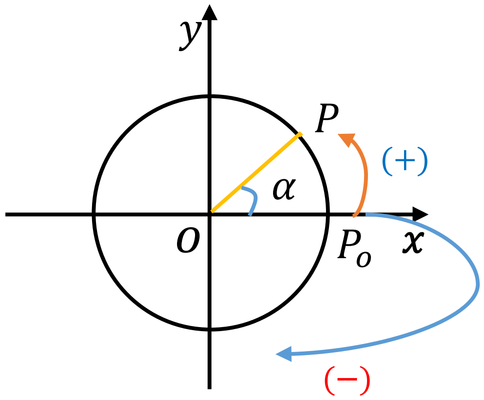
មេរៀនទី 1

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

I. រង្វាស់មុំ

❶ ការកំណត់មុំមានទិសដៅ

- $\overrightarrow{OP_o}$ ជាវ៉ិចទ័រហ្នឹង ហៅថា វ៉ិចទ័រគល់
- $\overrightarrow{OP}$ ជាវ៉ិចទ័រចល័ត ហៅថា វ៉ិចទ័រចុង
- α ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OP_o}$



ជាទូទៅ : $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកំណត់បានមុំ $\alpha + k360^o \quad (k \in \mathbb{Z})$ ឬ

$$\left(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}\right) = \alpha + k360^o \quad (k \in \mathbb{Z})$$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលបានចេញពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_o}$ បានមុំ 120° ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ -155° ទៀត ។ គណនាមុំ $\left(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}\right)$ ។

ចម្លើយ

គេបាន $\left(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}\right) = 120^o + \left(-155^o\right) = -35^o$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ គណនាមុំ $\alpha = 45^o + k360^o$ ក្នុងករណី $k=1$, $k=-1$ ។

ចម្លើយ

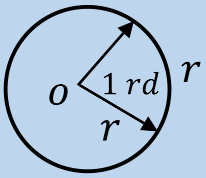
- បើ $k=1$ គេបាន $\alpha = 45^o + (1)360^o = 45^o + 360^o = 405^o$
- បើ $k=-1$ គេបាន $\alpha = 45^o + (-1)360^o = 45^o - 360^o = -315^o$

ប្រតិបត្តិ ១ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលបានចេញពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_o}$ បានមុំ 70° តាមទិសដៅអវិជ្ជមាន ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ 150° តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។ រកមុំ $\left(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ ២ គណនាមុំ $\alpha = -270^o + k360^o$ ក្នុងករណី $k=2$, $k=-3$ ។

❷ រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់

និយមន័យ 1 រ៉ាដ្យង់ គឺជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយ ដែលមានប្រវែងស្មើនឹងកាំនៃរង្វង់ ហើយគេកំណត់សរសេរ $1\ rd$ ។



❖ **បម្លែងមុំ** α ពី $(rd) \to (^o)$: $1\ rd = \dfrac{180^o}{\pi} \approx 57^o \quad \to \quad \alpha\ rd = \dfrac{180^o}{\pi} \times \alpha$

❖ **បម្លែងមុំ** α ពី $(^o) \to (rd)$: $1^{\ o} = \dfrac{\pi}{180^o} \approx 0.017 \quad \to \quad \alpha^{\ o} = \dfrac{\pi}{180^o} \times \alpha$

ជាទូទៅ : $\left(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}\right) = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ ប្តូរមុំ 30° , 45° , 150° ជារ៉ាដ្យង់ ។

ចម្លើយ

- គេបាន $30^o = \dfrac{\pi}{180^o} \times 30^o = \dfrac{\pi}{6}$
- គេបាន $45^o = \dfrac{\pi}{180^o} \times 45^o = \dfrac{\pi}{4}$
- គេបាន $150^o = \dfrac{\pi}{180^o} \times 150^o = \dfrac{5\pi}{6}$

ឧទាហរណ៍ ២ ប្តូរមុំ $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, 3π ជាដឺក្រេ ។

ចម្លើយ

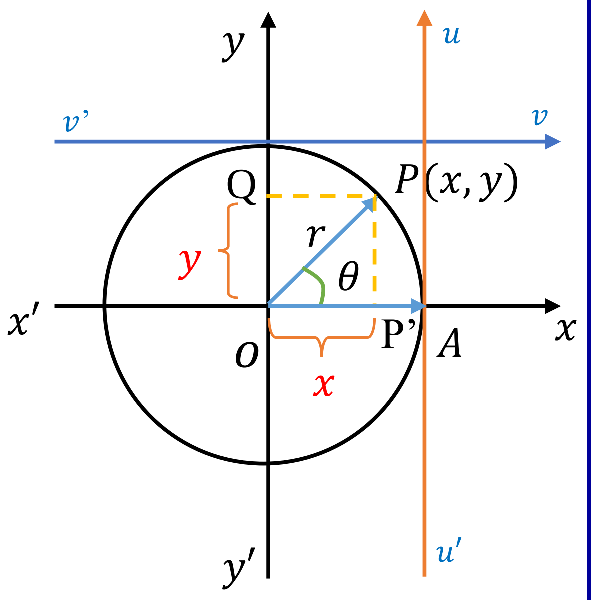
- គេបាន $\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{180^o}{\pi} \times \dfrac{\pi}{5} = 36^o$
- គេបាន $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{180^o}{\pi} \times \dfrac{2\pi}{3} = 120^o$

ប្រតិបត្តិ ប្តូរមុំពីរ៉ាដ្យង់ទៅជាដឺក្រេ $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{-4\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{4}$, $\dfrac{-7\pi}{2}$ ។

II. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

❶ ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់

- $\sin\theta = \dfrac{\text{ឈម}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}} = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{y}{r}$
- $\cos\theta = \dfrac{\text{ជាប់}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}} = \dfrac{OP'}{OP} = \dfrac{x}{r}$
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{r} \times \dfrac{r}{x} = \dfrac{y}{x}$
- $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\frac{y}{x}} = \dfrac{x}{y}$



ជាទូទៅ : គេបាន ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ។

- ❖ អ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ហៅថាអ័ក្សស៊ីនុស
- ❖ អ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ ហៅថាអ័ក្សកូស៊ីនុស
- ❖ អ័ក្ស $\overrightarrow{u'u}$ ហៅថាអ័ក្សតង់សង់
- ❖ អ័ក្ស $\overrightarrow{v'v}$ ហៅថាអ័ក្សកូតង់សង់

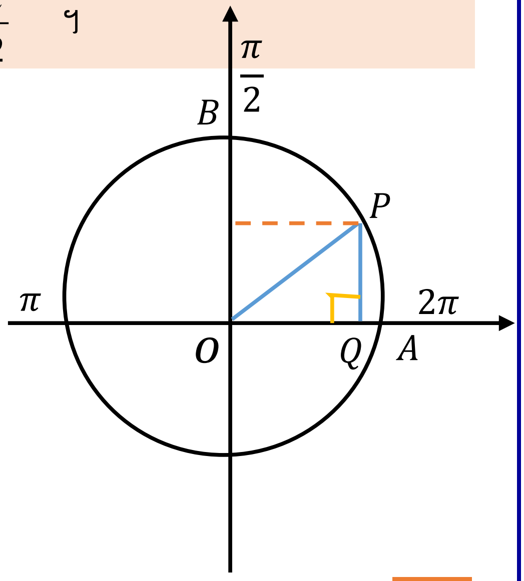
ឧទាហរណ៍ ១ គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$ ។

B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់និងអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។

ដូចនេះ: B ជាចំណុចដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\dfrac{\pi}{2}$ ។

ចម្លើយ

- $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$
- $\cot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{0}{1} = 0$
- $\tan\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{0}$ មិនអាចកំណត់បាន ។



ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ គេបាន $\angle AOP = \frac{\pi}{6}$ ហើយ $PQ = \frac{1}{2}$ ។

- $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{PQ}{OP} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$
- $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\cot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ។

ជាទូទៅ : គេអាចសង្ខេបតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេសៗ ជាតារាងដូចខាងក្រោម :

មុំ / អនុគមន៍	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
cot	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

ឧទាហរណ៍ ១ គណនា $A = 2\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{\pi}{6} - 3\tan\frac{\pi}{3} + 4\cot\frac{\pi}{4}$

ចម្លើយ

គេបាន $A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(\sqrt{3}\right) + 4(1)$

$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4 = 4$ ។

✎ **ឧទាហរណ៍ ២** គណនា $B = \dfrac{5 - 4\tan^2 45^o + \cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o - 2\sin^3 90^o + 4\tan 45^o}$

ចម្លើយ

គេបាន $B = \dfrac{5 - 4\tan^2 45^o + \cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o - 2\sin^3 90^o + 4\tan 45^o}$

$$= \dfrac{5 - 4(1)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2(1)^3 + 4}$$

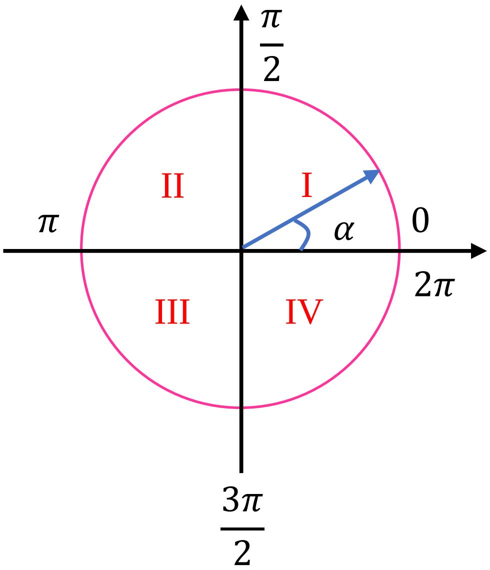
$$= \dfrac{5 - 4 + \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2} - 2 + 4} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{15}$$

✎ **ប្រតិបត្តិ** គណនា $2\sin\dfrac{2\pi}{4} - 3\tan^2\dfrac{\pi}{6} + 2\cos^4\dfrac{\pi}{2} + 3\cot^2\dfrac{\pi}{4}$ ។

❷ សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រចែកចេញជាបួនកាដ្រង់គឺ I , II , III , IV ។

- ❖ កាដ្រង់ទី $I : 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$
- ❖ កាដ្រង់ទី $II : \dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$
- ❖ កាដ្រង់ទី $III : \pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$
- ❖ កាដ្រង់ទី $IV : \dfrac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$



គេបានតារាងសង្ខេបសញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដូចខាងក្រោម ៖

កាជ្រង់ / អនុគមន៍	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

✎ **ឧទាហរណ៍ ១** តើមុំ x នៅក្នុងកាជ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\sin x < 0\\ \cos x < 0\end{cases}$ ។

ចម្លើយ

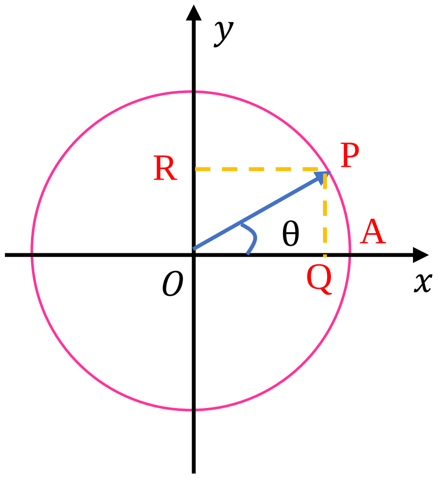
ដោយ $\begin{cases}\sin x < 0\\ \cos x < 0\end{cases} \Rightarrow x$ នៅក្នុងកាជ្រង់ទី III ។

✎ **ប្រតិបត្តិ ១** តើក្នុងកាជ្រង់ណាដែលគេអាចរកមុំផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\cos x > 0\\ \tan x > 0\end{cases}$ ។

✎ **ប្រតិបត្តិ ២** តើក្នុងកាជ្រង់ណាដែល $\tan x$ និង $\cot x$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

III. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

❶ ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ



នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ θ ជារង្វាស់មុំ $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OP}\right)$:

- $\cos\theta = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{OQ}{1} = OQ$
- $\sin\theta = \dfrac{OR}{OP} = \dfrac{OR}{1} = OR$

អនុវត្តទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ចំពោះត្រីកោណកែង OPQ :

$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$ ឬ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad (1)$

❖ ចែកអង្គនៃ (1) នឹង $\sin^2\theta$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \quad \text{ឬ} \quad \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$1 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} \quad \text{ឬ} \quad 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$ ។

❖ ចែកអង្គនៃ (1) នឹង $\sin^2\theta$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ឬ} \quad \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ឬ} \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$ ។

ជាទូទៅ : គេបានទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ ដូចខាងក្រោម :

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{ឬ} \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \quad \text{ឬ} \quad \sin^2\theta = \frac{1}{1 + \cot^2\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ឬ} \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$$

✎ **ឧទាហរណ៍ ១** គណនា $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ ដោយស្គាល់ $\sin\theta = \frac{8}{17}$ ដែលមុំ θ ឋិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទី I ។

ចម្លើយ

តាមទំនាក់ទំនង $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \quad \text{ព្រោះ} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\theta > 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$$

តាមរូបមន្ត $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8}{17} \times \frac{17}{15} = \frac{8}{15}$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{8}$$

ដូចនេះ $\sin\theta = \frac{8}{17}$, $\cos\theta = \frac{15}{17}$, $\tan\theta = \frac{8}{15}$, $\cot\theta = \frac{15}{8}$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ គណនា $A = \dfrac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ ដោយដឹងថា $\tan\theta = \frac{4}{15}$ ។

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ និង $\tan\theta = \frac{4}{15}$

នោះ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{15} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{4}{15}\cos\alpha$

គេបាន

$$A = \frac{5\left(\frac{4}{15}\right)\cos\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\left(\frac{4}{15}\right)\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{4}{3} + 7\right)\cos\alpha}{\left(6 - \frac{4}{5}\right)\cos\alpha} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{26}{5}} = \frac{25}{4} \times \frac{5}{26} = \frac{125}{78}$$

ដូចនេះ $A = \dfrac{125}{78}$ ។

ប្រតិបត្តិ ១ គណនា $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ និងមុំ α ឋិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទី IV ។

ប្រតិបត្តិ ២ គណនា $F = \dfrac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$ ដោយដឹងថា $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ និងមុំ α ឋិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទី I ។

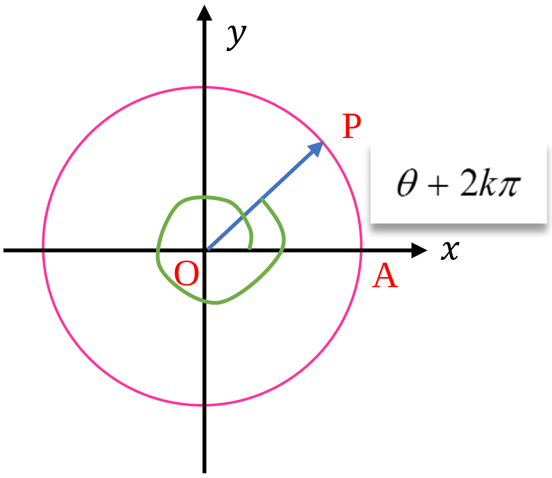
❷ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ θ និង $\theta + 2k\pi$

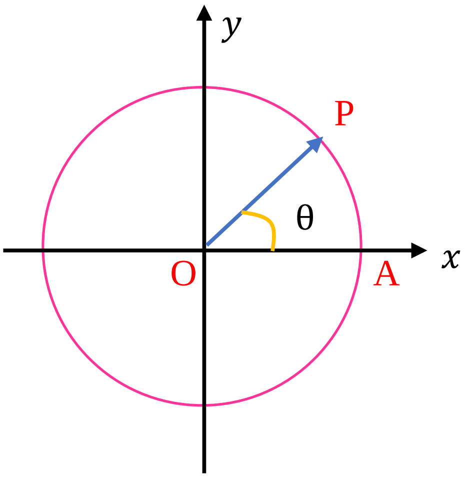
- មុំ θ កំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OP}$
- មុំ $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ កំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OP}$

ដូចនេះ ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ θ និង $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ មានតម្លៃស្មើគ្នា គឺ

$$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \quad , \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$$

$$\tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta \quad , \quad \cot(\theta + 2k\pi) = \cot\theta \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$





✎ ឧទាហរណ៍ ១

- $\sin\dfrac{9\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi + 8\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2(2\pi)\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$
- $\cos\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi - 18\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 6\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2(-3\pi)\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

✎ ឧទាហរណ៍ ២

គេដឹងថា $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។ គណនា $\cos\dfrac{65\pi}{4}$, $\sin\left(-\dfrac{39\pi}{4}\right)$ ។

ចម្លើយ

- $\cos\dfrac{65\pi}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi + 64\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 8\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2(4\pi)\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sin\left(-\dfrac{39\pi}{4}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi-40\pi}{4}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-10\pi\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2(-5\pi)\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

✎ ប្រតិបត្តិ គណនាតម្លៃរបស់ $\sin 6\pi$, $\sin\dfrac{11\pi}{3}$, $\cos\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)$ ។

❷ មុំផ្ទុំ

(ក) មុំផ្ទុយគ្នា θ និង $-\theta$:

មុំពីរផ្ទុយគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើសូន្យ តាម 2π

- តាង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=\theta'$
- គេបាន $\theta+\theta'=0$ តាម 2π នោះ $\theta'=-\theta$
- កូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $P(\cos\theta\,,\,\sin\theta)$
- កូអរដោនេនៃចំណុច P' គឺ $P'(\cos\theta'\,,\,\sin\theta')=P'(\cos(-\theta)\,,\sin(-\theta))$

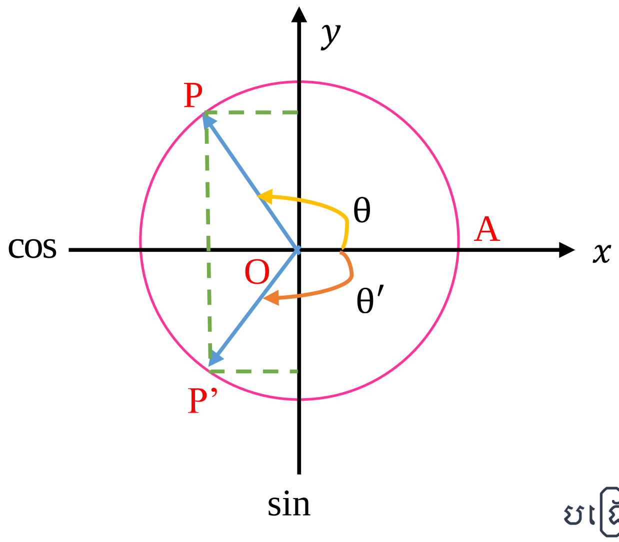
ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះគេបាន ចំណុចទាំងពីរមាន

- អាប់ស៊ីសដូចគ្នា គឺ $\cos(-\theta)=\cos\theta$
- អរដោនេផ្ទុយគ្នា គឺ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

គេបាន $\tan(-\theta)=\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

និង $\cot(-\theta)=\dfrac{1}{\tan(-\theta)}=\dfrac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$ ។

$\sin(-\theta)=\sin\theta$,	$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$,	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$



↳ ឧទាហរណ៍ ១

- $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

(ខ) មុំបំពេញ $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ និង θ :

មុំពីរបំពេញគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើ $\frac{\pi}{2}$ តាម 2π :

- តាង $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}\right)=\theta'$
- គេបាន $\theta+\theta' = \frac{\pi}{2}$ តាម 2π នោះ $\theta' = \frac{\pi}{2}-\theta$
- កូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $P(\cos\theta, \sin\theta)$
- កូអរដោនេនៃ P' គឺ $P'(\cos\theta', \sin\theta') = P'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

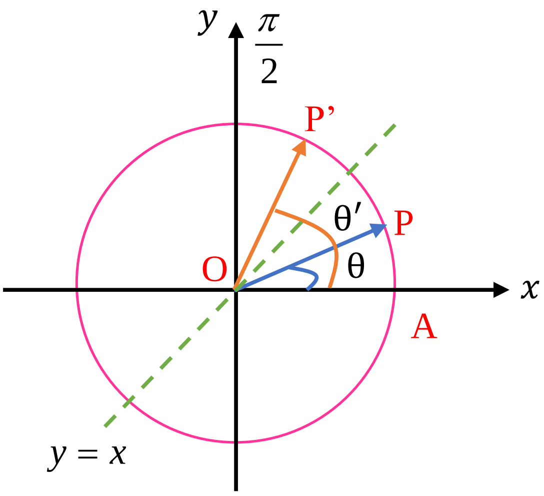
ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ នោះគេបាន ចំណុចទាំងពីរមាន :

- អាប់ស៊ីសនៃចំណុច P ជា អរដោនេនៃចំណុច P' គឺ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$
- អរដោនេនៃចំណុច P ជា អាប់ស៊ីសនៃចំណុច P' គឺ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

គេបាន $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

និង $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$ ។

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$



ឧទាហរណ៍ ១

- $\sin 30^o = \sin\left(90^o - 60^o\right) = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30^o = \cos\left(90^o - 60^o\right) = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(គ) មុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ និង θ :

មុំពីរបន្ថែមគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើ π តាម 2π :

- តាង $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}\right)=\theta'$
- គេបាន $\theta+\theta'=\pi$ តាម 2π នោះ $\theta'=\pi-\theta$
- កូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $P(\cos\theta, \sin\theta)$
- កូអរដោនេនៃ P' គឺ $P'(\cos\theta', \sin\theta') = P'\left(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)\right)$

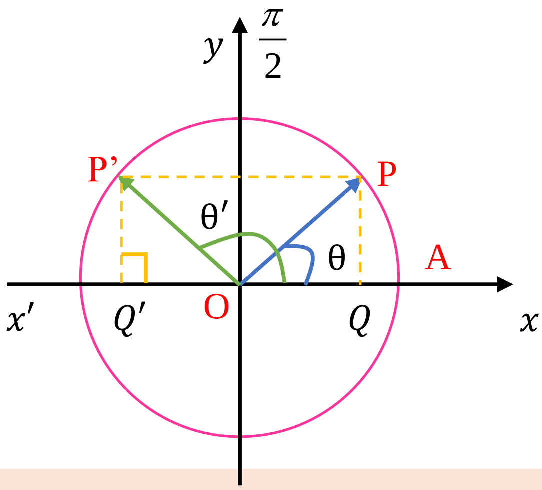
ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់អ័ក្សអរដោនេ នោះគេបាន ចំណុចទាំងពីរមាន :

- អាប់ស៊ីសផ្ទុយគ្នា គឺ $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
- អរដោនេដូចគ្នា គឺ $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

គេបាន $\tan(\pi-\theta) = \dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)} = \dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$

និង $\cot(\pi-\theta) = \dfrac{1}{\tan(\pi-\theta)} = \dfrac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$ ។

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$$



➷ ឧទាហរណ៍ ១

- $\sin 135^o = \sin(180^o - 45^o) = \sin 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos\left(-\dfrac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi + 18\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + 6\pi\right)$

$= \cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{3\pi-\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

➷ ឧទាហរណ៍ ២ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម

$$A = \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \cos(\pi-\theta) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$$

$$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$ ។

ចម្លើយ

គេបាន $A = \cos(-\theta) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) + \cos(\pi-\theta) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)$

$= \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$

$= \cos\theta + \sin\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \cos\theta - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= \cos\theta - \cos\theta = 0$

គេបាន $B=\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

✎ ប្រតិបត្តិ ១ ដោយស្គាល់ $\sin 47^o=0.6820$ ចូរគណនា $\cos 43^o$ ។

✎ ប្រតិបត្តិ ២ រកតម្លៃលេខនៃកន្សោម

$$A=\sin(-x)+\sin(\pi-x)+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$B=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)$$

$$C=\tan\frac{5\pi}{6}+\cot\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}$$ ។

(ឃ) មុំមានផលសងស្មើ π :

- តាង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=\theta'$
- គេបាន $\theta'-\theta=\pi$ តាម 2π នោះ $\theta'=\pi+\theta$
- កូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $P(\cos\theta,\sin\theta)$
- កូអរដោនេនៃ P' គឺ $P'(\cos\theta',\sin\theta')=P'(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta))$

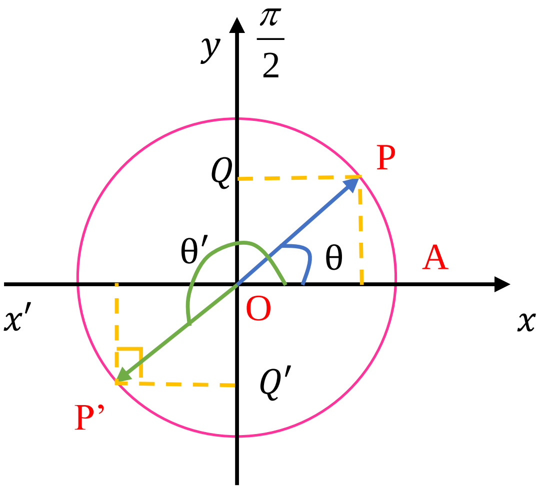
ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O នោះគេបាន ចំណុចទាំងពីរមាន :

- អាប់ស៊ីសផ្ទុយគ្នា គឺ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
- អរដោនេផ្ទុយគ្នា គឺ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

គេបាន $\tan(\pi+\theta)=\frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$

និង $\cot(\pi+\theta)=\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$ ។

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$
$$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$$



ឧទាហរណ៍ ១

- $\sin 210^o = \sin(180^o + 30^o) = -\sin 30^o = -\frac{1}{2}$
- $\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ឧទាហរណ៍ ២ គណនា

$$A = 2\cos(\pi - 2x) + \sin(\pi + y) - 2\cos(\pi - 2x) - \sin(\pi + y)$$ ។
$$= -2\cos 2x - \sin y + 2\cos 2x + \sin y = 0$$

(ង) មុំមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$:

- អនុវត្តរូបមន្ត មុំបំពេញ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$$

- គេអាចសរសេរ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

- ដូចនេះ គេបានរូបមន្តមុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$ គឺ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta$$

✍ ឧទាហរណ៍ ១

- $\sin 120^o = \sin\left(90^o + 30^o\right) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\frac{3\pi+2\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\dfrac{\cot\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{\cot\left(\frac{2\pi+\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi+\pi}{2}\right)} = \dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \dfrac{-\tan\frac{\pi}{4}}{\cos\pi} = \frac{-1}{-1} = 1$

✍ ឧទាហរណ៍ ២ គណនា $A = \dfrac{\cos\left(-288^o\right)\cot 72^o}{\tan\left(-162^o\right)\sin 108^o} - \tan 18^o$ ។

ចម្លើយ

គេបាន $A = \dfrac{\cos\left(-288^o\right)\cot 72^o}{\tan\left(-162^o\right)\sin 108^o} - \tan 18^o$

$$= \frac{\cos\left(-360^o + 72^o\right)\cot\left(90^o - 18^o\right)}{\tan\left(-180^o + 18^o\right)\sin\left(90^o + 18^o\right)} - \tan 18^o$$

$$= \frac{\cos 72^o \tan 18^o}{\tan 18^o \cos 18^o} - \tan 18^o$$

$$= \frac{\cos\left(90^o - 18^o\right)}{\cos 18^o} - \tan 18^o$$

$$= \frac{\sin 18^o}{\cos 18^o} - \tan 18^o = \tan 18^o - \tan 18^o = 0$$

↳ ប្រតិបត្តិ ១ គណនា $\sin 870^o$, $\cos\left(-135^o\right)$, $\tan 765^o$, $\cot\dfrac{25\pi}{4}$ ។

↳ ប្រតិបត្តិ ២ គណនា $B = \dfrac{\left(\cot 44^o + \tan 226^o\right)\cos 406^o}{\cos 316^o} - \cot 72^o \cot 18^o$ ។

IV. សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

(ក) ដែនកំណត់

- អនុគមន៍ស៊ីនុស កំណត់លើ $\mathbb{R}$ គេសរសេរ $y = f(x) = \sin x$ មាន $D = \mathbb{R}$ ឬ $D = (-\infty, +\infty)$
- អនុគមន៍កូស៊ីនុស កំណត់លើ $\mathbb{R}$ គេសរសេរ $y = f(x) = \cos x$ មាន $D = \mathbb{R}$ ឬ $D = (-\infty, +\infty)$
- អនុគមន៍តង់សង់ $y = f(x) = \tan x$ កំណត់លើ $D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $k \in \mathbb{Z}$
- អនុគមន៍កូតង់សង់ $y = f(x) = \cot x$ កំណត់លើ $D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$

(ខ) ខួបនៃអនុគមន៍

និយមន័យ

f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុត ដែល $\forall x \in D: \ f(x+p) = f(x)$ ។ ពីនិយមន័យនេះ គេអាចទាញបាន

$$f(x) = f(x+p) = f((x+p)+p) = f(x+2p) = \dots\dots\dots$$
$$f(x) = f(x-p) = f((x-p)-p) = f(x-2p) = \dots\dots\dots$$

ជាទូទៅ $\forall k \in \mathbb{Z} \ , \ \forall x \in D \ , \ f(x+kp) = f(x)$, p វិជ្ជមានតូចបំផុត

ឧទាហរណ៍ ១ រកខួបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \sin x$ និង $y = f(x) = \cos x$ ។

ចម្លើយ

- $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$
  នោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត p មួយ ដែល $p = 2\pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+p) = f(x)$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = f(x) = \sin x$ មានខួប $p = 2\pi$ ។

- $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$
  នោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត p មួយ ដែល $p = 2\pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+p) = f(x)$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = f(x) = \cos x$ មានខួប $p = 2\pi$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ រកខួបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \sin 2x$ និង $y = f(x) = \cos 2x$ ។

ចម្លើយ

- $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(x+\pi) = \cos[2(x+\pi)] = \cos(2x+2\pi) = \cos 2x = f(x)$
  នោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត p មួយ ដែល $p = \pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+p) = f(x)$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = f(x) = \sin 2x$ មានខួប $p = \pi$ ។

- $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(x+\pi) = \sin[2(x+\pi)] = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x = f(x)$
  នោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត p មួយ ដែល $p = \pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+p) = f(x)$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = f(x) = \cos 2x$ មានខួប $p = \pi$ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y=\sin ax$ និង $y=\cos ax$ មានខួប $p=\frac{2\pi}{|a|}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣ រកខួបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=\tan x$ និង $y=f(x)=\cot x$ ។

ចម្លើយ

- $\forall x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(x+\pi)=\tan(x+\pi)=\tan x=f(x)$
  នោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត p មួយ ដែល $p=\pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+p)=f(x)$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $y=f(x)=\tan x$ មានខួប $p=\pi$ ។

- $\forall x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(x+\pi)=\cot(x+\pi)=\cot x=f(x)$
  នោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត p មួយ ដែល $p=\pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+p)=f(x)$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $y=f(x)=\cot x$ មានខួប $p=\pi$ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y=\tan ax$ និង $y=\cot ax$ មានខួប $p=\frac{\pi}{|a|}$ ។

(គ) ភាពគូ និងភាពសេស

និយមន័យ

f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D :

- f ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែ $\forall x\in D, -x\in D$ គេបាន $f(-x)=f(x)$
- f ជាអនុគមន៍សេស លុះត្រាតែ $\forall x\in D, -x\in D$ គេបាន $f(-x)=-f(x)$

ឧទាហរណ៍ ១ តើ $y=x-\sin x$ ជាអនុគមន៍គូ ឬសេស ?

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $y=x-\sin x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

$\forall x \in D$, $-x \in D$ គេបាន :

$f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x)$

ដូចនេះ $y = x - \sin x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

✎ ឧទាហរណ៍ ២ តើ $y = \tan x \cot^3 x$ ជាអនុគមន៍គូ ឬសេស ?

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $y = \tan x \cot^3 x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

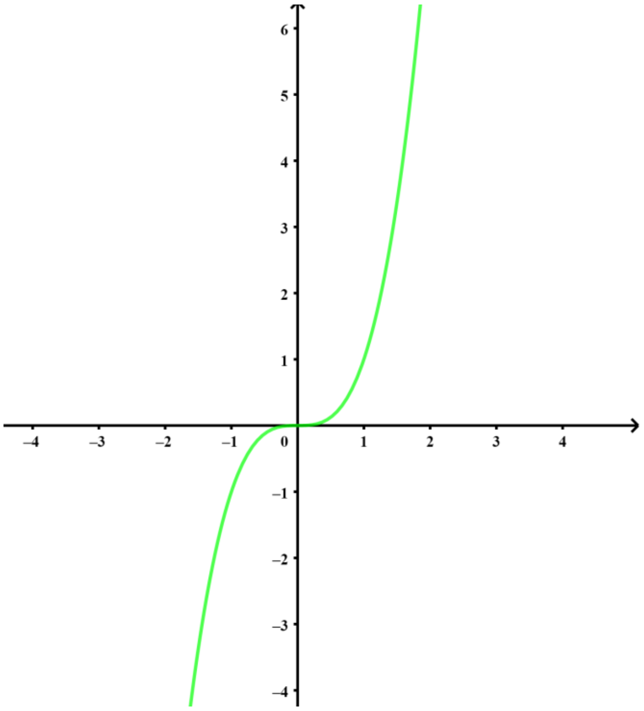
$\forall x \in D$, $-x \in D$ គេបាន :

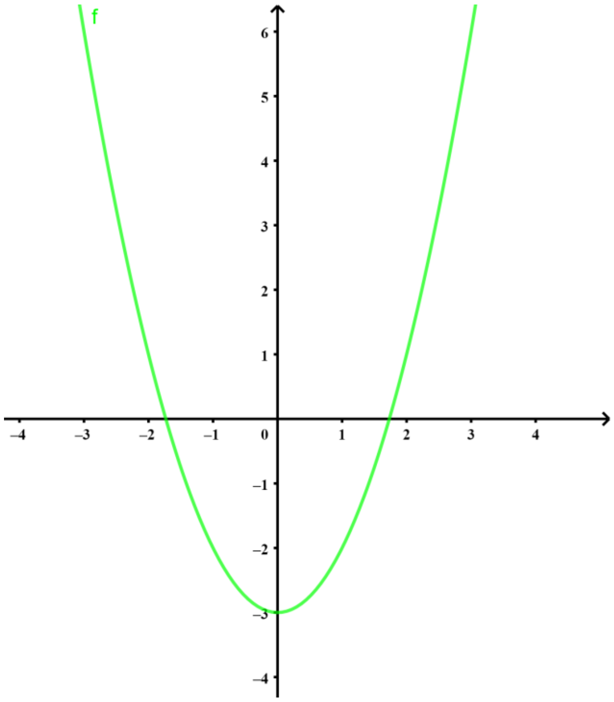
$f(-x) = \tan(-x)\cot^3(-x) = (-\tan x)(-\cot^3 x) = \tan x \cot^3 x = f(x)$

ដូចនេះ $y = \tan x \cot^3 x$ ជាអនុគមន៍គូ ។

លក្ខណៈ

- ❖ ក្រាបនៃអនុគមន៍សេស មានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ
- ❖ ក្រាបនៃអនុគមន៍គូ មានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ



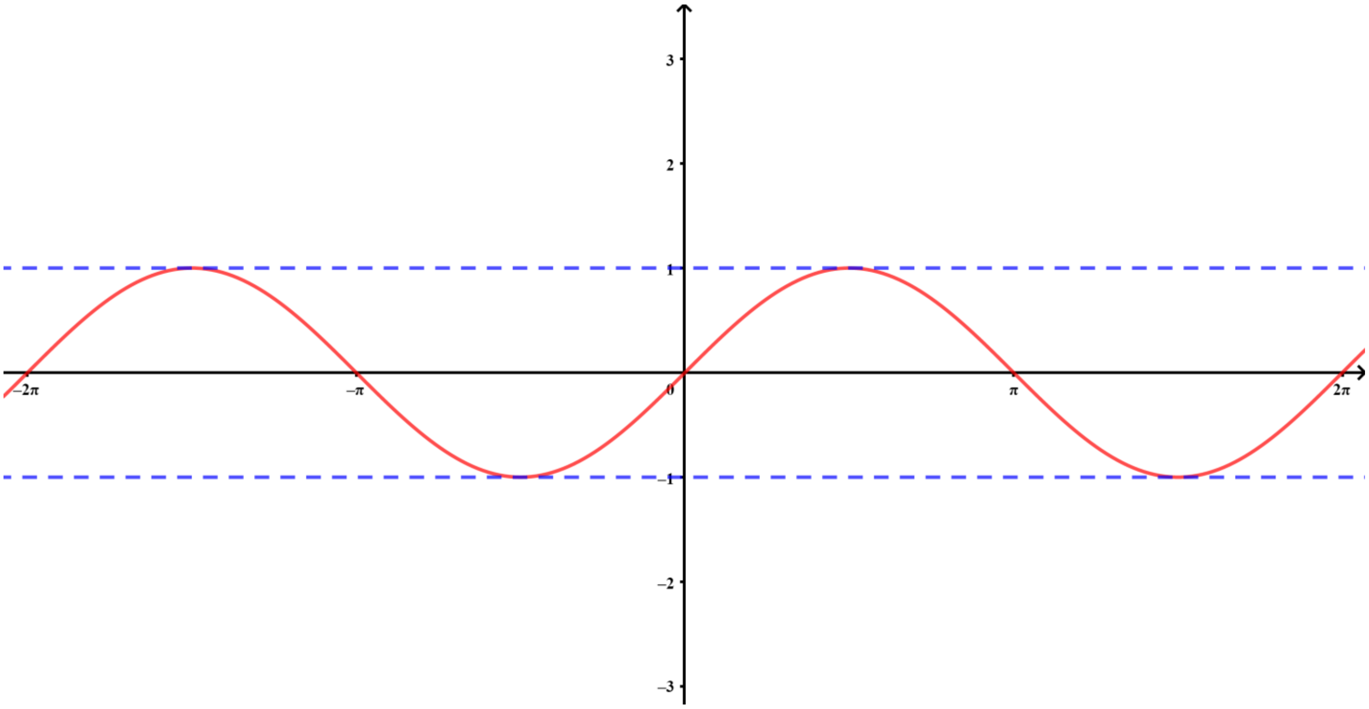


❶ អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$

- ដែនកំណត់ : $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
- ខួប : ដោយ $\sin(x+2\pi)=\sin x$ នោះ $y=\sin x$ មានខួប $p=2\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $\sin(-x)=-\sin x$ នោះ $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :

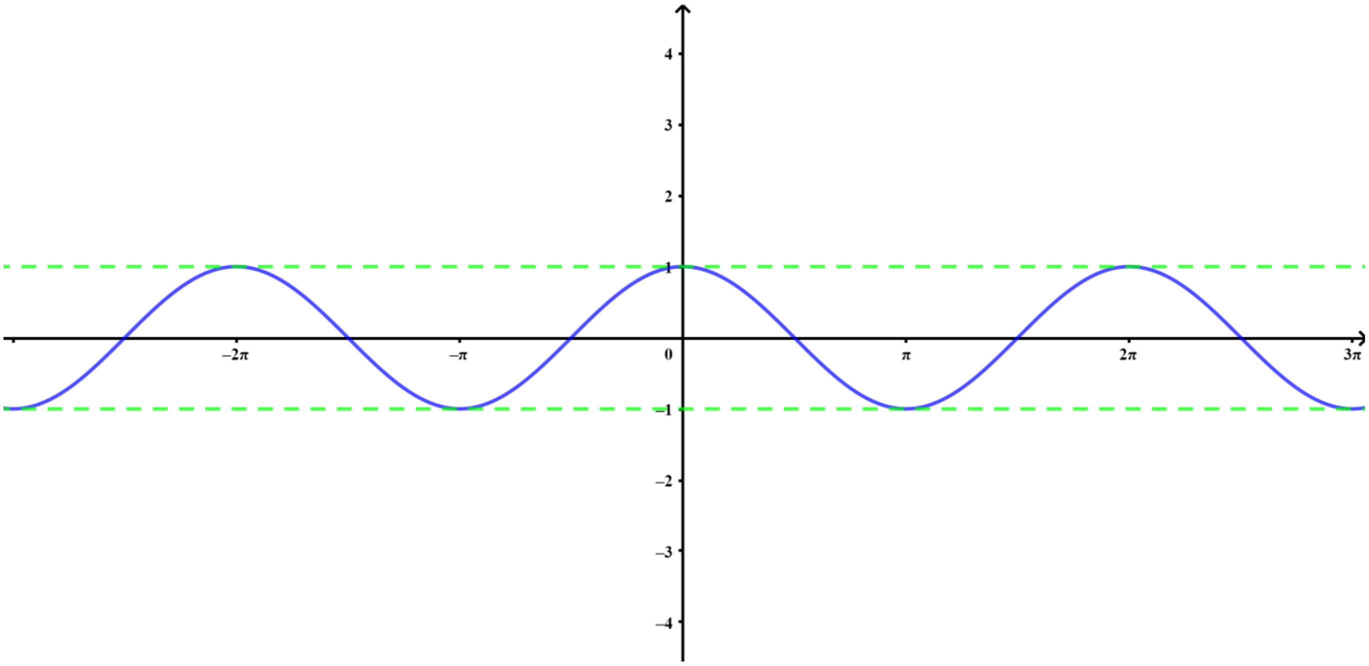


❷ អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$

- ដែនកំណត់ : $y=\cos x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
- ខួប : ដោយ $\cos(x+2\pi)=\cos x$ នោះ $y=\cos x$ មានខួប $p=2\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $\cos(-x)=\cos x$ នោះ $y=\cos x$ ជាអនុគមន៍គូ
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	−1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	−1 ↗	0 ↗	1

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :

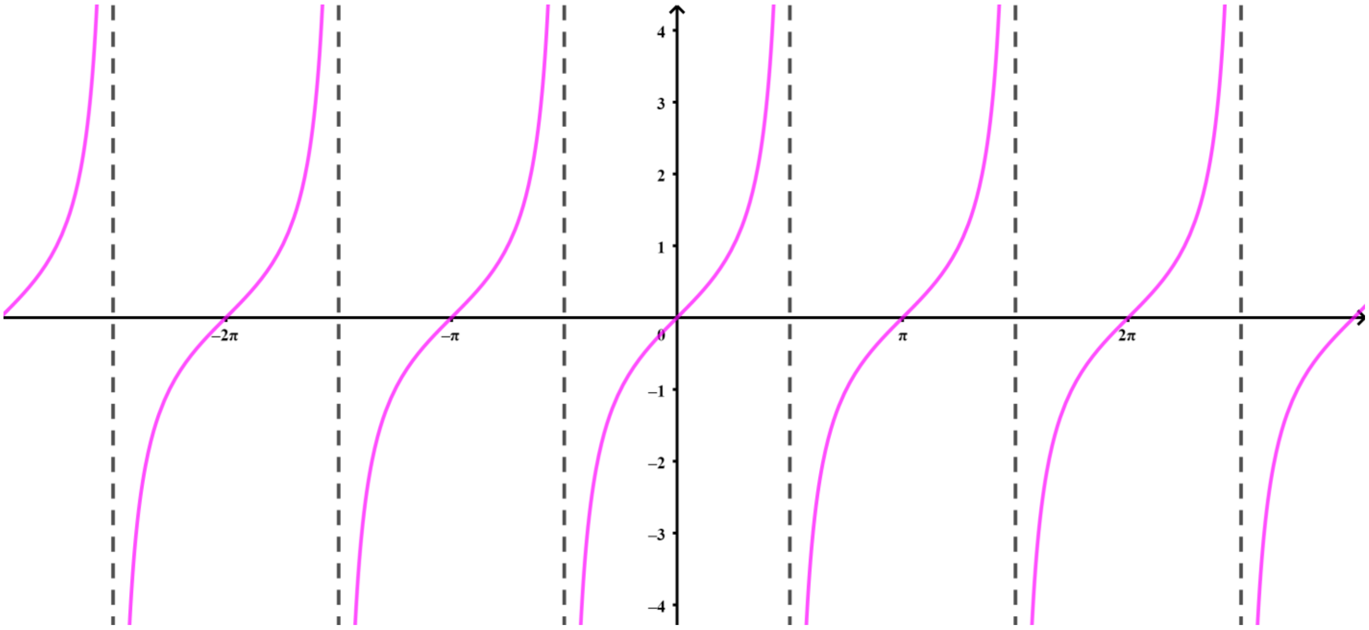


❸ អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\tan x$

- ដែនកំណត់ : $y=\tan x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
- ខួប : ដោយ $\tan(x+\pi)=\tan x$ នោះ $y=\tan x$ មានខួប $p=\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $\tan(-x)=-\tan x$ នោះ $y=\tan x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan x$	0 ↗	‖	0 ↗	‖	0

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :

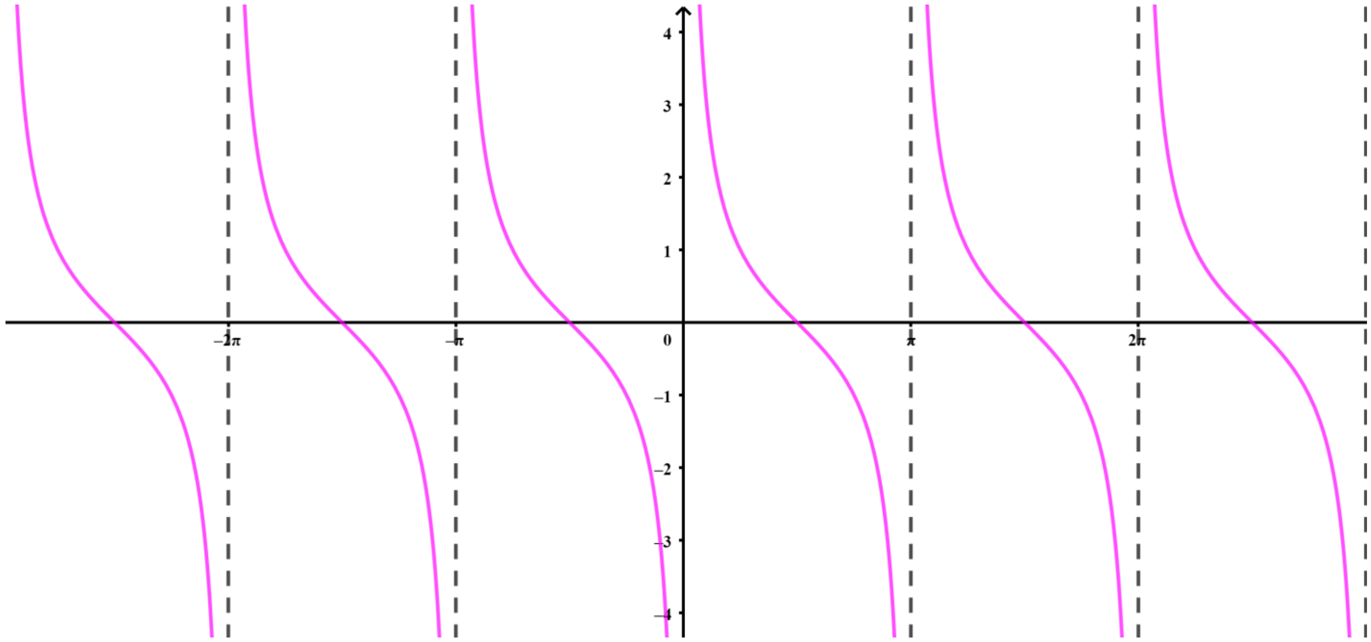


❹ អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cot x$

- ដែនកំណត់ : $y=\cot x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{k\pi\}$, $k\in\mathbb{Z}$
- ខួប : ដោយ $\cot(x+\pi)=\cot x$ នោះ $y=\cot x$ មានខួប $p=\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $\cot(-x)=-\cot x$ នោះ $y=\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cot x$	$\Vert$ ↘	0	$\Vert$ ↘	0	$\Vert$

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :



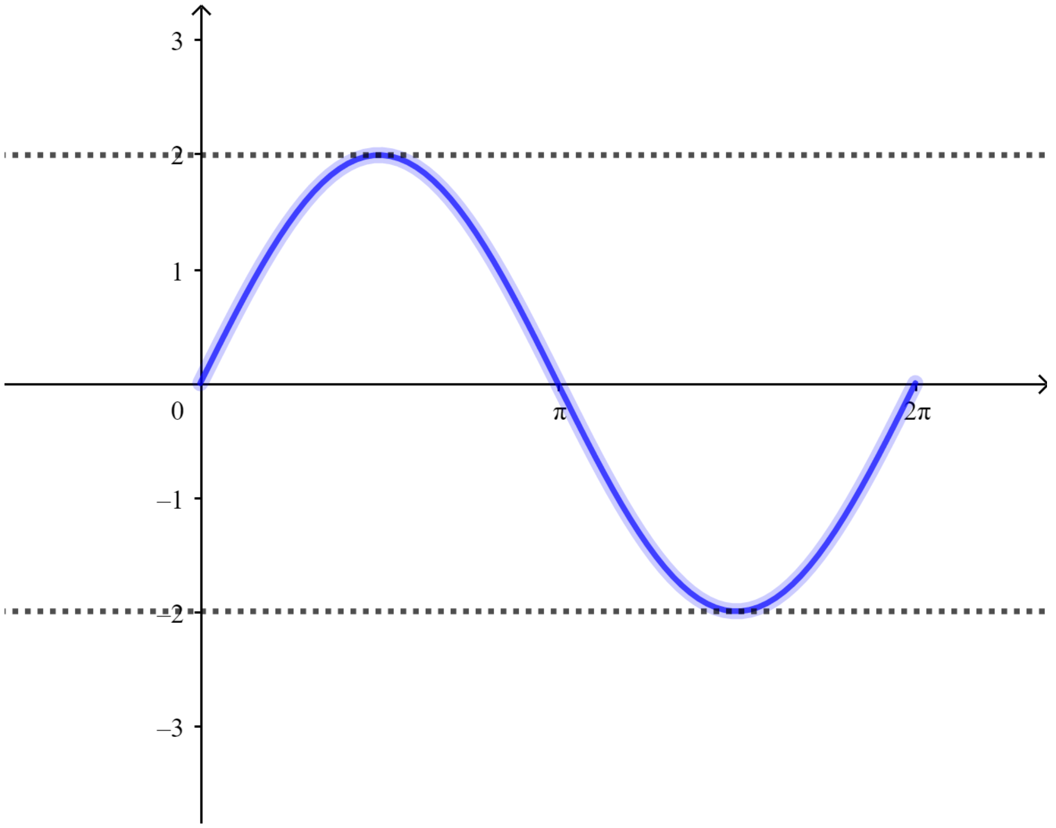
✎ ឧទាហរណ៍ ១ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2\sin x$ លើចន្លោះ $[0\,, 2\pi]$

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់ : $y = 2\sin x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
- ខួប : ដោយ $2\sin(x + 2\pi) = 2\sin x$ នោះ $y = 2\sin x$ មានខួប $p = 2\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $2\sin(-x) = -2\sin x$ នោះ $y = 2\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin x$	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2 ↗	0

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :



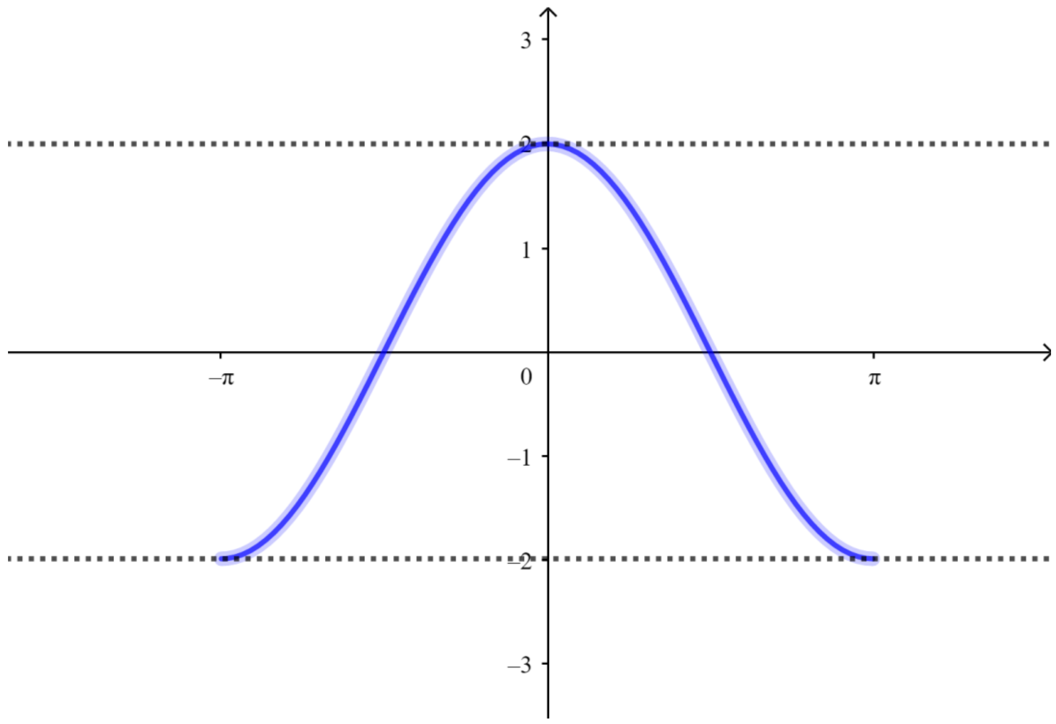
ឧទាហរណ៍ ២ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2\cos x$ លើចន្លោះ $[-\pi , \pi]$

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់ : $y = 2\cos x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
- ខួប : ដោយ $2\cos(x + 2\pi) = 2\cos x$ នោះ $y = 2\cos x$ មានខួប $p = 2\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $2\cos(-x) = 2\cos x$ នោះ $y = 2\cos x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2\cos x$	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :



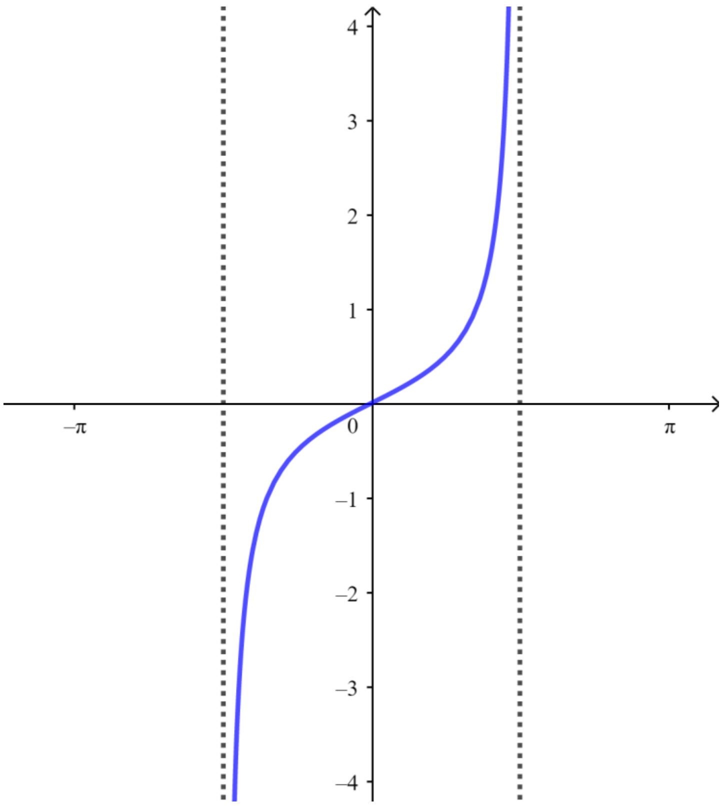
✎ **ឧទាហរណ៍ ៣** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}\tan x$ លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់ : $y=\frac{1}{2}\tan x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\},k\in\mathbb{Z}$
- ខួប : ដោយ $\frac{1}{2}\tan(x+\pi)=\frac{1}{2}\tan x$ នោះ $y=\frac{1}{2}\tan x$ មានខួប $p=\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $\frac{1}{2}\tan(-x)=-\frac{1}{2}\tan x$ នោះ $y=\frac{1}{2}\tan x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}\tan x$	$\Vert$	$-\frac{1}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{2}$	$\Vert$

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :



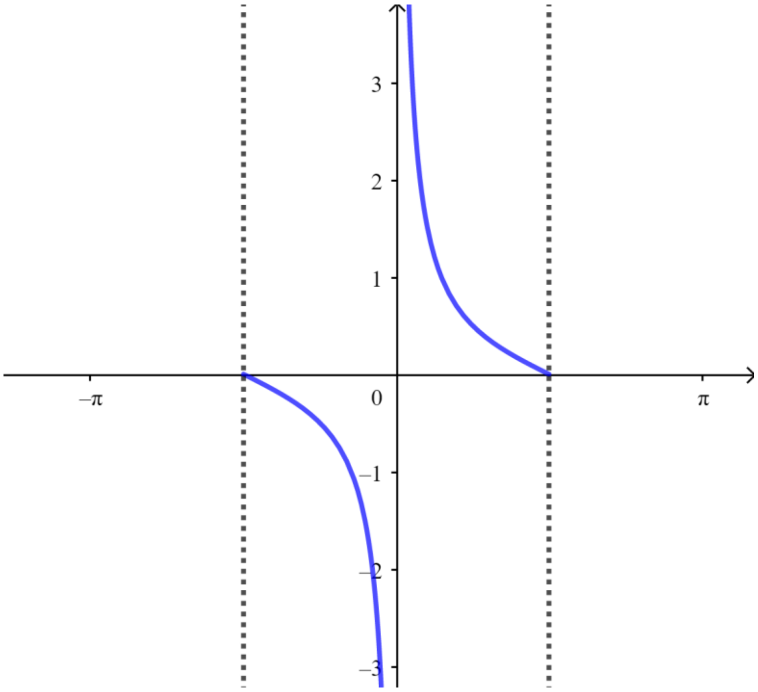
➷ **ឧទាហរណ៍ ៤** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}\cot x$ លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់ : $y=\frac{1}{2}\cot x$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{k\pi\}$, $k\in\mathbb{Z}$
- ខួប : ដោយ $\frac{1}{2}\cot(x+\pi)=\frac{1}{2}\cot x$ នោះ $y=\frac{1}{2}\cot x$ មានខួប $p=\pi$
- ភាពសេស : ដោយ $\frac{1}{2}\cot(-x)=-\frac{1}{2}\cot x$ នោះ $y=\frac{1}{2}\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស
- ទិសដៅអថេរភាព :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}\cot x$	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↘	$\Vert$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ :



V. ផ្នែកលំហាត់អនុវត្តន៍

(១) បំប្លែងជារ៉ាដ្យង់នៃមុំ

200° , -100° , 225° , -240° , 135° , 330° , 570° , 360°

(២) បំប្លែងជាដឺក្រេនៃមុំ

$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{7}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{-11\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{-7\pi}{2}$, $\frac{\pi}{9}$

(៣) គេមាន $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$ ហើយ $\pi < \theta < 2\pi$ ។ គណនា :

ក. $\sin\theta\cos\theta$ ខ. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$ គ. $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

(៤) រកតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម :

$A = \frac{8\cos^3\theta - 2\sin^3\theta + \cos\theta}{2\cos\theta - \sin^3\theta}$ ដោយស្គាល់ $\tan\theta = 2$

$B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = -2$

$C = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}$ ដោយស្គាល់ $\cot x = 3$ ។

(៥) សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2}$ ខ. $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$

គ. $\sqrt{\sin^2 x(1+\cot x) + \cos^2 x(1+\tan x)}$ ឃ. $\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan\alpha}$

(៦) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមមភាពខាងក្រោម

ក. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

ខ. $\dfrac{\cos x\cot x - \sin x\cot x}{\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x}} = 1 + \sin x\cos x$

គ. $(\tan\theta - \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2$

ឃ. $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

(៧) រកខួបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin\dfrac{2}{3}x$ ខ. $y = -\sin\dfrac{1}{4}x$ គ. $y = 2\cos\dfrac{1}{4}x$

ឃ. $y = \tan\dfrac{1}{4}x$ ង. $y = \cot\dfrac{1}{3}x$ ច. $y = \sin 2x + \cos x$

(៨) រកភាពគូ និងសេសនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម

ក. $y = x - \sin 2x$

ខ. $y = x^2\cos^2 x$

គ. $y = \tan x\cos^2 x$

ឃ. $y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x\cos 2x \quad (x \in \mathbb{R})$

ង. $y = \sin x + \tan x + \cot 3x \quad \left(x \neq \dfrac{k\pi}{2}\right)$

ច. $y = \cos x + \sin\dfrac{x}{2}\sin x + 5x^2$ ។

(៩) សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = -\sin\dfrac{x}{3}$ ខ. $y = 1 - \sin\theta$ គ. $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

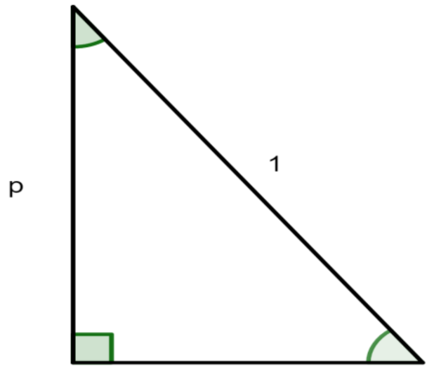
(១០) សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ដោយប្រើក្រាប $y = \sin x$

ក. $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ ខ. $y = 2 + \sin x$ គ. $y = 1 - \sin x$

(១១) សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ដោយប្រើក្រាប $y = \cos x$

ក. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ខ. $y = 2 - \cos x$ គ. $y = \cos x + 2$

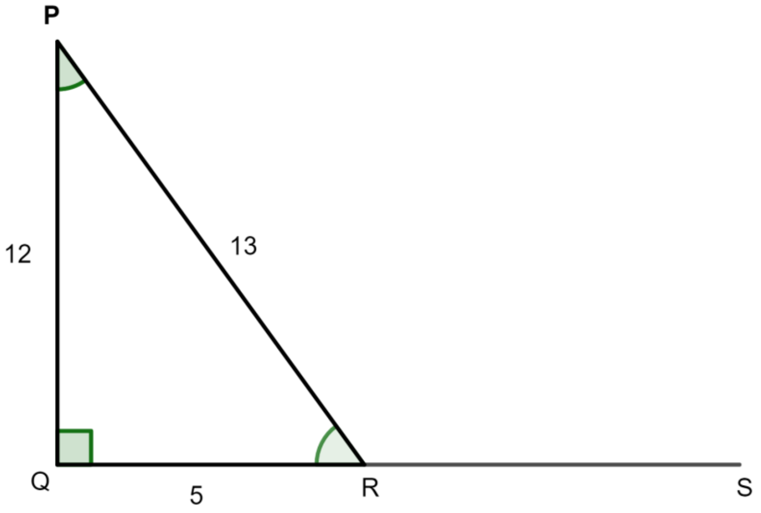
(១២) គេមានត្រីកោណដូចរូបខាងស្ដាំដែលមាន $\sin\beta = p$
ហើយ β ជាមុំស្រួច ។



ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ p :

ក. $\tan\beta$ ខ. $\sin\left(90^o-\beta\right)$ គ. $\sin\left(180^o+\beta\right)$

(១៣) តាមរូបខាងស្ដាំនេះ QRS ជាបន្ទាត់ត្រង់ ហើយ
$PQ=12cm$, $QR=5cm$, $RP=13cm$



ក. ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជា $\angle PQR$ ជាមុំកែង

ខ. ទាញរកតម្លៃ QPR និង $\cos PRS$

(១៤) បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\tan\theta$ និងរកតម្លៃនៃ k