Infinity
Publishing House

ថ្នាក់ទី១១

ស្វ៊ីត ចំឆ្ពុសពិត

☞ មេរៀនៈ

☞ ឧទាហរណ៍ និងលំហាត់ប្រតិបត្តិ ✍

☞ លំហាត់ មានដំណោះស្រាយ ✍

រៀបរៀងដោយៈ ហ៊ុីង ទុន្នី

ចេញផ្សាយលើកទី២

.

អារម្ភកថា

ជាធម្មតាអ្នកសិក្សាភាគច្រើនតែងតែចាត់ទុកមុខវិជ្ជា **គណិតវិទ្យា** ថាជាមុខវិជ្ជាដែលមានភាពស្មុគស្មាញខ្លាំង និងពិបាកក្នុងការរៀន។ បើតាមពិតទៅមុខវិជ្ជានេះមិនពិបាករៀនដូចអ្វីដែលអ្នកគិតទេ មុខវិជ្ជានេះគឺទាមទាឱ្យយើងគិតនិងវិភាគដើម្បីយល់ពីហេតុផល និងតម្រូវការនូវឯកសារជាច្រើនដើម្បីជាជំនួយផងដែរ ។ ហេតុនេះហើយទើបបណ្តាប្រទេសជឿនលឿន គេឱ្យតម្លៃណាស់ទៅលើឯកសារឬសៀវភៅដើម្បីជាជំនួយ ដល់អ្នកសិក្សារៀនសូត្រ ។ ដោយឡែកដោយសារតែខ្ញុំមើលឃើញថានៅប្រទេសយើងពុំទាន់មានសៀវភៅគណិតវិទ្យាច្រើនដែលសរសេរដោយប្រើកម្មវិធី LateX ដូចនៅតាមបណ្តាប្រទេសជឿនលឿន។ហេតុនេះហើយទើបធ្វើឲ្យកូនសៀវភៅមួយក្បាលនេះលេចជារូបរាងឡើង។

សៀវភៅ **ស្ទីតចំនួនពិត** នេះគឺត្រូវបាន រៀបចំដោយធ្វើការពន្យល់បកស្រាយទៅលើខ្លឹមសារមេរៀនដែលទាក់ទងនឹងស្ទីតចំនួនពិត។ ក្នុងនោះផងដែរខ្ញុំបាទជាអ្នករៀបរៀងក៏បានបញ្ចូលនូវឧទាហរណ៍ ព្រមទាំងលំហាត់ប្រតិបត្តិដើម្បីឱ្យមិត្តអ្នកអានយល់កាន់តែច្បាស់ពីអត្ថន័យនៃមេរៀន។ ផ្នែកទី២នៃសៀវភៅគឺត្រូវបានដាក់បញ្ចូលនូវលំហាត់ និងដំណោះស្រាយនៃលំហាត់ទាំងនោះដើម្បីឱ្យមិត្តអ្នកអានកាន់តែស្និទ្ធិស្នាលជាមួយនឹងសៀវភៅនេះ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង និង និពន្ធខ្ញុំបាទនឹងរងចាំនូវការរិះគន់ដើម្បីកែលម្អជានិច្ច។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅនេះនៅតែមានកំហុសកើតមានឡើង ហេតុនេះហើយខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុសទាំងអស់ដែលកើតមានឡើង។ ប្រសិនបើមិត្តអ្នកអានរកឃើញនូវកំហុសក្នុងសៀវភៅនេះ សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទ

តាមរយៈ Facebook Account: Hing Vothy

Facebook Page : រៀនគ្មានដែនកំណត់ ឬ Infinity Publishing House

Email: Hingvuthy300@gmail.com

Phone: 016 434 006

ភ្នំពេញ , ថ្ងៃទី ១៥ ខែមករា ឆ្នាំ២០២០

ហ៊ីង វុទ្ធី

សំណូមពររបស់អ្នករៀបរៀងទៅកាន់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សា

ការស្រាវជ្រាវបន្ថែមពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់អភិវឌ្ឍខ្លួនក្នុងផ្នែកណាៗទាំងអស់ ។ ហេតុនេះហើយខ្ញុំបាទសូមលើកទឹកចិត្តដល់ប្អូនសិស្សានុ សិស្ស និស្សិត និងលោកគ្រូអ្នកគ្រូទាំងអស់ប្រឹងស្រាវជ្រាវបន្ថែម ព្រមទាំងបង្កើតឯកសារល្អៗសម្រាប់ប្រទេសជាតិយើង ។ មនុស្សខុសពីសត្វត្រង់ថាមនុស្សអាចនឹងមិនស្លាប់ ។ ក្នុងន័យនេះ ខ្ញុំបាទចង់មានន័យថាពេលដែលយើងប្រឹងស្រាវជ្រាវឯកសារ ហើយចងក្រងទុក ។

នោះក្មេងជំនាន់ក្រោយនឹងដើរដល់ចំណុចដែលយើងបានបញ្ចប់បានលឿន ហើយពួកគេអាចស្រាវជ្រាវទៅមុខទៀតបានឆ្ងាយ ។ សំណៅឯកសារដែលពួកគេបានបន្សល់ទុកទៀតសោតនឹងបន្តជះឥទ្ធិពលបែបនេះជាបន្តបន្ទាប់រហូតទៅដល់ចំណុចអភិវឌ្ឍយ៉ាងអស្ចារ្យមួយ ។

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

១. លោកគ្រូ ម៉ម ម៉ារ៉ត	៤. លោក អូន ណែត
២. លោកគ្រូ ហ៊ីង រុទ្ធី	៦. លោក ហ៊ុន ប៊ុនឆែន
៣. លោកគ្រូ ស្រស់ ប៊ុនលីន	៧. លោក ខឹម ជ្រី
៤. លោកគ្រូ ន្ជន លាង	៨. លោក ចុល សីហា

រៀបរៀងដោយ

លោកគ្រូ **ហ៊ីង ឫទ្ធី**

រាយអត្ថបទដោយ

លោកគ្រូ **ហ៊ីង ឫទ្ធី**

បាមថតចំលង

មាតិកា

១ ស្ទីតចំនួនពិត 1

១.១ សញ្ញាណនៃស្ទីត 1

១.២ និយមន័យ 1

១.៣ តួទី n នៃស្ទីត 3

១.៤ អថេរទាពនៃស្ទីត 4

១.៤.១ ស្ទីតកើន 4

១.៤.២ ស្ទីតចុះ 5

១.៤.៣ ស្ទីតម៉ូណូតូន 6

១.៥ ស្ទីតទាល់ 7

១.៥.១ ស្ទីតទាល់លើ 7

១.៥.២ ស្ទីតទាល់ក្រោម 8

១.៥.៣ ស្ទីតទាល់ 9

២ ស្ទីតនព្វន្ត 11

២.១ និយមន័យនៃស្ទីតនព្វន្ត 12

២.២ តួទី n នៃស្ទីតនព្វន្ត 14

២.៣ ផលបូកតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្ទីតនព្វន្ត 17

២.៤ ផលបូកនៃស្ទីតនព្វន្ត 19

៣ ស្ទីតធរណីមាត្រ 21

៣.១ និយមន័យនៃស្ទីតធរណីមាត្រ 22

៣.២ តួទី n នៃស្ទីតធរណីមាត្រ 23

៣.៣ ផលគុណតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្ទីតធរណីមាត្រ 25

៣.៤ ផលបូកនៃស្ទីតធរណីមាត្រ 26

៣.៥ ស្ទីតធរណីមាត្រអនន្តតួ 28

៤ ផលបូកនៃស៊ីតផ្សេងៗ 31

៤.១ និមិត្តសញ្ញាផលបូកនៃស៊ីត $\sum$ 31

៤.១.១ លក្ខណៈនៃផលបូក 33

៤.២ ស៊ីតមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n} k^p$ 35

៤.៣ ស៊ីតមានទម្រង់ $p + pp + ppp + ... + ppp...pp$ ដែល $0 < p \leq 9$ 40

៤.៤ ស៊ីតមានទម្រង់ $pq + pqpq + pqpqpq + ... + pqpqpq...pq$ 42

៤.៥ ស៊ីតដែលមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k.a_{k+1}}$ 43

៤.៦ ស៊ីតមានទម្រង់ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}$ 45

៤.៧ ស៊ីតមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 46

៥ កំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស៊ីត 47

៥.០.១ ផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស៊ីត 47

៥.០.២ ផលសងតួលំដាប់ទីពីរនៃស៊ីត 49

៦ អនាគ័ទនងតួនៃស៊ីត 51

៦.១ កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ 51

៦.១.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a.u_n + f(n)$ 52

៦.២ កំណត់តួទូទៅនៃទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = f(u_n)$ 58

៦.២.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = \frac{u_n + \alpha}{u_n + \beta}$ 58

៦.២.២ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ 62

៧ វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា 71

៨ លំហាត់ 75

៩ លំហាត់និងដំណោះស្រាយ 87

៩.១ ឯកសារយោង 194

ជំពូក ១

ស៊ីតចំនួនពិត

១.១ សញ្ញាណនៃស៊ីត

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=2x+1$ បើយកតម្លៃ $x=1,2,3,4,\cdots$

នោះគេបាន ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=2(1)+1=3$

ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=2(2)+1=5$

ចំពោះ $x=3$ នោះ $f(3)=2(3)+1=7$

ចំពោះ $x=4$ នោះ $f(4)=2(4)+1=9$

បើគេតម្រៀបចំនួនខាងលើតាមលំដាប់

គេបាន $f(1),f(2),f(3),f(4),\cdots$ ឬ $3,5,7,9,\cdots$ ការតម្រៀបបែបនេះហៅថា **ស៊ីតចំនួនពិត**

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$ ហៅថាសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ហៅថាសំណុំចំនួនពិត

១.២ និយមន័យ

និយមន័យ ១.២.១ ស៊ីតចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$n\longmapsto f(n)=u_n$$

ឧទាហរណ៍ ១

គេមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$n\longmapsto f(n)=3n-1$$

គេសង្កេតឃើញថា

បើ $n=1$ នោះ $f(1)=3\times1-1=2$

បើ $n=2$ នោះ $f(2)=3\times2-1=5$

បើ $n=3$ នោះ $f(3)=3\times3-1=8$

បើ $n=4$ នោះ $f(4)=3\times4-1=11$

.....

គេបានចំនួនរៀបតាមលំដាប់ $2,5,8,11,\cdots$ បង្កើតបានជាស្ទីតចំនួនពិត។

ជានូវទៅ ១.២.២ គេតាងស្ទីតដោយ $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}:u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$

ឬ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$

ដែល u_1 ជាតួទី 1 u_2 ជាតួទី 2 u_3 ជាតួទី 3 u_n ជាតួទី n ។

បើ $(u_n)_{n=0,1,2,\cdots}:u_0,u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ ឬ $\{u_n\}_{n=0,1,2,\cdots}:u_0,u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$

ដែល u_0 ជាតួទី 1 u_1 ជាតួទី 2 u_2 ជាតួទី 3 u_n ជាតួទី $n+1$

សម្គាល់

ស្ទីតដែលមានចំនួនតួរាប់អស់ហៅថា **ស្ទីតរាប់អស់** ឬ **ស្ទីតកំណាត់** ។

ស្ទីតដែលមានចំនួនតួរាប់មិនអស់ហៅថា **ស្ទីតអនន្តតួ** ឬ **ស្ទីតមិនកំណាត់** ។

ឧទាហរណ៍ ២

ស្ទីតចំនួនគត់សេស $1,3,5,7,\cdots$ ជាស្ទីតអនន្តតួ ។

ស្ទីត $1,3,5,7,9,11$ ជាស្ទីតរាប់អស់ ។

Tel: 016 434 006

១.៣ តួទី n នៃស៊ុីត

គេមានស៊ុីត $2,4,6,8,10,\cdots$ ។

ដោយ តួទី១ គឺ $u_1 = 2 = 2 \times 1$

តួទី២ គឺ $u_2 = 4 = 2 \times 2$

តួទី៣ គឺ $u_3 = 6 = 2 \times 3$

តួទី៤ គឺ $u_4 = 8 = 2 \times 4$

តួទី៥ គឺ $u_5 = 10 = 2 \times 5$

.....

តួទីn គឺ $u_n = 2 \times n = 2n$

ឧទាហរណ៍ ៣

កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(u_n) : 1,4,9,16,25,\cdots$ ចំពោះ $n = 0,1,2,3,\cdots$ ។

ចម្លើយ៖

គេបាន $u_0 = 1 = 1^2$

$u_1 = 4 = 2^2$

$u_2 = 9 = 3^2$

$u_3 = 16 = 4^2$

$u_4 = 25 = 5^2$

.....

$u_{n-1} = n^2$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ុីតគឺ $u_{n-1} = n^2$

ប្រតិបត្តិ ១

គេឱ្យស៊ុីត $(u_n) : 1,3,5,7,\cdots$ ចំពោះ $n = 0,1,2,3,\cdots$ ។ កំណត់តួទីn នៃស៊ុីត (u_n) ។

Tel: 016 434 006

១.៤ អថេរភាពនៃស្ទីត

១.៤.១ ស្ទីតកើន

គេមានស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: 1,2,3,4,\cdots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $1<2<3<4<\cdots$

ឬ $u_1<u_2<u_3<u_4<\cdots<u_n<u_{n+1}<\cdots$ គេថា (u_n) ជា **ស្ទីតកើន** ។

និយមន័យ ១.៤.១ គេថាស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតកើនលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $u_{n+1}>u_n$ ឬ $u_n<u_{n+1}$ ។

សម្គាល់ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើនកាលណា $u_{n+1}-u_n>0$ ឬ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ ដែល $u_n>0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើនដែល $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$

ចម្លើយ

គេមាន $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}\Longrightarrow u_{n+1}=\dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)+2}=\dfrac{2n+3}{n+3}$

ផលដក $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n+3}{n+3}-\dfrac{2n+1}{n+2}$

$$=\frac{(2n+3)(n+2)-(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{\cancel{2n^2}+\cancel{4n}+\cancel{3n}+6-\cancel{2n^2}-\cancel{n}-\cancel{6n}-3}{(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{3}{(n+2)(n+3)}>0\quad,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ នោះ $n>0$
$\Rightarrow n+2>0$
និង $n+3>0$

ដូចនេះ ស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតកើន

ឧទាហរណ៍ ៥

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើនដែល $u_n=\dfrac{5^n}{3}$ ។

ចម្លើយ

គេមាន $u_n=\dfrac{5^n}{3}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{3}=\dfrac{5^n.5}{3}$

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

Tel: 016 434 006

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{5^{n+1}}{3}}{\frac{5^n}{3}}=\frac{5^n.5}{3}\times\frac{3}{5^n}=5>1$

ដោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ នោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើន

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតកើន

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

ប្រតិបត្តិ ២

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើន ដែល $u_n=2^n+3^n$ ។

១.៤.២ ស្ទីតចុះ

គេមានស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:5,4,3,2,\cdots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $5>4>3>2>\cdots$

ឬ $u_1>u_2>u_3>u_4>\cdots>u_n>u_{n+1}>\cdots$ គេថា (u_n) ជា **ស្ទីតចុះ** ។

និយមន័យ ១.៤.២ គេថាស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតចុះលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall n\in\mathbb{N}$

គេបាន $u_{n+1}<u_n$ ឬ $u_n>u_{n+1}$ ។

សម្គាល់ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីចុះកាលណា $u_{n+1}-u_n<0$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ដែល $u_n>0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦

សិក្សាអថេរភាពនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ។

ចម្លើយ

គេមាន $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\Longrightarrow u_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

នោះផលធៀប $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n.\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1\quad,n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតចុះ

ប្រតិបត្តិ ៣

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតចុះដែល $u_n=\frac{1}{2^n+3^n}$ ។

Tel: 016 434 006

១.៤.៣ ស្ទីតម៉ូណូតូន

និយមន័យ ១.៤.៣ គេថាស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន កាលណាវាជាស្ទីតកើនជានិច្ច ឬ ចុះជានិច្ច

ឧទាហរណ៍ ៧

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

ចម្លើយ

គេមាន $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+2}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

$n+1 > 0$

$n+2 > 0$

$(n+1)(n+2) > 0$

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតកើន នាំឱ្យស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

ឧទាហរណ៍ ៨

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

ចម្លើយ

គេមាន $u_n = \dfrac{1}{n^2} \Longrightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

ធ្វើផលសង $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2}$

$= \dfrac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$= \dfrac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}$

$= -\dfrac{2n+1}{[n(n+1)]^2} < 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ $n > 0$

$\Rightarrow 2n+1 > 0$

និង $[n(n+1)]^2 > 0$

$\dfrac{2n+1}{[n(n+1)]^2} > 0$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតចុះ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

Tel: 016 434 006

ប្រតិបត្តិ ៨

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\sqrt{n^2+3n-1}$ ។

១.៥ ស្ទីតទាល់

១.៥.១ ស្ទីតទាល់លើ

និយមន័យ ១.៥.១ គេថា (u_n) ជាស្ទីតទាល់លើ កាលណា $\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}$ ដែល $u_n\leq M$

ឧទាហរណ៍ ៩

គេមានស្ទីត $(u_n):\ 2,1,0,-1,-2,\cdots$ ។

គេបាន $u_1=2>u_2=1>u_3=0>u_4=-1>\cdots$ គេថាស្ទីតនេះជាស្ទីតទាល់លើ ដែលមានចំនួន 2 ជាគោលលើនៃស្ទីត

ឧទាហរណ៍ ១០

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់លើ និងរកគោលលើនៃស្ទីតនេះ ដែល $u_n=\dfrac{3}{5^n}$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n=\dfrac{3}{5^{n+1}}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{3}{5^{n+2}}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\frac{3}{5^{n+2}}}{\frac{3}{5^{n+1}}}=\dfrac{3}{5^{n+1}.5}\times\dfrac{5^{n+1}}{3}=\dfrac{1}{5}<1$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតចុះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នោះគេបាន (u_n) ជាស្ទីតទាល់លើដែលមាន

$u_1=\dfrac{3}{5^{1+1}}=\dfrac{3}{25}$ ជាគោលលើនៃស្ទីត

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់លើ និងមានគោលលើស្មើ $\dfrac{3}{25}$

ប្រតិបត្តិ ៩

បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់លើ ដែល $u_n=\dfrac{n}{(n+1)!}$ ។

Tel: 016 434 006

១.៥.២ ស៊ីតទាល់ក្រោម

និយមន័យ ១.៥.២ គេថា (u_n) ជាស៊ីតទាល់ក្រោម កាលណា $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $u_n \geq m$

ឧទាហរណ៍ ១១

គេមានស៊ីត $3,5,7,9,11,\cdots$ ។

គេបាន $u_1 = 3 < u_2 = 5 < u_3 = 7 < u_4 = 9 < \cdots$ គេថាស៊ីតនេះជាស៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមានចំនួន 3 ជាគោលក្រោមនៃស៊ីត

ឧទាហរណ៍ ១២

បង្ហាញថាស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតទាល់ក្រោមដែល $u_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n - 1$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n - 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2(n+1) - 1$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 - \frac{1}{2}n^2 - 2n + 1$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 - \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}n^2} + n + \frac{1}{2} + 2 - \cancel{\frac{1}{2}n^2}$$

$$= n + \frac{5}{2} > 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

នាំឱ្យ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតកើននោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតទាល់ក្រោម

ដែលមាន $u_1 = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ជាគោលក្រោមនៃស៊ីត

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតទាល់ក្រោម និងមាន $\frac{3}{2}$ ជាគោលក្រោមនៃស៊ីត (u_n)

ប្រតិបត្តិ ៦

បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតទាល់ក្រោម ដែល $u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$ ។

Tel: 016 434 006

១.៥.៣ ស្ទីតទាល់

និយមន័យ ១.៥.៣ គេថាស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតទាល់ កាលណាវាជាស្ទីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង $\exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $m \leq u_n \leq M$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៣

គេមានស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{1}{n}$ ។

គេបាន $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $u_1 = 1 > u_2 = \frac{1}{2} > u_3 = \frac{1}{3} > u_4 = \frac{1}{4} > \cdots$ គេបានចំនួន 1 ជាគោលលើនៃស្ទីត និងចំនួន 0 ជាគោលក្រោមនៃស្ទីត ព្រោះ $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$ ។

$\frac{1}{n}$ ខិតជិត 0 កាលណា n កាន់តែធំ

គេបាន $0 \leq u_n \leq 1$ ។

ដូចនេះ ស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតទាល់ ។

ឧទាហរណ៍ ១៤

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់ដែល $u_n = \frac{1}{3^n}$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n \times 3}$

ដោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3^n \times 3} \times \frac{3^n}{1} = \frac{1}{3} < 1$ នាំឱ្យ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតចុះ

នោះ (u_n) ជាស្ទីតទាល់លើ ដែល $u_1 = \frac{1}{3}$ ជាគោលលើនៃស្ទីត

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{3^n} \to 0$ ពេល $n \to +\infty$ នោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់ក្រោម ដែល 0 ជាគោលក្រោមនៃស្ទីត

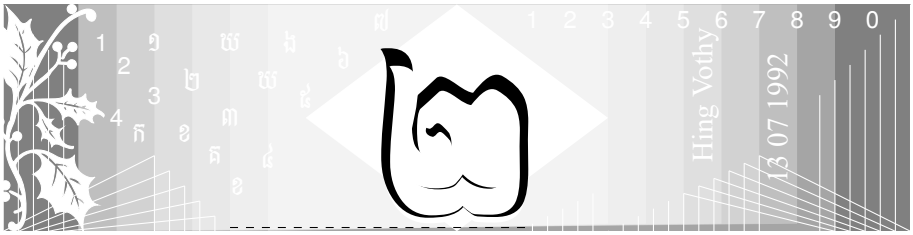
ដោយ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់ក្រោម និងជាស្ទីតទាល់លើ នោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ដូចនេះ ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់

ប្រតិបត្តិ ៧

គេឱ្យ $u_n = \frac{n^3}{n^4 + 10000}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្ទីតទាល់ ។

Tel: 016 434 006



ផ្នែក

ស៊ីតនព្វន្ត

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីការរកតួទីn តាមលំនាំគម្រូ នៃស៊ីតចំនួនពិតគឺមានការពិបាក ។ ហេតុនេះហើយដើម្បីឱ្យការរកតួទីn មានភាពងាយស្រួលគេក៏បានបង្កើតស៊ីតនព្វន្ត និងស៊ីតធរណីមាត្រ ។ នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាអំពីស៊ីតនព្វន្ត ។ មុននឹងចូលទៅដល់ការកំណត់នូវនិយមន័យសូមពិនិត្យមើលឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ ១៨

សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស៊ីត $1,6,11,16,\cdots,\cdots,\cdots$

យើងសង្កេតឃើញថា៖
តួទី១ លើកលែង
តួទី២ បានមកពីតួទី១ បូកនឹង 5
តួទី៣ បានមកពីតួទី២ បូកនឹង 5
តួទី៤ បានមកពីតួទី៣ បូកនឹង 5
.....

ដោយ $u_1 = 1$

$u_2 = 6 = 1+5$

$u_3 = 11 = 6+5$

$u_4 = 16 = 11+5$

$u_5 = 16+5 = 21$

$u_6 = 21+5 = 26$

ដូចនេះ គេបានបីតួបន្ទាប់នៃស៊ីតគឺ $1,6,11,16,21,26,31$

Tel: 016 434 006

២.១ និយមន័យនៃស៊ីតនព្វន្ត

និយមន័យ ២.១.១ **ស៊ីតនព្វន្ត** គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ ក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ d មួយ ដែល d ហៅថា **ផលសងរួម**

តាមនិយមន័យខាងលើ

គេបាន $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = u_2 - u_1$

$u_3 = u_2 + d \Rightarrow d = u_3 - u_1$

$u_4 = u_3 + d \Rightarrow d = u_4 - u_3$

$u_5 = u_4 + d \Rightarrow d = u_5 - u_4$

.....

$u_n = u_{n-1} + d \Rightarrow d = u_n - u_{n-1}$

នាំឱ្យ $d = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = u_2 - u_1$

ជាទូទៅ ២.១.២ **ផលសងរួម** នៃស៊ីតនព្វន្ត

$$d = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$

ឧទាហរណ៍ ១៦

ចូរកំណត់ផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្ត $2, -1, -4, \cdots$ ។

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 2, u_2 = -1$

គេបាន $d = u_2 - u_1$

$= -1 - 2$

$= -3$

ដូចនេះ ផលសងរួមនៃស៊ីតគឺ $d = -3$

ឧទាហរណ៍ ១៧

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត ដោយ $u_n = \frac{1}{2}n+1$

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = \frac{1}{2}n+1$

នាំឱ្យ $u_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)+1$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}(n+1)+1-\frac{1}{2}n-1$

$= \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n$

$= \frac{1}{2}$

បើធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង u_n បានលទ្ធផលជាអនុគមន៍នៃ n នោះមានន័យថា (u_n) មិនមែនជាស្ទីតនព្វន្ត

នាំឱ្យ $d = \frac{1}{2}$ ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

ប្រតិបត្តិ ៨

១. កំណត់ផលសងរួមនៃស្ទីតនព្វន្ត $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \cdots$

២. បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត ដែល $u_n = \frac{3}{4}n-3$

Tel: 016 434 006

២.២ តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត

បើ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ គឺ u_1 តួទីn គឺ u_n ហើយផលសងរួម d ។

គេបាន $u_2 = u_1 + d = u_1 + (2-1)d$

$u_3 = u_2 + d = u_1 + d + d = u_1 + 2d = u_1 + (3-1)d$

$u_4 = u_3 + d = u_1 + 2d + d = u_1 + 3d = u_1 + (4-1)d$

$u_5 = u_4 + d = u_1 + 3d + d = u_1 + 4d = u_1 + (5-1)d$

.....

$u_{n-1} = u_1 + (n-2)d$

$u_n = u_1 + (n-1)d \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$

ជាទូទៅ ២.២.១ តួទី n នៃស៊ីតគឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$ ឬ $u_n = u_p + (n-p)d$

ឧទាហរណ៍ ១៨

គេមានស៊ីត $4, 11, 18, 25, 32, \ldots$ ។

១. កំណត់តួទីn នៃស៊ីត ។ ២. គណនាតួទី12 ។

៣. តើចំនួន 602 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត ? ៤. តើចំនួន 711 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត ?

ចម្លើយ

១. តាង $u_1 = 4, u_2 = 11, u_3 = 18$

ដោយ $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$= 11 - 4 = 18 - 11$

$= 7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 4 + (n-1)7$

$= 4 + 7n - 7$

$= 7n - 3$

Tel: 016 434 006

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីតគឺ $u_n = 7n - 3$

២. គណនា $u_{12} = 7 \times 12 - 3 = 84 - 3 = 81$

ដូចនេះ តួទី12 គឺ $u_{12} = 81$

៣. តាង $u_n = 602$ គេបាន $u_n = 7n - 3$

$$602 = 7n - 3$$

$$605 = 7n$$

$$86.4 = n$$

ដោយ $n \notin \mathbb{N}$ នោះចំនួន 602 មិនម៉ែនជាតួនៃស្ទីតនព្វន្តទេ ។

៤. តាង $u_n = 711$ គេបាន $7n - 3 = 711$

$$7n = 714$$

$$n = 102$$

ដូចនេះ ចំនួន 711 ជាតួទី 102 នៃស្ទីត

ឧទាហរណ៍ ១៩

កំណត់តួទី n នៃស្ទីតនព្វន្ត ដែល $u_7 = 79$ និង $u_{12} = 64$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_7 = 79, u_{12} = 64$ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$u_7 = u_1 + 6d = 79 \quad (1)$$

$$u_{12} = u_1 + 11d = 64 \quad (2)$$

យក (1)-(2): $-5d = 15 \Rightarrow d = \dfrac{15}{-5} = -3$

ជំនួសចូល (1): $u_1 + 6(-3) = 79 \Rightarrow u_1 = 97$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 97 - 3(n-1) = 97 - 3n + 3 = 100 - 3n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីតគឺ $u_n = 100 - 3n$

Tel: 016 434 006

សម្គាល់ បើ (u_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមានតួទី១គឺ u_0 និងមានផលសងរួម d នោះគេបានតួទី n គឺ

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)d \quad \text{នាំឱ្យតួទី} \quad n+1 \quad \text{គឺ} \quad u_n = u_0 + nd \qquad (3)$$

ឧទាហរណ៍ ២០

គេឱ្យស្ទីតនព្វន្តមួយដែលមាន $u_0 = 3, u_1 = 7$ និង $u_2 = 11$ ។ កំណត់តួទី7 និង u_7

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_0 = 3, u_1 = 7 \Rightarrow d = u_1 - u_0 = 7 - 3 = 4$

គេបាន $u_n = u_0 + nd = 3 + 4n$

នាំឱ្យ តួទី 7 គឺ $u_6 = 3 + 4(6) = 27$

$$u_7 = 3 + 4(7) = 31$$

ដូចនេះ តួទី7 គឺ $u_6 = 27$ និង $u_7 = 31$

ប្រតិបត្តិ ៩

គេឱ្យស្ទីតនព្វន្តមួយដែលមាន $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{2}$ និង $u_3 = 4$ ។ កំណត់តួទី9 និង u_{13}

២.៣ ផលបូកតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្ទីតនព្វន្ត

គេមានស្ទីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង ។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង u_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

គេបាន $u_1 + u_6 = u_1 + u_1 + 5d = 2u_1 + 5d$

$$u_2 + u_5 = u_1 + d + u_1 + 4d = 2u_1 + 5d$$

$$u_3 + u_4 = u_1 + 2d + u_1 + 3d = 2u_1 + 5d$$

នាំឱ្យ $u_1 + u_6 = u_2 + u_5 = u_3 + u_4$

ជាទូទៅ ២.៣.១ បើគេមានស្ទីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p, \ldots, u_{n-(p-1)}, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ ផលបូកតួចុងស្មើ និងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

គេបាន៖

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = \cdots = u_p + u_{n-(p-1)} = \cdots \qquad (4)$$

សម្គាល់ បើ a, b, c ជាបីតួនៃស្ទីតនព្វន្ត គេបាន $2b = a + c$, (b ហៅថាមធ្យមនព្វន្តនៃ a និង c)

ឧទាហរណ៍ ២១

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $2, 2x+1, 16$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

ចម្លើយ៖

$2, 2x+1, 16$ ជាស្ទីតនព្វន្ត គេបាន $2(2x+1) = 2 + 16$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

ដូចនេះ $x = 4$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ២២

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ $k, 12, k^2-6k$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

ចម្លើយ៖

$k, 12, k^2-6k$ ជាស្ទីតនព្វន្តកាលណា $k+k^2-6k=2(12)$

$$k^2-5k-24=0$$

$$k^2+3k-8k-24=0$$

$$k(k+3)-8(k+3)=0$$

$$(k+3)(k-8)=0$$

នាំឱ្យ $k+3=0 \Rightarrow k=-3$ ឬ $k-8=0 \Rightarrow k=8$

ដូចនេះ $k=-3$, $k=8$

ប្រតិបត្តិ ១០

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x^2+1, \frac{3}{2}, x$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

Tel: 016 434 006

២.៤ ផលបូកនៃស៊ីតនព្វន្ត

បើ u_1 ជាតួទី១ និង d ជាផលសងរួមនៃស៊ីតនោះគេបានស៊ីតនព្វន្ត

$$(u_n): u_1, u_2 = u_1 + d, u_3 = u_1 + 2d, \ldots, u_n = u_1 + (n-1)d$$

តាង $S_n = u_1 + (u_1 + d) + \ldots + (u_n - d) + u_n$ (5)

ម្យ៉ាងទៀត $S_n = u_n + (u_n - d) + \ldots + (u_1 + d) + u_1$ (6)

យកសមីការ (5) បូក (6)

គេបាន $2S_n = \underbrace{(u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \ldots + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n)}_{n \text{ តួ នៃ } u_1 + u_n}$

$$2S_n = n(u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{ដែល} \quad u_n = u_1 + (n-1)d$$

ជាទូទៅ ២.៤.១ ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \text{ ឬ } S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \quad , n \in \mathbb{N}$$

ឧទាហរណ៍ ២៣

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$ ។ រួចគណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ៖

គណនា S_n និង S_{25}

យើងមាន $u_1 = 2, u_2 = 7, u_3 = 12$

នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 7 - 2 = 5$

តាមទំនាក់ទំនង $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 2 + (n-1)5$$

$$u_n = 5n - 3$$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2 + 5n - 3) = \frac{n}{2}(5n - 1)$

នាំឱ្យ $S_{25} = \frac{25}{2}(5(25) - 1) = \frac{25}{2}(125 - 1) = 25 \times 62 = 1550$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n}{2}(5n - 1)$ និង $S_{25} = 1550$

ឧទាហរណ៍ ២៤

គណនាផលបូក $(-7) + (-1) + 5 + 11 + ... + 77$

ចម្លើយ៖

យក $u_1 = -7, u_2 = -1, u_3 = 5 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = -1 - (-7) = 6$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= -7 + (n-1)6$

$= 6n - 13, u_n = 77$

$77 = 6n - 13$

$6n = 90$

$n = 15$

$\Rightarrow u_{15} = 77$

គេបាន $S_{15} = \frac{15}{2}(u_1 + u_{15}) = \frac{15}{2}(-7 + 6(15) - 13)$

$= 525$

ដូចនេះ $(-7) + (-1) + 5 + 11 + 17 + ... + 77 = 525$

ប្រតិបត្តិ ១១

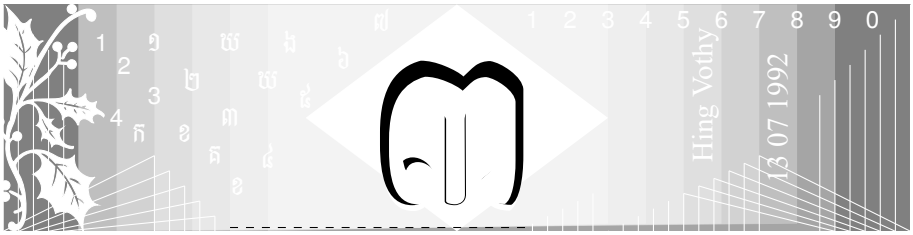
គឱ្យស៊ីគ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ គំណត់ដោយ $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \cdots$ ។

១. គណនាផលសងរួមនៃស៊ីគ។

២. កំណត់តួទីn នៃស៊ីគ (u_n) ។

៣. តើចំនួន $\frac{15}{2}$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីគ (u_n) ។

៤. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីគ (u_n) ។



ផ្នែក

ស្ទីតធរណីមាត្រ

នៅក្នុងមេរៀនទី២មិត្តអ្នកអានបានស្គាល់អំពីស្ទីតចំនួនពិតរួចមកហើយគឺវាគ្រាន់តែជាផ្នែកមួយនៃស្ទីតចំនួនពិតតែប៉ុណ្ណោះ។ នៅក្នុងមេរៀននេះយើងនឹងសិស្សាអំពីស្ទីតធរណីមាត្រវិញម្តង។ មុននឹងឈានទៅដល់ការកំណត់នូវនិយមន័យសូមពិនិត្យមើល ឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ ២៤

រកតួទី៦ និង តួទី៧ នៃស្ទីត $2, 4, 8, 16, 24, \cdots$ ។

ដោយ $u_1 = 2$

$u_2 = 4 = 2 \times 2$

$u_3 = 8 = 4 \times 2$

$u_4 = 16 = 8 \times 2$

$u_5 = 32 = 16 \times 2$

$u_6 = 32 \times 2 = 64$

$u_7 = 64 \times 2 = 128$

យើងសង្កេតឃើញថា៖
តួទី១ លើកលែង
តួទី២ បានមកពីតួទី១ គុណនឹង 2
តួទី៣ បានមកពីតួទី២ គុណនឹង 2
តួទី៤ បានមកពីតួទី៣ គុណនឹង 2
.....

ដូចនេះ តួទី៦ គឺ $u_6 = 64$ និង តួទី៧ គឺ $u_7 = 128$

Tel: 016 434 006

៣.១ និយមន័យនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

និយមន័យ ៣.១.១ ស្ទីតធរណីមាត្រ គឺជាស្ទីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ ក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ឬរេសុង ។

តាមនិយមន័យខាងលើ គេបាន u_1

$$u_2 = u_1 q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1}$$

$$u_3 = u_2 q \Rightarrow q = \frac{u_3}{u_2}$$

$$u_4 = u_3 q \Rightarrow q = \frac{u_4}{u_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = u_{n-1} q \Rightarrow q = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$

ជាទូទៅ ៣.១.២ ផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$

ឧទាហរណ៍ ២៦

បង្ហាញថា $1, 3, 9, 27, \cdots$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

ចម្លើយ

តាង $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 9, u_4 = 27$

ដោយ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{1} = 3$

$\frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{3} = 3$

$\frac{u_4}{u_3} = \frac{27}{9} = 3$

គេបាន $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = 3$ នាំឱ្យផលធៀបរួម $q = 3$

ដូចនេះ $1, 3, 9, 27, \cdots$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ ២៧

គេឱ្យស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n = 7^{n+1}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ុីតធរណីមាត្រ

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = 7^{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 7^{n+1+1} = 7^{n+1} \times 7$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7^{n+1}\times 7}{7^{n+1}} = 7 \Rightarrow q = 7$

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ុីតធរណីមាត្រ

ប្រតិបត្តិ ១២

១. តើ $1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$ ជាស៊ុីតធរណីមាត្រឬទេ ?

២. បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ុីតធរណីមាត្រ ដែល $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}$

៣.២ តួទី n នៃស៊ុីតធរណីមាត្រ

គេមាន (u_n) ជាស៊ុីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ គឺ u_1 តួទីn គឺ u_n ហើយផលធៀបរួម q

គេបាន u_1

$$u_2 = u_1 q = u_1 q^{2-1}$$

$$u_3 = u_2 q = u_1 q^2 = u_1 q^{3-1}$$

$$u_4 = u_3 q = u_1 q^3 = u_1 q^{4-1}$$

$$u_5 = u_4 q = u_1 q^4 = u_1 q^{5-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = u_1 q^{n-2}$$

$$u_n = u_1 q^{n-1} \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

ជាទូទៅ ៣.២.១ តួទី n នៃស៊ុីតធរណីមាត្រ $u_n = u_1 q^{n-1}$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ២៨

គេមានស្ទីតធរណីមាត្រ $3,6,12,24,48,\cdots$

១. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត ។

២. គណនាតួទី13 ។

៣. តើចំនួន $1,536$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_1=3, u_2=6, u_3=9 \Rightarrow q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{6}{3}=2$

គេបាន $u_n=u_1q^{n-1}=3(2)^{n-1}$

ដូចនេះ តួទីn នៃស្ទីតគឺ $u_n=3(2)^{n-1}$

២. គណនា $u_{13}=3(2)^{13-1}=3(2)^{12}=12,288$

ដូចនេះ តួទី13 គឺ $u_{13}=12,288$

៣. តាងចំនួន $1,536$ ជាតួទីk គេបាន $u_k=1,536$

តែ $u_k=3(2)^{k-1} \Leftrightarrow 3(2)^{k-1}=1536$

$\Leftrightarrow 2^{k-1}=512=2^9$

$\Leftrightarrow k-1=9$

$\Rightarrow k=10$

ដូចនេះ ចំនួន $1,536$ ជាតួទី 10 នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

- ចំពោះ $a>0, a\neq 1$
  $a^x=a^y$ សមមូល $x=y$
- ចំពោះ $2^{k-1}=2^9$
  សមមូល $k-1=9$

សង្ខេប

បើ (u_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១គឺ u_0 និងមានផលធៀបរួម q នោះគេបានតួទីn គឺ $u_{n-1}=u_0q^{n-1}$ នាំឱ្យតួទី $n+1$ គឺ $u_n=u_0q^n$

ឧទាហរណ៍ ២៩

គេឱ្យស្ទីតធរណីមាត្រមួយដែលមាន $u_0=1, u_1=5$ និង $u_2=25$ ។ កំណត់តួទី7 និង u_7 ។

ចម្លើយ៖

Tel: 016 434 006

គេមាន $u_0 = 1, u_1 = 5 \Rightarrow q = \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{1} = 5$

គេបាន $u_n = u_0 q^n = 1(5)^n = 5^n$

តួទី7 គឺ $u_6 = 5^6 = 15625$, $u_7 = 5^7 = 78125$

ដូចនេះ តួទី7 គឺ $u_6 = 15625$ និង $u_7 = 78125$

ប្រតិបត្តិ ១៣

គេមានស្ទីតធរណីមាត្រ $2, 6, 18, 54, 162, 486, \cdots$

១. គណនាផលធៀបរួមនៃស្ទីត

២. កំណត់តួទីn នៃស្ទីត

៣. គណនាតួទី9 នៃស្ទីត

៤. តើចំនួន $1,458$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីត?

៣.៣ ផលគុណតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

គេមានស្ទីតធរណីមាត្រ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង ។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង u_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1} d$

គេបាន $u_1.u_6 = u_1.u_1.q^5 = u_1^2.q^5$

$u_2.u_5 = u_1.q.u_1.q^4 = u_1^2.q^5$

$u_3.u_4 = u_1.q^2.u_1.q^3 = u_1^2.q^5$

នាំឱ្យ $u_1.u_6 = u_2.u_5 = u_3.u_4$

បើគេមានស្ទីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p, \ldots, u_{n-(p+1)}, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$

ជាទូទៅ ៣.៣.១ ផលគុណតួចុងស្មើ និងផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។ គេបាន៖

$$u_1.u_n = u_2.u_{n-1} = u_3.u_{n-2} = \cdots = u_p.u_{n-(p+1)} = \cdots \qquad (1)$$

សម្គាល់

បើ a, b, c ជាបីតួនៃស្ទីតធរណីមាត្រ គេបាន $b^2 = a.c$

(b ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c)

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៣០

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $2, x+2, 32$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

ចម្លើយ៖

$2, x+2, 32$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

គេបាន $(x+2)^2 = 2(32) \Leftrightarrow (x+2)^2 = 64$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{8^2}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| = 8$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \pm 8$$

$$\Rightarrow x = 8-2 \text{ ឬ } x = -8-2$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ ឬ } x = -10$$

ដូចនេះ $x = 6$ ឬ $x = -10$

ប្រតិបត្តិ ១៨

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $1, 2x+1, 16$ ជាបីតួនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

៣.៤ ផលបូកនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

បើ u_1 ជាតួទី១ និង q ជាផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ នោះគេតាង

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

នាំឱ្យ $qS_n = qu_1 + qu_2 + qu_3 + \ldots + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$

$$qS_n = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{n-1} + u_n + qu_n$$

នាំឱ្យ $S_n - qS_n = qu_n - u_1 = q.u_1q^{n-1} - u_1 = u_1(q^n - 1)$

សមមូល $S_n(q-1) = u_1(q^n - 1)$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1} \quad , q \neq 1$$

ជាទូទៅ ៣.៤.១ ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $S_n = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$, $q \neq 1$ និង $n \in \mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍ ៣១

គណនាផលបូកនៃស៊ីត $1,2,4,8,16,\cdots,1024$

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = 2$

គេបាន $S_n = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

$= \dfrac{1(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$

តាង $u_n = 1024$ ដែល $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$

គេបាន $2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10}$

$\Leftrightarrow n-1 = 10$

$\Leftrightarrow n = 11$

$\Rightarrow S_{11} = 2^{11-1}$

$= 2^{11} - 1$

$= 2047$

ដូចនេះ $1+2+4+8+16+\cdots+1024 = 2047$

ប្រតិបត្តិ ១៨

គេឱ្យស៊ីតធរណីមាត្រ $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{16}{3}, \dfrac{32}{3}, \cdots$

១. គណនាផលធៀបរួមនៃស៊ីត

២. គណនាតួទី12 នៃស៊ីត

៣. គណនាផលបូកnតួដំបូងនៃស៊ីត

៤. គណនាផលបូក12តួដំបូងនៃស៊ីត ។

Tel: 016 434 006

៣.៥ ស្ទីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{u_1 q^n}{q-1} - \frac{u_1}{q-1}$, $q \neq 0$

បើ $|q| < 1$ នោះ $q^n \longrightarrow 0$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$

គេបាន $S_\infty = 0 - \frac{u_1}{q-1} = \frac{u_1}{1-q}$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$ ។

ជាទូទៅ ៣.៥.១ ផលបូកតួនៃស្ទីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots$ ដែល $|q| < 1$ កំណត់ដោយ $S_\infty = \frac{u_1}{1-q}$

សម្គាល់ បើ $|q| > 1$ នោះ S_∞ មិនអាចកំណត់បាន

ឧទាហរណ៍ ៣២

គណនាផលបូកតួនៃស្ទីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$

ចម្លើយ

តាង $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{8}$

និង $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{2}$ ដោយ $|q| < 1$

នាំឱ្យ $S_\infty = \frac{u_1}{1-q}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4} \times 2$

$= \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $S_\infty = \frac{1}{2}$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៣៣

សរសេរចំនួនទសភាគខួប $1.\overline{3}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $1.\overline{3} = 1+0.3+0.03+0.003+\cdots$ ចាប់ពីតួទីពីរទៅជាផលបូកនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

អនន្តតួ $u_1 = 0.3 = \frac{3}{10}, u_2 = 0.03 = \frac{3}{100}$

នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} < 1$

គេបាន $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}$

$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $1.\overline{3} = 1+S_\infty = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

ឧទាហរណ៍ ៣៤

សរសេរចំនួនទសភាគខួប $3.\overline{45}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $3.\overline{45} = 3+0.45+0.0045+0.000045+\ldots$ ចាប់ពីតួទីពីរទៅជាផលបូកនៃស៊ីត

ធរណីមាត្រអនន្តតួ $u_1 = 0.45 = \frac{45}{100}, u_2 = 0.0045 = \frac{45}{10000}$

និង $q = \frac{45}{10000} \times \frac{100}{45} = \frac{1}{100} < 1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}}$

$= \frac{45}{100} \times \frac{100}{99}$

$= \frac{45}{99}$

ដូចនេះ $3.\overline{45} = 3+\frac{45}{99} = \frac{342}{99} = \frac{38}{11} = \frac{38}{11}$

Tel: 016 434 006

ប្រតិបត្តិ ១៦

សរសេរចំនួនទសភាគខួបនីមួយៗខាងក្រោមជាចំនួនសនិទាន់

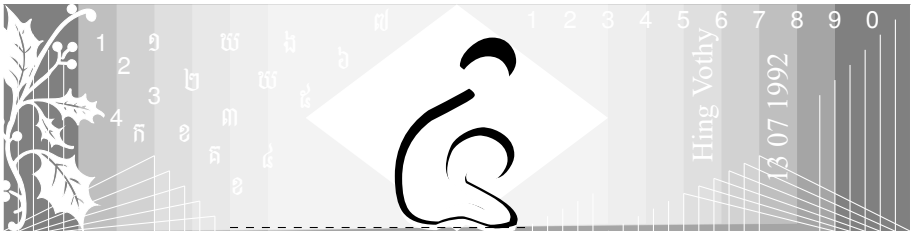
១. $2.\overline{7}$

២. $3.\overline{25}$

៣. $3.4\overline{63}$

៤. $14.\overline{75}$

Tel: 016 434 006



ផ្នែក

ផលបូកនៃស៊ីតផ្សេងៗ

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីផលបូកនៃស៊ីតនព្វន្តនិងស៊ីតធរណីមាត្រ បន្ទាប់មកយើងនឹងសិក្សាបន្ថែមទៅលើផលបូកនៃស៊ីតចំនួនពិតដែលមិនមែនជាស៊ីតនព្វន្តឬស៊ីតធរណីមាត្រវិញម្តង។ ដើម្បីអោយប្រិយមិត្តងាយស្រួលសិក្សាខ្ញុំបានយកទម្រង់ផលបូកនីមួយៗមកសិក្សាជាផ្នែកៗដូចខាងក្រោមនេះ។ ម៉្យាងវិញទៀតនៅក្នុងផ្នែកនេះគឺសំខាន់ដើម្បីយកទៅដោះស្រាយរកតួទូទៅនៃស៊ីតចំនួនពិតនិងផលបូកn តួដំបូងនៃស៊ីតចំនួនពិតផងដែរ។

៤.១ និមិត្តសញ្ញាផលបូកនៃស៊ីត $\sum$

ដោយសារតែការសរសេរផលបូក នៃស៊ីតមានទម្រង់វែងនិងធ្វើឱ្យយើងចំណាយពេលច្រើនដើម្បីសរសេរវា ហេតុដូចនេះហើយទើបគេបង្កើតនិមិត្តសញ្ញាផលបូកដើម្បីសម្រួលនូវការសរសេរឱ្យមានទម្រង់ខ្លីនិងចំណាយពេលតិចជាងមុនក្នុងការសរសេរវា ។

ក្នុងការសរសេរផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ គេប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ អានថា **ស៊ីចម៉ា** ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ ដែល k យកតម្លៃពី $1, 2, 3, \cdots, n$ ។

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៣៩



១. $1+2+3+4=\sum_{k=1}^{4} k$ ២. $5+6+7=\sum_{k=5}^{7} k$

ពិនិត្យលំនាំគម្រូខាងក្រោម

គេមាន $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ គេបាន

ចំពោះ $n=2$ នោះ $\sum_{k=1}^{2} f(k)=f(1)+f(2)$

ចំពោះ $n=3$ នោះ $\sum_{k=1}^{3} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)$

ចំពោះ $n=4$ នោះ $\sum_{k=1}^{4} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

ចំពោះ $n=5$ នោះ $\sum_{k=1}^{5} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

.....

ចំពោះ $n=n-1$ នោះ $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)$

ចំពោះ $n=n$ នោះ $\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(n)$

តាមលំនាំគម្រូយើងសង្កេតឃើញថាដើម្បី សរសេរនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ បានកាលណាគេមានអនុគមន៍លេខ យ៉ាងតិចពីរបូកគ្នា។

សន្និស្ឋាន ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

ឧទាហរណ៍ ៣៦



១. $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

២. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

៣. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

៤. $11+12+13+\cdots+n=\sum_{k=11}^{n}k$

៥. $7^2+8^2+9^2+\cdots+n^2=\sum_{k=7}^{n}k^2$

៤.១.១ លក្ខណៈនៃផលបូក

លក្ខណៈ ១

១. $\sum_{k=1}^{n}c=nc$

២. $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

៣. $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$

៤. $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\pm 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2$

■ សម្រាយបញ្ជាក់ ១. $\sum_{k=1}^{n}c=c+c+c+\cdots+c+c$

$$=c\underbrace{(1+1+1+\cdots+1+1)}_{n\text{ដង}\text{លេខ }1}$$

$$=cn$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}c=nc$

២. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$

$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$

$= c\sum_{k=1}^{n} a_k$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 \pm 2a_k b_k + b_k^2\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm \sum_{k=1}^{n} 2a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$

■

សម្គាល់ ផលគុណ n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) តាងដោយ $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1.a_2.a_3 \cdots a_n$ ។

៤.២ ស្វ៊ីតមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n} k^p$

ឧទាហរណ៍ ៣៧

គណនាផលបូក $1+2+3+\cdots+n$

ចម្លើយ៖

តាង $S_n = 1+2+3+\cdots+n$ ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $S_n = 1+2+3+\cdots+n-2+n-1+n$ $(+)$

$S_n = n+n-1+n-2+\cdots+3+2+1$

$2S_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)$

$2S_n = (n+1)(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{\text{លេខ 1 មាន } n \text{ តួ}})$

$2S_n = (n+1)n$

$\Leftrightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

វិធីខាងលើនេះគឺយើងប្រើបានតែក្នុង ករណីផលបូកជាផលបូកតួ នៃស្វ៊ីតនព្វន្តតែប៉ុណោះ ។

វិធាន ១

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$ ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ

- ប្រើសមភាព $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$, $p = 1,2,3,\cdots,n$
- គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - (k)^{p+1}\right]$ ។ ទាញរក S_n

យើងបានស្រាយក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ ឥឡូវនេះយើងប្រើ សមភាព $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ ចំពោះ $p = 1$ នោះគេបានសមភាព $(k+1)^2 - k^2$ ដើម្បីគណនាផលបូក $1+2+3+....+n$ ។

Tel: 016 434 006

ខ្ទាបារណ៍ ៣៨

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$

ចម្លើយ៖

គេមានសមភាព $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2.S_n + n$$
$$(n+1)^2 - n - 1 = 2.S_n$$
$$(n+1)^2 - (n+1) = 2.S_n$$
$$(n+1)(n+\cancel{1}-\cancel{1}) = 2.S_n$$
$$(n+1)n = 2.S_n$$
$$\frac{n(n+1)}{2} = S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2] - k^2]$$
$$= (\cancel{2^2} - 1^2) + (\cancel{3^2} - \cancel{2^2}) + \cdots + (n+1)^2 - \cancel{n^2}$$
$$= (n+1)^2 - 1^2$$

ដូចនេះ $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

សម្មាប់

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ខ្ទាបារណ៍ ៣៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^p - k^p\right] = (n+1)^p - 1$

■ សម្រាយបញ្ជាក់៖ យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^p - k^p\right] = (\cancel{2^p} - 1^p) + (\cancel{3^p} - \cancel{2^p}) + (\cancel{4^p} - \cancel{3^p}) + \cdots + (n+1)^p - \cancel{n^p}$$

$$= -1^p + (n+1)^p = (n+1)^p - 1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^p - k^p] = (n+1)^p - 1$ ■

ខ្ទាហរណ៍ ៨០

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

ចម្លើយ៖

គេមានសមភាព $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3.S_n + 3.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3.S_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{2}$$

$$6.S_n = (n+1)\left(2(n+1)^2 - 2 - 3n\right)$$

$$= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n)$$

$$6.S_n = (n+1)(2n^2 + n)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

ឧទាហរណ៍ ៨១

គណនាផលបូក $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

ចម្លើយ៖

គេមានសមភាព $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$

$$(k+1)^4 - 1 = 4S_n + 6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$(n+1)^4 - (n+1) = 4S_n + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)$$

$$4S_n = (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right]$$

$$= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n^2 - n - 2n)$$

$$= (n+1)(n^3 + n^2)$$

$$4S_n = n^2(n+1)^2$$

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

សម្គាល់

តាមឧទាហរណខាងលើគេបានរូបមន្តដែលត្រូវចងចាំ ដើម្បីប្រើសម្រាប់គណនាផលបូកនៃស្ទីតផ្សេងៗ ៖

- $\sum_{k=1}^{n}k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៤២

គណនា

១. $\sum_{i=1}^{20} 2i$

២. $\sum_{k=1}^{20} k(k+3)$

៣. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

៤. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)$

ចម្លើយ៖

១. $\sum_{i=1}^{20} 2i = 2\sum_{k=1}^{20} i = 2.\frac{20(20+1)}{2} = 20\times 21 = 420$

២. $\sum_{k=1}^{20} k(k+3) = \sum_{k=1}^{20}(k^2+3k) = \sum_{k=1}^{20} k^2 + 3\sum_{k=1}^{20} k$

$= \frac{20(20+1)(20\times 2+1)}{6} + 3.\frac{20(20+1)}{2}$

$= 3500$

៣. $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{k=1}^{n} i = 2.\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

៤. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{k=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2.\frac{n(n+1)}{2} - n$

$= n(n+1) - n = n^2 + \not{n} - \not{n}$

$= n^2$

ប្រតិបត្តិ ១៧

គណនា

១. $\sum_{k=0}^{2020} 2021$

២. $\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (2k^2+3k+5)$

៤. $\sum_{j=k}^{n} (k-1)^3$

៥. $\sum_{i=8}^{n} \left(\frac{1}{2}i^3 + 3i - 2\right)$

៦. $\sum_{i=5}^{2020} \left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$

Tel: 016 434 006

៤.៣ ស្វែងរកផលបូក $p+pp+ppp+...+ppp...pp$ ដែល $0<p\leq 9$

តាង $S_n = p+pp+ppp+\cdots+\underbrace{pp\cdots pp}_{n\text{ តួ }p}$, $n\in\mathbb{N}$

$$S_n = p(1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots 11}_{n\text{ តួលេខ}1})$$

$$9S_n = p(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots 99}_{n\text{ តួលេខ}9})$$

$$\frac{9}{p}S_n = (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$$

$$= (10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ តួលេខ }1})$$

$$= 10\times\frac{10^n-1}{10-1}-n$$

$$\frac{9}{p}S_n = \frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

$$S_n = \frac{p\left(10^{n+1}-9n-10\right)}{81}$$

ឧទាហរណ៍ ៤៣

គណនាផលបូក $S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots 99}_{2017\text{ តួ}}$

ចម្លើយ

គេមាន $S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots 99}_{2017\text{ តួ}}$

គេបាន $S_n = (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{2017}-1)$

$$= 10+10^2+10^3+\cdots+10^{2017}-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2017\text{ តួ}})$$

$$= 10\times\frac{10^{2017}-1}{10-1}-2017$$

$$S_n = \frac{10^{2018}-9(2017)-10}{9}$$

Tel: 016 434 006

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{10^{2018} - 18163}{9}$

ឧទាហរណ៍ ៤៨

គណនាផលបូក $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\cdots77}_{n\text{ តួ}}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\cdots77}_{n\text{ តួ}}$

គេបាន $S_n = 7(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\cdots11}_{n\text{ តួ}})$

$$9S_n = 7(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\cdots99}_{n\text{ តួ}})$$

$$\frac{9}{7}S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n\text{ តួ}})$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$\frac{9}{7}S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$S_n = \frac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$

ប្រតិបត្តិ ១៨

គណនាផលបូកនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $3 + 33 + 333 + 3333 + \cdots + \underbrace{3333\cdots33}_{\text{15 តួលេខ 3}}$

២. $3 + 33 + 333 + 3333 + \cdots + \underbrace{3333\cdots33}_{\text{50 តួលេខ 3}}$

៣. $\underbrace{333\cdots33}_{\text{16 តួលេខ3}} + \underbrace{333\cdots33}_{\text{17 តួលេខ3}} + \cdots + \underbrace{3333\cdots33}_{\text{50 តួលេខ 3}}$

៤.៤ ស្វែងរកផលបូក $pq+pqpq+pqpqpq+...+pqpqpq...pq$

តាង $S_n = pq+pqpq+pqpqpq+\cdots+\underbrace{pqpqpq\cdots pqpq}_{n\text{ គូ }pq}$

គេបាន $S_n = pq\left(1+101+10101+\cdots+1\underbrace{010101\cdots0101}_{n-1\text{ គូលេខ }01}\right)$

$$99S_n = pq\left(99+9999+999999+\cdots+\underbrace{999999\cdots9999}_{n\text{ គូលេខ }99}\right)$$

$$\frac{99}{pq}S_n = (10^2-1)+(10^4-1)+(10^6-1)+\cdots+(10^{2n}-1)$$

$$= 10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{2n}-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n\text{ ដងលេខ }1})$$

$$= 100\times\frac{100^n-1}{100-1}-n$$

$$\frac{99}{pq}S_n = \frac{100^{n+1}-100-99n}{99}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{pq(100^{n+1}-99n-100)}{99^2}$

ឧទាហរណ៍ ៨៥

គណនាផលបូក $S_n = 12+1212+121212+\cdots+\underbrace{121212\cdots1212}_{n\text{ គូលេខ }12}$

ចម្លើយ

គេមាន $S_n = 12+1212+121212+\cdots+\underbrace{121212\cdots1212}_{n\text{ គូលេខ }12}$

គេបាន $S_n = 12\left(1+101+10101+\cdots+1\underbrace{010101\cdots0101}_{n-1\text{ គូលេខ }01}\right)$

$$99S_n = 12\left(99+9999+999999+\cdots+\underbrace{999999\cdots9999}_{n\text{ គូលេខ }99}\right)$$

$$\frac{99}{12}S_n = (10^2-1)+(10^4-1)+(10^6-1)+\cdots+(10^{2n}-1)$$

$$\frac{99}{12}S_n = 10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{2n}-\underbrace{(1+1+1+\cdots+1+1)}_{n\text{ ដងលេខ }1}$$

$$= 100\times\frac{100^n-1}{100-1}-n$$

$$\frac{99}{12}S_n = \frac{100^{n+1}-100-99n}{99}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{12\left(100^{n+1}-99n-100\right)}{99^2}$

ប្រតិបត្តិ ១៩

គណនាផលបូកនៃស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $S_n = 15+1515+151515+\cdots+\underbrace{151515\cdots1515}_{n\text{ គូលេខ }15}$

២. $S_n = \underbrace{171717\cdots17}_{12\text{ គូលេខ }17}+\underbrace{171717\cdots17}_{13\text{ គូលេខ }17}+\cdots+\underbrace{171717\cdots1717}_{2019\text{ គូលេខ }17}$

៤.៥ ស្ទីតដែលមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k.a_{k+1}}$

វិធាន ២

គេមាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k.a_{k+1}} = \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$

តាង $a_{k+1}-a_k = d$ ថេរ $d\neq 0$ ដើម្បីគណនាគណនាផលបូកនេះ គេត្រូវ

- បម្លែងតួ $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\times\dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$
- យក $f(k) = \dfrac{1}{a_k}$ នាំឱ្យ $f(k+1) = \dfrac{1}{a_{k+1}}$
- ធ្វើប្រមាណវិធីបូក

  គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k.a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k+1)]$

  $= \frac{1}{d}[f(1)-f(n+1)]$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៤៦

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ ។

ចម្លើយ៖

ដោយ $(k+1)-k=1$

ដោយ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$

$= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n+1-1}{n+1}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n}{n+1}$

ប្រតិបត្តិ ២០

គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $s_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

២. $s_n = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

Tel: 016 434 006

៤.៦ ស្វ័តមានទម្រង់ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}$

វិធាន ៣

គេមាន $S_n = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4a_5} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$

តាង $a_{k+2} - a_k = d$ ថេរ $d \neq 0$ ដើម្បីគណនាគណនាផលបូកនេះ គេត្រូវ

- បម្លែងតួ $\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{d} \times \frac{a_{k+2} - a_k}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}$
$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}\right)$
- យក $f(k) = \frac{1}{a_ka_{k+1}}$ និង $f(k+1) = \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}$
- ធ្វើប្រមាណវិធី

  គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}[f(k) - f(k+1)]$
$= \frac{1}{d}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\right]$
$= \frac{1}{d}[f(1) - f(n+1)]$

ឧទាហរណ៍ ៤៧

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ចម្លើយ៖

ដោយ $(k+2) - k = 2$

យើងមាន $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)}$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

Tel: 016 434 006

ដូចនេះ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

ប្រតិបត្តិ ២១

គណនា $\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

៤.៧ ស្វ៊ីតមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

វិធាន ៨

បើ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ ដើម្បីគណនាផលបូក

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

គេត្រូវ គណនា $S_n - qS_n$ រួចទាញរក S_n

ឧទាហរណ៍ ៨៨

គណនា $S_n = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \cdots + n.2^{n-1}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $S_n = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \cdots + n.2^{n-1}$

$\Longrightarrow 2S_n = 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \cdots + n.2^n$

គេបាន $S_n - 2S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - n.2^n$

$-S_n = 1 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n.2^n$

ដូចនេះ $S_n = 1 + 2^n(n-1)$

ប្រតិបត្តិ ២២

គណនាផលបូកនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1.3 + 3.9 + 5.27 + 7.81 + \cdots + (2n-1).3^n$ ។

Tel: 016 434 006



ផ្នែក
កំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្ទីត

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីការរកតួទី n នៃស្ទីតចំនួនពិតដោយស្ទីតទាំងនោះជាស្ទីតនព្វន្ត ឬ ស្ទីតធរណីមាត្រ ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាអំពីការរកតួទី n នៃស្ទីតចំនួនពិតដែលមិនមែនជាស្ទីតនព្វន្ត ឬ ស្ទីតធរណីមាត្រ ។

៥.O.១ ផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្ទីត

បើ $(a_n): a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ មិនមែនជាស្ទីតនព្វន្ត ឬ ធរណីមាត្រ

តាង (b_n) ជាស្ទីតនព្វន្ត ឬ ធរណីមាត្រ កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $b_1 = \cancel{a_2} - a_1$

$b_2 = \cancel{a_3} - \cancel{a_2}$

$b_3 = \cancel{a_4} - \cancel{a_3}$ $\quad (+)$

បូកសមភាពចូលគ្នា រួចសម្រួល

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$b_{n-1} = a_n - \cancel{a_{n-1}}$

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_n - a_1 \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad , n \geq 2$$

Tel: 016 434 006

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (a_n) គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$

វិធាន ៥

គេឱ្យស្ទីត $(a_n) : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ តាងស្ទីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្ទីត $(b_n) : b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ ។ តួទី n នៃស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤៩

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(a_n) : 2, 4, 8, 14, 22, 32, \cdots$

ចម្លើយ៖

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្ទីត (a_n) ។ ស្ទីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្ទីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្ទីត $(b_n) : 2, 4, 6, 8, \cdots$ ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមានតួទី1ស្មើ 2 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះគេបាន $b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 2 + \frac{2n(n-1)}{2} \\ &= 2 + n^2 - n \\ a_n &= n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $a_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$ ពិត

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^2 - n + 2$

ប្រតិបត្តិ ២៣

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(a_n) : 1, \frac{7}{6}, 2, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \frac{17}{2}, 2, \cdots$

៥.O.២ ផលសងតួលំដាប់ទីពីរនៃស៊ុីត

វិធាន ៦

គេឱ្យស៊ុីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ តាងស៊ុីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស៊ុីត (a_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ គេបានស៊ុីត $(b_n): b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ ។

តួទី n នៃស៊ុីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$

និងតាង c_n ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស៊ុីត (b_n) ឬ ផលសងលំដាប់ពីរនៃស៊ុីត (a_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបាន $(c_n): c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ ។

តួទី n នៃស៊ុីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៨០

កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(a_n): 4, 18, 48, 100, 180, 294, \cdots$

ចម្លើយ៖

តាង a_n ជាតួទី n នៃស៊ុីត (a_n) ។ ស៊ុីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស៊ុីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស៊ុីត $(b_n): 14, 30, 52, 80, 114, \cdots$

តាងស៊ុីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស៊ុីត (b_n) ដែលកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ ។

គេបានស៊ុីត $(c_n): 16, 22, 28, 34, \cdots$ ជាស៊ុីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 16 និងផលសងរួមស្មើ 6 នោះ $c_n = 16 + 6(n-1) = 16 + 6n - 6 = 6n + 10$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 14 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k + 10)$$

$$= 14 + 6\sum_{k}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 10$$

$$= 14 + \frac{6n(n-1)}{2} + 10(n-1)$$

$$= 14 + 3n^2 - 3n + 10n - 10$$

$$b_n = 3n^2 + 7n + 4$$

Tel: 016 434 006

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $b_1=3.1^2+7.1+4=14$ ពិត នាំឱ្យ $b_n=3n^2+7n+4$

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

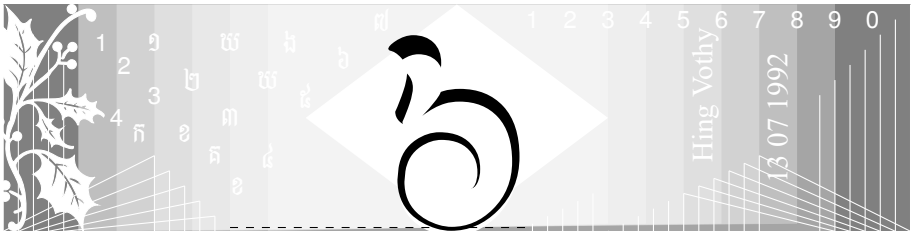
$$\begin{aligned}
&=4+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+7k+4)\\
&=4+3\sum_{k}^{n-1}k^2+7\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n-1}4\\
&=4+\frac{3n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{7n(n-1)}{2}+4(n-1)\\
&=4n+\frac{1}{2}(n-1)(2n^2-n+7n)\\
&=4n+(n-1)(n^2+3n)\\
&=4n+n^3+3n^2-n^2-3n\\
a_n&=n^3+2n^2+n
\end{aligned}$$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $a_1=1^3+2.1^2+1=4$ ពិត

ដូចនេះ ស្ទីត (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n=n^3+2n^2+n$

ប្រតិបត្តិ ២៨

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(a_n):3,19,53,111,199,323,\cdots$ ។



ផ្នែក

ទំនាក់ទំនងតួនៃស្ទីត

៦.១ កំណត់តួទី n ដោយប្រើស្ទីតជំនួយ

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីការរកតួទី n នៃស្ទីតចំនួនពិត។ ក្នុងមេរៀននេះយើងនឹងរកតួទី n នៃទំនាក់ទំនងកំណើនដែលមានទម្រង់ $u_{n+1}=a.u_n+f(n), a\neq 0$ ។ ហេតុនេះទើបគេបង្កើតស្ទីតថ្មីមួយទៀតគឺ (r_n) មកធ្វើផលសងរវាងស្ទីត u_{n+1} និង r_{n+1} ដែលបង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្ត ឬស្ទីតធរណីមាត្រ ។ ស្ទីត (r_n) ហៅថាស្ទីតជំនួយនៃស្ទីត (u_n) ។

វិធាន ៧

គេអោយស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=a.u_n+f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្ទីតគេត្រូវ៖

✳ **ចំពោះ** $a=1$

- គេមាន $u_{n+1}=u_n+f(n)$ សមមូល $u_{n+1}-u_n=f(n)$
- តាង $v_n=u_{n+1}-u_n=f(n)$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១នៃស្ទីត (u_n)
- ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k$ ឬ $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

Tel: 016 434 006

៦.១.១ ករណីស្មាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=a.u_n+f(n)$

វិធាន ៨

គេអោយស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=a.u_n+f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្ទីតគេត្រូវ៖

*** ចំពោះ $a\neq 1$**

- រកស្ទីត (r_n) មានទម្រង់តាមអនុគមន៍នៃ $f(n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើននៃសមីការ $r_{n+1}=a.r_n+f(n)$
- ធ្វើផលសង $u_{n+1}-r_{n+1}=a(u_n-r_n)$ តាងស្ទីតជំនួយ $v_n=u_n-r_n$
- (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ រួចទាញរកតួ u_n ។

សម្គាល់

គេអាចរក r_n តាម $f(n)$ ចំពោះ $a,b,c,A,B,C,\alpha,\beta,\gamma$ ជាចំនួនថេរ

- បើ $f(n)=c$ តាង $r_n=\alpha$
- បើ $f(n)=an+b$ តាង $r_n=\alpha n+\beta$
- បើ $f(n)=an^2+bn+c$ តាង $r_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$
- បើ $f(n)=a^n$ តាង $r_n=\alpha.a^n$
- បើ $f(n)=(An+B)a^n$ តាង $r_n=(\alpha n+\beta)a^n$
- បើ $f(n)=(An^2+Bn+C)a^n$ តាង $r_n=(\alpha n^2+\beta n+\gamma)a^n$

ឧទាហរណ៍ ៥១

គេឱ្យស្ទីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ: $\begin{cases}u_1=1\\3u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $u_1=1;\ 3u_{n+1}=2u_n+3$ ឬ $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$

តាង $r_n=\alpha$ នាំឱ្យ $r_{n+1}=\alpha$ ដោយ r_n ផ្ទៀតផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន (u_n)

គេបាន $3r_{n+1} = 2r_n + 3$

$$3\alpha = 2\alpha + 3$$

$$\alpha = 3$$

នោះ $r_n = r_{n+1} = 3$ ធ្វើផលសង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 - r_{n+1}$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3)$$

តាង

$$v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 3 \qquad (1)$$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $v_1 = u_1 - 3 = 1 - 3 = -2$ និងផលធៀបរួម $q = \frac{2}{3}$ នោះ $v_n = v_1 q^{n-1} = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

តាម (1) គេបាន $u_n = v_n + 3 = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីតគឺ $u_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ឧទាហរណ៍ ៥២

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$

តាងស្ទីតជំនួយ (r_n) : $r_n = \alpha.n + \beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$

$$r_{n+1} = 2r_n - n + 1$$

គេបាន $\alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) - n + 1$

$$n(\alpha - 1) + \beta - \alpha + 1 = 0$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\alpha-1=0\\ \beta-\alpha+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\end{cases}\Rightarrow r_n=n$

$\Rightarrow r_{n+1}=n+1$

ធ្វើផលសង $u_{n+1}-r_{n+1}$ គេបាន: $u_{n+1}-r_{n+1}=2u_n-n+1-(n+1)$

$$u_{n+1}-(n+1)=2u_n-2n$$

$$=2(u_n-n)$$

តាង

$$v_n=u_n-n\Leftrightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1) \qquad (2)$$

គេបាន $v_{n+1}=2v_n\Leftrightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=2$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែល $q=2$,

$v_1=u_1-1=3-1=2\Longleftrightarrow v_n=v_1.q^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$

តាមសមីការ (2) គេបាន $2^n=u_n-n\Rightarrow u_n=2^n+n$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=2^n+n$

ឧទាហរណ៍ ៨៣

គេឱ្យស្ទីត $(u_n):\begin{cases}u_1=5\\ u_{n+1}=3u_n-2n+2\end{cases}$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $u_1=5,u_{n+1}=3u_n-2n+2$

តាងស្ទីត $(r_n):r_n=\alpha.n+\beta\Rightarrow r_{n+1}=\alpha(n+1)+\beta$, (α,β ជាចំនួនថេរ)

គេបាន: $r_{n+1}=3r_n-2n+2$

$$\alpha(n+1)+\beta=3(\alpha n+\beta)-2n+2$$

$$\alpha n+\alpha+\beta=3\alpha n+3\beta-2n+2$$

$$0=2\alpha n+2\beta-2n+2-\alpha$$

$$0=(\alpha-1)2n+2\beta-\alpha+2$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\alpha-1=0\\2\beta-\alpha=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow r_n=n-\frac{1}{2}\Rightarrow r_{n+1}=(n+1)-\frac{1}{2}$

ធ្វើផលសង $u_{n+1}-r_{n+1}$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=3u_n-2n+2-\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right]$

$$u_{n+1}-\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right]=3u_n-3n+\frac{3}{2}$$

$$=3\left[u_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

តាង

$$v_n=u_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right] \quad (3)$$

គេបាន $v_{n+1}=3v_n\Leftrightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=3$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែល

$$q=3\ ,\ v_1=u_1-\left(1-\frac{1}{2}\right)=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}=\frac{3^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_n=v_1.q^{n-1}=\frac{3^2}{2}\times 3^{n-1}=\frac{3^{n-1+2}}{2}=\frac{3^{n+1}}{2}$$

តាមសមីការ (3) គេបាន $\frac{3^{n+1}}{2}=u_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow u_n=\frac{3^{n+1}}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=\frac{3^{n+1}}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)$

ឧទាហរណ៍ ៥៨

គេឱ្យស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:\begin{cases}u_1&=5\\u_{n+1}&=u_n+n^2+2n+1\end{cases}$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1=5,\ u_{n+1}=u_n+n^2+2n+1 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=n^2+2n+1$

តាង $v_n=u_{n+1}-u_n=n^2+2n+1$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃ (u_n)

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k$

$$\begin{aligned}
&=5+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+2k+1)\\
&=5+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1\\
&=5+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+2\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)\\
&=\frac{1}{6}.n(n-1)(2n-1)+n(n-1)+n+4
\end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=\frac{1}{6}.n(n-1)(2n-1)+n(n-1)+n+4$

ឧទាហរណ៍ ៥៥

គេឱ្យទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1=1, u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2^n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1=1, u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2^n$

តាងស្ទីត $(r_n): r_n=\alpha 2^n \Rightarrow r_{n+1}=\alpha 2^{n+1}$ ដែល α ជាចំនួនថេរ

គេបាន $r_{n+1}=\frac{2}{3}.r_n+2^n$

$$\begin{aligned}
\alpha 2^{n+1}&=\frac{2}{3}.\alpha.2^n+2^n\\
2^n.2\alpha&=2^n\left(\frac{2}{3}.\alpha+1\right)\\
2\alpha&=\frac{2\alpha+3}{3}\\
6\alpha&=2\alpha+3\\
4\alpha&=3\Rightarrow\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow r_{n+1}=\frac{3}{4}.2^{n+1}
\end{aligned}$$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=\frac{2}{3}.u_n+2^n-\frac{3}{4}.2^{n+1}$

$$u_{n+1}-\frac{3}{4}.2^{n+1}=\frac{2}{3}.u_n+2^n-\frac{3}{2(2)}.2^{n+1}$$

$$=\frac{2}{3}.u_n+2^n\left(1-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}.u_n-2^n.\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}\times\frac{2}{2}$$

$$u_{n+1}-\frac{3}{4}.2^{n+1}=\frac{2}{3}\left(u_n-\frac{3}{4}.2^n\right)$$

តាង $v_n=u_n-\frac{3}{4}.2^n \quad (*)$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{3}{4}.2^{n+1}$$

នោះ $v_{n+1}=\frac{2}{3}.v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2}{3}$ នោះ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន

$v_1=u_1-\frac{3}{4}.2=1-\frac{3}{2}=\frac{1-3}{2}=-\frac{1}{2}$ និងផលធៀបរួម $q=\frac{2}{3}$

គេបាន $v_n=v_1.q^{n-1}=-\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$

ជំនួសចូលសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ $u_n=\frac{3}{4}.2^n-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}=3\times 2^{n-2}-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$

$$=3\times 2^{n-2}-3.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

ដូចនេះ $u_n=3\left[2^{n-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]$

ប្រតិបត្តិ ២៨

កំណត់តួទី n នៃស្ទីតនីមួយៗចំពោះទំនាក់ទំនងកំណើនខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1 &= -1 \\ u_{n+1} &= 2u_n+7 \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n-n^2+3 \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{2} \\ 2u_{n+1} &= 3u_n+5^n \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1 &= \frac{2}{3} \\ u_{n+1} &= \frac{3}{2}u_n+(n+1)7^n \end{cases}$

៦.២ កំណត់តួទូទៅនៃអនុក្រមកំណើន $u_{n+1}=f(u_n)$

៦.២.១ ករណីស្មាល់អនុក្រមកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{u_n+\alpha}{u_n+\beta}$

ទ្រឹស្តីបទ ៩

គេឱ្យស៊ុីតេ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1}=\frac{u_n+\alpha}{u_n+\beta} \qquad (4)$$

ដើម្បីកំណត់តួទីn នៃស៊ុីតគេត្រូវ សមីការសម្គាល់ $\lambda=\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+\beta}$

$$\lambda(\lambda+\beta)=\lambda+\alpha$$

$$\lambda^2+\beta\lambda-\lambda-\alpha=0$$

$$\lambda^2+(\beta-1)\lambda-\alpha=0$$

- ករណី $\Delta=[-(\beta-1)]^2+4\alpha>0$ នោះសមីការមានឫសពីរ $\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-(\beta-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ តាង ស៊ុីត $v_n=\dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ចំពោះ $\lambda_1>\lambda_2$ ហើយបង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ុីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ទាញរក u_n ។
- ករណី $\Delta=[-(\beta-1)]^2+4\alpha=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda=\dfrac{-(\beta-1)}{2}$ តាង $v_n=\dfrac{1}{u_n-\lambda}$ បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ុីតនព្វន្ត ហើយគណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

ឧទាហរណ៍ ៥៦

គេឱ្យទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases}u_0 &=1\\ u_{n+1} &=\dfrac{u_n+6}{u_n+2}\end{cases}$ ។ កំណត់តួទូទៅនៃស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទៅទៅនៃស៊ុីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}_0$

Tel: 016 434 006

គេមាន $u_{n+1}=\dfrac{u_n+6}{u_n+2}$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda=\dfrac{\lambda+6}{\lambda+2}$

$$\lambda(\lambda+2)=\lambda+6$$
$$\lambda^2+2\lambda-\lambda-6=0$$
$$\lambda^2+\lambda-6=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$
$$\lambda=2,\lambda=-3$$

តាង $v_n=\dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ដែល $\lambda_1=2>\lambda_2=-3$ នាំឱ្យ $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}$ (5)

គេបាន $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-3}$,$u_{n+1}=\dfrac{u_n+6}{u_n+2}$

$$=\frac{\dfrac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\dfrac{u_n+6}{u_n+2}+3}=\frac{u_n+6-2u_n-4}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n+6+3u_n+6}$$
$$=-\frac{1}{4}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=-\frac{1}{4}v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=-\dfrac{1}{4}$ និង $v_0=\dfrac{u_0-2}{u_0+3}=-\dfrac{1}{4}$ ដែល $u_0=1$

នាំឱ្យ $v_n=v_0.q^n=-\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

តាមសមីការ (5) គេបាន $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}=\dfrac{u_n+3-5}{u_n+3}=1-\dfrac{5}{u_n+3}$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1=-\frac{5}{u_n+3}$$
$$u_n+3=-\frac{5}{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}-1}$$
$$u_n=-\frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}-3$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=-\dfrac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}-3$

ឧទាហរណ៍ ៤៧

រកតួទូទៅនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \dfrac{4u_n-1}{4u_n} \end{cases}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទៅទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}_0$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{4u_n-1}{4u_n}$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda = \dfrac{4\lambda-1}{4\lambda}$

$$4\lambda^2 = 4\lambda - 1$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

ដោះស្រាយតាមដេទែមីណង់

ដោយ $a=4, b=4, c=1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4(4)(1) = 0$

នាំឱ្យ $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2(4)} = \dfrac{1}{2}$

តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n - \lambda}$ ដែល $\lambda = \dfrac{1}{2}$ នោះ

$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \qquad (6)$$

គេបាន $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n-1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n-1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2u_n-1}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{4u_n}{2u_n-1}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2u_n}{u_n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមាន ផលសងរួម $d=2$ និង $v_0=\dfrac{1}{u_0-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$

នាំឱ្យ $v_n=v_0+nd=\dfrac{2}{5}+2n$ តាមសមីការ (6)

គេបាន $v_n=\dfrac{1}{u_n-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}+2n &= \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ u_n-\frac{1}{2} &= \frac{1}{2n+\frac{2}{5}} \\ u_n &= \frac{1}{2n+\frac{2}{5}}+\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\frac{10n+2}{5}}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះ $n\in\mathbb{N}_0$ គឺ $u_n=\dfrac{5}{10n+2}+\dfrac{1}{2}$

ប្រតិបត្តិ ២៦

រកតួទូទៅនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1=6 \\ u_{n+1}=\dfrac{7u_n-6}{2u_n} \end{cases}$

៦.២.២ ករណីស្មាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$

គេអោយស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0 \qquad (7)$$

ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស៊ុីតគេត្រូវ៖

សរសេរសមីការ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែល $\Delta=b^2+4ac$ ជាសមីការសម្គាល់នៃ (7)

វិធាន ១០

✳ របៀបទី១

- បើ $\Delta>0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរដោចំនួនពិតគឺ $\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ គេបាន

$$\begin{cases} u_{n+2}-\lambda_1 u_{n+1}=\lambda_2(u_{n+1}-\lambda_1 u_n) \\ u_{n+2}-\lambda_2 u_{n+1}=\lambda_1(u_{n+1}-\lambda_2 u_n) \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} v_{n+1}=\lambda_2 v_n \\ w_{n+1}=\lambda_1 w_n \end{cases}$$

ដែល $v_n=u_{n+1}-\lambda_1 u_n$ និង $w_n=u_{n+1}-\lambda_2 u_n$

ដោះស្រាយរក v_n និង w_n នោះគេអាចរក u_n បានតាមទំនាក់ទំនង v_n និង w_n

- ករណី $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda=\dfrac{-b}{2a}$ តាង

$$v_n=u_{n+1}-\lambda u_n \qquad (8)$$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\lambda u_{n+1}=pu_{n+1}+qu_n-\lambda u_{n+1}=(p-\lambda)u_{n+1}+qu_n$$

$$v_{n+1}=(p-\lambda)\left(u_{n+1}+\frac{q}{p-\lambda}\right)$$

យក $v_n=u_{n+1}+\dfrac{q}{p-\lambda}\Rightarrow v_{n+1}=(p-\lambda)v_n$ នោះ (v_n) ជាស៊ុីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេស្យុង $r=(p-\lambda)$ និង $v_1=u_2-r\lambda u_1$

គេបាន $v_n=(u_2-ru_1)(p-\lambda)^{n-1}$

យក (8) ចែកនឹង r^{n+1} : $\dfrac{v_n}{r^{n+1}}=\dfrac{u_{n+1}}{r^{n+1}}-\dfrac{u_n}{r^n}$

តាង $w_n=\dfrac{u_n}{r^n}\Rightarrow w_{n+1}-w_n=\dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ គេបាន (w_n) ជាស៊ុីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=\dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ និង $w_1=\dfrac{u_1}{r}$ នោះគេអាចរក w_n បាន រួចគណនា u_n តាមទំនាក់ទំនង $w_n=\dfrac{u_n}{r^n}$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៨៨

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1=1, u_2=3, u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

គេមាន $u_1=1, u_2=3, u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n \Leftrightarrow u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$, $\Delta>0$ មានឫសពីរ $\lambda_1=1$ និង $\lambda_2=2$

តាង $\begin{cases} v_n=u_{n+1}-\lambda_1 u_n=u_{n+1}-u_n \\ w_n=u_{n+1}-\lambda_2 u_n=u_{n+1}-2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1} \\ w_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1}=\lambda_2 v_n \\ w_{n+1}=\lambda_1 w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1}=2v_n \text{ , } v_1=u_2-u_1=3-1=2 \\ w_{n+1}=w_n \text{ , } w_1=u_2-2u_1=3-2(1)=1 \end{cases}$

ដោយ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=2 \Rightarrow v_n=v_1.q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-u_n=2^n \qquad (9)$$

និង (w_n) ជាស៊ីតថេរនោះគេបាន $w_{n+1}=w_n=\cdots=w_2=w_1=1$

គេបាន

$$u_{n+1}-2u_n=1 \qquad (10)$$

យកសមីការ (10) ដក (9)

គេបាន $u_{n+1}-u_n-(u_{n+1}-2u_n)=2^n-1$

$$\cancel{u_{n+1}}-u_n-\cancel{u_{n+1}}+2u_n=2^n-1$$

$$u_n=2^n-1$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=2^n-1$

ឧទាហរណ៍ ៤៩

ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1=0, u_2=2,$
$u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទីn នៃស្ទីត (u_n)

គេមាន $u_1=0, u_2=2, u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-5\lambda+6=0$,$\Delta>0$ មានឫស $\lambda_1=2$ និង $\lambda_2=3$

តាង $\begin{cases} v_n=u_{n+1}-2u_n \\ w_n=u_{n+1}-3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1} \\ w_{n+1}=u_{n+2}-3u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1}=3v_n \\ w_{n+1}=2w_n \end{cases}$

ដោយ (v_n) និង (w_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

$(v_n): q=3, v_1=u_2-2u_1=2$

$\Rightarrow u_n=v_1.q^{n-1}=2\times 3^{n-1}$

គេបាន

$$u_{n+1}-2u_n=2\times 3^{n-1} \qquad (11)$$

$(w_n): q=2, w_1=u_2-3u_1=2 \Rightarrow w_n=w_1.q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-3u_n=2^n \qquad (12)$$

យកសមីការ (11) ដក (12)

គេបាន $u_{n+1}-2u_n-(u_{n+1}-3u_n)=2\times 3^{n-1}-2^n$

$$u_n=2\times 3^{n-1}-2^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=2\times 3^{n-1}-2^n$

$a=1, b=-5, c=6$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(-5)^2-4(1)(6)$

$=25-24=1$

$\lambda_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=2$

$\lambda_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៦០

ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1=1, u_2=4, u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទីn នៃស្ទីត (u_n)

គេមាន $u_1=1, u_2=4, u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$ ឬ $u_{n+2}-6u_{n+1}+9u_n=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-6\lambda+9=0$,$\Delta=0$ មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=3$

តាង $v_n=u_{n+1}-\lambda u_n=u_{n+1}-3u_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2}-3u_{n+1} \\ &= 6u_{n+1}-9u_n-3u_{n+1} \\ &= 3u_{n+1}-9u_n \\ &= 3(u_{n+1}-3u_n) \end{aligned}$$

$$v_{n+1}=3v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែល $q=3; v_1=u_2-3u_1=4-3(1)=1$

នាំឱ្យ $v_n=v_1.q^{n-1}=3^{n-1}$

គេបាន

$$u_{n+1}-3u_n=3^{n-1} \qquad (13)$$

យកសមីការ (13) ចែកនឹង 3^{n-1}

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{3^{n-1}}-3.\frac{u_n}{3^{n-1}}=1$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{3^{n-1}}-\frac{u_n}{3^{n-2}}=1$

តាង

$$w_n=\frac{u_n}{3^{n-2}} \Rightarrow w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{3^{n-1}} \qquad (14)$$

គេបាន $w_{n+1}-w_n=1$ នោះ (w_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែល $d=1, w_1=\frac{u_1}{3^{1-2}}=\frac{1}{3^{-1}}=3$

នាំឱ្យ $w_n = w_1 + (n-1)d$

$= 3 + (n-1)1$

$= n+2$

តាម (14) គេបាន $n+2 = \frac{u_n}{3^{n-2}} \Rightarrow u_n = (n+2)3^{n-2}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = (n+2)3^{n-2}$

ប្រតិបត្តិ ២៧

រកតួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_0 = 5, u_1 = 8 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 8 \\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 5u_{n-1} - 3u_{n-2} \end{cases}$

វិធាន ១១

✳ របៀបទី២

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ (15)

- បើ $\Delta \neq 0$ នោះសមីការ (15) មានឫសពីរគឺ λ_1, λ_2 ដែល $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ គេបានតួទូទៅ $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n \quad , A, B \in \mathbb{R}$
- បើ $\Delta = 0$ នោះសមីការ (15) មានឫសឌុបគឺ $\lambda_1 = \lambda_2$
  គេបានតួទូទៅ $u_n = (A + nB)\lambda^n \, , A, B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

ឧទាហរណ៍ ៦១

កំណត់តួទូទៅនៃស្ទីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $f_0 = 0, f_1 = 1$ និង $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ចំពោះ $n \geq 0$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទូទៅនៃស្ទីត Fibonacci

គេមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \Delta = \sqrt{5}$ និងមានឫសពីរ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

គេបាន $f_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ចំពោះ $f_0 = 0 \Longrightarrow f_0 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$

$$A + B = 0 \Longrightarrow A = -B \qquad (16)$$

ចំពោះ $f_1 = 1 \Longrightarrow f_1 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad (17)$$

យកសមីការ (16) ជំនួសចូល (17)

គេបាន $$-B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$B\left(-\cancel{1} - \sqrt{5} + \cancel{1} - \sqrt{5}\right) = 2$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Longrightarrow f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្ទីតគឺ } f_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៦២

រកតួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_0 = 0, u_1 = \sin\alpha$ និង $u_{n+2} = 2\cos\alpha.u_{n+1} - u_n$ ចំពោះ $n \geq 0$ និង $\alpha \neq n\pi$

។

ចម្លើយ៖

រកតួទូទៅនៃស្ទីត (u_n)

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1 = 0$ ដែល $\Delta = (2\cos\alpha)^2 - 4$

នោះ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$

$= \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha}$, $\cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$

$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ និង $i^2 = -1$

គេបាន

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + B(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n \qquad (18)$$

ចំពោះ $u_0 = 0 \Longrightarrow u_0 = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)^0 + B(\cos\alpha - i\sin\alpha)^0$

$$A + B = 0 \Longrightarrow B = -A \qquad (19)$$

ចំពោះ $u_1 = \sin\alpha \Longrightarrow u_1 = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)^1 + B(\cos\alpha - i\sin\alpha)^1$

$$A(\cos\alpha + i\sin\alpha) + B(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \sin\alpha \qquad (20)$$

យកសមីការ (19) ជំនួសចូល (20)

គេបាន $A(\cos\alpha + i\sin\alpha) - A(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \sin\alpha$

$$A\left(\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha + i\sin\alpha\right)) = \sin\alpha \ , \alpha \neq 0$$

$$A2i\sin\alpha = \sin\alpha$$

$$A2i = 1$$

$$A = \frac{1}{2i}$$

$$B = -\frac{1}{2i}$$

ជំនួសចូល (18) គេបាន $u_n = \frac{1}{2i}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \frac{1}{2i}(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$

$$= \frac{1}{2i}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2i}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$= \sin n\alpha$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីតគឺ $u_n = \sin n\alpha$

ឧទាហរណ៍ ៦៣

កំណត់តួទូទៅនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1 = 3, u_2 = 27$ និង $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n)

គេមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 6\lambda - 9 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

ដែល $\Delta = (-6)^2 + 4(-9) = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{6}{2} = \lambda = 3$

គេបាន

$$u_n = (A + nB)\lambda^n = (A + nB)3^n \qquad (21)$$

ចំពោះ $n = 1$ និង $u_1 = 3$ គេបាន $u_1 = (A + B)3$ ឬ $3 = (A + B)3$

$$A + B = 1 \qquad (22)$$

ចំពោះ $n = 2$ និង $u_2 = 27$ គេបាន $u_2 = (A + 2B)3^2$ ឬ $27 = (A + 2B)9$

$$A + 2B = 3 \qquad (23)$$

យកសមីការ (23) ដក (22) $A + 2B - (A + B) = 3 - 1$

$$B = 2$$

$$A = 1 - B$$

$$= 1 - 2 = -1$$

ជំនួសចូល (21) គេបាន $u_n = (-1+2n)3^n = 3^n(2n-1)$

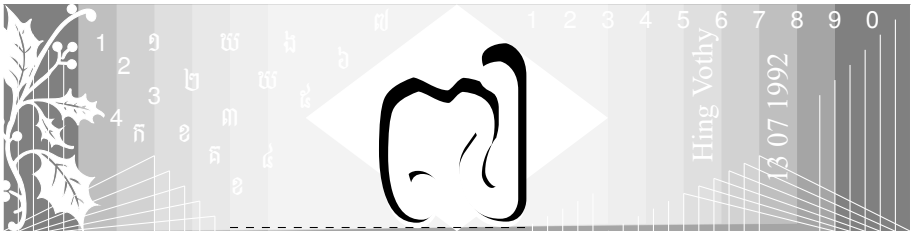
ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = 3^n(2n-1)$

ប្រតិបត្តិ ២៨

រកតួទូទៅនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 7 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases}$



ផ្នែក

ទិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

យើងធ្លាប់បានសិក្សារួចមកហើយអំពីប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់មួយចំនួននៅក្នុងមេរៀនតក្កវិទ្យាដែលបកស្រាយទៅលើសំណើ ។ ឥឡូវយើងនឹងសិក្សាទៅលើសម្រាយបញ្ជាក់ថ្មីមួយទៀតដែលគេហៅថា **សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិធានវិចារអនុមាណ រួមគណិតវិទ្យា**ដូចខាងក្រោម៖

និយមន័យ ៧.០.១ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ជាសំណើពិត គេត្រូវ៖

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n=1$
- ឧបមាថា $P(k)$ ពិតចំពោះតម្លៃ $n=k$
- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(k)$ ពិត នាំឱ្យគេបាន $P(k+1)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ ៦៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n):1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ចំពោះ $n=1$ នោះ $P(1):1=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$ ពិត

ឧបមាថា $P(k):1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ ពិត

Tel: 016 434 006

យើងនឹងស្រាយថា $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ ពិត

យើងមាន $P(k): 1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ បូកអង្គទាំងពីរនឹង $k+1$

គេបាន $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{(មានន័យថា } P(k) \text{ ពិត)}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបានសំណើ $P(k)$ ពិត

ដូចនេះ: $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ឧទាហរណ៍ ៦៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ: $\forall n\in\mathbb{N}$

ចម្លើយ:

ចំពោះ: $n=1$ នោះ: $2^{1+1}+3^{2\times1-1}=2^2+3=7$ ជាពហុគុណនៃ 7 ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $2^{k+1}+3^{2k-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ឬ $2^{k+1}+3^{2k-1}=7q$, $q\in\mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $2^{k+2}+3^{2k+1}$ ជាពហុគុណនៃ 7

យើងមាន $2^{k+2}+3^{2k+1}=2\times2^{k+1}+3^2\times3^{2k-1}$

$$=2\times2^{k+1}+2\times3^{2k-1}+7\times3^{2k-1}$$

$$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\times3^{2k-1}$$

$$=2(7q)+7\times3^{2k-1}$$

($2^{k+1}+3^{2k-1}=7q\,,q\in\mathbb{Z}$)

$$=7(2q+3^{2k-1})=7p\ ,\ p=2q+3^{2k-1}\in\mathbb{Z}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ: $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ: $\forall n\in\mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍ ៦៦

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\geq n^2\,,\forall n\in\mathbb{N}$

ចំពោះ $n=1$ នោះ $1\geq 1$ ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\geq k^2$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)\geq (k+1)^2$

យើងមាន $$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)\geq (k+1)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i+(k+1)\right)\geq (k+1)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}i+1\geq k^2+2k+1$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{\cancel{k+1}}\frac{\cancel{k+1}k}{2}\geq k^2+2k$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{k}{2}\geq k^2+2k \qquad (1)$$

ដោយ $$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\geq k^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\frac{k(k+1)}{2}\geq k^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)(k+1)\geq 2k$$

នាំឱ្យសមីការ (1) : $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$

$$k^2+2k+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$$

$$\frac{k}{2}\geq 0\ ,\forall k\in\mathbb{N}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\geq n^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

ប្រតិបត្តិ ២៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

១. $n! > 3^n$ ចំពោះ $\forall n \geq 7$ ។

២. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៣. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

1

ផ្នែកទី

លំហាត់

លំហាត់ ១ ចូរបំពេញតួនៃស្ទីតក្នុងចន្លោះខាងក្រោម៖

១. $1,5,9,\ ,\ ,$ ។

២. $7,10,13,\ ,\ ,$ ។

៣. $6,3,-2,\ ,\ ,\ -29$ ។

៤. $0,5,12,21,\ ,$ ។

លំហាត់ ២ សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតខាងក្រោម៖

១. $1,4,9,16,\cdots$ ។

២. $1,9,25,49,\cdots$ ។

លំហាត់ ៣ សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ ។

២. $u_n = \dfrac{n^3-2n^2-1}{n^2+n}$ ។

៣. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ ។

៤. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1$ ។

លំហាត់ ៤ សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n^2+1$ ។ តើចំនួន 163 និង 883 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីត ?

លំហាត់ ៥ គេឱ្យស្ទីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 12$ និង $u_n = an^2 + bn + c$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ។

លំហាត់ ៦ កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1,3,5,7,9,\cdots$ ២. $2,2,2,2,2,\cdots$

៣. $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\cdots$ ៤. $\frac{1}{2.3},\frac{2}{3.4},\frac{3}{4.5},\frac{4}{5.6},\cdots$

លំហាត់ ៧ បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើន៖

១. $u_n=-\frac{n}{n+1}$ ២. $u_n=n^2-2n$ ៣. $u_n=\frac{n^2+1}{n+2}$

លំហាត់ ៨ បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតចុះ៖

១. $u_n=\frac{1}{n+1}$ ២. $u_n=\frac{2}{3^n}$ ៣. $u_n=\frac{2n}{n^2}+5$

លំហាត់ ៩ សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្ទីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

១. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\frac{1}{n^2}$

២. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=2^{n+1}3^n$

៣. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\frac{n!}{2^n}$ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$

លំហាត់ ១O គេឱ្យស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$ ។ បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតចុះ ។

លំហាត់ ១១ បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\frac{n+1}{e^n}$ ជាស្ទីតទាល់ ។

លំហាត់ ១២ តើស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ខាងក្រោមជាស្ទីតទាល់ ឬ ទេ ?

១. $u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ ២. $u_n=\frac{\pi^n}{n}$

លំហាត់ ១៣ តើស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាស្ទីតនព្វន្តឬទេ ? បើវាជាស្ទីតនព្វន្ត ចូរកំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់វា៖

១. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=2n-3$

២. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=4-3n$

៣. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=n^2+1$

៤. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\frac{2(n-3)}{5}$

លំហាត់ ១៤ រក u_n ចំពោះស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $5,7,9,11,13,\cdots$ ២. $1,6,11,16,21,\cdots$

៣. $8,14,20,26,32,\cdots$ ៤. $60,51,42,33,24,...$

៥. $4,0,-4,-8,-12,...$ ៦. $\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,...$ ។

លំហាត់ ១៥ គេឱ្យស៊ីត $7,18,29,40,51,\cdots$ ។ រក u_n និង u_{20} ។

លំហាត់ ១៦ រក u_n និង u_{13} ចំពោះស៊ីត $200,310,420,530,640,...$ ។

លំហាត់ ១៧ គេឱ្យស៊ីត $17,10,3,-4,-11,\cdots$ ។ រក u_n និង u_{19} ។

លំហាត់ ១៨ តើចំនួន 1000 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត $9,16,23,30,37,...$?

លំហាត់ ១៩ តើចំនួន 500 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត $28,50,72,94,116,...$?

លំហាត់ ២០ រក u_n ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_5=17$ និង $u_9=33$ ២. $u_4=43$ និង $u_{10}=97$

៣. $u_8=-8$ និង $u_{14}=-11$ ។

លំហាត់ ២១ បង្ហាញថាបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្ត៖

១. $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$

២. $(a^2+b^2)^2,(a^4+b^4),(a^2-b^2)^2$

៣. $\frac{2}{x+1},\frac{x+1}{x},\frac{x^2+1}{x(x+1)}$

៤. $(a^2-2ab-b^2)^2,(a^2+b^2)^2,(a^2+2ab-b^2)^2$

លំហាត់ ២២ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្ត៖

១. $(1+x)^2,(3+x)^2,(9+x)^2$ ២. $(2-x)^2,2x,2+x$

៣. $a^2(b+x),b^2(a+x),x^2(a+b)$

លំហាត់ ២៣ រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កាលណាគេស្គាល់៖

១. $u_4=15$ និង $S_5=55$ ២. $u_3+u_5=4$ និង $S_{12}=129$

៣. $u_5+u_3=4$ និង $u_2u_4=-3$ ៤. $S_5=35$ និង $u_4u_5=130$

៥. $u_1+u_7=4$ និង $u_3^2+u_7^2=122$

លំហាត់ ២៤ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $2+5+8+11+14+...$

២. $8+10+12+14+16+...$

៣. $80+77+74+71+68+...$

៤. $2008+1996+1984+1972+1960+...$

៥. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+\frac{11}{6}+...$ ។

លំហាត់ ២៥ គេឱ្យតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត $u_n=5n-3$ គណនា S_{12} ។

លំហាត់ ២៦ គេឱ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $4,15,26,37,...$ ។

១. បង្ហាញថាស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៧ គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $9,5,1,-3,-7,...$ ។

១. គណនាតួទី n នៃស៊ីត ។

២. តើចំនួន -67 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៨ កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a,b,c នៃស៊ីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=30$ និង $abc=910$

២. $a+b+c=-9$ និង $abc=48$

៣. $a+b+c=18$ និង $a^2+b^2+c^2=206$

៤. $a+b+c=9$ និង $a^4+b^4+c^4=707$

លំហាត់ ២៩ រង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយតំរៀបតគ្នា បង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួមស្មើ 21 ម៉ែត្រ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

លំហាត់ ៣០ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

៣. ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ ៣១ ១. គេមានស៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ ដែលគ្រប់តួនៃស៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\frac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។

២. គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ ។

លំហាត់ ៣២ គេឱ្យពីរចំនួន u_0 និង u_1 គេបង្កើតចំនួន

$u_2=u_0+u_1, u_3=u_1+u_2, \cdots, u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$ ។

បង្ហាញថា $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}=u_{n+1}-u_1$ ។

លំហាត់ ៣៣ គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទីមួយ $u_1=1$ ។ គណនាផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្តនេះក្នុងករណីខាងក្រោម៖

១. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4 ។

២. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

លំហាត់ ៣៤ គេឱ្យ a, b, c ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\cot a, \cot b, \cot c$ ជាស៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $\sin^2 a, \sin^2 b, \sin^2 c$ ក៏ជាស៊ីតនព្វន្តដែរ ។

លំហាត់ ៣៥ កំណត់ផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបីតួបន្ទាប់ទៀតនៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \cdots$ ២. $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, \cdots$

៣. $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \cdots$

លំហាត់ ៣៦ កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $625, 125, 25, 5, 1, \cdots$ ២. $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \cdots$

៣. $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \cdots$

លំហាត់ ៣៧ តើស៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោមមានចំនួនប៉ុន្មានតួ ?

១. $1, 2, 4, 8, 16, \cdots, 1024$ ២. $5, 10, 20, \cdots, 5.2^n$

៣. $x^7, -x^6, x^5, \cdots, x^{-7}, x\neq 1$ និង $x>0$

លំហាត់ ៣៨ គេមានស៊ីតធរណីមាត្រ $3, 12, 48, \cdots$ ។

១. គណនាតួទី 9 នៃស្ទីត ។ ២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីត?

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្ទីត ។

ចំហាត់ ៣៩ សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថាវាជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ចំហាត់ ៤0 រកតួទី១ និង ផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នីមួយៗខាងក្រោម បើគេស្គាល់៖

១. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$ ២. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$

៣. $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ៤. $u_1 + u_2 = 18$ និង $u_2 + u_3 = 36$

ចំហាត់ ៤១ គេមានស្ទីតធរណីមាត្រ $5, 15, 45, \cdots$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្ទីតធរណីមាត្រនេះ ។ រក u_n រួចបង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$ ។

ចំហាត់ ៤២ គេមាន u_1, u_2, u_3 ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់រក u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្ទីតធរណីមាត្រ បើគេស្គាល់៖

១. $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ និង $u_1u_2u_3 = 512$

២. $u_1 + u_2 + u_3 = 13$ និង $u_1u_2u_3 = -64$ ។

ចំហាត់ ៤៣ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ បង្កើតបានជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ចំហាត់ ៤៤ រកបីតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា ផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 216 ។

ចំហាត់ ៤៥ រកពីរចំនួន a និង b ដែលបីតួ $a, b, 10$ បង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្តផង និងស្ទីតធរណីមាត្រផង ។

ចំហាត់ ៤៦ តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឱ្យបានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ។

ចំហាត់ ៤៧ គេឱ្យផលបូក $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} = 1022$ ។ គណនាតម្លៃ n ។

ចំហាត់ ៤៨ គណនាតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $a, 28, b$ បង្កើតបានជាស្ទីតធរណីមាត្រ

បើ $a+b=119$ ។

លំហាត់ ៤៩ គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=310$ និង $b^2=10c$

២. $a+b+c=13$ និង $a^2+b^2+c^2=91$ ។

លំហាត់ ៥០ បើ a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនួនខាងក្រោមជាស្ទីតធរណីមាត្រដែរ៖

១. a^2,b^2,c^2 ២. $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ ៣. $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ។

លំហាត់ ៥១ គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $S_n=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots11}_{n\text{ ដងលេខ }1}$

២. $S_n=3+33+333+\cdots+\underbrace{333\cdots33}_{n\text{ ដងលេខ }3}$

៣. $S_n=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\cdots77}_{n\text{ ដងលេខ }7}$

លំហាត់ ៥២ បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

២. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

៣. $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d)=(ab+bc+cd)^2$ ។

លំហាត់ ៥៣ គេឱ្យចំនួនពិត a,b និងស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលកំណត់ដោយ $u_{n+1}=au_n+b$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2}-u_{n+1}=a(u_{n+1}-u_n)$ ។

២. បើ $v_n=u_{n+1}-u_n$ តើស្ទីត (v_n) ជាស្ទីតអ្វី ?

លំហាត់ ៥៤ សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ជាចំនួនសនិទានដែលមានទំរង់ $\frac{a}{b}$

១. $0.\overline{8}$ ២. $0.\overline{34}$ ៣. $2.35\overline{5}$ ៤. $5.3\overline{54}$

លំហាត់ ៥៥ គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$ ២. $\sum_{k=1}^{25}k$

៣. $\sum_{k=100}^{200} k$

៤. $\sum_{k=1}^{55} (3k-2)$

៥. $\sum_{k=1}^{90} (2-7k)$

៦. $\sum_{k=13}^{46} (9+2k)$

លំហាត់ ៥៦ គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n} 3$

២. $\sum_{k=1}^{n} 2k$

៣. $\sum_{k=10}^{n} k^3$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k+1)$

៥. $\sum_{k=1}^{n} (3k-1)^2$

៦. $\sum_{k=1}^{n} (k^2+2k-1)$

លំហាត់ ៥៧ បង្ហាញថា

១. $\sum_{k=1}^{n^2} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n^3-1)}{2}$

២. $\sum_{k=1}^{n+2} (2k+3) = (n+2)(n+6)$

៣. $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

លំហាត់ ៥៨ បង្ហាញថា

១. $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{i} r^2 \right) = \frac{1}{12}.n(n+1)^2(n+2)$

២. $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \left(\sum_{r=1}^{i} r \right) \right) = \frac{1}{24}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

លំហាត់ ៥៩ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ស្រាបញ្ជាក់ថា $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ។

លំហាត់ ៦០ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $7^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ៦១ បង្ហាញថា $13^n + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ៦២ បង្ហាញថា $(1+x)^n \geq (1+nx)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ និង $x > -1$ ។

លំហាត់ ៦៣ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ ។

លំហាត់ ៦៤ គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A = 11 + 12 + 13 + \cdots . + 100$

២. $B = 13^2 + 14^2 + 15^2 + \cdots + 50^2$

៣. $C = 10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 30^3$

៤. $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$

៥. $S_n = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \cdots + n(3n+1)$

៦. $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

៧. $S_n = 2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + \cdots + 2n(2n+2)(2n+4)$

៨. $S_n = 1.3 + 2.9 + 3.27 + \cdots + n3^n$

៩. $S_n = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1} \quad , x > 1$

១០. $S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \cdots + (n-1)n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

១១. $S_n = 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888\cdots88}_{n \text{ ដងលេខ } 8}$

១២. $S_n = 13 + 1313 + 131313 + \cdots + \underbrace{131313\cdots1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

លំហាត់ ៦៥ គេឱ្យស៊ីតេ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតេ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

២. គណនាផលបូក 999 តួដំបូងនៃស៊ីតេ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

៣. គណនា $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

លំហាត់ ៦៦ គណាផលបូក $A_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + \dfrac{1}{3.5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+2)}$

លំហាត់ ៦៧ គណនា $S_n = 1 + \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \cdots + \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

លំហាត់ ៦៨ គណនាផលបូក

១. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!k$

២. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

៣. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

៤. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$

លំហាត់ ៦៩ គណនាផលបូក

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}$$

លំហាត់ ៧០ គណនាផលគុណ

Tel: 016 434 006

១. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

២. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)$

លំហាត់ ៧១ កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(u_n): 1,5,11,19,29,41,\cdots$ ។

លំហាត់ ៧២ កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(u_n): 1,3,7,15,31,63,\cdots$ ។

លំហាត់ ៧៣ កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(u_n): 3,8,16,27,41,58,\cdots$ ។

គណនាផលបូក n តួតំបូងនៃស៊ុីត (u_n) ។

លំហាត់ ៧៤ កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(a_n): 1,12,37,82,153,256,\cdots$ ។

លំហាត់ ៧៥ កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(a_n): 1,7,23,55,109,191,\cdots$ ។

គណនាផលបូក n តួបំបូងនៃស៊ុីត a_n ។

លំហាត់ ៧៦ កំណត់តួទី n នៃទំនាក់ទំនងស៊ុីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1=-1\ ;\ u_{n+1}=-5u_n-1$ ២. $u_1=-2\ ;\ u_{n+1}=u_n+5$

៣. $u_1=3\ ;\ u_{n+1}=4u_n-3n-1$ ៤. $u_1=2\ ;\ u_{n+1}=7u_n-n3^n$

៥. $u_1=1\ ;\ u_{n+1}=-2u_n+3n^2$ ៦. $u_1=-3\ ;\ u_{n+1}=u_n+n^3$

លំហាត់ ៧៧ រកតួទូទៅនៃស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}\end{cases}$ ៣. $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{4u_n-1}\end{cases}$

២. $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}\end{cases}$ ៤. $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+1}{4u_n+2}\end{cases}$

លំហាត់ ៧៨ រកតួទូទៅនៃស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases}u_1=1,u_2=2\\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n\end{cases}$ ២. $\begin{cases}u_1=1,u_2=8\\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n\end{cases}$

๓. $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 15 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n \end{cases}$

๔. $\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 3 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$

๕. $\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 11 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

๖. $\begin{cases} u_1 = 9, u_2 = 13 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 21u_n \end{cases}$

Tel: 016 434 006

2

ផ្នែកទី

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១

ចូរបំពេញតួនៃស្ទីតក្នុងចន្លោះខាងក្រោម៖

១. $1,5,9,\ ,\ ,$

២. $7,10,13,\ ,\ ,$

៣. $6,3,-2,\ ,\ ,\ -29$

៤. $0,5,12,21,\ ,$

ចម្លើយ៖

១. តាង

$u_1 = 1$

$u_2 = 5 = u_1 + 4$

$u_3 = 9 = u_2 + 4$

$u_4 = u_3 + 4 = 9 + 4 = 13$

$u_5 = u_4 + 4 = 13 + 4 = 17$

$u_6 = u_5 + 4 = 17 + 4 = 21$

ដូចនេះ $1,5,9,13,17,21$

២. តាង

$u_1 = 7$

$u_2 = 10 = 3(2) + 4$

$u_3 = 13 = 3(3) + 4$

$u_4 = 3(4) + 4 = 16$

$u_5 = 3(5) + 4 = 19$

$u_6 = 3(6) + 4 = 22$

ដូចនេះ $7,10,13,16,19,22$

Tel: 016 434 006

៣. តាង $u_1 = 6 = 7 - 1^2$

$u_2 = 3 = 7 - 2^2$

$u_3 = -2 = 7 - 3^2$

$u_4 = 7 - 4^2 = -9$

$u_5 = 7 - 5^2 = -18$

$u_6 = 7 - 6^2 = -29$

ដូចនេះ $6, 3, -2, -9, -18, -29$

៤. តាង $u_1 = 0 = 1^2 + 2(1) - 3$

$u_2 = 5 = 2^2 + 2(2) - 3$

$u_3 = 12 = 3^2 + 2(3) - 3$

$u_4 = 21 = 4^2 + 2(4) - 3$

$u_5 = 5^2 + 2(5) - 3 = 32$

$u_6 = 6^2 + 2(6) - 3 = 45$

ដូចនេះ $0, 5, 12, 21, 32, 45$

លំហាត់ ២

សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស៊ីតខាងក្រោម៖

១. $1, 4, 9, 16, \cdots$

២. $1, 9, 25, 49, \cdots$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_1 = 1 = 1^2$

$u_2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 9 = 3^2$

$u_4 = 16 = 4^2$

$u_5 = 5^2 = 25$

$u_6 = 6^2 = 36$

$u_7 = 7^2 = 49$

ដូចនេះ $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$

២. យើងមាន $u_1 = 1 = (2 \times 1 - 1)^2$

$u_2 = 9 = (2 \times 2 - 1)^2$

$u_3 = 25 = (2 \times 3 - 1)^2$

$u_4 = 49 = (2 \times 4 - 1)^2$

$u_5 = (2 \times 5 - 1)^2 = 81$

$u_6 = (2 \times 6 - 1)^2 = 121$

$u_7 = (2 \times 7 - 1)^2 = 169$

ដូចនេះ $1, 9, 25, 49, 81, 121, 169$

លំហាត់ ៣

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

២. $u_n = \dfrac{n^3-2n^2-1}{n^2+n}$

៣. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

៤. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1$

ចម្លើយ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

$u_1 = \dfrac{(-1)^{1+1}}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$u_2 = \dfrac{(-1)^{2+1}}{2+1} = -\dfrac{1}{3}$

$u_3 = \dfrac{(-1)^{3+1}}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

$u_4 = \dfrac{(-1)^{4+1}}{4+1} = -\dfrac{1}{5}$

$u_5 = \dfrac{(-1)^{5+1}}{5+1} = \dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}$

២. $u_n = \dfrac{n^3-2n^2-1}{n^2+n}$

$u_1 = \dfrac{1^3-2(1)^2-1}{1^2+1} = -1$

$u_2 = \dfrac{2^3-2(2)^2-1}{2^2+2} = -\dfrac{1}{6}$

$u_3 = \dfrac{3^3-2(3)^2-1}{3^2+3} = \dfrac{2}{3}$

$u_4 = \dfrac{4^3-2(4)^2-1}{4^2+4} = \dfrac{31}{20}$

$u_5 = \dfrac{5^3-2(5)^2-1}{5^2+5} = \dfrac{37}{15}$

ដូចនេះ $-1, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{31}{20}, \dfrac{37}{15}$

៣. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

$u_1 = 7 - \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1^2} = 7$

$u_2 = 7 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{27}{4}$

$u_3 = 7 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{61}{9}$

$u_4 = 7 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{109}{16}$

$u_5 = 7 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{171}{25}$

ដូចនេះ $7, \dfrac{27}{4}, \dfrac{61}{9}, \dfrac{109}{16}, \dfrac{171}{25}$

៤. $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$u_1 = 1$

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$

$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$

$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$

$u_5 = 2u_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31$

ដូចនេះ $1, 3, 7, 15, 31$

លំហាត់ ៤

សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n^2+1$ ។ តើចំនួន 163 និង 883 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីត ?

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = 2n^2+1$

គេបាន $u_1 = 2(1)^2+1 = 3$

$u_2 = 2(2)^2+1 = 9$

$u_3 = 2(3)^2+1 = 19$

$u_4 = 2(4)^2+1 = 33$

តាង $u_n = 163$ សមមូល $163 = 2n^2+1$

$$162 = 2n^2$$

$$n^2 = \frac{162}{2} = 81$$

$$n = \pm\sqrt{9^2} \Rightarrow n = 9$$

$n = \pm 9 \Rightarrow n = 9$
ព្រោះ $n = -9 \notin \mathbb{N}$

និង $u_n = 883$ សមមូល $883 = 2n^2+1$

$$882 = 2n^2$$

$$n^2 = \frac{882}{2} = 441$$

$$n = \pm\sqrt{21^2} \Rightarrow n = 21 \text{ ព្រោះ } -21 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ បួនតួដំបូងគឺ $3, 9, 19, 33$, ចំនួន 163 ជាតួទី 9 និងចំនួន 883 ជាតួទី 21

លំហាត់ ៥

គេឱ្យស្ទីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 12$
និង $u_n = an^2+bn+c$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ។

Tel: 016 434 006

កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c

យើងមាន $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 12$

និង

$$u_n = an^2 + bn + c$$

$$u_1 = a + b + c \quad , u_1 = 0$$

$$a + b + c = 0 \qquad (1)$$

$$u_2 = a2^2 + b2 + c \quad , u_2 = 3$$

$$4a + 2b + c = 3 \qquad (2)$$

$$u_3 = a3^2 + b3 + c \quad , u_3 = 12$$

$$9a + 3b + c = 12 \qquad (3)$$

យកសមីការ (2) ដក (1) គេបាន

$$4a + 2b + c - (a + b + c) = 3 - 0$$

$$3a + b = 3 \qquad (4)$$

យកសមីការ (3) ដក (2) គេបាន

$$9a + 3b + c - (4a + 2b + c) = 12 - 3$$

$$5a + b = 9 \qquad (5)$$

យកសមីការ (5) ដក (4) គេបាន

$$5a + b - (3a + b) = 9 - 3$$

$$2a = 6$$

$$\Rightarrow a = \frac{6}{2} = 3 \qquad (6)$$

យក (6) ជំនួសចូល (4): $3(3)+b=3 \Rightarrow b=3-9=-6$

ជំនួសចូល (1) : $3-6+c=0 \Rightarrow c=3$

ដូចនេះ $a=3, b=-6$ និង $c=3$

លំហាត់ ៦

កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1,3,5,7,9,\cdots$

២. $2,2,2,2,2,\cdots$

៣. $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\cdots$

៤. $\frac{1}{2.3},\frac{2}{3.4},\frac{3}{4.5},\frac{4}{5.6},\cdots$

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1=2(1)-1=1$

$u_2=2(2)-1=3$

$u_3=2(3)-1=5$

$u_4=2(4)-1=7$

.....

ដូចនេះ $u_n=2n-1$

២. $u_1=2$

$u_2=2$

$u_3=2$

$u_4=2$

.....

ដូចនេះ $u_n=2$

៣. $u_1=\frac{1+1}{2(1)+1}=\frac{2}{3}$

$u_2=\frac{2+1}{2(2)+1}=\frac{3}{5}$

$u_3=\frac{3+1}{2(3)+1}=\frac{4}{7}$

$u_4=\frac{4+1}{2(4)+1}=\frac{5}{9}$

.....

ដូចនេះ $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$

៤. $u_1=\frac{1}{(1+1)(1+2)}=\frac{1}{2.3}$

$u_2=\frac{2}{(2+1)(2+2)}=\frac{2}{3.4}$

$u_3=\frac{3}{(3+1)(3+2)}=\frac{3}{4.5}$

$u_4=\frac{4}{(4+1)(4+2)}=\frac{4}{5.6}$

.....

ដូចនេះ $u_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ៧

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើន៖

១. $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$ ២. $u_n = n^2 - 2n$ ៣. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = -\dfrac{n}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = -\dfrac{n+1}{n+2}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-\frac{n+1}{n+2}}{-\frac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 1 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើន

២. យើងមាន $u_n = n^2 - n \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - n - 1$

$= n^2 + n > 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតកើន

៣. យើងមាន $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1+2} = \dfrac{n^2+2n+2}{n+3}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2+2n+2}{n+3} - \dfrac{n^2+1}{n+2}$

$= \dfrac{(n+2)(n^2+2n+2) - (n+3)(n^2+1)}{(n+3)(n+2)}$

$= \dfrac{n^3+2n^2+2n+2n^2+4n+4-(n^3+n+3n^2+3)}{(n+3)(n+2)}$

$= \dfrac{n^2+5n+1}{(n+3)(n+2)} > 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតកើនគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៨

បង្ហាញថាស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតចុះ៖

១. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ២. $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ ៣. $u_n = \dfrac{2n}{n^2}+5$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$= -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតចុះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

២. យើងមាន $u_n = \dfrac{2}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3\times 3^n}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{2}{3\times 3^n}}{\frac{2}{3^n}} = \dfrac{2}{3\times 3^n} \times \dfrac{3^n}{2} = \dfrac{1}{3} < 1$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតចុះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

៣. យើងមាន $u_n = \dfrac{2n}{n^2}+5 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{(n+1)^2}+5$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)}{(n+1)^2}+5-\left(\dfrac{2n}{n^2}+5\right)$

$= \dfrac{2n^2(n+1)-2n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$= \dfrac{2n^3+2n^2-2n(n^2+2n+1)}{[n(n+1)]^2}$

$= \dfrac{2n^3+2n^2-2n^3-4n^2-2n}{[n(n+1)]^2}$

$= \dfrac{-2n^2-2n}{[n(n+1)]^2}$

$= -\dfrac{2(n+1)}{n^2(n+1)^2} = -\dfrac{2}{n^2(n+1)} < 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតចុះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៩

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្ទីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

១. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

២. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2^{n+1}3^n$

៣. ស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$$= \frac{[n-(n+1)][n+(n+1)]}{[n(n+1)]^2}$$

$$= -\frac{2n+1}{[n(n+1)^2]} < 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

គេបាន (u_n) ជាស្ទីតចុះ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

២. យើងមាន $u_n = 2^{n+1}3^n \Rightarrow u_{n+1} = 2^{n+2}3^{n+1}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+2}3^{n+1}}{2^{n+1}3^n}$

$$= \frac{2\times 2^{n+1}\times 3\times 3^n}{2^{n+1}3^n} = 6 > 1$$

គេបាន (u_n) ជាស្ទីតកើន នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

៣. យើងមាន $u_n = \dfrac{n!}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}$

$$= \frac{n!(n+1)}{2\times 2^n} \times \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2} > 1 \quad ,\forall n \geq 2$$

គេបាន (u_n) ជាស្ទីតកើន នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតម៉ូណូតូន ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

$$n! = n.(n-1)\cdots 3.2.1$$

$$n! = (n-1)!n$$

$$\Rightarrow (n+1)! = n!(n+1)$$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ១០

គេឱ្យស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$ ។ បង្ហាញថាស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ុីតចុះ ។

ចម្លើយ៖

បង្ហាញថាស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ុីតចុះ

យើងមាន $u_n=(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow u_{n+1}=(3^{n+1}+4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$

ដោយ $3^n<4^n\Leftrightarrow 3^n+4^n<2\times 4^n\Rightarrow (3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}<(2\times 4^n)^{\frac{1}{n}}=4\times 2^{\frac{1}{n}}$

ម្យ៉ាងទៀត $3^{n+1}<4^{n+1}\Leftrightarrow 3^{n+1}+4^{n+1}<2\times 4^{n+1}$

$$\Rightarrow (3^{n+1}+4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}<(2\times 4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}=4\times 2^{\frac{1}{n+1}}$$

គេបាន $\dfrac{(3^{n+1}+4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}{(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}}<\dfrac{4\times 2^{\frac{1}{n+1}}}{4\times 2^{\frac{1}{n}}}=2^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=2^{\frac{n-n-1}{n(n+1)}}=2^{-\frac{1}{n(n+1)}}<2^0$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ព្រោះ $2^{-\frac{1}{n(n+1)}}<2^0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{n(n+1)}<0,\forall n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ុីតចុះ

លំហាត់ ១១

បង្ហាញថាស៊ុីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\dfrac{n+1}{e^n}$ ជាស៊ុីតទាល់ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n=\dfrac{n+1}{e^n}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{n+2}{e^{n+1}}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+2}{e^{n+1}}\times\dfrac{e^n}{n+1}$

$$=\frac{n+2}{e(n+1)}<1 \qquad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ុីតចុះនោះ (u_n) ជាស៊ុីតទាល់លើ

ដែលមាន $u_1=\dfrac{1+1}{e^1}=\dfrac{2}{e}$ ជាគោលលើនៃស៊ុីត

ម្យ៉ាងទៀត $u_n=\dfrac{n+1}{e^n}=\dfrac{n}{e^n}+\dfrac{1}{e^n}\to 0$ ព្រោះ $\begin{cases}\dfrac{n}{e^n}\to 0 \text{ ពេល } n\to+\infty\\ \dfrac{1}{e^n}\to 0 \text{ ពេល } n\to+\infty\end{cases}$

ចំណាំ៖
$n\to 0$ ពេល $n\to+\infty$
(មានន័យថា n ខិតជិត 0 ពេល n មានតម្លៃកាន់តែធំ)

នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ុីតទាល់ក្រោមដែលមាន 0 ជាគោលក្រោមនៃស៊ុីត

Tel: 016 434 006

ដោយ (u_n) ជាស្ទីតទាល់លើផង និងជាស្ទីតទាល់ក្រោមផង

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតទាល់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ១២

តើស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ខាងក្រោមជាស្ទីតទាល់ ឬ ទេ ?

១. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ ២. $u_n = \dfrac{\pi^n}{n}$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} - \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

$$= \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+3) - (n+1)(n+2) - (n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + 6n + \cancel{2n} + 6 - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - n - 2 - \cancel{n^2} - 3n - 2n - 6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} < 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតចុះ នោះ (u_n) ជាស្ទីតទាល់លើ

ដែលមាន $u_1 = \dfrac{1}{1+1} - \dfrac{1}{1+2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3-2}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$ ជាគោលលើនៃស្ទីត

ម៉្យាងទៀត $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} \to 0$ ពេល $n \to +\infty$

ព្រោះ $\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \to 0 \text{ ពេល } n \to +\infty \\ \dfrac{1}{n+2} \to 0 \text{ ពេល } n \to +\infty \end{cases}$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតទាល់ក្រោមដែលមាន 0 ជាគោលក្រោមនៃស្ទីត

Tel: 016 434 006

ដោយ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតទាល់ក្រោមផងនិងជាស្ទីតទាល់លើផង

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតទាល់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

២. យើងមាន $u_n = \dfrac{\pi^n}{n}$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{\pi^{n+1}}{n+1}$$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\pi^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{\pi^n}$

$$= \frac{\pi^{\not n}\pi}{n+1} \times \frac{n}{\pi^{\not n}}$$

$$= \frac{\pi n}{n+1} > 1 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតកើននោះ (u_n) ជាស្ទីតទាល់ក្រោមដែលមាន $u_1 = \pi$ ជាគោលក្រោមនៃស្ទីត

ម៉្យាងទៀត $u_n = \dfrac{\pi^n}{n} \to +\infty$ ពេល $n \to +\infty$ នាំឱ្យ (u_n) មិនមែនជាស្ទីតទាល់លើ

ដូចនេះ $(u_n)_n$ មិនមែនជាស្ទីតទាល់

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ១៣

តើស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាស៊ីតនព្វន្តឬទេ ? បើវាជាស៊ីតនព្វន្ត ចូរកំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់វា៖

១. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n-3$

២. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 4-3n$

៣. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = n^2+1$

៤. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{2(n-3)}{5}$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = 2n-3 \Rightarrow u_{n+1} = 2(n+1)-3$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = 2(n+1)-3-(2n-3)$

$= \cancel{2n}+2-\cancel{3}-\cancel{2n}+\cancel{3}$

$= 2 = d$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ $u_1 = 2(1)-3 = -1$ និង $d = 2$

២. យើងមាន $u_n = 4-3n \Rightarrow u_{n+1} = 4-3(n-1)$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = 4-3(n-1)-(4-3n)$

$= -3n+1+3n = 1 = d$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ $u_1 = 4-3(1) = 1$ និង $d = 1$

៣. យើងមាន $u_n = n^2+1 \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)^2+1$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = (n+1)^2+1-(n^2+1)$

$= n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$

នាំឱ្យ (u_n) មិនមែនជាស៊ីតនព្វន្ត ។

៤. យើងមាន $u_n = \dfrac{2(n-3)}{5} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2(n+1-3)}{5} = \dfrac{2(n-2)}{5} = \dfrac{2n-4}{5}$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = \dfrac{2n-4-2n+6}{5} = \dfrac{2}{5} = d$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ $u_1 = \dfrac{2(1-3)}{5} = -\dfrac{4}{5}$ និង $d = \dfrac{2}{5}$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ១៤

រក u_n ចំពោះស៊ីតនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $5,7,9,11,13,\cdots$

២. $1,6,11,16,21,\cdots$

៣. $8,14,20,26,32,\cdots$

៤. $60,51,42,33,24,...$

៥. $4,0,-4,-8,-12,...$

៦. $\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,...$ ។

ចម្លើយ៖

រក u_n ចំពោះស៊ីតនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. យើងមាន $u_1=5,u_2=7,u_3=9 \Rightarrow d=u_2-u_1=u_3-u_2$

$=9-7=7-5=2$

គេបាន $u_n=u_1+(n-1)d$

$=5+(n-1)2$

$=5+2n-2$

ដូចនេះ $u_n=2n+3$

២. យើងមាន $u_1=1,u_2=6,u_3=11 \Rightarrow d=u_2-u_1=u_3-u_2$

$=11-6=6-1=5$

គេបាន $u_n=u_1+(n-1)d$

$=1+(n-1)5$

$=1+5n-5$

ដូចនេះ $u_n=5n-4$

៣. យើងមាន $u_1=8,u_2=14,u_3=20 \Rightarrow d=u_2-u_1=u_3-u_2$

$=20-14=14-8=6$

គេបាន $u_n=u_1+(n-1)d$

$=8+(n-1)6$

$=8+6n-6$

ដូចនេះ $u_n=6n+2$

Tel: 016 434 006

៤. យើងមាន $u_1 = 60, u_2 = 51, u_3 = 42 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$= 42 - 51 = 51 - 60 = -9$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 60 + (n-1)(-9)$

$= 60 - 9n + 9$

ដូចនេះ $u_n = 69 - 9n$

៥. យើងមាន $u_1 = 4, u_2 = 0, u_3 = -4 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 0 - 4 = -4$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 4 + (n-1)(-4)$

$= 4 - 4n + 4$

ដូចនេះ $u_n = 8 - 4n$

៦. យើងមាន $u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = 2 \Rightarrow d = u_2 - u_1$

$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= \frac{3}{2} + (n-1)\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}n + \frac{3-1}{2}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{n+2}{2}$

លំហាត់ ១៥

គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $7, 18, 29, 40, 51, \cdots$ ។ រក u_n និង u_{20} ។

ចម្លើយ៖

រក u_n និង u_{20}

យើងមាន $u_1 = 7, u_2 = 18$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 18 - 7 = 11$

Tel: 016 434 006

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 7 + (n-1)11$

$= 7 + 11n - 11$

$u_n = 11n - 4$

នាំឱ្យ $u_{20} = 11(20) - 4$

$= 220 - 4$

$= 216$

ដូចនេះ $u_n = 11n - 4$ និង $u_{20} = 216$

លំហាត់ ១៦

រក u_n និង u_{13} ចំពោះស៊ីតនព្វន្ត $200, 310, 420, 530, 640, \ldots$ ។

ចម្លើយ៖

រក u_n និង u_{13}

យើងមាន $u_1 = 200, u_2 = 310$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 310 - 200 = 110$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 200 + (n-1)110$

$= 200 + 110n - 110$

$u_n = 110n + 90$

នាំឱ្យ $u_{13} = 110(13) + 90$

$= 1520$

ដូចនេះ $u_n = 110n + 90$ និង $u_{13} = 1520$

លំហាត់ ១៧

គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $17, 10, 3, -4, -11, \cdots$ ។ រក u_n និង u_{19} ។

ចម្លើយ៖

រក u_n និង u_{19}

Tel: 016 434 006

យើងមាន $u_1 = 17, u_2 = 10$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 10 - 17 = -7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 17 + (n-1)(-7)$

$= 17 - 7n + 7$

$u_n = 24 - 7n$

នាំឱ្យ $u_{19} = 24 - 7(19)$

$= -109$

ដូចនេះ $u_n = 24 - 7n$ និង $u_{19} = -109$

លំហាត់ ១៨

តើចំនួន 1000 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីតនព្វន្ត $9, 16, 23, 30, 37, \ldots$?

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_1 = 9, u_2 = 16$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 16 - 9 = 7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 9 + (n-1)7$

$= 9 + 7n - 7$

$u_n = 7n + 2$

តាង $u_n = 1000$ សមូល $1000 = 7n + 2$

$998 = 7n$

$n = \frac{998}{7} = 142.57 \notin \mathbb{N}$

ដូចនេះ 1000 មិនមែនជាចំនួននៃស៊ីតនព្វន្ត (u_n) ទេ

លំហាត់ ១៩

តើចំនួន 500 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីតនព្វន្ត $28, 50, 72, 94, 116, \ldots$?

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_1 = 28, u_2 = 50$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 50 - 28 = 22$

គេបាន $u_{500} = 28 + (n-1)22$

$$500 = 28 + (n-1)22$$

$$500 = 28 + 22n - 22$$

$$494 = 22n$$

$$n = \frac{494}{22} = 22.45 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ 500 មិនមែនជាចំនួននៃស្ទីតន្ទ (u_n) ទេ

លំហាត់ ២០

រក u_n នៃស្ទីតន្ទ ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$ ២. $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$

៣. $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ ។

ចម្លើយ៖

១. រក u_n

យើងមាន $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$ តាមទំនាក់ទំនង

$$u_n = u_1 + (n-1)d \qquad (7)$$

នាំឱ្យ

$$u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow 17 = u_1 + 4d \qquad (8)$$

$$u_9 = u_1 + 8d \Leftrightarrow 33 = u_1 + 8d \qquad (9)$$

យកសមីការ (9) ដក សមីការ (8)

គេបាន $33 - 17 = (u_1 + 8d) - (u_1 + 4d)$

$$16 = \cancel{u_1} + 8d - \cancel{u_1} - 4d$$

$$16 = 4d$$

$$d = 4$$

ជំនួសចូលសមីការ (8) គេបាន $17 = u_1 + 4(4) \Rightarrow u_1 = 17 - 16 = 1$

ជំនួសចូលសមីការ (7) គេបាន $u_n = 1 + (n-1)4$

$$= 1 + 4n - 4$$

ដូចនេះ $u_n = 4n - 3$

២. រក u_n

យើងមាន $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$ តាមទំនាក់ទំនង

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad (10)$$

$$u_4 = u_1 + 3d \Leftrightarrow 43 = u_1 + 3d \quad (11)$$

$$u_{10} = u_1 + 9d \Leftrightarrow 97 = u_1 + 9d \quad (12)$$

យកសមីការ (12) ដក សមីការ (11)

គេបាន $97 - 43 = (u_1 + 9d) - (u_1 + 3d)$

$$54 = \cancel{u_1} + 9d - \cancel{u_1} - 3d$$

$$54 = 6d$$

$$d = \frac{54}{6} = 9$$

ជំនួសចូលសមីការ (11) គេបាន $43 = u_1 + 3(9) \Rightarrow u_1 = 43 - 27 = 16$

ជំនួសចូលសមីការ (10) គេបាន $u_n = 16 + (n-1)9$

$$= 16 + 9n - 9$$

ដូចនេះ $u_n = 9n + 7$

៣. រក u_n

យើងមាន $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ តាមទំនាក់ទំនង

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad (13)$$

$$u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow -8 = u_1 + 7d \quad (14)$$

$$u_{14} = u_1 + 13d \Leftrightarrow -11 = u_1 + 13d \quad (15)$$

យកសមីការ (15) ដក សមីការ (14)

គេបាន $-11-(-8)=(u_1+13d)-(u_1+7d)$

$$-11+8=\cancel{u_1}+13d-\cancel{u_1}-7d$$

$$-3=6d$$

$$d=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

ជំនួសចូលសមីការ (14) គេបាន $-8=u_1+7\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow u_1=-8+\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}$

ជំនួសចូលសមីការ (13) គេបាន $u_n=-\frac{9}{2}+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$=-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}n+\frac{-9+1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}n+\frac{-8}{2}$$

ដូចនេះ $u_n=-\frac{1}{2}n-4$

លំហាត់ ២១

បង្ហាញថាបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្ត៖

១. $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$

២. $(a^2+b^2)^2,(a^4+b^4),(a^2-b^2)^2$

៣. $\frac{2}{x+1},\frac{x+1}{x},\frac{x^2+1}{x(x+1)}$

៤. $(a^2-2ab-b^2)^2,(a^2+b^2)^2,(a^2+2ab-b^2)^2$

ណែនាំ៖
បើ x,y,z ជាបីតួនៃស្ទីតនព្វន្ត
គេបាន $x+z=2y$

ចម្លើយ៖

១. បង្ហាញថា $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{2x}{x^2-1}$$ តាមមជ្ឈមនព្វន្ត

ដូចនេះ $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

២. បង្ហាញថា $(a^2+b^2)^2,(a^4+b^4),(a^2-b^2)^2$ ជាស្ទីតនព្វន្ត តាមមជ្ឈមនព្វន្ត

Tel: 016 434 006

គេបាន $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2 = a^4+2(ab)^2+b^4+[a^4-2(ab)^2+b^4]$

$= a^4+\cancel{2(ab)^2}+b^4+a^4-\cancel{2(ab)^2}+b^4$

$= 2a^4+2b^4$

$= 2(a^4+b^4)$

ដូចនេះ $(a^2+b^2)^2, a^4+b^4, (a^2-b^2)^2$ ជាស៊ីតនព្ធន្ត

៣. បង្ហាញថា $\frac{2}{x+1}, \frac{x+1}{2x}, \frac{x^2+1}{x(x+1)}$ ជាស៊ីតនព្ធន្ត

គេបាន $\frac{2}{x+1}+\frac{x^2+1}{x(x+1)} = \frac{2x+x^2+1}{x(x+1)}$

$= \frac{(x+1)^2}{x(x+1)}$

$= \frac{(x+1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}$

$= 2.\frac{x+1}{2x}$ តាមមជ្ឈមនព្ធន្ត

ដូចនេះ $\frac{2}{x+1}, \frac{x+1}{2x}, \frac{x^2+1}{x(x+1)}$ ជាស៊ីតនព្ធន្ត

៤. បង្ហាញថា $(a^2-2ab-b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2+2ab-b^2)^2$ ជាស៊ីតនព្ធន្ត

គេបាន $(a^2-2ab-b^2)^2+(a^2+2ab-b^2)^2$

$= [(a^2-2ab-b^2)+(a^2+2ab-b^2)]^2-2(a^2-2ab-b^2)(a^2+2ab-b^2)$

$= (2a^2-2b^2)^2-2[a^4+\cancel{2a^3b}-(ab)^2-\cancel{2a^3b}-4(ab)^2+\cancel{2ab^3}-(ab)^2-\cancel{2ab^3}+b^4]$

$= 4a^4+4b^4-8(ab)^2-2a^4+12(ab)^2-2b^4$

$= 2a^4+2b^4+4(ab)^2$

$= 2[(a^2)^2+2(ab)^2+(b^2)^2]$

$= 2(a^2+b^2)^2$ តាមមជ្ឈមនព្ធន្ត

ដូចនេះ $(a^2+b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2-b^2)^2$ ជាស៊ីតនព្ធន្ត

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2-2ab = a^2+b^2$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ២២

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស៊ុីតនព្វន្ត៖

១. $(1+x)^2, (3+x)^2, (9+x)^2$

២. $(2-x)^2, 2x, 2+x$

៣. $a^2(b+x), b^2(a+x), x^2(a+b)$

ចម្លើយ៖

១. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $(1+x)^2, (3+x)^2, (9+x)^2$ ជាស៊ុីតនព្វន្ត

គេបាន $(1+x)^2 + (9+x)^2 = 2(3+x)^2$ តាមមជ្ឈមនព្វន្ត

$$1+2x+x^2+81+18x+x^2 = 2(9+6x+x^2)$$

$$82+20x+\cancel{2x^2} = 18+12x+\cancel{2x^2}$$

$$8x = -64$$

$$\Rightarrow x = -\frac{64}{8}$$

ដូចនេះ $x = -8$

២. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $(2-x)^2, 2x, 2+x$ ជាស៊ុីតនព្វន្ត

គេបាន $(2-x)^2 + 2 + x = 2(2x)$ តាមមជ្ឈមនព្វន្ត

$$4-4x+x^2+2+x = 4x$$

$$x^2-3x-4x+6 = 0$$

$$x^2-6x-x+6 = 0$$

$$x(x-6)-(x-6) = 0$$

$$(x-6)(x-1) = 0$$

សមូល $x-6=0 \Leftrightarrow x=6$ ឬ $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

ដូចនេះ $x=1$ ឬ $x=6$

Tel: 016 434 006

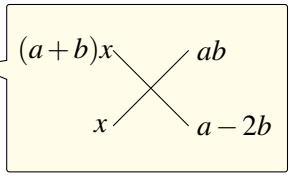
៣. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $a^2(b+x), b^2(a+x), x^2(a+b)$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $a^2(b+x)+x^2(a+b)=2b^2(a+x)$

$$a^2b+a^2x+(a+b)x^2-2ab^2-2b^2x=0$$

$$(a+b)x^2+(a^2-2b^2)x+ab(a-2b)=0$$

$$[(a+b)x+ab](x+a-2b)=0$$



សមូល $(a+b)x+ab=0 \Leftrightarrow (a+b)x=-ab$

$$\Rightarrow x=-\frac{ab}{a+b}$$

ឬ $x+a-2b=0 \Leftrightarrow x=2b-a$

ដូចនេះ $x=2b-a$ ឬ $x=-\frac{ab}{a+b}$

លំហាត់ ២៣

រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្ទីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កាលណាគេស្គាល់៖

១. $u_4=15$ និង $S_5=55$

២. $u_3+u_5=4$ និង $S_{12}=129$

៣. $u_5+u_3=4$ និង $u_2u_4=-3$

៤. $S_5=35$ និង $u_4u_5=130$

៥. $u_1+u_7=4$ និង $u_3^2+u_7^2=122$

ចម្លើយ៖

១. រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្ទីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_4=15$ ដោយ $u_4=u_1+3d \Leftrightarrow u_1+3d=15$

នាំឱ្យ

$$u_1=15-3d \qquad (16)$$

និង $S_5=55$ ដោយ $S_5=\frac{5}{2}.(2u_1+4d)=5(u_1+2d)$

$$55=5(15-3d+2d)$$

$$11=-d+15$$

Tel: 016 434 006

$d = 15 - 11 = 4$ ជំនួសចូល (16)

គេបាន $u_1 = 15 - 3(4) = 15 - 12 = 3$

ដូចនេះ $u_1 = 3$ និង $d = 4$

២. រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន

$$u_3 + u_5 = 4$$

$$u_1 + 2d + u_1 + 4d = 4$$

$$2(u_1 + 3d) = 4$$

$$u_1 = 2 - 3d \qquad (17)$$

និង $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2(2-3d) + 11d]$$

$$129 = 6(4 - 6d + 11d)$$

$$129 = 6(4 + 5d)$$

$$129 = 24 + 30d$$

$$\frac{129 - 24}{30} = d$$

$$d = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \quad \text{ជំនួសចូល (17)}$$

$$\Rightarrow u_1 = 2 - 3.\frac{7}{2} = \frac{4-21}{2} = -\frac{17}{2}$$

ដូចនេះ $u_1 = -\frac{17}{2}$ និង $d = \frac{7}{2}$

$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n), u_n = u_1 + (n-1)d$
$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

៣. រកតួទីមួយ u_1 និងផលសងរួម d

យើងមាន

$$u_5+u_3=4$$
$$u_1+4d+u_1+2d=4$$
$$2(u_1+3d)=4$$
$$u_1+3d=2 \qquad (18)$$

និង

$$u_2u_4=-3$$
$$(u_1+d)(u_1+3d)=-3$$
$$(u_1+d)2=-3$$
$$u_1+d=-\frac{3}{2} \qquad (19)$$

យកសមីការ (18) ដក (19) គេបាន $(u_1+3d)-(u_1+d)=2-\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$u_1+3d-u_1-d=2+\frac{3}{2}$$
$$2d=\frac{7}{2}\Rightarrow d=\frac{7}{4}$$

យក $d=\frac{7}{4}$ ជំនួសចូលសមីការ (២) គេបាន $u_1+\frac{7}{4}=-\frac{3}{2}\Rightarrow u_1=-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}=-\frac{13}{4}$

ដូចនេះ $u_1=-\frac{13}{4}$ និង $d=\frac{7}{2}$

៤. រកតួទីមួយ u_1 និងផលសងរួម d

យើងមាន $S_5=35$

$$\frac{5}{2}(u_1+u_1+4d)=35$$
$$\frac{5}{2}\times 2(u_1+2d)=35$$
$$u_1+2d=\frac{35}{5}=7$$

Tel: 016 434 006

និង $u_4u_5 = 130$

$$(u_1+3d)(u_1+4d) = 130$$

$$[(u_1+2d)+d][(u_1+2d)+2d] = 130$$

$$(7+d)(7+2d) = 130$$

$$49+14d+7d+2d^2 = 130$$

$$2d^2+21d+49-130 = 0$$

$$2d^2+21d-81 = 0$$

$$2d^2-6d+27d-81 = 0$$

$$2d(d-3)+27(d-3) = 0$$

$$(d-3)(2d+27) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} d-3=0 \\ 2d-27=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d=3 \\ d=\dfrac{27}{2} \end{bmatrix}$$

ចំពោះ $d=3 \Rightarrow u_1 = 7-2d = 7-2(3) = 1$

ចំពោះ $d=\dfrac{27}{2} \Rightarrow u_1 = 7-2\times\dfrac{27}{2} = 7-27 = -20$

ដូចនេះ $u_1 = 1, d = 3$ ឬ $u_1 = -20, d = \dfrac{27}{2}$

៥. រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស៊ីតនព្ធន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1+u_7 = 4$

$$u_1+u_1+6d = 4$$

$$2u_1+6d = 4$$

$$2(u_1+3d) = 4$$

$$u_1+3d = 2$$

$$\Rightarrow u_1 = 2-3d \qquad (20)$$

និង $u_3^2+u_7^2=122$

$(u_1+2d)^2+(u_1+6d)^2=122$

$(u_1+3d-d)^2+(u_1+3d+3d)^2=122$

$(2-d)^2+(2+3d)^2=122$

$4-4d+d^2+4+12d+9d^2-122=0$

$10d^2+8d-144=0$

$5d^2+4d-57=0$

តាង $a=5, b'=\frac{b}{2}=\frac{4}{2}=2, c=-57$

តាម $\Delta'=(b')^2-ac=2^2-(5)(-57)=289 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{17^2}=17$

នាំឱ្យ $\begin{cases} d=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-2+17}{5}=3 \\ d=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-2-17}{5}=-\dfrac{19}{5} \end{cases}$ ជំនួសចូលសមីការ (20)

គេបាន $\begin{cases} u_1=2-3\times 3=2-9=-7 \\ u_1=2-3\times\dfrac{-19}{5}=\dfrac{10+57}{5}=\dfrac{67}{5} \end{cases}$

ដូចនេះ $u_1=-7, d=3$ ឬ $u_1=\frac{67}{5}, d=-\frac{19}{5}$

លំហាត់ ២៨

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្ធន្តនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $2+5+8+11+14+\ldots$

២. $8+10+12+14+16+\ldots$

៣. $80+77+74+71+68+\ldots$

៤. $2008+1996+1984+1972+1960+\ldots$

៥. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+\frac{11}{6}+\ldots$ ។

១. គណនាផលបូក $2+5+8+11+14+\cdots$

តាង $u_1=2, u_2=5 \Rightarrow d=u_2-u_1=5-2=3$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n) \quad , u_n=u_1+(n-1)d$

$$=\frac{n}{2}[u_1+u_1+(n-1)d]$$
$$=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$$
$$=\frac{n}{2}[2(2)+(n-1)3]$$
$$=\frac{n}{2}(4+3n-3)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{2}(3n+1)$

២. គណនាផលបូក $8+10+12+14+16+\cdots$

តាង $u_1=8, u_2=10, u_3=12 \Rightarrow d=u_2-u_1=10-8=2$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$

$$=\frac{n}{2}[2(8)+(n-1)2]$$
$$=\frac{n}{2}(16+2n-2)$$
$$=\frac{n}{\cancel{2}}(n+7)\cancel{2}$$

ដូចនេះ $S_n=n(n+7)$

៣. គណនាផលបូក $80+77+74+71+68+\cdots$

តាង $u_1=80, u_2=77 \Rightarrow d=u_2-u_1=77-80=-3$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$

$$=\frac{n}{2}[2(80)+(n-1)(-3)]$$
$$=\frac{n}{2}(160-3n+3)$$
$$=\frac{n}{2}(163-3n)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{2}(163-3n)$

៤. គណនាផលបូក $2008+1996+1984+1972+1960+\cdots$

តាង $u_1 = 2008, u_2 = 1996 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 1996 - 2008 = -12$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2(2008) + (n-1)(-12)]$

$= \frac{n}{2}(4016 - 12n + 12)$

$= \frac{n}{2}(4028 - 12n) = 2014n - 6n^2$

ដូចនេះ $S_n = 2014n - 6n^2$

៥. គណនាផលបូក $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \frac{3}{2} + \frac{11}{6} + \cdots$

តាង $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{5}{6}, u_3 = \frac{7}{6} \Rightarrow d = u_2 - u_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2\left(\frac{1}{2}\right) + (n-1)\frac{1}{3}]$

$= \frac{n}{2}(1 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3})$

$= \frac{n}{2}\left(\frac{3+n-1}{3}\right)$

$= \frac{n}{2} \times \frac{n+2}{3}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n(n+2)}{6}$

លំហាត់ ២៤

គេឱ្យតួទី n នៃស៊ីតនព្ធន្ត $u_n = 5n - 3$ គណនា S_{12} ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = 5n - 3$ នាំឱ្យ $u_1 = 5(1) - 3 = 2$

$u_{12} = 5(12) - 3 = 57$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2 + 57) = 6(59) = 354$

ដូចនេះ $S_{12} = 354$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ២៦

គេឱ្យស៊ុីត (u_n) កំណត់ដោយ $4, 15, 26, 37, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស៊ុីត (u_n) ជាស៊ុីតនព្វន្ត ។

២. រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊ុីតនព្វន្តនេះ ។

ចម្លើយ៖

គេឱ្យស៊ុីត (u_n) កំណត់ដោយ $4, 15, 26, 37, \ldots$

១. យើងមាន $u_1 = 4, u_2 = 15 \Rightarrow u_2 - u_1 = 15 - 4 = 11$

$$u_3 = 4, u_4 = 15 \Rightarrow u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = 37 - 26 = 26 - 15 = 11$$

នាំឱ្យ $d = 11 > 0$ គេបាន (u_n) ជាស៊ុីតនព្វន្តកើន

២. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊ុីត

គេបាន $S_{20} = \frac{20}{2}[4 + (4 + 19 \times 11)]$

$= 10(8 + 209) = 10(217)$

ដូចនេះ $S_{20} = 2170$

ប្រើ $u_n = u_1 + (n-1)d$

$S_n = u_1 + (n-1)d$

$S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

លំហាត់ ២៧

គេឱ្យស៊ុីតនព្វន្ត $9, 5, 1, -3, -7, \ldots$ ។

១. គណនាតួទី n នៃស៊ុីត ។

២. តើចំនួន -67 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ុីតនព្វន្តនេះ ។

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 9, u_2 = 5$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 5 - 9 = -4$

១. គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 9 + (n-1)(-4)$

$= 9 - 4n + 4$

$= 13 - 4n$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ុីតគឺ $u_n = 13 - 4n$

Tel: 016 434 006

២. តាង $u_n = -67$ គេបាន $-67 = 14 - 4n$

$$4n = 14 + 67$$

$$4n = 81$$

$$n = \frac{81}{4} = 20.25 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ: ចំនួន -67 មិនមែនជាចំនួននៃតួរបស់ស៊ុីត (u_n)

លំហាត់ ២៨

កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a, b, c នៃស៊ុីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថា:

១. $a+b+c = 30$ និង $abc = 910$

២. $a+b+c = -9$ និង $abc = 48$

៣. $a+b+c = 18$ និង $a^2+b^2+c^2 = 206$

៤. $a+b+c = 9$ និង $a^4+b^4+c^4 = 707$

ចម្លើយ:

១. កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a, b, c នៃស៊ុីតនព្វន្ត

គេមាន $a+b+c = 30$ តាមមជ្ឈមនព្វន្ត $a+c = 2b$

$$2b + b = 30$$

$$3b = 30$$

$$b = 10$$

នាំឱ្យ $a+c = 2b = 2(10) = 20$

និង $abc = 910$

$$10ac = 910$$

$$ac = \frac{910}{10}$$

$$ac = 91$$

ទ្រឹស្តីបទវ៉ៀត: បើ α, β ជាឫសរបស់សមីការនោះគេបាន $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha.\beta = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀតគេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-20X+91=0$$

$$X^2-7X-13X+91=0$$

$$X(X-7)-13(X-7)=0$$

$$(X-7)(X-13)=0$$

នាំឱ្យ $X-7=0\Rightarrow X=7$ ឬ $X-13=0\Rightarrow X=13$

ចំពោះ $a=X=7\Rightarrow c=13$

ចំពោះ $a=X=13\Rightarrow c=7$

ដូចនេះ $7,10,13$ ឬ $13,10,7$

២. $a+b+c=-9$ និង $abc=48$ **ស្រាយដូចទី១ដែរ**

ដូចនេះ $-\frac{50494}{10000},-3,-\frac{9506}{10000}$ ឬ $-\frac{9506}{10000},-3,-\frac{50494}{10000}$

៣. កំណត់បីចំនួនពិតគត្នា a,b,c នៃស្ទីតនព្វន្ត

គេមាន $a+b+c=18$ តាមមជ្ឈមនព្វន្ត $a+c=2b$

$$2b+b=18$$

$$3b=18$$

$$b=\frac{18}{3}=6$$

នាំឱ្យ $a+c=2b=2(6)=12$

និង $a^2+b^2+c^2=206$

$$a^2+6^2+c^2=206$$

$$(a+c)^2-2ac=206-36$$

$$12^2-2ac=170$$

$$144-170=2ac$$

$$-26=2ac$$

$$ac=-\frac{26}{2}=-13$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀត

គេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-12X-13=0$$

$$X^2-13X+X-13=0$$

$$X(X-13)+(X-13)=0$$

$$(X-13)(X+1)=0$$

នាំឱ្យ $X-13=0\Rightarrow X=13$ ឬ $X+1=0\Rightarrow X=-1$

ចំពោះ $a=X=13\Rightarrow c=-1$

ចំពោះ $a=X=-1\Rightarrow c=13$

ដូចនេះ $-1,6,13$ ឬ $13,6,-1$

៥. កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a,b,c នៃស៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $a+b+c=9$ តាមមជ្ឈមនព្វន្ត $a+c=2b$

$$2b+b=9$$

$$3b=9$$

$$b=3$$

$(a+c)^4=a^4+4a^3c+6(ac)^2+4ac^3+c^4$

$a^4+c^4=(a+c)^4-4a^3c-6(ac)^2-4ac^3$

នាំឱ្យ $a+c=2b=2(3)=6$

និង $a^4+b^4+c^4=707$

$$(a+c)^4-4a^3c-6(ac)^2-4ac^3=707-b^4$$

$$6^4-2ac(2a^2+4ac+2c^2-ac)=707-3^4$$

$$-2ac[2(a^2+2ac+c^2)-ac]=707-3^4-6^4$$

$$-2ac[2(a+c)^2-ac]=-670$$

$$-2ac[2(6)^2-ac]=-670$$

$$ac(72-ac)=\frac{670}{2}$$

$$72ac-(ac)^2=335$$

តាង $x=ac$

Tel: 016 434 006

គេបាន $72x-x^2=335$

$$-x^2+72x-335=0$$

$$-(x^2-72x+335)=0$$

$$x^2-72x+335=0$$

$$x^2-67x-5x+335=0$$

$$x(x-67)-5(x-67)=0$$

$$(x-67)(x-5)=0$$

នាំឱ្យ $x-67=0\Rightarrow x=67$ ឬ $x-5=0\Rightarrow x=5$

ចំពោះ $x=67\Leftrightarrow ac=67$ និង $a+c=6$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀតគេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-6X+67=0$$

ដោយ $\Delta'=(b')^2-ac=\left(-\frac{6}{2}\right)^2-1(67)<0$ មិនយកព្រោះ $X\notin\mathbb{R}$

ចំពោះ $x=5\Leftrightarrow ac=5$ និង $a+c=6$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀតគេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-6X+5=0$$

$$X^2-5X-X+5=0$$

$$X(X-5)-(X-5)=0$$

$$(X-5)(X-1)=0$$

នាំឱ្យ $X-1=0\Rightarrow X=1$ ឬ $X-5=0\Rightarrow X=5$

ចំពោះ $a=X=1\Rightarrow c=5$

ចំពោះ $a=X=5\Rightarrow c=1$

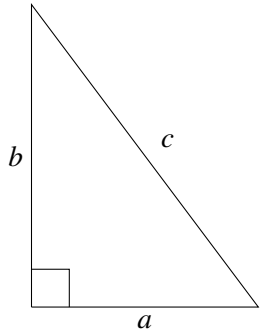
ដូចនេះ $1,3,5$ ឬ $5,3,1$

លំហាត់ ២៩

រង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយតំរៀបតគ្នា បង្កើតបានជាស្ទីតនព្ធន្តមួយដែលមានផលសងរួមស្មើ 21 ម៉ែត្រ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

ចម្លើយ៖

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងដែល $a,b,c>0$



ដោយ a,b,c ជាស្ទីតនព្ធន្តដែលមានផលសង $d=21m$

គេបាន $b=a+d$

$$=a+21$$

$$c=b+d=a+21+21$$

$$=a+42$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន $c^2=a^2+b^2$

$$(a+42)^2=a^2+(a+21)^2$$

$$a^2+84a+1764=a^2+a^2+42a+441$$

$$0=a^2+42a-84a+441-1764$$

$$0=a^2-4a(21)+(21)^2-(42)^2$$

$$0=(a-21)^2-(42)^2$$

$$0=(a-21-42)(a-21+42)$$

$$0=(a-63)(a+21)$$

$\Leftrightarrow a-63=0\Rightarrow a=63$ ឬ $a+21=0\Rightarrow a=-21<0$ មិនយកព្រោះ $a>0$

ចំពោះ $a=63$ នោះ $b=a+21=63+21=84$

$$c=a+42=63+42=105$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងគឺ $63,84,105$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab ជាស្ទីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះ a^2, b^2, c^2 ជាស្ទីតនព្វន្ត ។

៣. ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)}, \frac{a+b}{2ab}, \frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត ។

ចម្លើយ៖

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $a^2-bc+c^2-ab = a^2+c^2-(ab+bc)$

$$= (a+c)^2-2ac-b(a+c)$$

ដោយ a,b,c ជាស្ទីតនព្វន្តនាំឱ្យ $a+c=2b$

នាំឱ្យ $(a^2-bc)+(c^2-ab) = (2b)^2-2ac-b2b$

$$= 4b^2-2b^2-2ac$$

$$= 2(b^2-ac)$$

តាមមធ្យមនព្វន្ត នាំឱ្យ a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab ជាស្ទីតនព្វន្ត

ដូចនេះ បើ a,b,c ជាស្ទីតនព្វន្តនោះ a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab ជាស្ទីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះ a^2, b^2, c^2 ជាស្ទីតនព្វន្ត

យើងមាន $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$$

$$\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$$

$$(2b+a+c)(a+c) = 2(a+b)(b+c)$$

$$a(2b+a+c)+c(2b+a+c) = 2a(b+c)+2b(b+c)$$

$$\cancel{2ab}+a^2+\cancel{ac}+\cancel{2bc}+\cancel{ac}+c^2 = \cancel{2ab}+\cancel{2ac}+2b^2+\cancel{2bc}$$

$$a^2+c^2=2b^2$$

តាមមធ្យមនព្វន្ត នាំឱ្យ a^2,b^2,c^2 ជាស្ទីតនព្វន្ត

ដូចនេះ បើ $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស្ទីតនព្វន្ត ។

៣. ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $\frac{a}{b(a-b)}+\frac{b}{a(b-a)}=\frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}$$

$$=\frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{ab\cancel{(a-b)}}$$

$$=2\times\frac{a+b}{2ab}$$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $a,b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

លំហាត់ ៣១

១. គេមានស៊ីតនព្ធន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ ដែលគ្រប់តួនៃស៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។
បង្ហាញថា $\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\frac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។

២. គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ ។

ចម្លើយ៖

១. គេមានស៊ីតនព្ធន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលគ្រប់តួនៃស៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ
បង្ហាញថា $\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\frac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។
ដោយ $\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n.u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

ផលសងរួម៖ $u_{n+1}-u_n=d$

តួទី n នៃស៊ីតនព្ធន្ត៖ $u_n=u_1+(n-1)d$, $u_{n+1}=u_1+nd$

នាំឱ្យ
$$\frac{1}{u_1.u_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)$$
$$\frac{1}{u_2.u_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right)$$
$$\frac{1}{u_3.u_4}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_3}-\frac{1}{u_4}\right) \qquad (+)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\frac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{1}{du_1}-\frac{1}{du_{n+1}}$$
$$=\frac{u_{n+1}-u_1}{du_1u_{n+1}}$$
$$=\frac{u_1+nd-u_1}{du_1u_{n+1}}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\frac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{n}{u_1.u_{n+1}}$

២. គេបាន $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ៣២

គេឱ្យពីរចំនួន u_0 និង u_1 គេបង្កើតចំនួន

$u_2 = u_0 + u_1, u_3 = u_1 + u_2, \cdots, u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ ។

បង្ហាញថា $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_2 = u_0 + u_1, u_3 = u_1 + u_2, \cdots, u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$

គេបាន $u_2 = u_0 + u_1 \Rightarrow u_0 = \cancel{u_2} - u_1$

$u_3 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = \cancel{u_3} - \cancel{u_2}$

$u_4 = u_2 + u_3 \Rightarrow u_2 = \cancel{u_4} - \cancel{u_3}$

$u_5 = u_3 + u_4 \Rightarrow u_3 = \cancel{u_5} - \cancel{u_4}$

.....

$u_{n+1} = u_{n-1} + u_n \Rightarrow u_{n-1} = u_{n+1} - \cancel{u_n}$

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$

ដូចនេះ $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$

លំហាត់ ៣៣

គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទីមួយ $u_1 = 1$ ។ គណនាផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្តនេះក្នុងករណីខាងក្រោម៖

១. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4 ។

២. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

គណនាផលសងរួមនៃស៊ីតនព្ធន្ត

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_1 = 1$ និង ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4

គេបាន $\frac{u_8}{u_3} = 4 \quad , u_n = u_1 + (n-1)d$

$$u_8 = 4u_3$$

$$u_1 + 7d = 4(u_1 + 2d)$$

$$u_1 + 7d = 4u_1 + 8d$$

$$u_1 - 4u_1 = 8d - 7d \quad , u_1 = 1$$

$$-3 \times 1 = d$$

ដូចនេះ ផលសងរួម $d = -3$

២. យើងមាន $u_1 = 1$ និង ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3

គេបាន $(u_{10} - u_7)^2 = 3$

$$[u_1 + 9d - (u_1 + 6d)]^2 = 3$$

$$(u_1 + 9d - u_1 - 6d)^2 = 3$$

$$(3d)^2 = 3$$

$$9d^2 = 3$$

$$d^2 = \frac{1}{3}$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ ផលសងរួម $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ឬ $d = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

លំហាត់ ៣៤

គេឱ្យ a,b,c ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្ទីតនព្វន្តនោះគេបាន $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ក៏ជាស្ទីតនព្វន្តដែរ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្ទីតនព្វន្ត តាមមជ្ឈមនព្វន្ត

គេបាន

$$\cot a+\cot c=2\cot b$$

$$\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos c}{\sin c}=\frac{2\cos b}{\sin b}$$

$$\frac{\cos a\sin c+\sin a\cos c}{\sin a\sin c}=\frac{2\sin\cos b}{\sin b}$$

$$\sin b\sin c\cos a+\sin a\sin b\cos c=2\sin a\sin c\cos b$$

$$\sin b\sin c\cos a-\sin a\sin c\cos b=\sin a\sin c\cos b-\sin a\sin b\cos c$$

$$\sin c(\sin b\cos a-\cos b\sin a)=\sin a(\sin c\cos b-\cos c\sin b)\qquad \text{ដោយ } c=\pi-(a+b)$$

$$\sin[\pi-(b+a)](\sin b\cos a-\cos b\sin a)=\sin[\pi-(c+b)](\sin c\cos b-\cos c\sin b)$$

$$\sin(b+a)(\sin b\cos a-\cos b\sin a)=\sin(c+b)(\sin c\cos b-\cos c\sin b)$$

$$(\sin b\cos a+\sin a\cos b)(\sin b\cos a-\sin a\cos b)=(\sin c\cos b+\sin b\cos c)(\sin c\cos b-\sin b\cos c)$$

$$(\sin b\cos a)^2-(\sin a\cos b)^2=(\sin c\cos b)^2-(\sin b\cos c)^2$$

$$\sin^2 b(1-\sin^2 a)-\sin^2 a(1-\sin^2 a)=\sin^2 c(1-\sin^2 b)-\sin^2 b(1-\sin^2 c)$$

$$\sin^2 b-\sin^2 a\sin^2 b-\sin^2 a+\sin^2 a\sin^2 b=\sin^2 c-\sin^2 b\sin^2 c-\sin^2 b+\sin^2 b\sin^2 c$$

$$\sin^2 b-\sin^2 a=\sin^2 c-\sin^2 b$$

$$\sin^2 a+\sin^2 c=2\sin^2 b\qquad \text{តាមមជ្ឈមនព្វន្ត}$$

នាំឱ្យ $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

ដូចនេះ បើ $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្ទីតនព្វន្តនោះ $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ៣៥

កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបីតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្ទីតនីមួយៗ ខាងក្រោម៖

១. $8,4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$ ២. $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},\ldots$

៣. $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\ldots$

ចម្លើយ៖

កំណត់ផលធៀបរួម q និងសរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីត

១. យើងមាន $8,4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$

តាង $u_1=8,u_2=4\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

គេបាន $u_6=u_5q=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$u_7=u_6q=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$u_8=u_7q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមគឺ $q=\frac{1}{2}$ និងបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតគឺ $8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$

២. យើងមាន $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},\ldots$

តាង $u_1=8,u_2=4\sqrt{2}\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $u_5=u_4q=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=(\sqrt{2})^2=2$

$u_6=u_5q=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$u_7=u_6q=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(\sqrt{2})^2}{2}=\frac{2}{2}=1$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមគឺ $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និងបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតគឺ $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},2,\sqrt{2},1$

៣. យើងមាន $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\ldots$

តាង $u_1=\sqrt{3},u_2=3\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

គេបាន $u_5 = u_4 q = 9\sqrt{3}$

$u_6 = u_5 q = 9\sqrt{3}.\sqrt{3} = 9(\sqrt{3})^2 = 27$

$u_7 = u_6 q = 27\sqrt{3}$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមគឺ $q = \sqrt{3}$ និងបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតគឺ $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, 27, 27\sqrt{3}$

លំហាត់ ៣៦

កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្ទីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $625, 125, 25, 5, 1, \ldots$ ២. $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \ldots$

៣. $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \ldots$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្ទីតធរណីមាត្រ $625, 125, 25, 5, 1, \ldots$

តាង $u_1 = 625 = 5^4, u_2 = 125 = 5^3 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{5^3}{5^4} = \frac{1}{5}$

គេបាន $u_n = u_1 q^{n-1} = 5^4 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5^4}{5^{n-1}} = 5^{4-(n-1)} = 5^{5-n}$

$\Rightarrow u_{15} = 5^{5-15} = 5^{-10}$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $u_n = 5^{5-n}$ និងតួទី 15 គឺ $u_{15} = 5^{-10}$

២. កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្ទីតធរណីមាត្រ $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \ldots$

តាង $u_1 = 5, u_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{5}{2}}{5} = -\frac{\cancel{5}}{2} \times \frac{1}{\cancel{5}} = -\frac{1}{2}$

គេបាន $u_n = u_1 q^{n-1} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow u_{15} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{15-1} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{14}$

$= (-1)^{14}\frac{5}{2^{14}}$

$= \frac{5}{2^{14}}$

$(-1)^n = 1$ បើ n គូ

$(-1)^n = -1$ បើ n សេស

ដូចនេះ តួទី n គឺ $u_n = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ និងតួទី 15 គឺ $u_{15} = \frac{5}{2^{14}}$

៣. កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្ទីតធរណីមាត្រ $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \ldots$

តាង $u_1=1, u_2=\sqrt{7} \Rightarrow q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{\sqrt{7}}{1}=\sqrt{7}$

គេបាន $u_n=u_1q^{n-1}=1\left(\sqrt{7}\right)^{n-1}=\left(\sqrt{7}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow \quad u_{15}=\left(\sqrt{7}\right)^{15-1}=\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{14}=7^{\frac{14}{2}}=7^7$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $u_n=\left(\sqrt{7}\right)^{n-1}$ និងតួទី 15 គឺ $u_{15}=7^7$

លំហាត់ ៣៧

តើស្ទីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោមមានចំនួនប៉ុន្មានតួ ?

១. $1,2,4,8,16,\ldots,1024$ ២. $5,10,20,\ldots,5.2^n$

៣. $x^7,x^6,x^5,\ldots,x^{-7}$, $x\neq 1$ និង $x>0$

ចម្លើយ

១. រកចំនួនតួនៃស្ទីត $1,2,4,8,16,\ldots,1024$

តាង $u_n=1024, u_1=1, u_2=2$

$\Rightarrow q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{2}{1}=2$

គេបាន $u_n=u_1q^{n-1}$

$1024=1\times 2^{n-1}$

$32\times 32=2^{n-1}$

$2^5\times 2^5=2^{n-1}$

$2^{5+5}=2^{n-1}$

$\Leftrightarrow 5+5=n-1$

$10+1=n \Rightarrow n=11$

ដូចនេះ ស្ទីត $1,2,4,16,\ldots,1024$ មានចំនួន 11 តួ

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad , a\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x)=g(x)$$

២. រកចំនួនតួនៃស៊ីត $5,10,20,\ldots,2560$

តាង $u_n = 2560, u_1 = 5, u_2 = 10$

$\Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{10}{5} = 2$ គេបាន $\quad u_n = u_1 q^{n-1}$

$$2560 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{2560}{10} = 2^{n-1}$$

$$256 = 2^{n-1}$$

$$2^8 = 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 8 = n-1$$

$$n = 9$$

ដូចនេះ: ស៊ីត $5,10,20,\ldots,2560$ មានចំនួន 9 តួ

៣. រកចំនួនតួនៃស៊ីត $x^7, x^6, x^5, \ldots, x^{-7}, x \neq 1$ និង $x > 0$

តាង $u_n = x^{-7}, u_1 = x^7, u_2 = x^6 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{x^6}{x^7} = \dfrac{1}{x}$

គេបាន $\quad u_n = u_1 q^{n-1}$

$$x^{-7} = x^7 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$x^{-7} = x^{7-(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow -7 = 7 - n + 1$$

$$n = 15$$

ដូចនេះ: ស៊ីត $x^7, -x^6, x^5, \ldots, x^{-7}, x \neq 1$ និង $x > 0$ មានចំនួន 15 តួ

លំហាត់ ៣៨

គេមានស៊ីតធរណីមាត្រ $3,12,48,\ldots$ ។

១. គណនាតួទី 9 នៃស៊ីត ។

២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត?

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស៊ីត ។

គេមាន $3, 12, 48, \ldots$

១. គណនាតួទី 9 នៃស៊ុីត

តាង $u_1 = 3, u_2 = 12 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{12}{3} = 4$

គេបាន $u_9 = u_1.q^{9-1} = 3 \times 4^8 = 196608$

ដូចនេះ តួទី 9 នៃស៊ុីតគឺ $u_9 = 196608$

២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ុីត ?

តាង $u_n = 12288$ គេបាន $u_n = u_1.q^{n-1}$

$$12288 = 3 \times 4^{n-1}$$
$$\frac{12288}{3} = 2^{2(n-1)}$$
$$4096 = 2^{2n-2}$$
$$64 \times 64 = 2^{2n-2}$$
$$2^{6+6} = 2^{2n-2}$$
$$\Leftrightarrow 12 = 2n - 2$$
$$\frac{14}{2} = n$$
$$\Rightarrow n = 7$$

ដូចនេះ ចំនួន 12288 ជាតួទី 7 នៃស៊ុីត

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស៊ុីត

គេបាន $S_{30} = u_1 \dfrac{q^{30} - 1}{q - 1}$

$= 3. \dfrac{4^{30} - 1}{4 - 1}$

$= \cancel{3}. \dfrac{4^{30} - 1}{\cancel{3}}$

ដូចនេះ ផលបូក 30 តួដំបូងនៃស៊ុីតគឺ $S_{30} = 4^{30} - 1$

$S_n = u_1. \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

លំហាត់ ៣៩

សរសេរបួនតួដំបូងនៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថារាជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ចម្លើយ៖

- សរសេរបួនតួដំបូងនៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

  យើងមាន $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

  $$u_1 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{0} = 6(1) = 6$$

  $$u_2 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6}{2} = -3$$

  $$u_3 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{2} = 6.\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

  $$u_4 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1} = -6\left(-\frac{1}{2}\right)^{3} = -6.\frac{1}{2^3} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

  ដូចនេះ បួនតួដំបូងនៃស៊ីតគឺ $6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$

- បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

  ដោយ $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

  គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{6.\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\left(-\frac{1}{2}\right)}{6\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}} = -\frac{1}{2} = q$

  ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ៤០

រកតួទី១ និង ផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នីមួយៗខាងក្រោម បើគេស្គាល់៖

១. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$

២. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$

៣. $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$

៤. $u_1 + u_2 = 18$ និង $u_2 + u_3 = 36$

ចម្លើយ៖

$u_n = u_p.q^{n-p}$

$u_7 = u_3 q^{7-3}$

១. រក u_1 និង q

យើងមាន $u_3 = 1$

និង $u_7 = 81 \Leftrightarrow u_3.q^4 = 81$

$$q^4 = 3^4$$

$$q = 3$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $u_1 = \frac{1}{9}$ និង $q = 3$

២. រក u_1 និង q

យើងមាន $u_2 + u_3 = u_1 q + u_1 q^2$

$$u_1(q + q^2) = 9$$

នោះ

$$u_1(q + q^2) = 9 \qquad (21)$$

និង $u_7 = 8u_4 \Leftrightarrow u_4 q^3 = 8u_4$

$$q^3 = 2^3$$

$q = 2$ ជំនួសចូលសមីការ (21)

គេបាន $u_1(2 + 2^2) = 9 \Rightarrow u_1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

ដូចនេះ $u_1 = \frac{3}{2}$ និង $q = 2$

៣. រក u_1 និង q

Tel: 016 434 006

យើងមាន $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3} - \frac{2^1}{3^{1+1}} = \frac{3-2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} - \frac{2^2}{3^{2+1}} = \frac{1}{3} - \frac{4}{27} = \frac{9-4}{27} = \frac{5}{27}$$

$$u_1 + u_1 q = \frac{5}{27}$$

$$u_1(1+q) = \frac{5}{27}$$

$$\frac{1}{9}(1+q) = \frac{5}{27}$$

$$1+q = \frac{5}{3}$$

$$q = \frac{5}{3} - 1 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $u_1 = \frac{1}{9}$ និង $q = \frac{2}{3}$

៤. រក u_1 និង q

យើងមាន $u_1 + u_2 = 18$

និង $u_2 + u_3 = 36$

$$u_1 q + u_2 q = 36$$

$$q(u_1 + u_2) = 36$$

$$18q = 36$$

$$q = \frac{36}{18} = 2$$

ម៉្យាងទៀត $u_1 + u_2 = 18$

$$u_1 + u_1 q = 18$$

$$u_1(1+2) = 18$$

$$u_1 = \frac{18}{3} = 6$$

ដូចនេះ $u_1 = 6$ និង $q = 2$

លំហាត់ ៤១

គេមានស៊ុីតធរណីមាត្រ $5, 15, 45, \ldots$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស៊ុីតធរណីមាត្រនេះ ។ រក u_n រួចបង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$ ។

ចម្លើយ៖

គណនា S_n

យើងមាន $u_1 = 5, u_2 = 15 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{15}{5} = 3$

គេបាន $S_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$= 5.\dfrac{3^n - 1}{3 - 1}$

$= \dfrac{5}{2}(3^n - 1)$

បង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$

ដោយ $u_n = u_1.q^{n-1}$

$= 5 \times 3^{n-1}$

គេបាន $2S_n + 5 = 2.\dfrac{5}{2}(3^n - 1) + 5$

$= 5 \times 3^n - \cancel{5} + \cancel{5}$

$= 5 \times 3^{n-1} \times 3$

$= 3u_n$

ដូចនេះ $2S_n + 5 = 3u_n$

លំហាត់ ៤២

គេមាន u_1, u_2, u_3 ជាស៊ុីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស៊ុីតធរណីមាត្រ បើគេស្គាល់៖

១. $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ និង $u_1 u_2 u_3 = 512$

២. $u_1 + u_2 + u_3 = 13$ និង $u_1 u_2 u_3 = -64$ ។

Tel: 016 434 006

១. កំណត់ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_1u_2u_3 = 512$ តាមមធ្យមធរណីមាត្រ

$$u_2.u_2^2 = 512$$

$$\sqrt[3]{u_2^3} = \sqrt[3]{8^3}$$

$$u_2 = 8$$

> បើ x, y, z ជាស្ទីតធរណីមាត្រ
> កាលណា $xz = y^2$

នាំឱ្យ

$$u_1u_3 = \frac{512}{8} = 64 \qquad (22)$$

និង $u_1 + u_2 + u_3 = 28$

$$u_1 + 8 + u_3 = 28 \Rightarrow u_1 + u_3 = 28 - 8$$

នាំឱ្យ

$$u_1 + u_3 = 20 \qquad (23)$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀត គេបាន $X^2 - (u_1 + u_3)X + u_1u_3 = 0$

$$X^2 - 20X + 64 = 0$$

$$X^2 - 4X - 16X + 64 = 0$$

$$X(X-4) - 16(X-4) = 0$$

$$(X-4)(X-16) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X - 4 = 0 \\ X - 16 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X = 4 \\ X = 16 \end{bmatrix}$$

- ចំពោះ $u_1 = 4, u_2 = 8 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{4} = 2$
- ចំពោះ $u_1 = 16, u_2 = 8 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $u_1 = 4, q = 2$ ឬ $u_1 = 16, q = \frac{1}{2}$

២. កំណត់ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_1u_2u_3 = -64$ តាមមធ្យមធរណីមាត្រ

$$u_2.u_2^2 = -64$$

$$\sqrt[3]{u_2^3} = \sqrt[3]{(-4)^3}$$

$$u_2 = -4$$

នាំឱ្យ

$$u_1u_3 = \frac{-64}{-4} = 16 \qquad (24)$$

និង $u_1 + u_2 + u_3 = 13$

$$u_1 - 4 + u_3 = 13 \Rightarrow u_1 + u_3 = 13 + 4$$

នាំឱ្យ

$$u_1 + u_3 = 17 \qquad (25)$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀត គេបាន $X^2 - (u_1 + u_3)X + u_1u_3 = 0$

$$X^2 - 17X + 16 = 0$$

$$X^2 - X - 16X + 16 = 0$$

$$X(X-1) - 16(X-1) = 0$$

$$(X-1)(X-16) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X - 1 = 0 \\ X - 16 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X = 1 \\ X = 16 \end{bmatrix}$$

- ចំពោះ $u_1 = 1, u_2 = -4 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-4}{1} = -4$
- ចំពោះ $u_1 = 16, u_2 = -4 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $u_1 = 1, q = -4$ ឬ $u_1 = 16, q = -\frac{1}{2}$

លំហាត់ ៨៣

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ បង្កើតបានជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តម្លៃ x

ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

កាលណា $x(4x+36) = (2x+6)^2$

$$\cancel{4x^2} + 36x = \cancel{4x^2} + 24x + 36$$

$$36x - 24x = 36$$

$$12x = 36$$

$$x = \frac{36}{12}$$

$$x = 3$$

បើ x, y, z ជាស្ទីតធរណីមាត្រ
កាលណា $xz = y^2$

ដូចនេះ $x = 3$

លំហាត់ ៨៤

រកបីតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា ផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 216 ។

ចម្លើយ៖

រកបីតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ

តាង a, b, c ជាបីតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

នោះ $a+b+c = 26$ និង $abc = 216$

តាមមធ្យមធរណីមាត្រ $ac = b^2$ នាំឱ្យ $abc = 216$

$$b.b^2 = 216$$

$$b^3 = 6^3$$

$$\Leftrightarrow b = 6$$

Tel: 016 434 006

គេបាន $a+b+c=26 \Rightarrow a+c=26-6=20$

$$abc=216 \Rightarrow ac=\frac{216}{6}=36$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀត គេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-20X+36=0$$

$$X^2-2X-18X+36=0$$

$$X(X-2)-18(X-2)=0$$

$$(X-2)(X-18)=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X-2=0 \\ X-18=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X=2 \\ X=18 \end{bmatrix}$$

បើ $a=2 \Rightarrow c=18$ និង $b=6$

បើ $a=18 \Rightarrow c=2$ និង $b=6$

ដូចនេះ: បីតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រគឺ $2,6,18$ ឬ $18,6,2$

លំហាត់ ៨៥

រកពីរចំនួន a និង b ដែលបីតួ $a,b,10$ បង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្តផង និងស្ទីតធរណីមាត្រផង ។

ចម្លើយ:

យើងមានបីតួ $a,b,10$ ជាស្ទីតនព្វន្តផង និងស្ទីតធរណីមាត្រផង

តាមមធ្យមនព្វន្តគេបាន

$$a+10=2b$$

$$a=2b-10 \qquad (26)$$

Tel: 016 434 006

តាមមធ្យមធរណីមាត្រគេបាន

$$\begin{aligned} a10 &= b^2 \\ (2b-10)10 &= b^2 \\ b^2 - 20b + 100 &= 0 \end{aligned} \qquad (27)$$

ដោយ $a=1, b'=\dfrac{20}{2}=10, c=100$ តាម $\Delta' = (b')^2 - ac = 10^2 - 1(100) = 0$

នាំឱ្យ $b = -\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{10}{1} = -10$ ជំនួសចូល (26) នាំឱ្យ $a = 2(-10) - 10 = -30$

ដូចនេះ $a=-30$ និង $b=-10$

លំហាត់ ៤៦

តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឱ្យបានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ។

ចម្លើយ៖

តាង x ជាចំនួនដែលត្រូវថែមទៅលើចំនួន $3, 24, 94$

នោះ $3+x, 24+x, 94+x$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

តាមមធ្យមធរណីមាត្រ គេបាន $(3+x)(94+x) = (24+x)^2$

$$\begin{aligned} 282 + 3x + 94x + \cancel{x^2} &= 576 + 48x + \cancel{x^2} \\ 49x &= 294 \\ x &= \frac{294}{49} \\ &= 6 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $x=6$

លំហាត់ ៤៧

គេឱ្យផលបូក $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} = 1022$ ។ គណនាតម្លៃ n ។

ចម្លើយ៖

គណនាតម្លៃ n

យើងមាន $2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}=1022$

$$2.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=1022$$

$$2^{n+1}-2=1022$$

$$2^{n+1}=1024$$

$$2^{n+1}=2^{10}$$

$\Leftrightarrow n+1=10 \Rightarrow n \quad =10-1=9$

ដូចនេះ $n=9$

លំហាត់ ៨៨

គណនាតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $a,28,b$ បង្កើតបានជាស្ទីតធរណីមាត្រ បើ $a+b=119$ ។

ចម្លើយ៖

គណនាតម្លៃ a និង b

គេមាន $a,28,b$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រនោះតាមមធ្យមធរណីមាត្រគេបាន $ab=28^2=784$

និង

$$a+b=119 \qquad (28)$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៃតគេបាន $X^2-(a+b)X+ab=0$

$$X^2-119X+784=0$$

$$X-7X-112X+784=0$$

$$X(X-7)-122(X-7)=0$$

$$(X-7)(X-112)=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X-7=0 \\ \\ X-112=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X=7 \\ \\ X=112 \end{bmatrix}$$

- បើ $a=7$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $b=119-a=119-7=112$
- បើ $a=112$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $b=119-a=112-7=105$
- បើ $b=7$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $a=119-b=112-7=105$
- បើ $b=112$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $a=119-b=112-7=105$

ដូចនេះ $a=7\Rightarrow b=112$; $a=112\Rightarrow b=105$

ឬ $a=7\Rightarrow b=1$; $a=112\Rightarrow b=105$

លំហាត់ ៤៩

គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=310$ និង $b^2=10c$

២. $a+b+c=13$ និង $a^2+b^2+c^2=91$ ។

ចម្លើយ៖

១. គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $b^2=10c$ ដោយ $ac=b^2$

នាំឱ្យ $ac=10c\Leftrightarrow a=10\Rightarrow c=\dfrac{b^2}{10}$

និង $a+b+c=310$

$$10+b+\frac{b^2}{10}=310$$

$$\frac{100+10b+b^2}{10}=310$$

$$b^2+10b+100-3100=0$$

$$b^2+10b-3000=0$$

$$b^2-50b+60b-3000=0$$

$$b(b-50)+60(b-50)=0$$

$$(b-50)(b+60)=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b-50=0 \\ b+60=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b=50 \\ b=-60 \end{bmatrix}$$

បើ $b=50 \Rightarrow c=\dfrac{b^2}{10}=\dfrac{50^2}{10}=250$

បើ $b=-60 \Rightarrow c=\dfrac{b^2}{10}=\dfrac{(-60)^2}{10}=360$

ដូចនេះ $a=10, b=50, c=250$ ឬ $a=10, b=-60, c=360$

២. គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $a+b+c=13 \Rightarrow a+c=13-b$

និង $a^2+b^2+c^2=91$ ដោយ $ac=b^2$

នាំឱ្យ $a^2+ac+c^2=91$

$$a^2+2ac+c^2-ac=91$$

$$(a+c)^2-ac=91$$

$$(13-b)^2-ac=91 \quad ,ac=b^2$$

$$13^2-26b+b^2-b^2=91$$

$$-26b=91-169$$

$$b=\frac{78}{26}=3$$

$\Rightarrow a+c=13-3=10$ និង $ac=b^2=3^2=9$

តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ៀតគេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-10X+9=0$$

$$X^2-X-9X+9=0$$

$$X(X-1)-9(X-1)=0$$

$$(X-1)(X-9)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X-1=0 \\ \\ X-9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ \\ X=9 \end{array}\right.$$

បើ $a=1 \Rightarrow c=10-a=10-1=9$

បើ $a=9 \Rightarrow c=10-a=10-9=1$

ដូចនេះ $a=1,b=3,c=9$ ឬ $a=9,b=3,c=1$

លំហាត់ ៨០

បើ a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនួនខាងក្រោមជាស្ទីតធរណីមាត្រដែរ៖

១. a^2,b^2,c^2 ២. $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ ៣. $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ។

ចម្លើយ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែរ

យើងមាន a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រនោះ

គេបាន $ac=b^2 \Leftrightarrow (ac)^2=(b^2)^2$

$\Leftrightarrow a^2.c^2=(b^2)^2$

គេបាន a^2,b^2,c^2 ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

> បើ x,y,z ជាស្ទីតធរណីមាត្រ
> គេបាន $xz=y^2$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែរ

យើងមាន a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រនោះ

គេបាន $ac=b^2 \Leftrightarrow (ac)^2=(b^2)^2$

$\Leftrightarrow a^2.c^2=(b^2)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2.c^2}=\frac{1}{(b^2)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{b^2}\right)^2$

គេបាន $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែរ

យើងមាន a,b,c ជាស្ទីតធរណីមាត្រនោះ

គេបាន $ac=b^2 \Leftrightarrow (ac)^k=(b^2)^k$

$$\Leftrightarrow a^k.c^k=(b^2)^k=(b^k)^2$$

គេបាន $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

លំហាត់ ៥១

គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $S_n=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ ដងលេខ }1}$

២. $S_n=3+33+333+\cdots+\underbrace{333\ldots33}_{n\text{ ដងលេខ }3}$

៣. $S_n=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\ldots77}_{n\text{ ដងលេខ }7}$

ចម្លើយ៖

១. គេមាន $S_n=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ ដងលេខ }1}$

គេបាន $9S_n=9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots99}_{n\text{ ដងលេខ }9}$

$$9S_n=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(1\underbrace{000\ldots00}_{n\text{ ដងលេខ }0}-1)$$

$$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n\text{ តួលេខ }1})$$

$$=10.\frac{10^n-1}{10-1}-n$$

$$9S_n=\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$

២. គេបាន $S_n = 3+33+333+\cdots+\underbrace{333\ldots33}_{n \text{ ជាលេខ } 3}$

$$S_n = 3(1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ ជាលេខ } 1})$$

$$\frac{9}{3}S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots99}_{n \text{ ជាលេខ } 9}$$

$$3S_n = (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(\underbrace{1000\ldots00}_{n \text{ ជាលេខ } 0}-1)$$

$$3S_n = (10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(1+1+1+\cdots+1+1)$$

$$= 10.\frac{10^n-1}{10-1}-n$$

$$3S_n = \frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{(10^{n+1}-9n-10)}{27}$

៣. $S_n = 7+77+777+\cdots+\underbrace{777\ldots77}_{n}$ (ស្រាយដូចគ្នា)

ដូចនេះ $S_n = \frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$

លំហាត់ ៥២

បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $(a-d)^2 = (a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

២. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

៣. $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d) = (ab+bc+cd)^2$ ។

ចម្លើយ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

នោះ $(a-d)^2 = (a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

យើងមាន a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

នោះ $ac = b^2, bd = c^2$ និង $ad = bc$

គេបាន $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=a^2+c^2+b^2+c^2+b^2+d^2-2ac-2bc-2bd$

$=a^2+\cancel{2c^2}+\cancel{2b^2}+d^2-\cancel{2b^2}-2ad-\cancel{2c^2}$

$=a^2-2ad+d^2$

$=(a-d)^2$

ដូចនេះ បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រនោះ $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

នោះ $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

យើងមាន a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $ac=b^2,bd=c^2$ និង $ad=bc$ គេបាន

$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab)^2+(ac)^2+(ad)^2+b^4+(bc)^2+(bd)^2+(bc)^2+c^4+(cd)^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(cd)^2+ac.b^2+adbc+acb^2+bdc^2+abcd+bdc^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(cd)^2+2ab^2c+2abcd+2bc^2d$

$=(ab+bc+cd)^2$

ដូចនេះ បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

នោះ $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d)=(ab+bc+cd)^2$

យើងមាន a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $ac=b^2,bd=c^2$ និង $ad=bc$

តាង $A=(a+b+c)(a-b+c)=[(a+c)-b][(a+c)-b]$

$=(a+c)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2 \qquad ,ac=b^2$

$=a^2+b^2+c^2$

$B=(b+c+d)(b-c+d)=[(b+d)+c][(b+d)-c]$

$=(b+d)^2-c^2$

$=b^2+2bd+d^2-c^2 \qquad ,bd=c^2$

$=b^2+c^2+d^2$

គេបាន $AB=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ ពិតតាមសម្រាយ

លំហាត់ទី២ខាងលើ

ដូចនេះ បើ a,b,c,d ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d)=(ab+bc+cd)^2$

លំហាត់ ៥៣

គេឱ្យចំនួនពិត a,b និងស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលកំណត់ដោយ $u_{n+1}=au_n+b$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2}-u_{n+1}=a(u_{n+1}-u_n)$ ។

២. បើ $v_n=u_{n+1}-u_n$ តើស្ទីត (v_n) ជាស្ទីតអ្វី ?

ចម្លើយ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2}-u_{n+1}=a(u_{n+1}-u_n)$ ។

យើងមាន $u_{n+1}=au_n+b\Rightarrow u_{n+2}=au_{n+1}+b$

គេបាន $u_{n+2}-u_{n+1}=au_{n+1}+b-(au_n+b)$

$=au_{n+1}+\cancel{b}-au_n-\cancel{b}$

$=a(u_{n+1}-u_n)$

២. បើ $v_n=u_{n+1}-u_n\Rightarrow v_{n+1}=u_{m+2}-u_{n+1}$

សមមូល $v_{n+1}=av_n\Leftrightarrow\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=a$ នោះ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ ៥៤

សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\dfrac{a}{b}$

១. $0.\overline{8}$ ២. $0.\overline{34}$ ៣. $2.3\overline{5}$ ៤. $5.3\overline{54}$

ចម្លើយ៖

១. គេមាន $0.\overline{8}=0.8+0.08+0.008+0.0008+\ldots$ ជាផលបូកនៃស្ទីតធរណីមាត្រអនន្ត

តួដែល $u_1=0.8=\dfrac{8}{10},u_2=0.08=\dfrac{8}{100}$

និង $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{8}{100}\times\dfrac{10}{8}=\dfrac{1}{10}<1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\dfrac{8}{10}}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{8}{10} \times \dfrac{10}{9} = \dfrac{8}{9}$

ដូចនេះ $0.\overline{8} = \dfrac{8}{9}$

២. គេមាន $0.\overline{34} = 0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \ldots$ ជាផលបូកនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ដែល $u_1 = 0.34 = \dfrac{34}{100}, u_2 = 0.0034 = \dfrac{34}{10000}$

និង $q = \dfrac{34}{10000} \times \dfrac{100}{34} = \dfrac{1}{100} < 1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\dfrac{34}{100}}{1-\dfrac{1}{100}} = \dfrac{34}{100} \times \dfrac{100}{99} = \dfrac{34}{99}$

ដូចនេះ $3.\overline{34} = \dfrac{34}{99}$

៣. គេមាន $2.3\overline{5} = 2.3 + 0.05 + 0.005 + \ldots$ ចាប់ពីតួទី២គឺជាផលបូកនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

អនន្តតួដែល $u_1 = 0.05 = \dfrac{5}{100}, u_2 = 0.005 = \dfrac{5}{1000}$

និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{1000} \times \dfrac{100}{5} = \dfrac{1}{10} < 1$

គេបាន $2.3\overline{5} = 2.3 + \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{\frac{5}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{5}{100} \times \dfrac{10}{9}$

$= \dfrac{23 \times 9 + 5}{90} = \dfrac{212}{90} = \dfrac{106}{45}$

ដូចនេះ $2.3\overline{5} = \dfrac{106}{45}$

៤. គេមាន $5.3\overline{54} = 5.3 + 0.054 + 0.00054 + \ldots$ ចាប់ពីតួទី២គឺជាផលបូកនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

អនន្តតួដែល $u_1 = 0.054 = \dfrac{54}{1000}, u_2 = 0.00054 = \dfrac{54}{100000}$

និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{54}{100000} \times \dfrac{1000}{54} = \dfrac{1}{100} < 1$

គេបាន $5.3\overline{54} = 5.3 + \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{53}{10} + \dfrac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{53}{10} + \dfrac{54}{1000} \times \dfrac{100}{99}$

$= \dfrac{53 \times 99 + 54}{990} = \dfrac{5301}{990}$

ដូចនេះ $2.3\overline{5} = \dfrac{5301}{990}$

លំហាត់ ៥៥

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$

២. $\sum_{k=1}^{25}k$

៣. $\sum_{k=100}^{200}k$

៤. $\sum_{k=1}^{55}(3k-2)$

៥. $\sum_{k=1}^{90}(2-7k)$

៦. $\sum_{k=13}^{46}(9+2k)$

ចម្លើយ៖

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)=3\sum_{k=1}^{4}k+\sum_{k=1}^{4}1$

$=3.\frac{4(4+1)}{2}+4(1)$

$=\frac{3(4)(5)}{2}+4=34$

$\sum_{k=1}^{n}c=nc$

$\sum_{k=1}^{n}ck=c\sum_{k=1}^{n}k$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

២. $\sum_{k=1}^{25}k=\frac{25(25+1)}{2}=325$

៣. $\sum_{k=100}^{200}k=\sum_{k=1}^{200}k-\sum_{k=1}^{99}k$

$=\frac{200(200+1)}{2}-\frac{99(99+1)}{2}$

$=100(201)-99(50)$

$=15150$

៤. $\sum_{k=1}^{55}(3k-2)=3\sum_{k=1}^{55}k-\sum_{k=1}^{55}2$

$=3.\frac{55(55+1)}{2}-55(2)$

$=4620-110$

$=4510$

Tel: 016 434 006

៥. $\sum_{k=1}^{90}(2-7k) = \sum_{k=1}^{90}2 - 7\sum_{k=1}^{90}k$

$= 90\times 2 - 7.\frac{90(90+1)}{2}$

$= 180 - 28665$

$= -28485$

៦. $\sum_{k=13}^{46}(9+2k) = \sum_{k=1}^{46}(9+2k) - \sum_{k=1}^{12}(9+2k)$

$= \sum_{k=1}^{46}9 + 2\sum_{k=1}^{46}k - \sum_{k=1}^{12}9 - 2\sum_{k=1}^{12}k$

$= 46(9) + 2.\frac{46(46+1)}{2} - 12(9) - 2.\frac{12(12+1)}{2}$

$= 414 + 2162 - 108 - 156$

$= 2312$

លំហាត់ ៨៦

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n}3$

២. $\sum_{k=1}^{n}2k$

៣. $\sum_{k=10}^{n}k^3$

៤. $\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)$

៥. $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2$

៦. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)$

ចម្លើយ

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n}3 = \sum_{k=1}^{n}3 - \sum_{k=1}^{2}3$

$= 3n-6$

Tel: 016 434 006

ខ. $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k$

$= \cancel{2} \times \frac{n(n+1)}{\cancel{2}}$

$= n(n+1)$

គ. $\sum_{k=10}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{9} k^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{9^2(9+1)^2}{4}$

$= \frac{n^2(n+1)^2 - 8100}{4}$

ឃ. $\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=1}^{n} 1$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2.\frac{n(n+1)}{2} + n$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 6n}{6}$

$= \frac{n(2n^2+n+2n+1-6n-6+6)}{6}$

$= \frac{n(2n^2-3n+1)}{6}$

$= \frac{n(2n-1)(n-1)}{6}$

ង. $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(9k^2-6k+1\right)$

$= 9\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 9.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6.\frac{n(n+1)}{2} + n$

$= n\left[\frac{3(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{6(n+1)}{2} + \frac{2n}{2}\right]$

$= \frac{n}{2}\left(6n^2+9n+3-6n-6+2n\right)$

$= \frac{n}{2}(6n^2+5n-3)$

៦. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2.\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6n(n+1)-6n}{6}$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1+6n+6-6)$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)$$

លំហាត់ ៥៧

បង្ហាញថា

១. $\sum_{k=1}^{n^2}k-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n^3-1)}{2}$

២. $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=(n+2)(n+6)$

៣. $\sum_{k=n+1}^{2n}k^2=\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

ចម្លើយ

១. គេបាន $\sum_{k=1}^{n^2}k-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n^2(n^2+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{n[n(n^2+1)-(n+1)]}{2}$$

$$=\frac{n(n^3+n-n-1)}{2}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n^2}k-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n^3-1)}{2}$

២. គេបាន $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n+2}k+\sum_{k=1}^{n+2}3$

$$=2.\frac{(n+2)(n+2+1)}{2}+(n+2)3$$

$$=(n+2)(n+3)+3(n+2)$$

$$=(n+2)(n+3+3)$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=(n+2)(n+6)$

Tel: 016 434 006

៣. គេបាន $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)[2(4n+1)-(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)(8n+2-n-1)}{6}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

លំហាត់ ៨៨

បង្ហាញថា

១. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right) = \frac{1}{12}.n(n+1)^2(n+2)$

២. $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i} r\right)\right) = \frac{1}{24}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

ចម្លើយ

១. គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}\right)$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)(2i+1)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(2i^3+3i^2+i)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2\sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left[2.\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{n(n+1)[n(n+1)+2n+1+1]}{2}$$

$$= \frac{1}{12}.n(n+1)[n(n+1)+2(n+1)]$$

$$= \frac{1}{12}.n(n+1)(n+1)(n+2)$$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right) = \frac{1}{12}.n(n+1)^2(n+2)$

Tel: 016 434 006

២. គេបាន $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i} r\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)\right)$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j}\left(i^2+i\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i^2+\sum_{i=1}^{j} i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}+\frac{j(j+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(j^2+j)(2j+1)+3j(j+1)}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(2j^3+j^2+2j^2+j+3j^2+3j\right)$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n}\left(2j^3+6j^2+4j\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\sum_{j=1}^{n} j^3+6\sum_{j=1}^{n} j^2+4\sum_{j=1}^{n} j\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(2.\frac{n^2(n+1)^2}{4}+6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4.\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{12}.\frac{1}{2}\left[n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)[n(n+1)+2(2n+1)+4]$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)(n^2+n+4n+2+4)$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)(n^2+3n+2n+6)$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)[n(n+3)+2(n+3)]$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)(n+3)(n+2)$$

ដូចនេះ $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i} r\right)\right)=\frac{1}{24}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

លំហាត់ ៥៩

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ស្រាបញ្ជាក់ថា $11^{n+1}+12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ។

ចម្លើយ៖

តាង $f(n)=11^{n+1}+12^{2n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

$f(1)=11^2+12=133$ ចែកដាច់នឹង 133

$f(n)$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះ $n=1$

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $f(k)=11^{k+1}+12^{2k-1}$ ចែកដាច់នឹង 133

$$\begin{aligned}
f(k+1) &= 11^{k+1+1}+12^{2(k+1)-1} \\
&= 11^{k+1}(11)+12^{2k-1}(12)^2 \\
&= 11(11^{k+1})+144(12^{2k-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(k+1)-f(k) &= (11)11^{k+1}+(144)12^{2k-1}-(11^{k+1}+12^{2k-1}) \\
&= 11(11)^{k+1}-11^{k+1}+144(12)^{2k-1}-12^{2k-1} \\
&= 10(11)^{k+1}+143(12)^{2k-1} \\
&= 10(11)^{k+1}+10(12)^{2k-1}+133(12)^{2k-1} \\
&= 10(11^{k+1}+12^{2k-1})+133(12)^{2k-1} \\
&= 10.f(k)+133(12)^{2k-1}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះ $n=k+1$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួចគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $11^{n+1}+12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៦០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $7^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ៖

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $7^1 - 1 = 6$ ជាពុគុណនៃ 6

ឧបមាថា $n = k$ ពិត គឺ $7^k - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ឬ $7^k - 1 = 6q \quad , q \in \mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n = k+1$ គឺស្រាយថា $7^{k+1} - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6

គេបាន $7^{k+1} = 7^k \times 7 - 1 = 7^k(6+1) - 1$

$$= 6(7^k) + 7^k - 1 = 6(7^k) + 6q$$

$$= 6(7^k + q) \qquad \text{យក } p = 7^k + p$$

$$= 6q \quad , q \in \mathbb{Z}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $7^k - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៦១

បង្ហាញថា $13^n + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ៖

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $13^1 + 11 = 24 = 2 \times 12$ ជាពុគុណនៃ 12

ឧបមាថា $n = k$ ពិត គឺ $13^k + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ឬ $13^k + 11 = 12q \quad , q \in \mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n = k+1$ គឺស្រាយថា $13^{k+1} + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12

គេបាន $13^{k+1} + 11 = 13^k \times 13 + 11 = 13^k(12+1) + 11$

$$= 12 \times 13^k + 13^k + 11 = 12 \times 13^k + 12q$$

$$= 12\left(13^k + q\right) \qquad \text{យក } p = 13^k + q, p \in \mathbb{Z}$$

$$= 12q$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $13^k + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៦២

បង្ហាញថា $(1+x)^n \geq (1+nx)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ និង $x > -1$ ។

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n) : (1+x)^n \geq (1+nx)$ ចំពោះ $x > -1$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P(1) : (1+x) \geq (1+x), x > -1$ ពិត

ឧបមាថា $P(k) : (1+x)^k \geq (1+kx), x > -1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ពិត

គេឱ្យ $x > -1 \Rightarrow (1+x) > 0$

យើងមាន $P(k) : (1+x)^k \geq (1+kx)$ គុណវិសមភាពនឹង $1+x$

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2$$

ដោយ $k \in \mathbb{N}$ និង $x^2 \geq 0$ នោះ $kx^2 \geq 0$ នាំឱ្យ $1+x+kx+kx^2 \geq (1+x+kx)$

គេបាន $P(k+1) : (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx$

$$\geq 1+(1+k)x$$

មានន័យថា $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ពិត

តាមសម្រាយដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបានសំណើ $P(n)$ ពិត

ដូចនេះ $(1+x)^n \geq 1+nx$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ និង $x > -1$

លំហាត់ ៦៣

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ ។

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n) : \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P(1) : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ពិត

ឧបមាថា $P(k) : \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)$ ពិត

Tel: 016 434 006

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $P(k+1):\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$

គេមាន $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)$

នាំឲ្យ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{k+1}}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\times\frac{3}{3}+\frac{1}{3^{k+1}}\\
&=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{k+1}}\right)+\frac{1}{3^{k+1}}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{3}{2\times 3^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{k+1}}\left(\frac{3}{2}-1\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{k+1}}\times\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)
\end{aligned}
$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបាន $P(k)$ ជាសំណើពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

លំហាត់ ៦៨

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A = 11+12+13+\ldots.+100$

២. $B = 13^2+14^2+15^2+\cdots+50^2$

៣. $C = 10^3+11^3+12^3+\cdots+30^3$

៤. $S_n = 1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)$

៥. $S_n = 1.4+2.7+3.10+\cdots+n(3n+1)$

៦. $S_n = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

៧. $S_n = 2.4.6+4.6.8+6.8.10+\cdots+2n(2n+2)(2n+4)$

៨. $S_n = 1.3+2.9+3.27+\cdots+n3^n$

៩. $S_n = 2+4x+6x^2+8x^3+\cdots+2nx^{n-1} \quad ,x>1$

១០. $S_n = 1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots+(n-1)n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

១១. $S_n = 8+88+888+\cdots+\underbrace{888\ldots88}_{n \text{ ដងលេខ } 8}$

១២. $S_n = 13+1313+131313+\cdots+\underbrace{131313\ldots1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

ចម្លើយ៖

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A = 11+12+13+\ldots.+100$

$= (1+2+3+\cdots+100)-(1+2+3+\cdots+10)$

$= \dfrac{100(100+1)}{2} - \dfrac{10(10+1)}{2}$

$= 50(101)-5(11)$

$= 5050-55$

$A = 4995$

ដូចនេះ $A = 4995$

Tel: 016 434 006

២. $B = 13^2 + 14^2 + 15^2 + \cdots + 50^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 50^2) - (1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 12^2)$

$= \frac{50(50+1)(2\times 50+1)}{6} - \frac{12(12+1)(2\times 12+1)}{6}$

$B = 42275$

៣. $C = 10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 30^3$

$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)$

$= \left[\frac{30(30+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{9(9+1)}{2}\right]^2$

$C = 214200$

ដូចនេះ $C = 214200$

៤. $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$

$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$

$= \frac{2n(n+1)(n+2)}{6}$

$s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ជ. $S_n = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \cdots + n(3n+1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + k) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+2)}{2}$$

$$= n(n+1)(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)^2$$

ឧ. $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)[n(n+1) + 2(2n+1) + 4]}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2 + n + 4n + 2 + 4)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{4}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Tel: 016 434 006

៧. $S_n = 2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + \cdots + 2n(2n+2)(2n+4)$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k(2k+2)(2k+4)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k2(k+1)2(k+2)$$

$$= 8\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \qquad \text{តាមសម្រាយខាងលើគេបាន}$$

$$= 8.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$= 2n(n+1)(n+2)(n+3)$$

៨. យើងមាន $S_n = 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \cdots + n.3^n$ គុណ 3 ចូល S_n

គេបាន $S_n = 1.3 + \cancel{2.3^2} + \cancel{3.3^3} + \cdots + \cancel{n.3^n}$

$$\underline{3.S_n = \cancel{1.3^2} + \cancel{2.3^3} + \cancel{3.3^4} + \cdots + n3^{n+1}}$$

$$S_n - 3S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n.3^{n+1}$$

$$-2S_n = 3.\frac{3^n - 1}{3-1} - n.3^{n+1}$$

$$-2S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2} - \frac{2n.3^{n+1}}{2}$$

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 2n.3^{n+1} - 3}{-4}$$

$$S_n = \frac{2n.3^{n+1} - 3^{n+1} + 3}{4}$$

៩. $S_n = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1} \qquad , x > 1$

គេបាន $S_n = 2 + \cancel{4x} + \cancel{6x^2} + \cancel{8x^3} + \cdots + \cancel{2nx^{n-1}}$

$$\underline{xS_n = \cancel{2x} + \cancel{4x^2} + \cancel{6x^3} + \cancel{8x^4} + \cdots + 2nx^n}$$

$$S_n - xS_n = 2 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^{n-1} - 2nx^n$$

$$S_n(1-x) = 2.\frac{x^n - 1}{x-1} - 2nx^n$$

$$S_n(1-x) = -2\left(\frac{x^n - 1}{1-x} + nx^n\right)$$

ដូចនេះ $S_n = -2\left[\frac{x^n - 1}{(1-x)^2} + \frac{nx^n}{1-x}\right]$

១០. $S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \cdots + (n-1)n^2,\ \forall n \geq 2$ **ស្រាយដូចលំហាត់ទី៩**

១១. គេមាន $S_n = 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888\ldots88}_{n \text{ ដងលេខ}}8$

គេបាន $S_n = 8(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$

$$9S_n = 8(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots99}_{n \text{ ដងលេខ } 9})$$

$$\frac{9}{8}S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10-1} - n$$

$$\frac{9}{8}S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$S_n = \frac{8\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{8\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$

១២. គេមាន $S_n = 13 + 1313 + 131313 + \cdots + \underbrace{131313\ldots1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

គេបាន $S_n = 13\left(1 + 101 + 10101 + \cdots + 1\underbrace{010101\ldots0101}_{n-1 \text{ គូលេខ } 01}\right)$

$$99S_n = 13\left(99 + 9999 + 999999 + \cdots + \underbrace{999999\ldots9999}_{n \text{ គូលេខ } 99}\right)$$

$$\frac{99}{13}S_n = (10^2-1) + (10^4-1) + (10^6-1) + \cdots + (10^{2n}-1)$$

$$= 10^2 + 10^4 + 10^6 + \cdots + 10^{2n} - (\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 100 \times \frac{100^n - 1}{100-1} - n = \frac{100^{n+1} - 100 - 99n}{99}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{13\left(100^{n+1} - 99n - 100\right)}{99^2}$

Tel: 016 434 006

លំហាត់ ៦៥

គេឱ្យស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

២. គណនាផលបូក 999 តួដំបូងនៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

៣. គណនា $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

ចម្លើយ

គេឱ្យស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2-(\sqrt{k+1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-k-1} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$$

$$u_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

$$= (\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$

$$= \sqrt{n+1}-1$$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $S_n = \sqrt{n+1}-1$

២. គេបាន $S_{999}=\sqrt{999+1}-1=\sqrt{1000}-1=\sqrt{10^3}-1=10\sqrt{10}-1$

ដូចនេះ ផលបូក 999 តួដំបូងនៃស្ទ្រីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $S_{999}=10\sqrt{10}-1$

៣. គណនា $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

គេបាន $A=S_{2017}$

$=\sqrt{2017+1}-1$

$=\sqrt{2018}-1$

ដូចនេះ $A=\sqrt{2018}-1$

លំហាត់ ៦៦

គណនាផលបូក $A_n=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

ចម្លើយ៖

យើងមាន $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{(k+2)-k}{k(k+2)}=2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

ចំពោះ $k=1$ នោះ $\dfrac{1}{1.3}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$

ចំពោះ $k=2$ នោះ $\dfrac{1}{2.4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)$

ចំពោះ $k=3$ នោះ $\dfrac{1}{3.5}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

ចំពោះ $k=4$ នោះ $\dfrac{1}{4.6}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)$

.....

ចំពោះ $k=n-1$ នោះ $\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

ចំពោះ $k=n$ នោះ $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

ដូចនេះ $A_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

លំហាត់ ៦៧

គណនា $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

ចម្លើយ៖

យើងមាន $\frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)}$

$$= 2\left[\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}\right] = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$S_n = 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 \times \frac{n+1-1}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{2n}{n+1}$

លំហាត់ ៦៨

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{n} k!k$

២. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

៣. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

៤. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)! + k! + (k+1)!}$

ចម្លើយ៖

គណនាផលបូក៖

១. យើងមាន $k!k = k!(k+1-1) = (k+1)! - k!$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} k!k = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!]$

$$= (3! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + [(n+1)! - n!]$$

$$= (n+1)! - 1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1$

Tel: 016 434 006

២. យើងមាន $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\dfrac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$

$$=\left(\frac{1}{1^2}-\cancel{\frac{1}{2^2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2^2}}-\cancel{\frac{1}{3^2}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

ដូចនេះ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

៣. យើងមាន $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\dfrac{k+1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$

តាង $f(k)=\dfrac{1}{k!}\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{1!}=1$

និង $f(k+1)=\dfrac{1}{(k+1)!}\Rightarrow f(n+1)=\dfrac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]$

$$=f(1)-\cancel{f(2)}+\cancel{f(3)}-\cancel{f(4)}+\cdots+\cancel{f(n)}-f(n+1)$$

$$=f(1)-f(n+1)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

$n!=1.2.3\ldots(n-1).n$

$n!=(n-1)!n$

$(n+1)!=(n-1)!n(n+1)$

៤. យើងមាន $\dfrac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}=\dfrac{k+1}{(k-1)!+(k-1)!k+(k-1)!k(k+1)}$

$$=\frac{k+1}{(k-1)![1+k+k(k+1)]}$$

$$=\frac{k+1}{(k-1)!(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!(k+1)}=\frac{k}{(k+1)!}$$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ តាមសម្រាយលំហាត់ទី៣ខាងលើ

Tel: 016 434 006

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

លំហាត់ ៦៩

គណនាផលបូក

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}$$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}
\text{យើងមាន } 1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{k^2(k^2+2k+1)+k^2+2k+1+k^2}{[k(k+1)]^2} \\
&= \frac{(k^2)^2+2k^2.k+k^2+2k^2+2k+1}{[k(k+1)]^2} \\
&= \frac{(k^2)^2+k^2+1+2k^2.k+2k^2+2k}{[k(k+1)]^2} \\
&= \frac{(k^2+k+1)^2}{[k(k+1)]^2} \\
&= \left[\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right]^2 \\
\text{នាំឱ្យ } \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} &= \sqrt{\left[\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right]^2} \\
&= \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} \\
&= \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} \\
&= 1+\frac{k+1-k}{k(k+1)} \\
&= 1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

តាង $f(k)=\frac{1}{k} \Rightarrow f(1)=1$ និង $f(k+1)=\frac{1}{k+1} \Rightarrow f(n+1)=\frac{1}{n+1}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}[1+f(k)-f(k+1)]$

$$=\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k+1)]$$

$$=n+f(1)-f(n+1)$$

$$=n+1-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2011}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=2011+1-\frac{1}{2011+1}$$

ដូចនេះ $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}=2012-\frac{1}{2012}$

លំហាត់ ៧០

គណនាផលគុណ

១. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

២. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)$

ចម្លើយ៖

គណនាផលគុណ

១. តាង $A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$ គុណសមភាពនឹង $\left(1-\frac{1}{2}\right)$

គេបាន $\left(1-\frac{1}{2}\right)A=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$\frac{1}{2}A=\left[1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right]$$

$$A=2\left[1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right]$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ដូចនេះ $A=2\left[1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right]$

Tel: 016 434 006

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

២. តាង $B=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2011^2}\right)$

គេបាន $B=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]\dots\left[\left(1+\frac{1}{2020}\right)\left(1-\frac{1}{2020}\right)\right]$

$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2020}\right)\left(1-\frac{1}{2020}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2020}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2020}\right)$

$=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2021}{2020}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2019}{2020}\right)$

$=\frac{2021}{2}\times\frac{1}{2020}$

ដូចនេះ $B=\frac{2021}{4040}$

លំហាត់ ៧១

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(u_n):1,5,11,19,29,41,\dots$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n)

យើងមាន $(u_n):1,5,11,19,41,\dots$

តាងស៊ីត (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $v_n=u_{n+1}-u_n$ ។ គេបាន ស៊ីត $(v_n):4,6,8,10,12,\dots$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី1ស្មើ 4 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះគេបាន $v_n=4+2(n-1)=2n+2$

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k \quad ,u_1=1$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2$

$=1+\frac{2n(n-1)}{2}+2(n-1)=1+(n-1)(n+2)$

$=1+n^2+2n-n-2=n^2+n-1$

ដូចនេះ (u_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n=n^2+n-1$

លំហាត់ ៧២

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n) : 1,3,7,15,31,63,\ldots$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n)

យើងមាន $(u_n) : 1,3,7,15,31,63,\ldots$

តាងស្ទីត (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្ទីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n$ ។ គេបាន ស្ទីត $(v_n) : 2,4,8,16,32,\ldots$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី1ស្មើ 2 និងផលធៀបរួមស្មើ 2

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$, $u_1 = 1$ និង $v_1 = 2$

$$= 1 + v_1 . \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

$$= 1 + 2 . \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$$

ដូចនេះ (u_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = 2^n - 1$

លំហាត់ ៧៣

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n) : 3,8,16,27,41,58,\ldots$ ។

គណនាផលបូក n តួតំបូងនៃស្ទីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

- កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n)

  យើងមាន $(u_n) : 3,8,16,27,41,58,\ldots$

  តាងស្ទីត (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្ទីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n$ ។

  គេបានស្ទីត $(v_n) : 5,8,11,14,17,\ldots$ ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមាន $v_1 = 5$ និង $d = 3$ នាំឱ្យ $v_n = v_1 + (n-1)d = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \quad , u_1 = 3$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k+2)$$

$$= 3 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= 3 + 3.\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= \frac{6 + 3n^2 - 3n + 4n - 4}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

ដូចនេះ (u_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = \frac{3n^2 + n + 2}{2}$

- គណនាផលបូក n ដំបូងនៃស្ទីត (u_n)

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2 + k + 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 2n\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} + 2\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{2n^2 + n + 2n + 1 + n + 1 + 4}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{4}(2n^2 + 4n + 6)$$

$$= \frac{2n}{4}(n^2 + 2n + 3)$$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីត (u_n) គឺ $S_n = \frac{n}{2}(n^2 + 2n + 3)$

លំហាត់ ៧៤

កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត $(a_n): 1,12,37,82,153,256,\ldots$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស៊ុីត (a_n)

យើងមាន $(a_n): 1,12,37,82,153,256,\ldots$

តាងស៊ុីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស៊ុីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស៊ុីត $(b_n): 11,25,45,71,\ldots$ ។ តាងស៊ុីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស៊ុីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបានស៊ុីត $(c_n): 14,20,26,\ldots$ ជាស៊ុីតនព្វន្តដែលមាន $c_1 = 14$ និង $d = 6$ នោះគេបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 14 + (n-1)6 = 14 + 6n - 6 = 6n + 8$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \quad , b_1 = 11$

$$= 11 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k+8)$$

$$= 11 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 8$$

$$= 11 + 6.\frac{n(n-1)}{2} + 8(n-1)$$

$$= 11 + 3n^2 - 3n + 8n - 8$$

$$b_n = 3n^2 + 5n + 3$$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad , a_1 = 1$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + 5k + 3)$$

$$= 1 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3$$

$$= 1 + 3.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 5.\frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1)$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} + 5.\frac{n(n-1)}{2} + 3n - 3$$

$$a_n = \frac{n(n-1)(2n-1+5)}{2} + 3n - 2$$
$$= \frac{n(n-1)(2n+4)}{2} + 3n - 2$$
$$= \frac{n(n-1)(n+2).2}{2} + 3n - 2$$

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n(n-1)(n+2) + 3n - 2$

លំហាត់ ៧៥

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(a_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, \ldots$ ។

គណនាផលបូក n តួបំបួងនៃស៊ីត (a_n) ។

ចម្លើយ៖

- កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n)

  យើងមាន $(a_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, \ldots$

  តាងស៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស៊ីត $(b_n) : 6, 16, 32, 54, 82, \ldots$ ។ តាងស៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបានស៊ីត $(c_n) : 10, 16, 22, 28, \ldots$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $c_1 = 10$ និង $d = 6$

  នោះគេបាន $c_n = 10 + (n-1)6 = 10 + 6n - 6 = 6n + 4$

  ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \quad , b_1 = 6$

  $$= 6 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k+4) = 6 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 4$$
  $$= 6 + 6.\frac{n(n-1)}{2} + 4(n-1)$$
  $$= 6 + 3n^2 - 3n + 4n - 4$$
  $$b_n = 3n^2 + n + 2$$

Tel: 016 434 006

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad , a_1 = 1$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k + 2)$$

$$= 1 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= 1 + 3.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 2n - 2$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1+1)}{2} + 2n - 1$$

$$= \frac{n(n-1)\cancel{2}n}{\cancel{2}} + 2n - 1$$

$$= n^2(n-1) + 2n - 1$$

$$= n^3 - n^2 + 2n - 1$$

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^3 - n^2 + 2n - 1$

- គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីត (a_n)

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^3 - k^2 + 2k - 1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \cancel{2}.\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n$$

$$= \frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{12} + n^2 + \cancel{n} - \cancel{n}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n - 4n - 2)}{12} + n^2$$

ដូចនេះ $S_n = n^2 + \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12}$

លំហាត់ ៧៦

កំណត់តួទី n នៃទំនាក់ទំនងស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1=-1\ ;\ u_{n+1}=-5u_n-1$ ២. $u_1=-2\ ;\ u_{n+1}=u_n+5$

៣. $u_1=3\ ;\ u_{n+1}=4u_n-3n-1$ ៤. $u_1=2\ ;\ u_{n+1}=7u_n-n3^n$

៥. $u_1=1\ ;\ u_{n+1}=-2u_n+3n^2$ ៦. $u_1=-3\ ;\ u_{n+1}=u_n+n^3$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត

យើងមាន $u_1=-1\ ;\ u_{n+1}=-5u_n-1$

តាង $r_n=A$ ដែល A ជាចំនួនថេរ នាំឱ្យ $r_{n+1}=A$

នោះគេបាន $r_{n+1}=-5r_n-1\Leftrightarrow A=-5A-1\Leftrightarrow 6A=-1$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{6}\Rightarrow r_{n+1}=-\frac{1}{6}$$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=-5u_n-1-\left(-\frac{1}{6}\right)$

$$u_{n+1}-\left(-\frac{1}{6}\right)=-5u_n-\frac{5}{6}$$

$$u_{n+1}+\frac{1}{6}=-5\left(u_n+\frac{1}{6}\right)$$

តាង $v_n=u_n+\frac{1}{6}\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{6}$ នាំឱ្យ $v_{n+1}=-5v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្ទីត

ធរណីមាត្រដែលមាន $q=-5$ និង $v_1=u_1+\frac{1}{6}=-1+\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$

គេបាន $v_n=v_1q^{n-1}=-\frac{5}{6}.(-5)^{n-1}=\frac{(-5)^n}{6}$ ដោយ $v_n=u_n+\frac{1}{6}$

$$u_n+\frac{1}{6}=\frac{(-5)^n}{6}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{(-5)^n}{6}-\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=\frac{(-5)^n-1}{6}$

២. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត

យើងមាន $u_1=-2\ ;\ u_{n+1}=u_n+5\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=5$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្ទីតនព្វន្ត

ដែលមាន $d=5$ គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= -2 + (n-1)5$$

$$= -2 + 5n - 5$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = 5n-7$

៣. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត

យើងមាន $u_1 = 3$; $u_{n+1} = 4u_n - 3n - 1$

តាង $r_n = \alpha n + \beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$ ដែល α, β ជាចំនួនថេរ

នោះគេបាន $r_{n+1} = 4r_n - 3n - 1$

$$\alpha(n+1) + \beta = 4(\alpha n + \beta) - 3n - 1$$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 4\alpha n + 4\beta - 3n - 1$$

$$\alpha n - 4\alpha n + \beta - 4\beta + \alpha = -3n - 1$$

$$-3\alpha n - (3\beta - \alpha) = -3n - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha n & = -3n \\ -(3\beta - \alpha) & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 1 \\ 3\beta - 1 & = 1 \Rightarrow \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 4u_n - 3n - 1 - [(n+1) + \frac{2}{3}]$

$$u_{n+1} - \left[(n+1) + \frac{2}{3}\right] = 4\left[u_n - \left(n + \frac{2}{3}\right)\right]$$

តាង $v_n = u_n - \left(n + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - \left[(n+1) + \frac{2}{3}\right]$ នាំឱ្យ $v_{n+1} = 4v_n$

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 4$ និង $v_1 = u_1 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

គេបាន $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{4}{3}.(4)^{n-1} = \frac{4^n}{3}$

ដោយ $v_n = u_n - \left(n + \frac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow u_n = v_n + \left(n + \frac{2}{3}\right) = \frac{4^n}{3} + \left(n + \frac{2}{3}\right)$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = \dfrac{4^n + 3n + 2}{3}$

៤. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត

យើងមាន $u_1=2$; $u_{n+1}=7u_n-n3^n$

តាង $r_n=(\alpha n+\beta)3^n \Rightarrow r_{n+1}=[\alpha(n+1)+\beta]3^{n+1}$ ដែល α,β ជាចំនួនថេរ

នោះគេបាន $r_{n+1}=7r_n-n3^n$

$$[\alpha(n+1)+\beta]3^{n+1}=7[(\alpha n+\beta)3^n]-n3^n$$

$$3(\alpha n+\alpha+\beta)\cancel{3^n}=(7\alpha n+7\beta-n)\cancel{3^n}$$

$$3\alpha n+3\alpha+3\beta-7\alpha n-7\beta+n=0$$

$$-4\alpha n+n-4\beta+3\alpha=0$$

$$-(4\alpha-1)-(4\beta-3\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha-1 &=0\\ 4\beta-3\alpha &=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha &=1\\ 4\beta &=3\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{4}\\ \beta=\dfrac{3.\frac{1}{4}}{4}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}\end{cases}$$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=7u_n-n3^n-\left[\dfrac{1}{4}.(n+1)\dfrac{3}{16}\right]3^{n+1}$

$$u_{n+1}-\left[\frac{1}{4}.(n+1)+\frac{3}{16}\right]3^{n+1}=7\left[u_n-\left(\frac{1}{4}.n+\frac{3}{16}\right)3^n\right]$$

តាង $v_n=u_n-\left[\dfrac{1}{4}.n+\dfrac{3}{16}\right]3^n \Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-\left[\dfrac{1}{4}.(n+1)+\dfrac{3}{16}\right]3^{n+1}$

នាំឱ្យ $v_{n+1}=7v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=7$

និង $v_1=u_1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}\right)3=2-\dfrac{7\times3}{16}=\dfrac{32-21}{16}=\dfrac{11}{16}$

គេបាន $v_n=v_1q^{n-1}=\dfrac{11}{16}\times7^{n-1}$

$$u_n-\left(\frac{1}{4}.n+\frac{3}{16}\right)3^n=\frac{11}{16}\times7^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{11\times7^{n-1}}{16}+\left(\frac{4n+3}{16}\right)3^n$$

$$=\frac{11\times7^{n-1}+(4n+3)3^n}{16}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=\dfrac{11\times7^{n-1}+(4n+3)3^n}{16}$

៥. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត

យើងមាន $u_1=1$; $u_{n+1}=-2u_n+3n^2$

តាង $r_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma \Rightarrow r_{n+1}=\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma$

ដែល α,β,γ ជាចំនួនថេរ នោះ

គេបាន $r_{n+1}=-2r_n+3n^2$

$$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=-2(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+3n^2$$

$$\alpha(n^2+2n+1)+\beta n+\beta+\gamma=-2\alpha n^2-2\beta n-2\gamma+3n^2$$

$$\alpha n^2+2\alpha n+\alpha+\beta n+\beta+\gamma+2\alpha n^2+2\beta n+2\gamma-3n^2=0$$

$$3\alpha n^2-3n^2+2\alpha n+3\beta n+\alpha+\beta+3\gamma=0$$

$$(\alpha-1)3n^2+(2\alpha+3\beta)n+(\alpha+\beta+3\gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-1 &=0\\ 2\alpha+3\beta &=0\\ \alpha+\beta+3\gamma &=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha &=1\\ 3\beta &=-2\\ \beta+3\gamma &=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-\dfrac{2}{3}\\ \gamma=\dfrac{-1+\frac{2}{3}}{3}=-\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=-2u_n-3n^2-\left[(n+1)^2-\dfrac{2}{3}(n+1)-\dfrac{1}{9}\right]$

$$u_{n+1}-\left[(n+1)^2-\frac{2}{3}.(n+1)-\frac{1}{9}\right]=-2\left(n^2-\frac{2}{3}.n-\frac{1}{9}\right)$$

តាង $v_n=u_n-\left(n^2-\dfrac{2}{3}.n-\dfrac{1}{9}\right)\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-\left[(n+1)^2-\dfrac{2}{3}.(n+1)-\dfrac{1}{9}\right]$

នាំឱ្យ $v_{n+1}=-2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=-2$

និង $v_1=u_1-\left(1-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{9}\right)=1-1+\dfrac{7}{9}$

គេបាន $v_n=v_1q^{n-1}=\dfrac{7}{9}\times(-2)^{n-1}$

$$u_n-\left(n^2-\frac{2}{3}.n-\frac{1}{9}\right)=\frac{7(-2)^{n-1}}{9}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{7(-2)^{n-1}}{9}+\left(n^2-\frac{2}{3}.n-\frac{1}{9}\right)$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=\dfrac{7(-2)^{n-1}+9n^2-6n-1}{9}$

Tel: 016 434 006

៦. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1=-3$; $u_{n+1}=u_n+n^3 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=n^3$

តាង $v_n=u_{n+1}-u_n=n^3$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃ (u_n)

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k=-3+\sum_{k=1}^{n-1}k^3$

$$=-3+\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$=\frac{-12+n^2(n-1)^2}{4}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n=\dfrac{n^2(n-1)^2-12}{4}$

លំហាត់ ៧៧

រកតួទូទៅនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}\end{cases}$

២. $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}\end{cases}$

៣. $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{4u_n-1}\end{cases}$

៤. $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+1}{4u_n+2}\end{cases}$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទៅទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេមាន $u_1=2, u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda=\dfrac{2\lambda+1}{\lambda+2}$

$$\lambda^2+2\lambda-2\lambda-1=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda=1, \lambda=-1$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

តាង $v_n=\dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ដែល $\lambda_1=1>\lambda_2=-1$

នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \qquad (29)$$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$ $, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

$$= \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2} - 1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2} + 1} = \frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+2} = \frac{u_n-1}{3u_n+3} = \frac{u_n-1}{3(u_n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}.v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \frac{1}{3}$ និង $v_1 = \frac{u_1-1}{u_1+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

តាមសមីការ (29) គេបាន $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1-2}{u_n+1}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{u_n+1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = -\frac{2}{u_n+1}$$

$$u_n + 1 = -\frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = -\frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} - 1$

២. កំណត់តួទៅទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda = \frac{2\lambda+3}{\lambda+4}$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = 1, \lambda = -3$$

តាង $v_n = \frac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = -3$

នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \qquad (30)$$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

$$= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{\cancel{u_n+4}} \times \frac{\cancel{u_n+4}}{2u_n+3+3u_n+12}$$

$$= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5}.\frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \frac{1}{5}$ និង $v_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = \frac{3-1}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

តាមសមីការ (30) គេបាន $\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{u_n + 3 - 4}{u_n + 3}$

$$\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$

$$\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1 = -\frac{4}{u_n + 3}$$

$$u_n + 3 = -\frac{4}{\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = -\frac{4}{\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1} - 3$

៣. កំណត់តួទៅទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{4u_n}{4u_n - 1}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda = \frac{4\lambda}{4\lambda - 1}$

$$4\lambda^2 - \lambda - 4\lambda = 0$$

$$4\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda(4\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda = 0, \lambda = \frac{5}{4}$$

តាង $v_n = \dfrac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = \dfrac{5}{4} > \lambda_2 = 0$

នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - \frac{5}{4}}{u_n} \tag{31}$$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \frac{5}{4}}{u_{n+1}}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4u_n - 1}$

$$= \frac{\frac{4u_n}{4u_n-1} - \frac{5}{4}}{\frac{4u_n}{4u_n-1}} = \frac{16u_n - 5(4u_n - 1)}{4(4u_n - 1)} \times \frac{\cancel{4u_n - 1}}{4u_n}$$

$$= \frac{16u_n - 20u_n + 5}{16u_n} = \frac{-4u_n + 5}{16u_n} = \frac{-4\left(u_n - \frac{5}{4}\right)}{16u_n} = -\frac{1}{4}.\frac{u_n - \frac{5}{4}}{u_n}$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{4}.v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = -\dfrac{1}{4}$ និង $v_1 = \dfrac{u_1 - \frac{5}{4}}{u_1} = \dfrac{1 - \frac{5}{4}}{1} = -\dfrac{1}{4}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = -\dfrac{1}{4}.\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$

តាមសមីការ (31) គេបាន $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{u_n - \frac{5}{4}}{u_n} = 1 - \dfrac{5}{4u_n}$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1 = -\frac{5}{4u_n}$$

$$4u_n = -\frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{5}{4\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1\right]}$

៤. កំណត់តួទៅទៅនៃស្ទីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 2, u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 1}{4u_n + 2}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda = \dfrac{5\lambda + 1}{4\lambda + 2}$

$$4\lambda^2 + 2\lambda - 5\lambda - 1 = 0$$

$$4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(4\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{4}$$

តាង $v_n = \dfrac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = -\dfrac{1}{4}$
នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + \frac{1}{4}} \qquad (32)$$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + \frac{1}{4}}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 1}{4u_n + 2}$

$$= \frac{\frac{5u_n+1}{4u_n+2} - 1}{\frac{5u_n+1}{4u_n+2} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{5u_n + 1 - 4u_n - 2}{4u_n + 2} \times \frac{4(4u_n + 2)}{20u_n + 4 + 4u_n + 2}$$

$$= \frac{4(u_n - 1)}{24u_n + 6}$$

$$= \frac{4(u_n - 1)}{24\left(u_n + \frac{1}{4}\right)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{6}.v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \dfrac{1}{6}$ និង $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{2-1}{2+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{9}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = \dfrac{4}{9}.\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

តាមសមីការ (32) គេបាន $\dfrac{4}{9}.\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

$$= \frac{u_n + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{u_n + \frac{1}{4}} = 1 - \frac{\frac{5}{4}}{u_n + \frac{1}{4}}$$

$$\frac{4}{9}.\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 1 = -\frac{5}{4(u_n + \frac{1}{4})}$$

$$u_n + \frac{1}{4} = -\frac{5}{4\left[\frac{4}{9}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 1\right]}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{\frac{4}{9}(\frac{1}{6})^{n-1} - 1} - \dfrac{1}{4}$

លំហាត់ ៧៨

រកតួទូទៅនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1=1, u_2=2 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1=1, u_2=8 \\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1=2, u_2=15 \\ u_{n+2}=10u_{n+1}-25u_n \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1=0, u_2=3 \\ u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=0 \end{cases}$

៥. $\begin{cases} u_1=5, u_2=11 \\ u_{n+2}=3u_{n+1}+10u_n \end{cases}$

៦. $\begin{cases} u_1=9, u_2=13 \\ u_{n+2}=4u_{n+1}+21u_n \end{cases}$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទីn នៃស្ទីត (u_n)

គេមាន $u_1=1, u_2=2, u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-2\lambda-3=0$

$$\lambda^2+\lambda-3\lambda-3=0$$

$$\lambda(\lambda+1)-3(\lambda+1)=0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=-1, \lambda_2=3$$

តាង $\begin{cases} v_n=u_{n+1}-\lambda_1 u_n \\ w_n=u_{n+1}-\lambda_2 u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n=u_{n+1}+u_n \\ w_n=u_{n+1}-3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1}=u_{n+2}+u_{n+1} \\ w_{n+1}=u_{n+2}-3u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1}=3v_n \\ w_{n+1}=-w_n \end{cases}$ ដោយ (v_n) និង (w_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

$(v_n): q=3, v_1=u_2+u_1=2+1=3 \Rightarrow v_n=v_1q^{n-1}=3(3)^{n-1}=3^n$

នាំឱ្យ $u_{n+1}+u_n=3^n$ (33)

Tel: 016 434 006

$(w_n): q=-1, w_1=u_2-3u_1=2-3=-1$

$\Rightarrow w_n=w_1.q^{n-1}=-1(-1)^{n-1}=(-1)^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-3u_n=(-1)^n \qquad (34)$$

យកសមីការ (33) ដក (34)

គេបាន $u_{n+1}+u_n-(u_{n+1}-3u_n)=3^n-(-1)^n$

$$4u_n=3^n-(-1)^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីតេ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$

២. កំណត់តួទីn នៃស៊ីតេ (u_n)

គេមាន $u_1=1, u_2=8, u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$ ឬ $u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4\lambda+4=0$

$$(\lambda-2)^2=0$$

$$\lambda-2=0$$

$$\lambda=2$$

តាង $v_n=u_{n+1}-\lambda u_n=u_{n+1}-2u_n$

នាំឱ្យ $v_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1}$

$$=4u_{n+1}-4u_n-2u_{n+1}$$

$$=2u_{n+1}-4u_n$$

$$=2(u_{n+1}-2u_n)$$

$$v_{n+1}=2v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស៊ីតេធរណីមាត្រដែល $q=2; v_1=u_2-2u_1=8-2(1)=6$

នាំឱ្យ $v_n=v_1.q^{n-1}=6\times 2^{n-1}=3\times 2^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-2u_n=3\times 2^n \qquad (35)$$

យកសមីការ (35) ចែកនឹង 2^n

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{2^n} - 2.\frac{u_n}{2^n} = 3$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{2^n} - \frac{u_n}{2^{n-1}} = 3$

តាង

$$w_n = \frac{u_n}{2^{n-1}} \Rightarrow w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^n} \qquad (36)$$

គេបាន $w_{n+1} - w_n = 3$ នោះ (w_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែល $d = 3, w_1 = \frac{u_1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = 1$

នាំឱ្យ $w_n = w_1 + (n-1)d$

$$= 1 + (n-1)3$$

$$= 3n - 2$$

តាម (36) គេបាន $3n - 2 = \frac{u_n}{2^{n-1}} \Rightarrow u_n = (3n-2)2^{n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = (3n-2)2^{n-1}$

៣. កំណត់តួទីn នៃស្ទីត (u_n)

គេមាន $u_1 = 1, u_2 = 15, u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n$ ឬ $u_{n+2} - 10u_{n+1} + 25u_n = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

$$(\lambda - 5)^2 = 0$$

$$\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = 5$$

តាង $v_n = u_{n+1} - \lambda u_n = u_{n+1} - 5u_n$

នាំឱ្យ $v_{n+1} = u_{n+2} - 5u_{n+1}$

$$= 10u_{n+1} - 25u_n - 5u_{n+1}$$

$$= 5u_{n+1} - 25u_n$$

$$= 5(u_{n+1} - 5u_n)$$

$$v_{n+1} = 5v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែល $q = 5; v_1 = u_2 - 5u_1 = 15 - 5(1) = 10$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = 10 \times 5^{n-1} = 2 \times 5^n$

គេបាន

$$u_{n+1} - 5u_n = 2 \times 5^n \qquad (37)$$

យកសមីការ (37) ចែកនឹង 5^n

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{5^n} - 5.\frac{u_n}{5^n} = \frac{4 \times 5^n}{5^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{5^n} - \frac{u_n}{5^{n-1}} = 2$$

តាង

$$w_n = \frac{u_n}{5^{n-1}} \qquad (38)$$

$$\Rightarrow w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{5^n}$$

គេបាន $w_{n+1} - w_n = 4$ នោះ (w_n) ជាស៊ីនព្វន្តដែលមានតួទី១ $w_1 = \frac{u_1}{5^{n-1}} = \frac{1}{5^0} = 1$

និង ផលសងរួម $d = 2$ នាំឱ្យ $w_n = w_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)2$

$$= 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

តាម (38) គេបាន $w_n = \frac{u_n}{5^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = w_n 5^{n-1}$

$$= (2n-1)5^{n-1}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = (2n-1)5^{n-1}$

៤. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_1 = 0, u_2 = 3,\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda - 2 = 0 \\ \\ \lambda - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

គេបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A2^n + B$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

ចំពោះ $u_1 = 0 \Longrightarrow u_1 = 2A + B$

$$2A + B = 0 \qquad (39)$$

ចំពោះ $u_2 = 3 \Longrightarrow u_2 = A2^2 + B$

$$4A + B = 3 \qquad (40)$$

យកសមីការ (39) ដក (40)

គេបាន $2A + \cancel{B} - 4A - \cancel{B} = 0 - 3$

$$-2A = -3 \Rightarrow A = \frac{3}{2} \Rightarrow B = -2A = -2\left(\frac{3}{2}\right) = -3$$

គេបាន $u_n = \frac{3}{2} \times 2^n - 3 = 3 \times 2^{n-1} - 3$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីតគឺ $u_n = 3(2^{n-1} - 1)$

៥. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n)

យើងមាន $u_1 = 5, u_2 = 11,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 3\lambda + 10$

$$\lambda^2 - 2.\frac{3}{2}\lambda + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{40+9}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\sqrt{\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\left|\lambda - \frac{3}{2}\right| = \frac{7}{2} \Rightarrow \lambda - \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ \lambda - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \lambda = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

គេបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A5^n + B(-2)^n$

ចំពោះ $u_1 = 5 \Longrightarrow u_1 = A5^1 + B(-2)^1$

$$5A - 2B = 5 \qquad (41)$$

ចំពោះ $u_2 = 11 \Longrightarrow u_2 = A5^2 + B(-2)^2$

$$25A + 4B = 11 \qquad (42)$$

យកសមីការ $2\times(41)$ បូក (42)

គេបាន $2(5A-2B)+(25A+4B) = 2(5)+11$

$$10A - \cancel{4B} + 25A + \cancel{4B} = 10 + 11$$

$35A = 21 \Rightarrow A = \dfrac{21}{35} = \dfrac{3}{5}$ ជំនួសចូល (41)

នោះ $2B = 5A - 5 = 5.\dfrac{3}{5} - 5 = -2 \Rightarrow B = -1$

គេបាន $u_n = \dfrac{3}{5}.5^n - (-2)^n$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីតគឺ $u_n = 3\times 5^{n-1} - (-2)^n$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n)

យើងមាន $u_1 = 9, u_2 = 13,\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 21u_n$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 4\lambda + 21$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 3\lambda - 21 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 7) + 3(\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 7 = 0 \\ \lambda + 3 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda = 7 \\ \lambda = -3 \end{bmatrix}$$

គេបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A7^n + B(-3)^n$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

ចំពោះ $u_1 = 9 \Longrightarrow u_1 = A7^1 + B(-3)^1$

$$7A - 3B = 9 \qquad (43)$$

ចំពោះ $u_2 = 13 \Longrightarrow u_2 = A7^2 + B(-3)^2$

$$49A + 9B = 13 \qquad (44)$$

យកសមីការ $3\times(43)$ បូក (44)

គេបាន $3(7A - 3B) + (49A + 9B) = 3(9) + 13$

$$21A - \cancel{9B} + 49A + \cancel{9B} = 27 + 13$$

$$70A = 40 \Rightarrow A = \frac{4}{7} \qquad \text{ជំនួសចូល } (43)$$

នោះ $3B = 7A - 9 = 7.\frac{4}{7} - 9 = -5 \Rightarrow B = -\frac{5}{3}$

គេបាន $u_n = \frac{4}{7}.7^n - \frac{5}{3}(-3)^n$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្ទីតគឺ $u_n = 4 \times 7^{n-1} + 5 \times (-3)^{n-1}$

Tel: 016 434 006

៩.១ ឯកសារយោង

[1] Discrete Mathematics

[2] R.B. Manfrino et al, *Topics in Algebra and Analysis*, Springer Internation Publishing Switzerland 2015

[3] 178 exercices dematheématiques pour Terminale S, Steéphane PASQUET, 24 mars 2016

[4] Theory and Problems of DISCRETE MATHEMATICS Third Edition, SCHAUM'S OUTLINE OF , Copyright 2007,1997,1976 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

[5] David M.Burton, *Elementary Number Theory* , University of New Hampshire.

[6] MATHEMATICS FOR THE INTERNATIONAL STUDENT Mathematics HL (Core) second edition.

[7] Maths HL 3rd Edition publeshed in 2004 by IBID Press, 2nd imprint published in 2005 Reprinted 2007.

[8] 178 exercices de mathématiques pour Terminale S ,Stéphane PASQUET, 24 mars 2016

[9] Methods of Solving Sequence and Series Problems, Ellina Grigorieva .

[10] សៀវភៅគណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់ថ្នាក់ទី១១ របស់ស្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា ។