



ធុរណាមាត្រ

ថ្ងៃទី ១១



ក្រលាផ្ទៃ

- * ផ្ទៃពីរប៉ុនគ្នា កាលណារង្វាស់គ្នា
- * ផ្ទៃពីរសមមូលគ្នា កាលណារង្វាស់មេដ្ឋក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា
- * ផលធៀបក្រលាផ្ទៃត្រីកោណដូចគ្នា :

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = K^2$$

(ផលធៀប K)

1 ក្រលាផ្ទៃចតុកោណ :

- ចតុកោណកែង : $S = \text{ចំនីង} \times \text{បណ្តោយ}$

(ចំនីង និង បណ្តោយ ហៅថា វ៉ិហ្វេត)

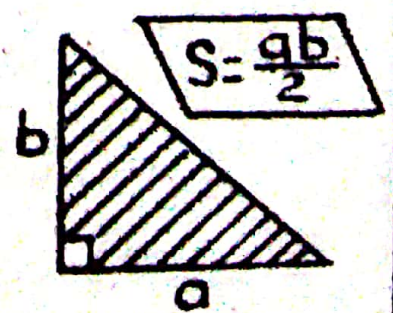
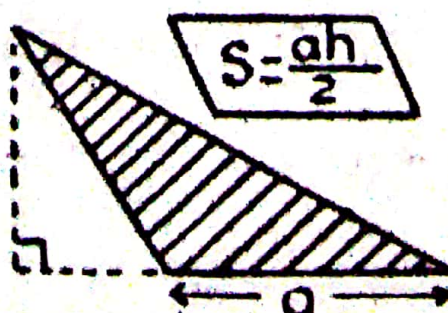
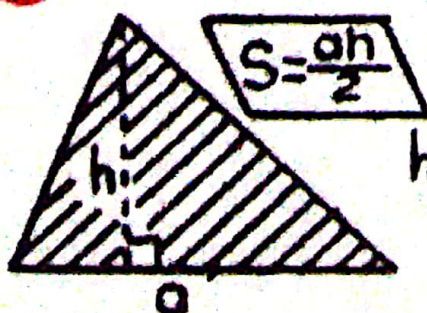
- ការេ : $S = \text{ជ្រុង} \times \text{ជ្រុង}$

- ប្រលេង្ស្រាម : $S = \text{កំពស់} \times \text{បាត}$

- ចតុ.ព្យាយ : $S = \frac{(\text{បាតតូច} + \text{បាតធំ}) \times \text{កំពស់}}{2}$

- ចតុ.ស្មើ : $S = \frac{\text{អង្កត់ទ្រូងតូច} \times \text{អង្កត់ទ្រូងធំ}}{2}$

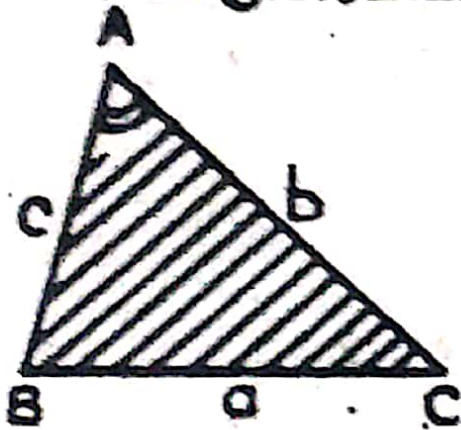
2 ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ :



i) ស្ថាព័រ ធាតុ, កំពស់ :

$$S = \frac{\text{ធាតុ} \times \text{កំពស់}}{2}$$

ii) កន្សោមក្រលាផ្ទៃ (ស្ថាព័រមុំ១ & ជ្រុងអមមុំ) :



$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

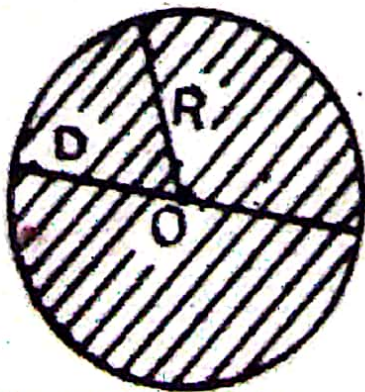
iii) រូបមន្តហេរុង (ស្ថាព័រជ្រុង៣) :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (p = \frac{a+b+c}{2})$$

3) ពហុកោណនិយ័ត (ចារឹកក្នុងរង្វង់) :

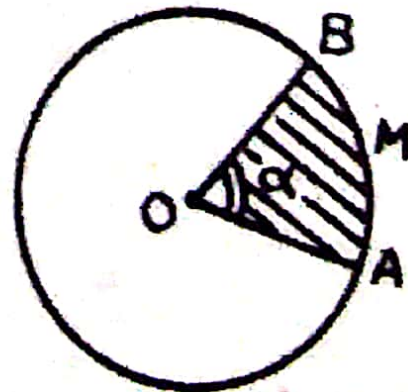
$$S = \frac{\text{អប្បកែត} \times \text{បរិមាត្រ}}{2}$$

4) ក្រលាផ្ទៃថាស - ចំរៀកថាស :



$$S = \pi R^2$$

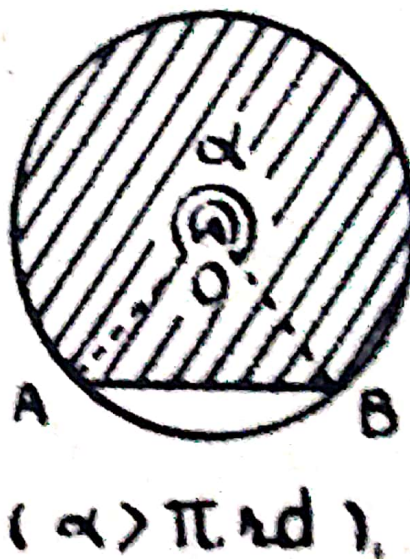
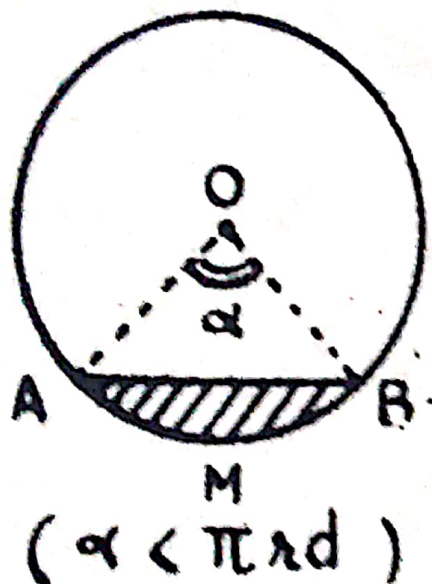
$$S = \frac{1}{4} \pi D^2$$



$$S_{OAMB} = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

(α គឺជា រ៉ាដ្យង់)

5 ក្រលាផ្ទៃរង្វង់កំពស់ S_{AMB} :
 ស្គាល់ក្រលាផ្ទៃចំរុះកំពស់ S_{OAMB} ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ OAB



$$S_{AMB} = S_{OAMB} - S_{OAB}$$

$$S_{AMB} = S_{OAMB} + S_{OAB}$$

ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

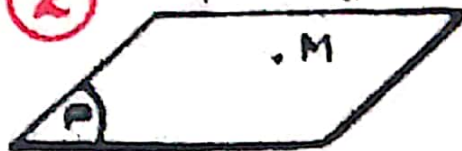
I ចំណុច

1 ចំណុច និងបន្ទាត់មាន ២ ចំណុច : M

$\frac{(d) \quad M}{(d) \quad M}$

$M \in (d)$ (M ប្រសព្វបន្ទាត់) ; $M \notin (d)$ (M ក្រៅបន្ទាត់)

② ចំណុចនិងប្លង់មាន ២ ទីតាំង :

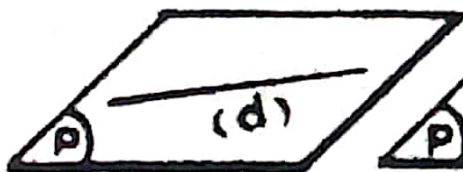


$M \in (P)$ (M របស់ប្លង់)



$M \notin (P)$ (M នៅក្រៅប្លង់)

③ បន្ទាត់និងប្លង់មាន ៣ ទីតាំង :



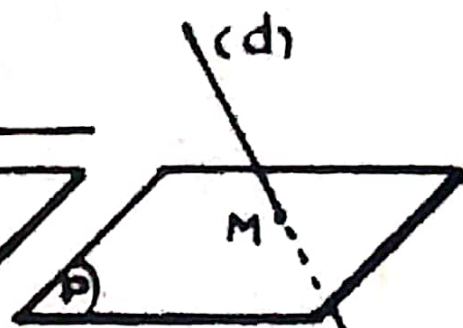
$(d) \subset (P)$

(បន្ទាត់ក្នុងប្លង់)



$(d) \parallel (P)$

(បន្ទាត់//ប្លង់)



$(d) \cap (P) = \{M\}$

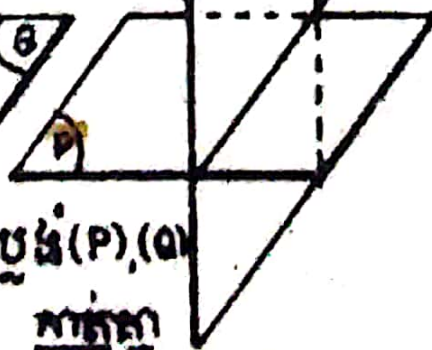
(បន្ទាត់កាត់ប្លង់)

④ ប្លង់និងប្លង់មាន ៣ ទីតាំង :



ប្លង់(P), (Q)

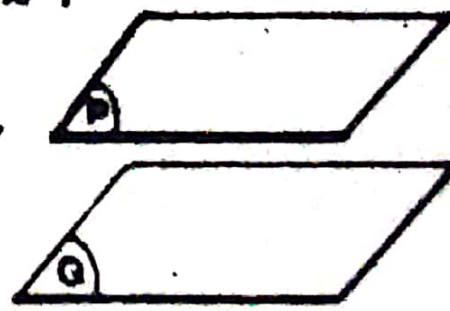
កាត់គ្នា



ប្លង់(P), (Q)

កាត់គ្នា

$(P) \cap (Q) = (\Delta)$

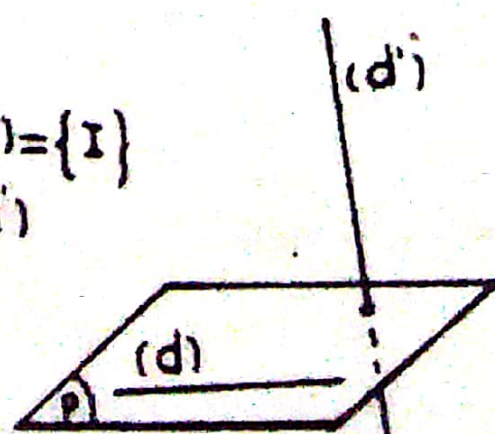


ប្លង់ស្របគ្នា

$(P) \parallel (Q)$

⑤ បន្ទាត់និងបន្ទាត់មាន ៤ ទីតាំង :

- បន្ទាត់ត្រួតស៊ីគ្នា
- បន្ទាត់កាត់គ្នា $(d) \cap (d') = \{I\}$
- បន្ទាត់ស្របគ្នា $(d) \parallel (d')$
- បន្ទាត់មិនប៉ះគ្នាក្នុងប្លង់តែ ១
(មិនស្រប & មិនកាត់គ្នា)



II

កំណត់ត្រា

ប្លង់រាងកំណត់ដោយ :

- ៣ ចំណុចមិននៅត្រង់គ្នា
- រឺ បន្ទាត់ ១ និង ១ ចំណុចក្រៅបន្ទាត់
- រឺ បន្ទាត់ ២ ប្រសព្វគ្នា
- រឺ បន្ទាត់ ២ ស្របគ្នា

ខ្លឹមសារ

រូបធរណីមាត្រ
(រង្វង់, ត្រីកោណ,
ពហុកោណ)
កំនាត់ប្លង់ ។

III

ចំណុច $\in$ បន្ទាត់

(រឺ បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច)

①

បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច :

បើដឹង : (d) កាត់តាម $M \Rightarrow \boxed{M \in (d)}$

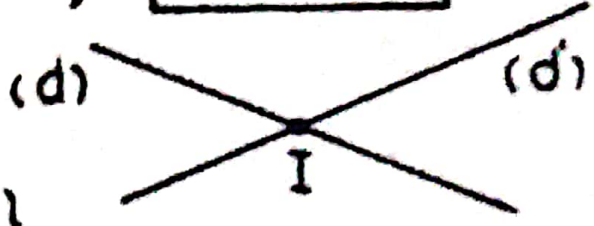


②

បន្ទាត់កាត់គ្នា :

បើដឹង : $(d) \cap (d') = \{I\}$

$\Rightarrow \boxed{I \in (d) \text{ និង } I \in (d')}$

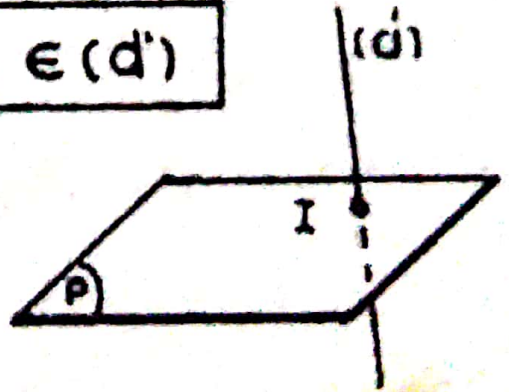


③

បន្ទាត់កាត់ប្លង់ :

បើដឹង : $(d) \cap (P) = \{I\}$

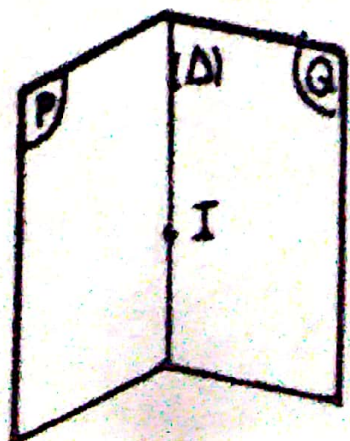
$\Rightarrow \boxed{I \in (d) \text{ និង } I \in (P)}$



④

ចំណុចរួមនៃប្លង់ ២ :

បើដឹង : $I \in (P) \cap (Q) \Rightarrow \boxed{I \in (\Delta)}$
ហើយ $(P) \cap (Q) = (\Delta)$



IV

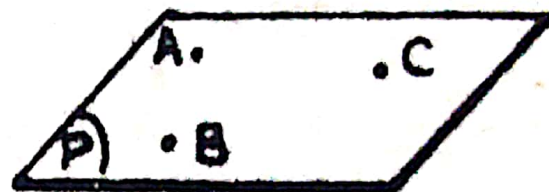
ចំណុច $\in$ ប្លង់

(រឺ ប្លង់កាត់តាមចំណុច)

1

ប្លង់កាត់តាមចំណុច :

បើសិន៖ (P) កាត់តាម A



$$\Rightarrow A \in (P)$$

2

ចំណុចកំណត់ប្លង់ :

បើសិន៖ ប្លង់ (P) កំណត់ដោយចំណុច A, B, C

$$\Rightarrow A \in (P), B \in (P) \text{ និង } C \in (P)$$

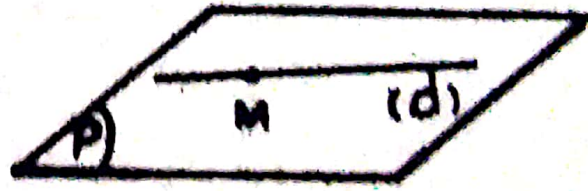
3

ចំណុចរបស់បន្ទាត់នៃប្លង់ :

បើសិន៖

$$M \in (d) \text{ ហើយ } (d) \subset (P)$$

$$\Rightarrow M \in (P)$$

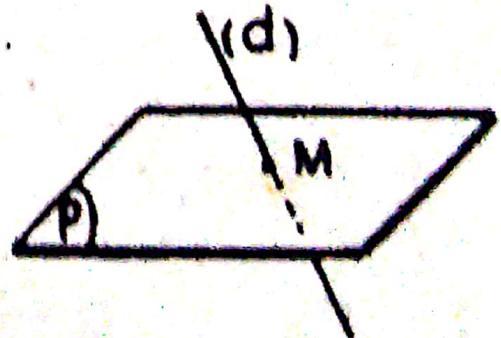


4

បន្ទាត់កាត់ប្លង់ :

$$\text{បើសិន៖ } (d) \cap (P) = \{M\}$$

$$\Rightarrow M \in (d) \text{ និង } M \in (P)$$

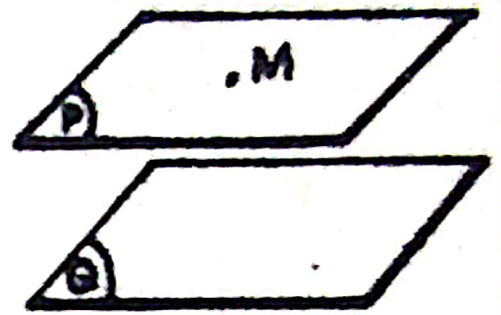


5

តាមចំណុចសង់ប្លង់

បើដឹង : តាម M សង់ប្លង់ (P) // (Q)

$$\Rightarrow M \in (P)$$



ចំណុចរួមនៃប្លង់ ២

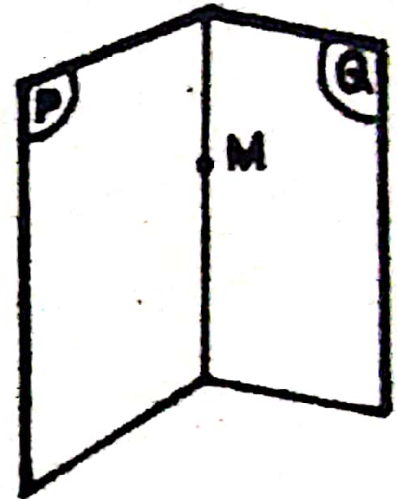
យើងអាចរកតាមរបៀប :

1

ចំណុច $\in$ ប្លង់ ២ :

បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow M \in (P) \cap (Q)$$



2

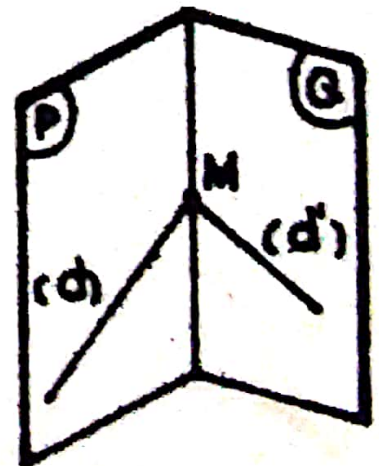
ចំណុចរបស់បន្ទាត់នៃប្លង់ :

បើដឹង :

$$M \in (d), M \in (d')$$

$$\text{ហើយ } (d) \subset (P), (d') \subset (Q)$$

$$\Rightarrow M \in (P) \cap (Q)$$



បន្ទាត់ $\subset$ ប្លង់

(រឺ ប្លង់កាត់តាមបន្ទាត់)

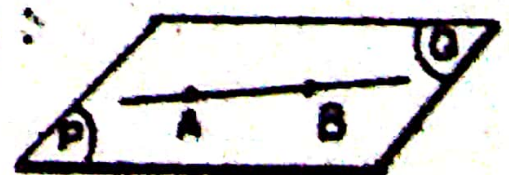
យើងអាចបង្ហាញបន្ទាត់មិត្តក្នុងប្លង់តាមរបៀប :

1

បន្ទាត់កាត់តាម ២ ចំណុចនៃប្លង់ :

បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (d) \text{ កាត់តាម } A, B \\ A \in (P), B \in (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (d) \subset (P)$$



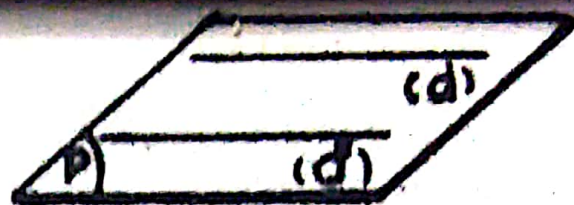
②

ចន្លាត់កំនត់ប្លង់ :

បើដឹង :

ប្លង់ (P) កំនត់ដោយ $(d) // (d')$

$$\Rightarrow (d) \subset (P), (d') \subset (P)$$

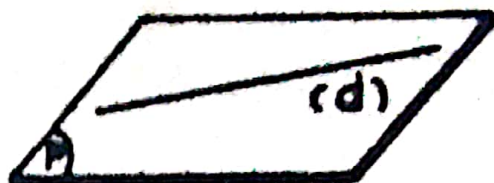


③

ប្លង់កាត់តាមចន្លាត់ :

បើដឹង :

$$\text{ប្លង់ (P) កាត់តាម } (d) \Rightarrow (d) \subset (P)$$

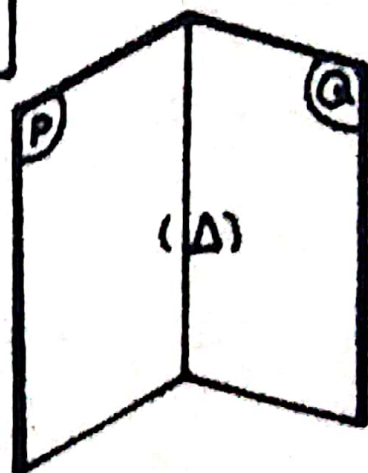


④

ចន្លាត់ជាប្រសព្វនៃប្លង់ :

បើដឹង :

$$(P) \cap (Q) = (\Delta) \Rightarrow (\Delta) \subset (P), (\Delta) \subset (Q)$$



⑤

ចន្លាត់កាត់តាម ១ ចំណុចនៃប្លង់

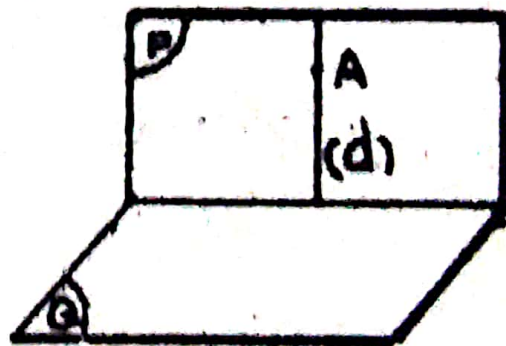
ហើយកែងនឹងប្លង់ទី ២ :

បើដឹង : $(P) \perp (Q)$

(d) កាត់តាម A, $A \in (P)$

$(d) \perp (Q)$

$$\Rightarrow (d) \subset (P)$$



⑥

ចន្លាត់កាត់តាម ១ ចំណុចនៃប្លង់

ហើយស្របនឹង ប្លង់ទី ២ :

បើដឹង :

$(P) // (Q)$

(d) កាត់តាម A, $A \in (P)$

$(d) // (Q)$



$$\Rightarrow (d) \subset (P)$$

VII

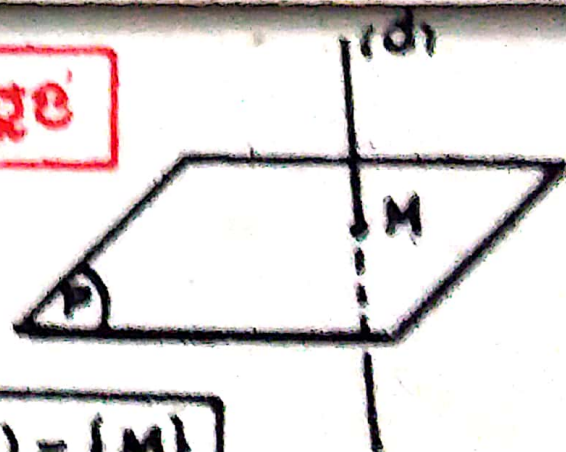
ប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងផ្ទៃ

យើងអាចរកតាមរបៀប :

1

មានចំនុចរួម ១ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{បើដឹង: } M \in (d) \\ M \in (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (d) \cap (P) = \{M\}$$

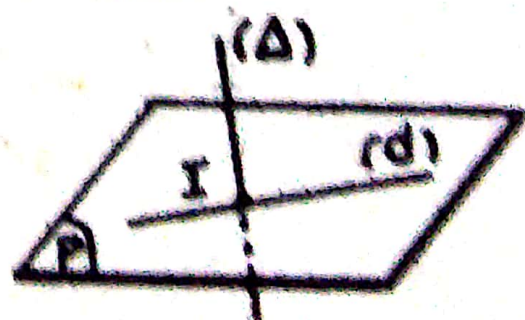


2

បន្ទាត់កាត់បន្ទាត់នៃប្លង់ :

បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (\Delta) \cap (d) = \{I\} \\ (d) \subset (P), (\Delta) \not\subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (\Delta) \cap (P) = \{I\}$$





រូបសង្ខេបទី ២

(ផ្ទៃឆ្នាំង)

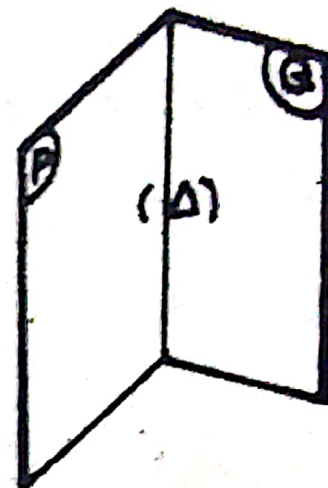
បើករកកាតាមរូប :

① ប្លង់ចាំង ២ កាតាមបន្ទាត់ ១ :

បើដឹង :

$(P), (Q)$ កាតាម (Δ)

$$\Rightarrow (P) \cap (Q) = (\Delta)$$



② បន្ទាត់រួម :

បើដឹង : $(\Delta) \subset (P)$

$(\Delta) \subset (Q)$

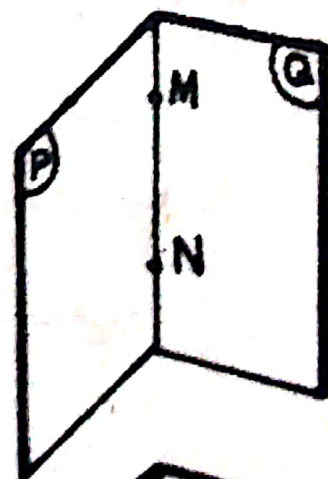
$$\Rightarrow (P) \cap (Q) = (\Delta)$$

③ ចំណុចរួម ២ :

ក) បើដឹង :

$\begin{cases} M \in (P) \cap (Q) \\ N \in (P) \cap (Q) \end{cases}$

$$\Rightarrow (P) \cap (Q) = (MN)$$



ខ) បើដឹង :

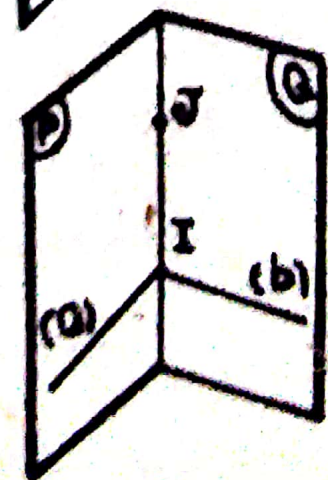
$\begin{cases} I \in (a), I \in (b) \\ (a) \subset (P), (b) \subset (Q) \end{cases}$

$$\Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1)$$

ប្លង់ចាំង

$$\begin{cases} J \in (P) \\ J \in (Q) \end{cases} \Rightarrow J \in (P) \cap (Q) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (P) \cap (Q) = (IJ)$$



គ.) បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \cap (P) = \{I\} \\ (b) \cap (P) = \{J\} \\ (a), (b) \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} I \in (P) \cap (Q) \\ J \in (P) \cap (Q) \end{cases}$$

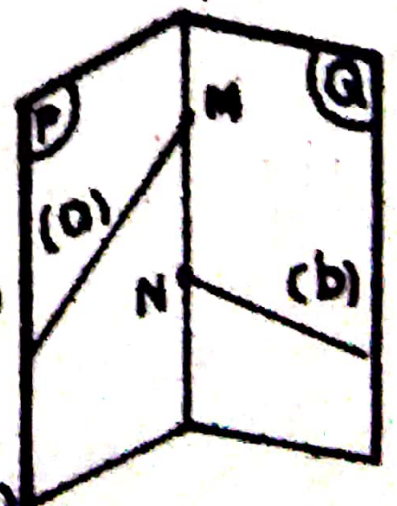
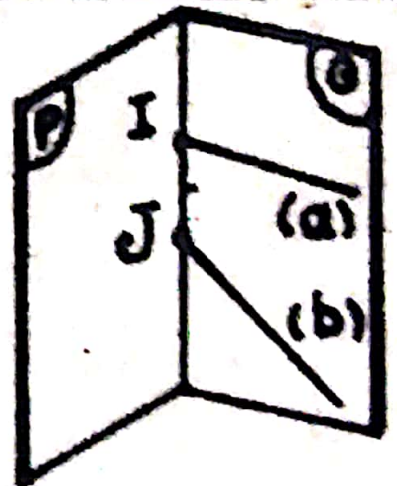
ដូចនេះ: $(P) \cap (Q) = (IJ)$

ឃ.) បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \cap (Q) = \{M\} \\ (a) \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow M \in (P) \cap (Q) (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (b) \cap (P) = \{N\} \\ (b) \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow N \in (P) \cap (Q) (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow (P) \cap (Q) = (MN)$



1x

បន្ទាត់ ២ កាត់គ្នា

(វីប្រសព្វគ្នា)

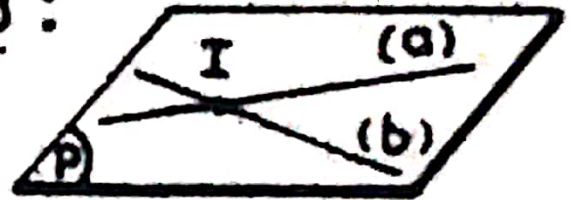
យើងរកបង្ហាញតាមរបៀប :

① បន្ទាត់មិនស្របគ្នា ក្នុងប្លង់តែ ១ :

បើដឹង :

$$(a) \subset (P), (b) \subset (P)$$

ហើយ $(a) \nparallel (b)$



$$\Rightarrow (a) \cap (b) = \{I\}$$

សំគាល់ : បើត្រង់តែម្ដង :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \subset (P) \\ (b) \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{ជាមួយ } (a) \cap (b) = \{I\}$$

(តែវាមកច្បាស់ $(a) \nparallel (b)$)

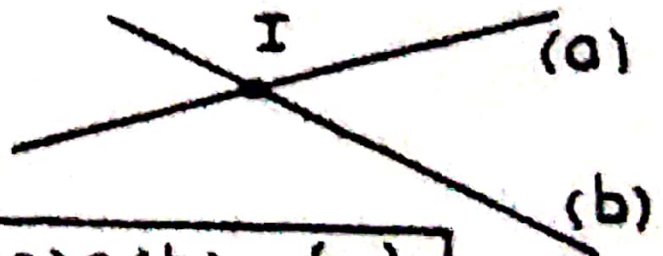
② មានចំណុចរួម :

បើដឹង :

$$I \in (a)$$

$$I \in (b)$$

$$\Rightarrow (a) \cap (b) = \{I\}$$

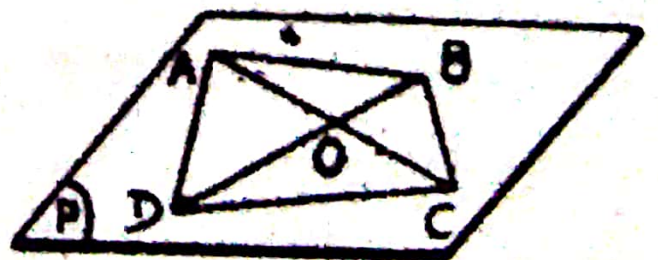


③ អង្កត់ច្រង់នៃចតុកោណ :

បើដឹង : ក្នុងប្លង់ (P)

ABCD ជាចតុកោណ

$$\Rightarrow \text{អង្កត់ច្រង់ } [AC] \cap [BD] = \{O\}$$



X

បង្ហាញ ៣ ចំណុចរត់ត្រង់គ្នា

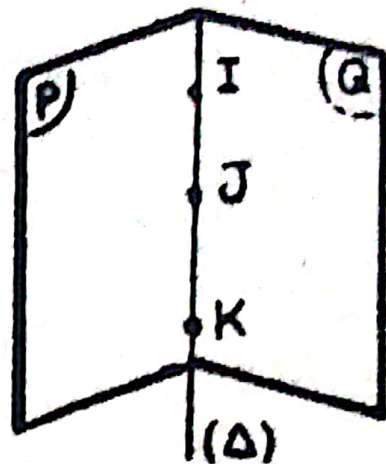
យើងអាចបង្ហាញតាមរបៀប :

- 1 *** ចំណុចទាំង ៣ ឋិតលើបន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ ២ :
បើដឹង :

$$\begin{cases} I \in (P) \cap (Q) \\ J \in (P) \cap (Q) \\ K \in (P) \cap (Q) \end{cases}$$

$\Rightarrow I, J, K$ ឋិតលើ (Δ)

បន្ទាត់ប្រសព្វនៃ (P) និង (Q)



ដូចនេះ: I, J, K រត់ត្រង់គ្នា

- 2 បង្ហាញ ៣ ចំណុចរត់ត្រង់គ្នា តាមធរណីវិទ្យាប្លង់
កាលណាពួកគេទាំងអស់ឋិតក្នុងប្លង់តែ ១ :
(ធរណីនេះមិនសូវជួបប្រចះទេ)

XI

បង្ហាញបន្ទាត់៣ដែលមិនឋិតក្នុងប្លង់តែ ១ ជាបន្ទាត់ជួប

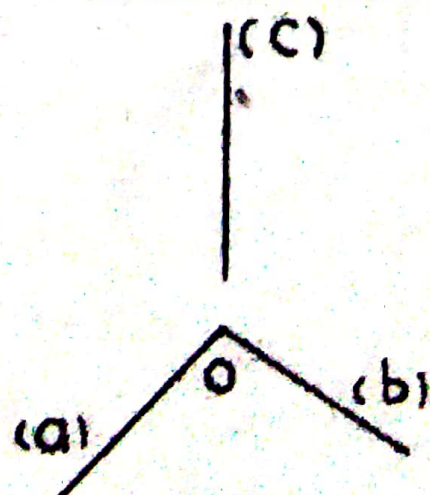
កាលណាវាជាបន្ទាត់កាត់គ្នាពីរ-ពីរ

យើងអាចស្រាយបំភ្លឺដោយ :

- សន្មត $(a) \cap (b) = \{O\}$
- រួចបង្ហាញ (c) កាត់តាម O

(c) ជាប្រសព្វនៃប្លង់ (a, c)

និង (b, c) ; O ជាចំណុចរត់ត្រង់គ្នាទាំង ២



XII

បទដ្ឋានបន្ទាត់ ២ មិនប៉កគ្នា ឬ ប្លង់តែ ១

យើងអាចបង្ហាញដោយផ្ទាល់និងសម្មតិកម្ម អោយបាន :

- វាមិនស្របគ្នា
- រួចវាមិនកាត់គ្នា

XIII

បទដ្ឋានបន្ទាត់ ២ ប៉កគ្នា ឬ ប្លង់តែ ១

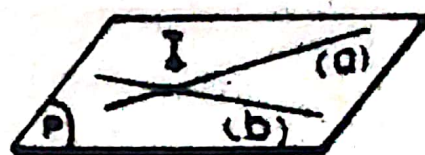
យើងអាចបង្ហាញអោយបន្ទាត់ចាំង ២ :

①

* * កាត់គ្នា :

បើនឹង : $(a) \cap (b) = \{I\}$

$\Rightarrow (a), (b)$ ប៉កគ្នា ឬ ប្លង់តែ ១

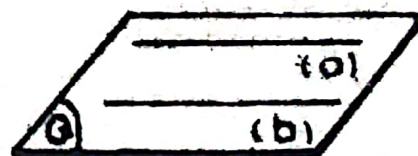


②

* * * ស្របគ្នា :

បើនឹង : $(a) // (b)$

$\Rightarrow (a), (b)$ ប៉កគ្នា ឬ ប្លង់តែ ១



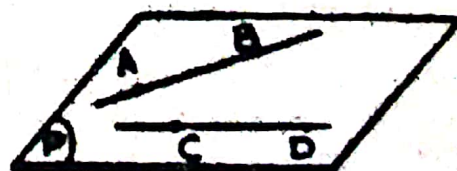
③

* កំណត់ដោយចំនុចនៃប្លង់ :

បើយើងបាន :

A, B, C, D ចំនុចនៃប្លង់ (P)

$\Rightarrow (AB), (CD)$ ប៉កគ្នា ឬ ប្លង់ (P)



XIV

បទដ្ឋានបន្ទាត់ ២ ត្រួតស៊ីគ្នា

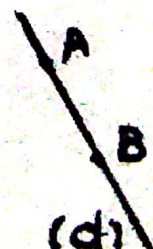
យើងអាចបង្ហាញបាន :

①

បន្ទាត់ ១ កាត់តាមចំនុច ២ នៃបន្ទាត់ ១ ម្យ៉ាង :

ចើនឹង :

$A \in (d), B \in (d) \Rightarrow (AB), (d)$ ត្រួតស៊ីគ្នា



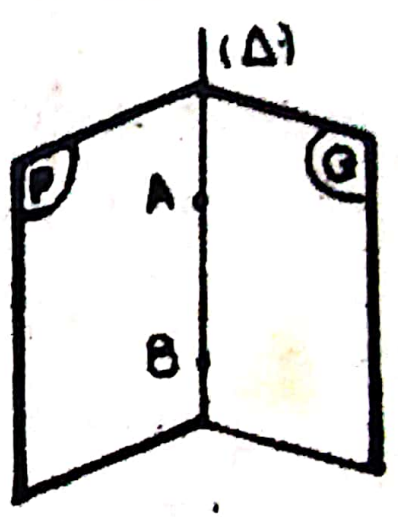
② បន្ទាត់ជាច្រលងពូនៃប្លង់ ២ :

បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (AB) \subset (P) \\ (AB) \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (Q) = (AB)$$

$$\text{តែ } (\Delta) = (P) \cap (Q)$$

$$\Rightarrow \boxed{(AB), (\Delta) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា}}$$



③ បន្ទាត់កាត់តាម ១ ចំណុចហើយស្របនឹងបន្ទាត់តែ ១

បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយ } // (\Delta) \\ (b) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយ } // (\Delta) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{(a), (b) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា}}$$

④ បន្ទាត់កាត់តាម ១ ចំណុចហើយកែងនឹងប្លង់តែ ១ :

បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយ } \perp (P) \\ (b) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយ } \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{(a), (b) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា}}$$

XV

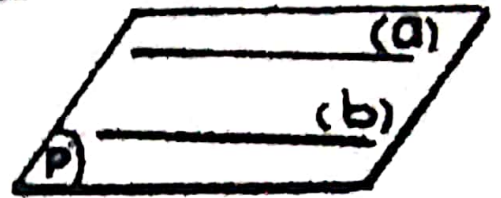
បន្ទាត់ ២ ស្របគ្នា

យើងអាចចង្អាញបន្ទាត់ ២ អោយស្របគ្នាតាមរបៀប :

① * * បន្ទាត់ត្រួតស៊ីនិងបន្ទាត់ស្រប៖

បើឃើញ :

$$\left. \begin{array}{l} (a), (b) \text{ ក្នុង } (P) \\ (a) \cap (b) = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow (a) // (b)$$



(a) (b)

② * បន្ទាត់ត្រួតស៊ីនិងបន្ទាត់ស្រប៖

បើឃើញ :

$$\left. \begin{array}{l} (d) // (d') \\ (d), (d') \text{ ត្រួត} \end{array} \right\} \Rightarrow (d) // (d')$$

(d)

(d')

③ * * * ស្របនិងបន្ទាត់តែ ១ :

បើឃើញ :

$$\left. \begin{array}{l} (d) // (d') \\ (d), (d') \text{ ត្រួត} \end{array} \right\} \Rightarrow (d) // (d')$$

(d)

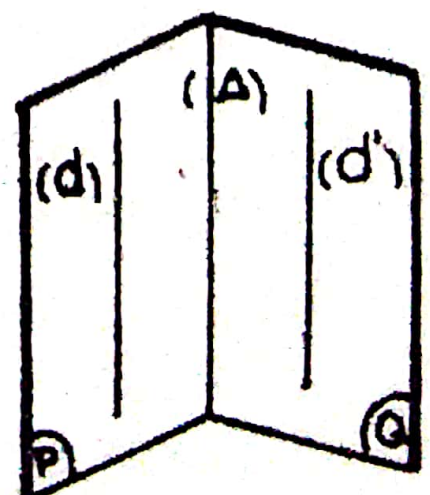
(d')

④ * * * បង្កាត់តាមបន្ទាត់ស្រប៖

បើឃើញ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (d) // (d') \\ (d) \subset (P), (d') \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = (d) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (d) // (d')$$



⑤ *** បន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់ប្រសព្វ៖

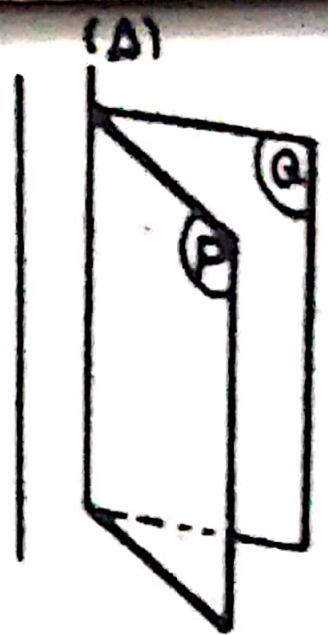
បើដឹង :

$$(d) \parallel (P)$$

$$(d) \parallel (Q)$$

$$(P) \cap (Q) = (\Delta)$$

$$\Rightarrow (d) \parallel (\Delta)$$



⑥ ** ប្លង់កាត់តាមបន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់.

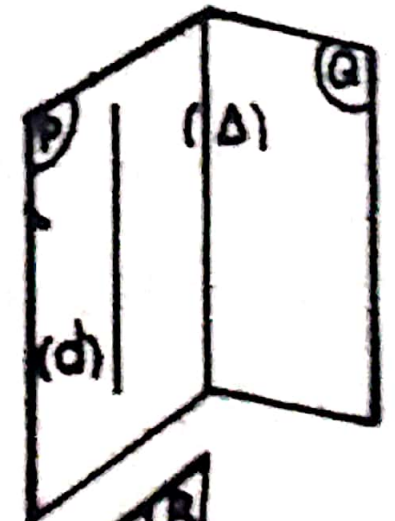
បើដឹង :

$$(d) \parallel (Q)$$

$$(d) \subset (P)$$

$$(P) \cap (Q) = (\Delta)$$

$$\Rightarrow (d) \parallel (\Delta)$$



⑦ *** ប្រសព្វរវាងប្លង់ស្របនឹងប្លង់ទី ៣ :

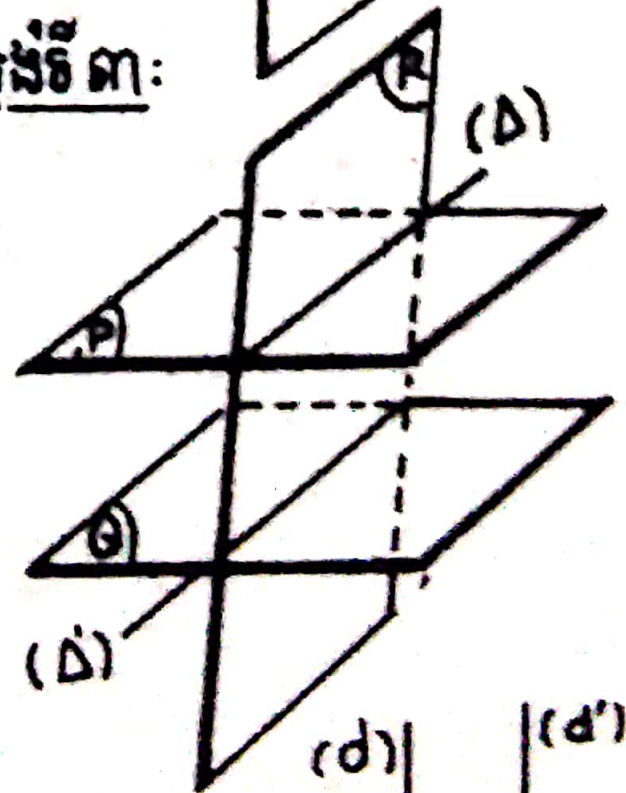
បើដឹង :

$$(P) \parallel (Q)$$

$$(R) \cap (P) = (\Delta)$$

$$(R) \cap (Q) = (\Delta')$$

$$\Rightarrow (\Delta) \parallel (\Delta')$$



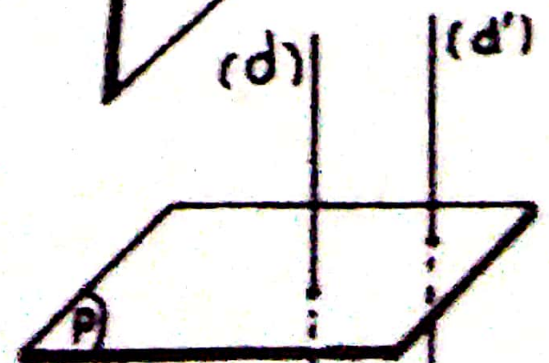
⑧ ** បន្ទាត់កែងនឹងប្លង់តែ ១ :

បើដឹង :

$$(d) \perp (P)$$

$$(d') \perp (P)$$

$$\Rightarrow (d) \parallel (d')$$



⑨ * * បង្ហាញបន្ទាត់ម៉ាង ២ ស្របគ្នា

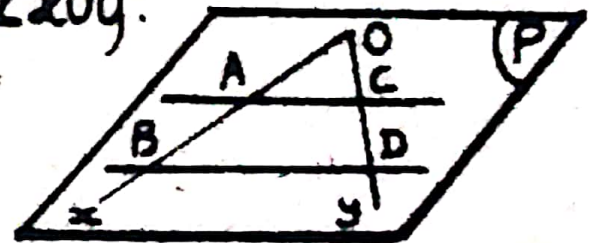
តាមបែបធរណីមាត្រប្លង់ កាលណាវាមិតក្នុងប្លង់
តែ ១ (គែងនឹងបន្ទាត់តែ ១ , ធាតុមធ្យម , ជ្រុងឈម
នៃប្រលេ , រឺប្រលេ.ពិសេស , ធាតុចតុកោណ , តាសែស ,
មុំជួរដោយបន្ទាត់ស្រប និង ខ្នាត...)

ឧ ក្នុងប្លង់ (P) :

(AC), (BD) កំនត់លើជ្រុង $\angle xOy$:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$$

$$\Rightarrow (AC) // (BD)$$



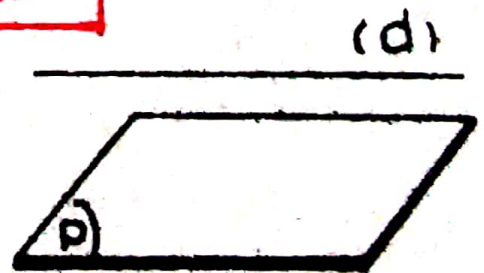
XVI

បន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់

យើងអាចបង្ហាញតាមរបៀប .

① * កាតព្វកិច្ច :

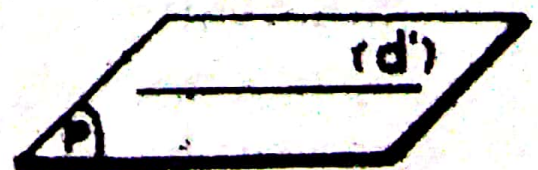
តើដឹង : $(d) \cap (P) = \emptyset \Rightarrow (d) // (P)$



* * * ស្របនឹងបន្ទាត់១នៃប្លង់ : (d)

② បើដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (d) \not\subset (P) \\ (d) // (d') \\ (d') \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (d) // (P)$$

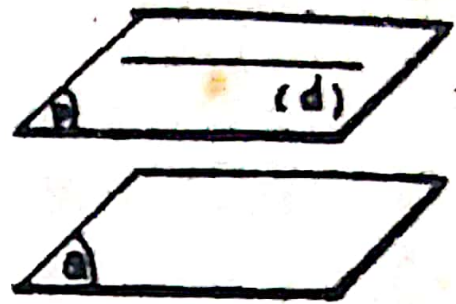


③ * * បន្ទាត់ប៉កក្នុងប្លង់ស្រប :
បើឱ្យ :

$$\begin{cases} (P) // (Q) \\ \text{ហើយ } (d) \subset (P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d) \cap (Q) = \emptyset \Rightarrow$$

$$(d) // (Q)$$



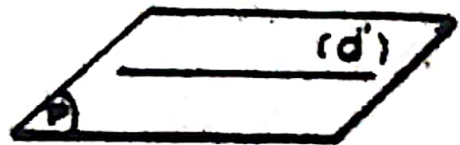
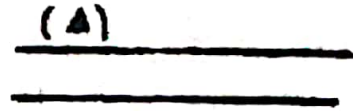
④ * ស្របនឹងបន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់ :
បើយើងមាន :

$$(d) // (P) \text{ ហើយ } (\Delta) // (d)$$

$$\Rightarrow (\Delta) // (d) // (d')$$

$$\text{ដែល } (d') \subset (P)$$

$$\Rightarrow (\Delta) // (P)$$



⑤ * ស្របនឹងប្លង់ស្រប :
បើយើងមាន :

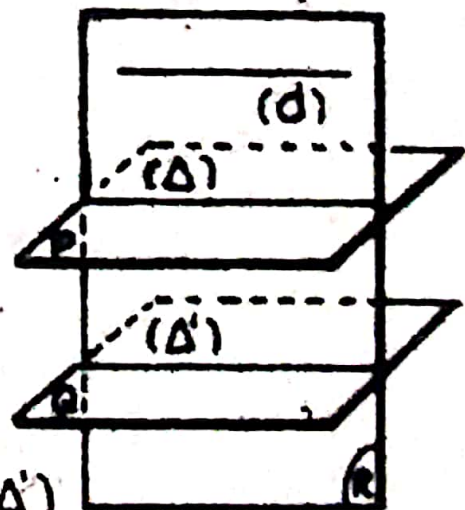
$$\begin{cases} (P) // (Q) \text{ និង } (d) // (P) \end{cases}$$

$$\text{តាម } (d) \text{ សង់ប្លង់ } (R) \text{ ដែល}$$

$$(R) \cap (P) = (\Delta), (R) \cap (Q) = (\Delta')$$

$$\Rightarrow (d) // (\Delta) // (\Delta') \Rightarrow$$

$$(d) // (Q)$$



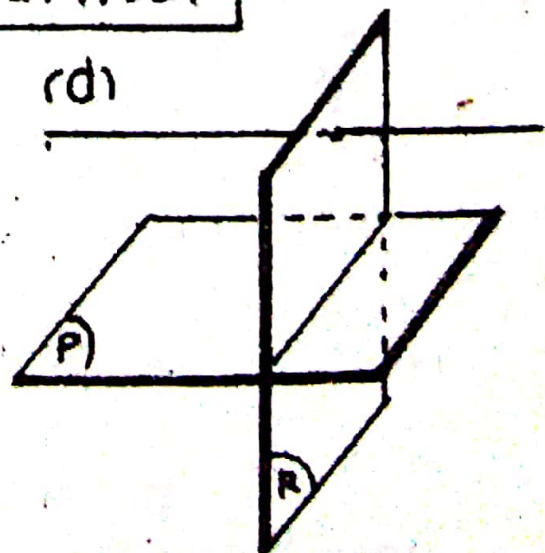
⑥ * * កែងនឹងប្លង់តែៗ :

បើយើងមាន :

$$\begin{cases} (d) \perp (R) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d) // (P)$$



យើងអាចបង្ហាញតាម :

① * គ្មានចំណុចរួម :

បើមាន :

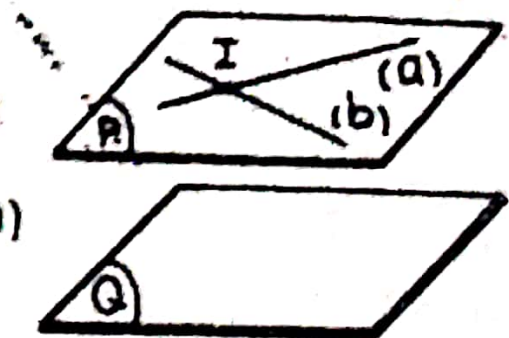
$$(P) \cap (Q) = \emptyset \Rightarrow (P) // (Q)$$

② * * កាត់តាមបន្ទាត់ប្រសព្វ ដែលស្របបង្អស់ៗ ឡើង :

បើមាន :

{ បង្កើន (P) កាត់តាមបន្ទាត់ប្រសព្វ
(a), (b) ហើយ (a) // (a'), (b) // (b')

$$\Rightarrow (P) // (Q)$$

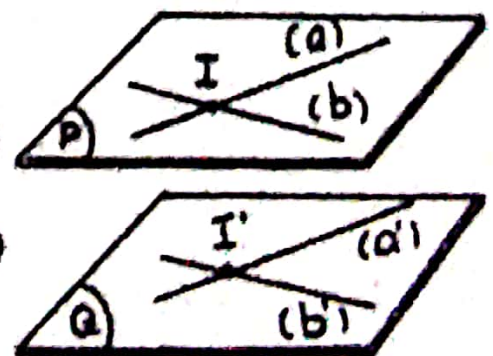


③ * បង្កើនប្លង់ៗ កាត់តាមបន្ទាត់ដែលស្របរៀងគ្នា :

បើមាន :

{ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ប្រសព្វ (a), (b)
(Q) កាត់តាមបន្ទាត់ប្រសព្វ (a'), (b')
ហើយ (a) // (a'), (b) // (b')

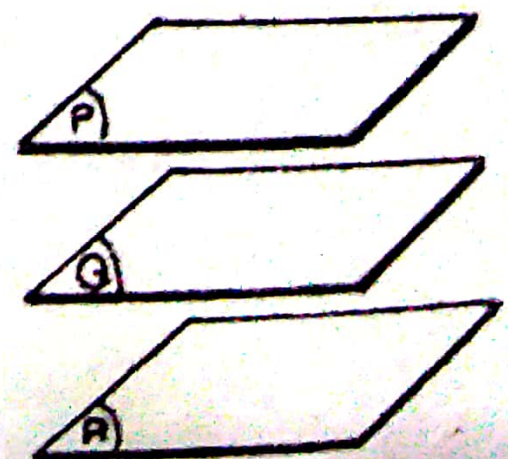
$$\Rightarrow (P) // (Q)$$



④ * * បង្កើនស្របនឹងបង្កើនទី ៣ :

បើយើងមាន :

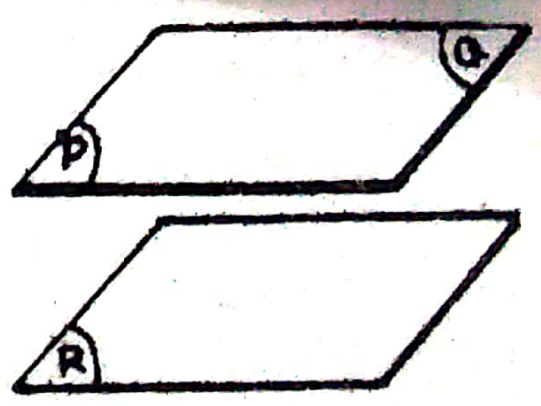
$$\left. \begin{array}{l} (P) // (R) \\ (Q) // (R) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q)$$



5 * ត្រួតស៊ីគ្នា និង ប្លង់ស្រប :

បើដឹង :

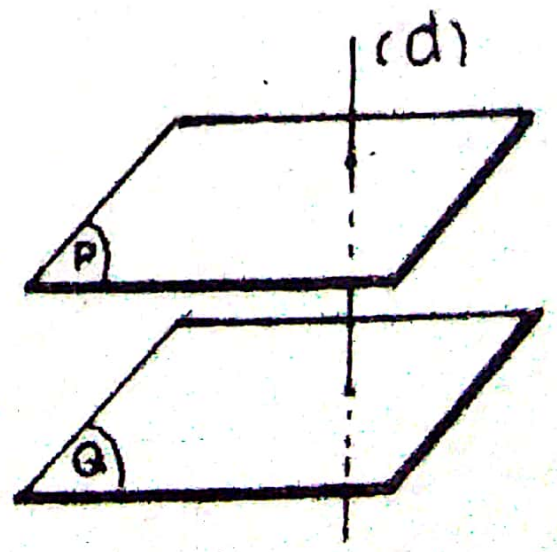
$$\left. \begin{array}{l} (P) // (R) \\ (Q), (P) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា} \end{array} \right\} \Rightarrow (Q) // (R)$$



6 * * ប្លង់កែង និង បន្ទាត់តែ ១ :

បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (d) \\ (Q) \perp (d) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q)$$



យើងអាចបង្ហាញតាមរបៀប៖

① កាត់តាម ១ ចំណុច ហើយស្របនឹង ប្លង់តែ ១

បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (P) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយស្របនឹង } (R) \\ (Q) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយស្របនឹង } (R) \end{array} \right\} \Rightarrow (P), (Q) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា}$$

② កាត់តាម ១ ចំណុច ហើយកែងនឹងបន្ទាត់តែ ១ :

បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (P) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយ } \perp (d) \\ (Q) \text{ កាត់តាម } M \text{ ហើយ } \perp (d) \end{array} \right\} \Rightarrow (P), (Q) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា}$$

③ កាត់តាមបន្ទាត់តែ ១ ហើយកែងនឹងប្លង់ ដោយបន្ទាត់
មិនកែងនឹងប្លង់នេះ :

បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (P) \text{ កាត់តាម } (d) \text{ ហើយ } \perp (R) \\ (Q) \text{ កាត់តាម } (d) \text{ ហើយ } \perp (R) \\ (d) \text{ មិនកែងនឹង } (R) \end{array} \right\} \Rightarrow (P), (Q) \text{ ត្រួតស៊ីគ្នា}$$

XIX

បទដ្ឋានអរតូកូណាល់

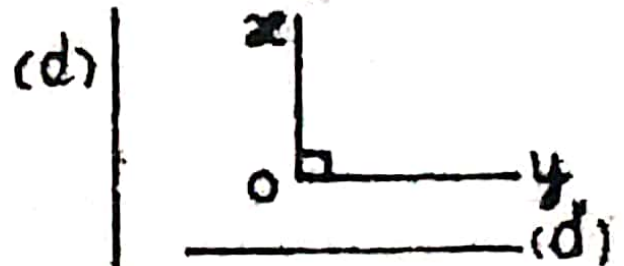
យើងបង្ហាញបន្ទាត់ ២ អរតូកូណាល់ តាមរបៀប :

① ថ្មីកែងនៃបន្ទាត់ទាំង ២ :

បើនឹង :

$\angle xoy$ ថ្មីនៃបន្ទាត់ $(d), (d')$

ហើយ $\widehat{xoy} = 90^\circ$



$$\} \Rightarrow (d) \perp (d')$$

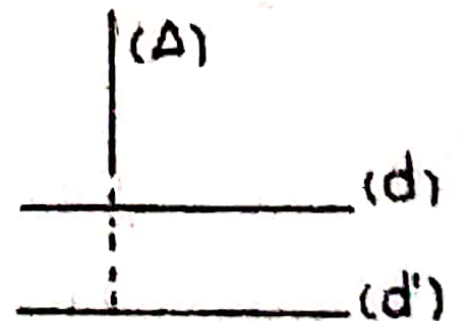
② * * អរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ស្រប :

បើយើងបាន :

$(d) \parallel (d')$

$(\Delta) \perp (d)$

$$\} \Rightarrow (\Delta) \perp (d')$$



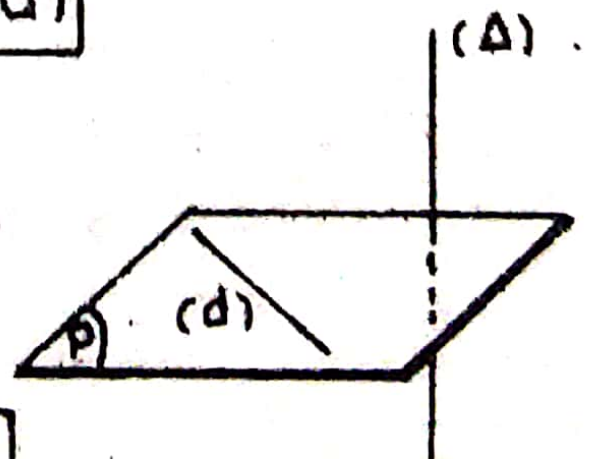
③ * * * បន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ :

បើនឹង :

$(\Delta) \perp (P)$

$(d) \subset (P)$

$$\} \Rightarrow (\Delta) \perp (d)$$





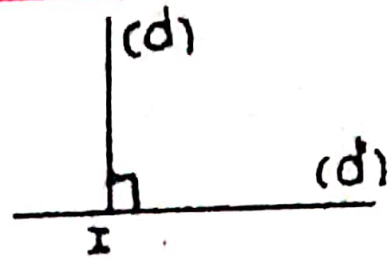
បន្ទាត់កែងនឹងបន្ទាត់

យើងអាចបង្ហាញតាមរបៀប :

① * អរកូកូណាល់ហើយជួបគ្នា :

បើដឹង : $(d) \perp (d')$

$$(d) \cap (d') = \{I\} \Rightarrow \boxed{(d) \perp (d')}$$



② ** បន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ :

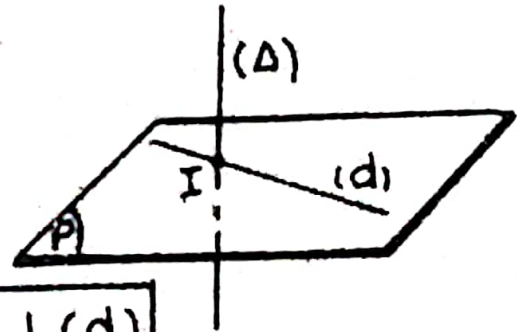
បើយើងមាន :

$$(\Delta) \perp (P)$$

$$(d) \subset (P)$$

(d) កាត់តាមផ្ទៃនៃ (Δ)

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta) \perp (d)}$$



③ *** ច្រើនប្រភេទបន្ទាត់កែងបី :

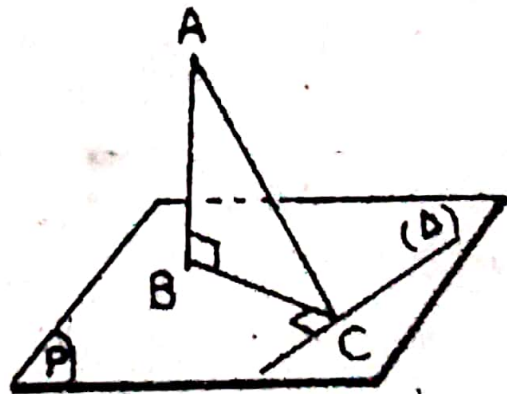
ក) បើយើងមាន :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp [BC] \text{ ត្រង់ } C \end{array} \right.$$

$$[BC] \text{ ចំណោលកែងនៃអង្កត់ច្រក}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{(\Delta) \perp [AC]}$$



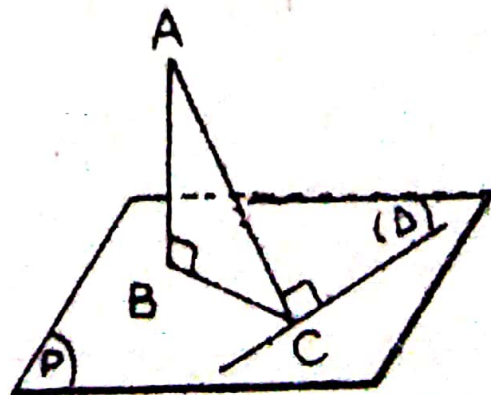
ខ) បើយើងមាន :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp [AC] \text{ ត្រង់ } C \end{array} \right.$$

$$[BC] \text{ ចំណោលកែងនៃអង្កត់ច្រក } [AC]$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{(\Delta) \perp [BC]}$$



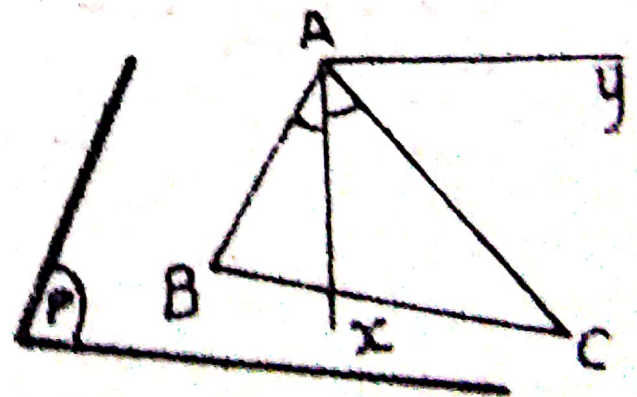
④ * * បង្ហាញបន្ទាត់មាំមួនក្នុងត្រីកោណ តាមបែបធរណីមាត្រប្លង់
 កាលណាធាតុមាំមួនរបស់ប៊ីតក្នុងប្លង់តែ១ (កែងនឹងបន្ទាត់
 ស្រប, កំពស់នៃត្រីកោណ, មេដ្យាននៃត្រីកោណសម.
 បាទ, កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុង និង ក្រៅមុំជាប់បន្ថែម, ជុងមុំ
 ចារឹកក្នុងកន្លះរង្វង់....)

១. ក្នុងប្លង់ (P)

ΔABC មាន :

{ $[Ax)$ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃ $\angle A$
 { $[Ay)$ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្រៅនៃ $\angle A$

$$\Rightarrow \boxed{[Ax) \perp [Ay)}$$





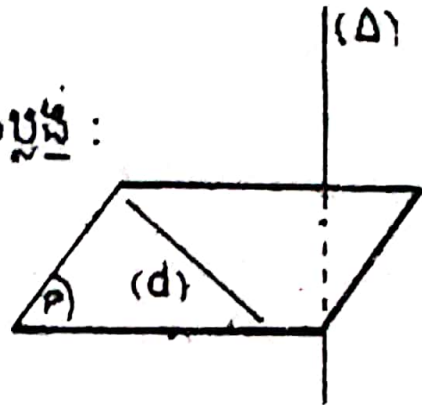
បន្ទាត់កោងនិងប្លង់

យើងអាចបង្ហាញតាមរបៀប :

- ① * អរតូកូណាល់នឹងត្រប់បន្ទាត់នៃប្លង់ :
បើដឹង :

(Δ) អរតូកូណាល់នឹងត្រប់
បន្ទាត់នៃ (P)

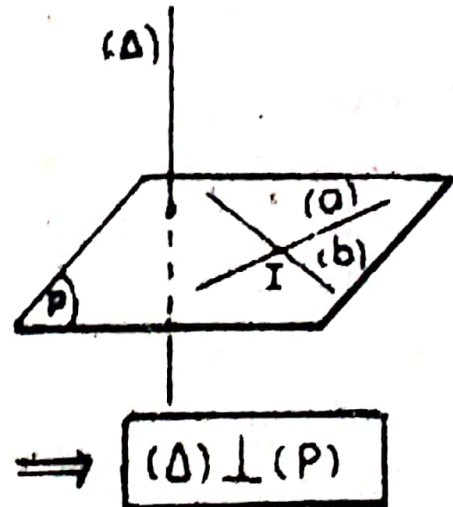
$$\Rightarrow (\Delta) \perp (P)$$



- ② * * * អរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់
ប្រសព្វ ២ នៃប្លង់ :

បើយើងដឹង :

(a), (b) បន្ទាត់ប្រសព្វនៃ (P)
(Δ) អរតូកូណាល់នឹង (a), (b)

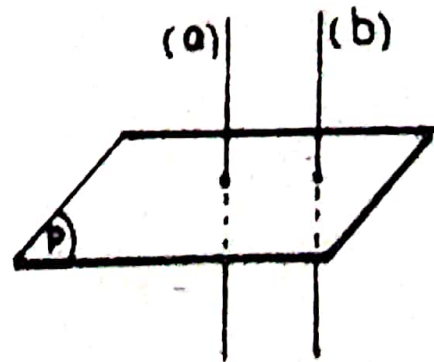


$$\Rightarrow (\Delta) \perp (P)$$

- ③ * * * ប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ស្រប :

បើយើងដឹង :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \parallel (b) \\ (P) \perp (a) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (b)$$

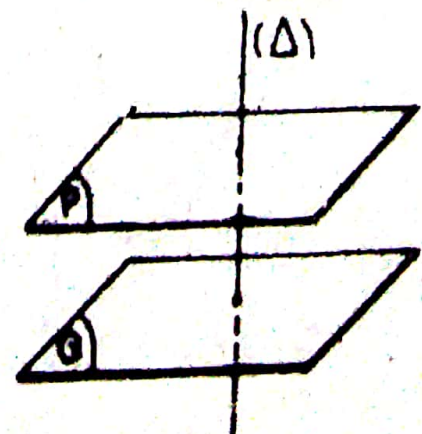


- ④ * * * បន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ស្រប :

* * * បន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ស្រប :

បើយើងដឹង :

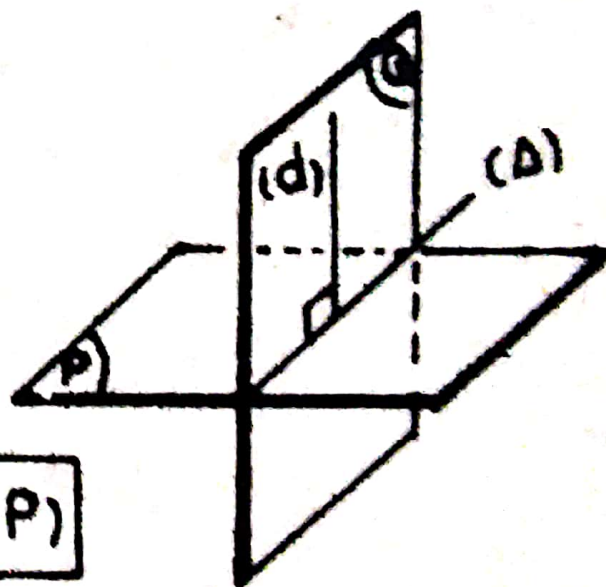
$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (\Delta) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (\Delta) \perp (Q)$$



⑤ * * បន្ទាត់ក្នុងប្លង់កែង ហើយ
កែងនឹងប្រសព្វនៃប្លង់

បើយើងមាន :

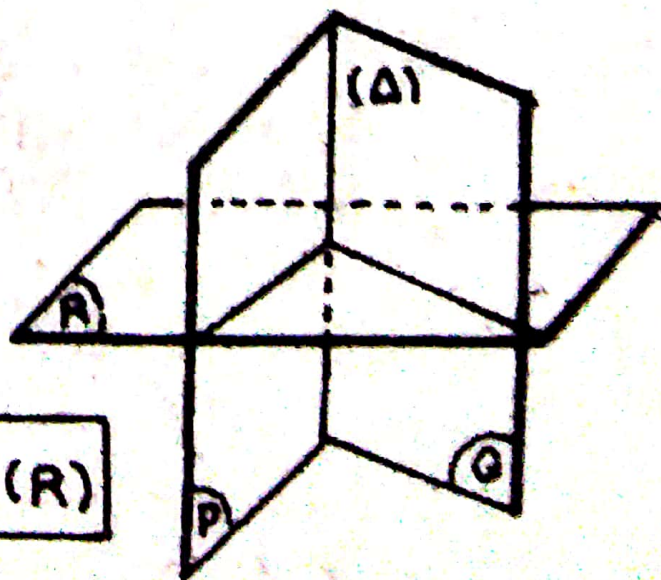
$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \text{ តាម } (\Delta) \\ (d) \subset (Q) \\ (d) \perp (\Delta) \end{array} \right\} \Rightarrow (d) \perp (P)$$



⑥ * * បន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ ២
ដែលកែងនឹងប្លង់តែ ១ :

បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = (\Delta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\Delta) \perp (R)$$



XXII

ប្លង់កែងនឹងប្លង់

យើងអាចបង្ហាញតាមរបៀប :

① * ប្លង់ផ្គុំបាត់ទ្វេបុព្វកែង :

បើយើងឃើញ :

(P) និង (Q) ផ្គុំបាត់ទ្វេបុព្វកែង $\Rightarrow (P) \perp (Q)$

② * ប្លង់កាត់តាមបន្ទាត់ដែលកែង

នឹង ប្លង់ ១ ទៀត :

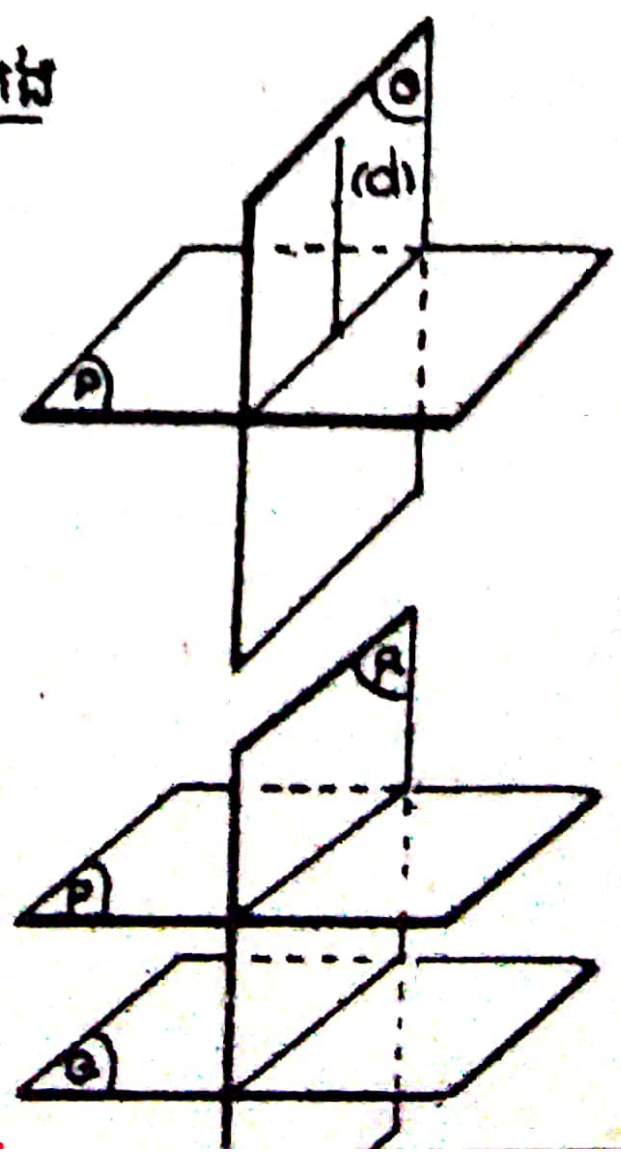
បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (d) \subset (Q) \\ (d) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

③ * ប្លង់កែងនឹងប្លង់ស្រប :

បើយើងមាន :

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (R) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (R) \perp (Q)$$



XXIII

ទ្វេមុខប៉ុនគ្នា

1. ទ្វេមុខដែលមានរឹចចិត្តល្អឆ្លើត្នា ជាទ្វេមុខប៉ុនគ្នា
2. ទ្វេមុខដែលមានទ្វេមុខបំពេញស្វាគមន៍ ជាទ្វេមុខប៉ុនគ្នា
3. ទ្វេមុខដែលមានទ្វេមុខបន្ថែមដូចគ្នា ជាទ្វេមុខប៉ុនគ្នា
4. ទ្វេមុខលេចចេញ ជាទ្វេមុខប៉ុនគ្នា
5. ទ្វេមុខកែងទាំងរស់ប៉ុនគ្នា
6. បីសិបបីរ ចែកទ្វេមុខ ១ ជាទ្វេមុខ ២ ប៉ុនគ្នា
7. ផលបូក រឺ ផលដក ទ្វេមុខ ២ ប៉ុនផ្សេងគ្នា
ជាទ្វេមុខប៉ុនគ្នា

XXIV

ត្រីមុខ

* បើត្រីមុខ ២ មានច្រើនមុខ ១ ប៉ុន្មាន នៅចន្លោះមុខ ២ ត្រូវគ្នា
ប៉ុន្មានរៀងគ្នា ហើយបីតក្នុងលំដាប់ដូចគ្នា
ជាត្រីមុខប៉ុន្មាន ។

* បើត្រីមុខ ២ មានមុខ ២ ប៉ុន្មាន ជាបន្តិច ច្រើនមុខ ២ ត្រូវ
គ្នាប៉ុន្មានរៀងគ្នា ហើយបីតក្នុងលំដាប់ដូចគ្នា
ជាត្រីមុខប៉ុន្មាន ។

សំណួរ

* ក្នុងត្រីមុខ :

ផលដកមុខ២ ទៀត < មុខនិមួយៗ < ផលបូកមុខ២ ទៀត

* ក្នុងពហុមុខ :

ផលបូកមុខពហុមុខ < 4 d



សំណុំចំណុច

(ជំនួយស្មារតី)

- ① សំណុំបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុចនឹង M ហើយស្របទៅនឹងប្លង់នឹង (P) មួយគឺជាប្លង់ (R) កាត់តាម M ហើយស្របនឹង (P) ។
- ② សំណុំបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចនឹង M មួយ ហើយរក្សាក្រណាស់នឹងបន្ទាត់នឹង (d) មួយ គឺជាប្លង់ (R) ដែលកាត់តាម M ហើយកែងនឹង (Δ) ។
- ③ សំណុំចំណុចស្មើចំងាយទៅចុងទាំង ២ នៃអង្កត់នឹង $[AB]$ មួយគឺជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ។
- ④ សំណុំចំណុចស្មើចំងាយទៅមុខទាំង ២ នៃច្របូង (P, Q) គឺជាបីសិបចម្រងនៃច្របូង (P, Q) ។
- ⑤ សំណុំចំណុចស្មើចំងាយ ១ ទៅមួយចំណុចនឹង O គឺជាស្វ៊ីផ្ចិត O កាំ $R=1$ ។