ $V(a)$ មានតំលៃអតិបរមាស្មើនឹង $\frac{\pi}{3}$ បើ $a=2$ ។

លំហាត់ទី 80: ការគណនាមាឌ (Calculating Volume)

ឧបមាថា $a>0$ និង $b>0$ តាង S ជាតំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y=x^2-ax+4$ និង $y=-x^2+bx+4$ ។

1) រកលក្ខខណ្ឌដែលធ្វើអោយ S គ្មានចំនុចរួមជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

2) ពេល S គ្មានចំនុចរួមជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសគណនាមាឌ V នៃសូលីតដែលបង្កើតឡើងដោយការបង្វិល S ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសដោយប្រើ a និង b ។

ចំលើយ

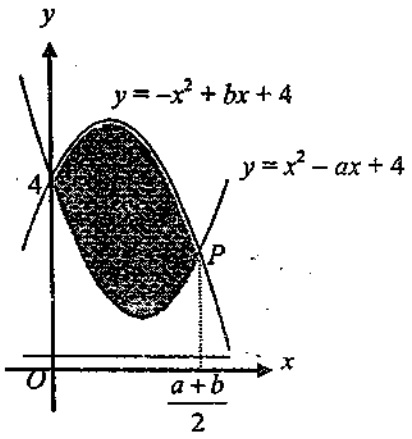
1) អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងនេះគឺ :

$x^2 - ax + 4 = -x^2 + bx + 4$

$2x^2 - (a+b)x = 0$

$\{2x - (a+b)\}x = 0$

$x = 0,\ \dfrac{a+b}{2}$



ហើយ

$$y = x^2 - ax + 4 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$y = -x^2 + bx + 4 = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{b^2}{4}\right)$$

ដោយ $a > 0$ និង $b > 0$ យើងបាន :

$0 < \dfrac{a}{2} < \dfrac{a+b}{2}$ និង $0 < \dfrac{b}{2} < \dfrac{a+b}{2}$

និង ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងនេះបង្ហាញខាងលើ

ដូច្នេះ លក្ខខណ្ឌដែលធ្វើអោយ S ផ្ទានចំនុចរួមជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសលុះត្រាតែ

$$x^2 - ax + 4 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 4 - \frac{a^2}{4} > 0$$

ចំពោះ $0 \le x \le \dfrac{a+b}{2}$

ដោយ $0 \le \dfrac{a}{2} < \dfrac{a+b}{2}$ លក្ខខណ្ឌដែលយើងមាន នោះយើងបាន $4 - \dfrac{a^2}{4} > 0$ ។

ដូច្នេះ

$0 < a < 4$

2) $V = \int_0^{\frac{a+b}{2}} \pi\{(-x^2 + bx + 4)^2 - (x^2 - ax + 4)^2\}dx$

$= \int_0^{\frac{a+b}{2}} \pi\{2(a-b)x^3 + (-16 - a^2 + b^2)x^2 + 8(a+b)x\}dx$

$= \pi\left[\dfrac{(a-b)}{2}x^4 + \dfrac{(-16 - a^2 + b^2)}{3}x^3 + 4(a+b)x^2\right]_0^{\frac{a+b}{2}}$

$= \pi\left\{\dfrac{(a-b)}{2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 + \dfrac{(-16 - a^2 + b^2)}{3}\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3 + 4(a+b)\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right\}$

$= \pi\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\left\{\dfrac{(a-b)}{2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{(-16 - a^2 + b^2)}{3}\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + 4(a+b)\right\}$

$$= \pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a+b)\left(\frac{a^2-b^2}{8}+\frac{-16-a^2+b^2}{6}+4\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}(a+b)^3\left(\frac{3(a^2-b^2)+4(-16-a^2+b^2)+96}{24}\right)$$
$$= \frac{\pi}{96}(a+b)^3(32-a^2+b^2)$$

លំហាត់ទី 81: *ការគណនាមាឌ* **(Calculating Volume)**

រកក្រឡាផ្ទៃខាង S នៃស្វ៊ែដែលមានកាំ r ។

ចំលើយ

ពិនិត្យរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ។

ស្វ៊ែមួយដែលមានកាំ r គឺបង្កើតឡើងដោយការបង្វិលរង្វង់ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដោយ $y \geq 0$ ផ្នែកនៃរង្វង់នេះគឺ :

$$y = \sqrt{r^2-x^2}$$

ដូច្នេះ

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

នោះក្រឡាផ្ទៃខាង S នៃស្វ៊ែដែលមានកាំ r គឺ :

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$
$$= 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi[rx]_{-r}^{r}$$
$$= 4\pi r^2$$

វិធីផ្សេងទៀត

ពិនិត្យ $y \geq 0$ ផ្នែកនៃរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ និងយក $x = r\cos\theta$ និង $y = r\sin\theta$ ។

ស្វ៊ែដែលមានកាំ r បង្កើតឡើងដោយការបង្វិលកន្ទុះរង្វង់ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

យើងបាន :

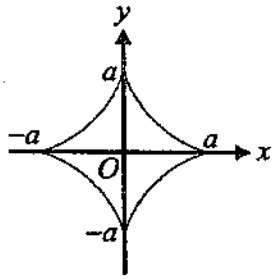
$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}$$
$$= r$$

ដូច្នេះ

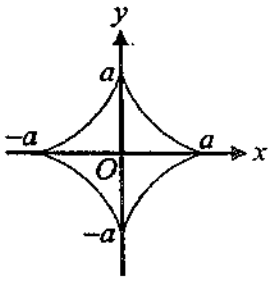
$$S = 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} r^2\sin\theta d\theta$$
$$= 2\pi r^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$
$$= 4\pi r^2$$

លំហាត់ទី 82: ការគណនាមាឌ (Calculating Volume)



រូបដែលបង្ហាញនៅខាងស្តាំហៅថា "asteroid" និង បង្ហាញដោយ សមីការ : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ ។ រកក្រឡាផ្ទៃខាង S នៃសូលីតដែលបង្កើតឡើងដោយ ការបង្វិល asteroid ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ចំលើយ



សមីការ asteroid អាចសរសេរជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រដូចខាងក្រោម :

$x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ ដែល $0 \le \theta \le 2\pi$ ។

យើងបាន :

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,\frac{d\theta}{dx}$$
$$= \sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,\frac{d\theta}{dx}$$
$$= \sqrt{9a^2\cos^4\theta\sin^2\theta+9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dx}$$
$$= 3a\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,\frac{d\theta}{dx}$$
$$= 3a\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta}\,\frac{d\theta}{dx}$$
$$= 3a\left|\cos\theta\sin\theta\right|\frac{d\theta}{dx}$$

ដោយ asteroid សីមេទ្រីគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ យើងបាន :

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}d\theta$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\theta\cdot 3a\left|\cos\theta\sin\theta\right|\frac{d\theta}{dx}dx$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos\theta d\theta \qquad (\cos\theta\sin\theta\geq 0 \text{ ចំពោះ } 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(\sin\theta)'d\theta = 12\pi a^2\left[\frac{\sin^5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{12\pi a^2}{5}$$