

ប្រចាំឆ្នាំ ២០១១-២០២៥

ប្រាក់ទី

១២

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

អ្នករៀបរៀង៖ ខេម ពុទ្ធី

មាតិកា

[illegible]

វិញ្ញាសាទី ១

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី១៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $y = g(x) = \frac{2x - 3}{(x - 3)^2}$ ។

ក រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{(x - 3)^2}$ ។

ខ គណនា $F(x) = \int g(x)dx$ ដោយដឹងថា $F(4) = 0$ ។

II (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

ខ
$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$$

III (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{បើ } x \leq a \\ x^2 + 1 & \text{បើ } x > a \end{cases}$ ។ រកតម្លៃ a ដោយដឹងថា f ជាប់ត្រង់ $x = a$ ។

IV (១៥ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក $y' + x^3 - \cos x = 0$

ខ $y' + 3y = 2x + 1$

V (១៥ពិន្ទុ) គ្រូបន្ទុកថ្នាក់បានជ្រើសរើសប្រធានក្រុមវេនសំអាតថ្នាក់ថ្ងៃចំនួន 6 នាក់នៃថ្នាក់រៀនមួយដែល មានសិស្សប្រុសចំនួន 20 នាក់ និងសិស្សស្រីចំនួន 15 នាក់។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោម៖

ក «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស»

ខ «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី»

គ «ប្រធានក្រុមមានប្រុស 3 នាក់ និងស្រី 3 នាក់» ។

សម្រាយបញ្ជាក់

I ក រកចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $y = g(x) = \frac{2x-3}{(x-3)^2}$ គេបាន $g(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2}$ លុះត្រាតែ

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{(x-3)^2} &= \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x-3)^2} = \frac{a(x-3)+b}{(x-3)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x-3)^2} = \frac{ax-3a+b}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

ផ្អែមមេគុណយើងបាន $a = 2$; $-3a + b = -3 \Rightarrow -3(2) + b = -3 \Rightarrow b = 3$

ដូចនេះ $a = 2$; $b = 3$ ។

ខ គណនា $F(x) = \int g(x)dx$ ដោយដឹងថា $F(4) = 0$

ដោយ $g(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}$ គេបាន

$$\begin{aligned} F(x) &= \int g(x)dx = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2(x-3)'}{x-3} + \frac{3(x-3)'}{(x-3)^2} \right) dx \\ &= 2 \ln |x-3| + \frac{-3}{x-3} + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ដោយ $F(4) = 0$ គេបាន $2 \ln |4-3| - \frac{3}{4-3} + C = 0 \Rightarrow C = 3$

ដូចនេះ $F(x) = 2 \ln |x-3| - \frac{3}{x-3} + 3$ ។

II គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} \text{ក} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \quad (\text{មានរាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ។

$$\text{ខ} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} \quad \text{មានរាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = \pi - 2x \Rightarrow x = \frac{\pi - t}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$$

ពេល $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ គេបាន $t \rightarrow 0$

យើងបាន

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = 2 \times 1 = 2$$

ដូចនេះ $B = 2$ ។

III រកតម្លៃ a ដោយដឹងថា f ជាប់ត្រង់ $x = a$

$$\text{យើងមាន } f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{បើ } x \leq a \\ x^2+1 & \text{បើ } x > a \end{cases}$$

ដោយ f ជាប់ត្រង់ $x = a$ យើងបាន $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} (3+x) = 3+a \\ \bullet \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} x^2+1 = a^2+1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Leftrightarrow 3+a = a^2+1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

ដូចនេះ $a = -1$ ឬ $a = 2$ ។

IV ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក $y' + x^3 - \cos x = 0$

$$y' + x^3 - \cos x = 0 \Rightarrow y' = -x^3 + \cos x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \int (-x^3 + \cos x) dx \\ &= -\frac{x^4}{4} + \sin x + C \quad ; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $y = -\frac{x^4}{4} + \sin x + C \quad ; C \in \mathbb{R}$

ខ $y' + 3y = 2x + 1$

- ចំពោះ $y' + 3y = 0$ គេបាន $y_c = Ae^{-3x} \quad ; A \in \mathbb{R}$
- តាង $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ $y' + 3y = 2x + 1$ យើងបាន

$$(ax + b)' + 3(ax + b) = 2x + 1 \Leftrightarrow a + 3ax + 3b = 2x + 1$$

$$3ax + 3b + a = 2x + 1$$

$$\text{គេបាន } 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \quad ; \quad 3b + a = 1 \Rightarrow 3b + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{9}$$

$$\text{នាំឲ្យ } y_p = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \quad ; A \in \mathbb{R}$

V ក «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស»

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត } P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(A) = C(20, 6) = \frac{20!}{14!6!} \\ &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 19 \times 17 \times 8 \times 15 = 38760 \\ n(S) &= C(35, 6) = \frac{35!}{29!6!} \\ &= \frac{35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 35 \times 34 \times 11 \times 4 \times 31 = 1623160 \\ \text{យើងបាន } P(A) &= \frac{38760}{1623160} = \frac{19 \times 17 \times 8 \times 15}{35 \times 34 \times 11 \times 4 \times 31} = \frac{19 \times 3}{7 \times 11 \times 31} = \frac{57}{2387} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{57}{2387} \text{ ។}}$$

ខ «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី»

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត } P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(B) = C(15, 6) = \frac{15!}{9!6!} \\ &= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 7 \times 13 \times 11 \times 5 = 5005 \\ n(S) &= 1623160 \\ \text{នាំឲ្យ } P(B) &= \frac{5005}{1623160} = \frac{7 \times 13 \times 11 \times 5}{35 \times 34 \times 11 \times 4 \times 31} = \frac{13}{34 \times 4 \times 31} = \frac{13}{4216} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{13}{4216} \text{ ។}}$$

គ «ប្រធានក្រុមមានប្រុស៣ នាក់ និងស្រី៣ នាក់»

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត } P(C) &= \frac{n(C)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(C) = C(20, 3)C(15, 3) \\ &= \frac{20!}{17!3!} \cdot \frac{15!}{12!3!} \\ &= \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} \cdot \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} \\ &= 10 \times 19 \times 15 \times 14 \times 13 = 518700 \\ n(S) &= 1623160 \\ \text{យើងបាន } P(C) &= \frac{518700}{1623160} = \frac{10 \times 19 \times 15 \times 14 \times 13}{35 \times 34 \times 11 \times 4 \times 31} = \frac{19 \times 15 \times 13}{34 \times 11 \times 31} = \frac{3705}{11594} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{3705}{11594} \text{ ។}}$$

សម័យប្រឡង: _____ មណ្ឌលប្រឡង: _____

ហត្ថលេខាអនុវត្ត: _____ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន: _____

វិញ្ញាសាទី ២

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី២៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចតុមួយមានសៀវភៅគណិតវិទ្យា 7 ក្បាល និង សៀវភៅភាសាខ្មែរ 5 ក្បាល។ សិស្សម្នាក់បានយកសៀវភៅ 4 ក្បាល ព្រមគ្នាចេញពីចតតុដោយចៃដន្យ។

ក រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យា ទាំង 4 ក្បាល» ។

ខ រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច» ។

II (១៥ពិន្ទុ) អេលីប E មួយមានសមីការទូទៅ: $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ ។

ក រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប E ។

ខ រកប្រវែងអ័ក្សធំ និង អ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប E ។

III (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះ $x \neq -1$ ដោយ $g(x) = \frac{4x-1}{(x+1)^2}$ ។

ក រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq -1$ ។

ខ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2 y' = 4x-1$ ចំពោះ $x \neq -1$ ដោយដឹងថា $y(0) = 2012$ ។

IV (៣០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក រកដែនកំណត់ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

ខ សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

គ សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

សម្រាយបញ្ហា

I ក រកប្រូបាប A : «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យា ទាំង 4 ក្បាល»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(A) = C(7, 4) = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$n(S) = C(12, 4) = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{35}{495} = \frac{7 \times 5}{11 \times 5 \times 9} = \frac{7}{99} \quad \boxed{P(A) = \frac{7}{99}}$$

ខ រកប្រូបាប B «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{92}{99} \text{ ។}}$$

II ក រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប E

$$(E) : 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 + 2x + 1) - 9 + 4(y^2 - 6y + 9) - 4(9) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(x+1)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារនៃ}(E) \text{ គឺ } \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1 \text{ ។}}$$

ខ រកប្រវែងអ័ក្សធំ និង អ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប E

$$\text{ដោយ សមីការស្តង់ដារនៃ}(E) \text{ គឺ } \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1 \text{ គេបាន}$$

• អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

$$\bullet h = -1, k = 3; \quad a = 3, b = 2; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

ដូចនេះ យើងបាន

$$\bullet \text{ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ } 2a = 2(3) = 6 \Rightarrow \boxed{\text{ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើ 6 ឯកតាប្រវែង}}$$

$$\bullet \text{ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ } 2b = 2(2) = 4 \Rightarrow \boxed{\text{ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ 4 ឯកតាប្រវែង}}$$

$$\bullet \text{ផ្ចិត}(h, k) \Rightarrow \boxed{\text{ផ្ចិត}(-1, 3)}$$

$$\bullet \text{កំពូល } V_1(h, k - a); V_2(h, k + a) \Rightarrow \boxed{V_1(-1, 0); V_2(-1, 6)}$$

$$\bullet \text{កំណុំ } F_1(h, k - c); F_2(h, k + c) \Rightarrow \boxed{F_1(-1, 3 - \sqrt{5}); F_2(-1, 3 + \sqrt{5})}$$

III ក រកចំនួនពិត a និង b

ដោយ $g(x) = \frac{4x-1}{(x+1)^2}$ គេបាន

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} &\Leftrightarrow \frac{4x-1}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{4x-1}{(x+1)^2} = \frac{ax+a+b}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណយើងបាន $a = 4$; $a + b = -1 \Rightarrow 4 + b = -1 \Rightarrow b = -5$

ដូចនេះ $a = 4$, $b = -5$ ។

ខ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2 y' = 4x-1$ ចំពោះ $x \neq -1$ ដោយដឹងថា $y(0) = 2012$

$$\begin{aligned} (x+1)^2 y' = 4x-1 &\Rightarrow y' = \frac{4x-1}{(x+1)^2} \\ \Rightarrow y &= \int \frac{4x-1}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{4}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= 4 \ln|x+1| - \frac{-5}{x+1} + C \\ &= 4 \ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + C \quad ; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$y = 4 \ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + C$ ដោយ $y(0) = 2012$ យើងបាន

$$4 \ln|0+1| + \frac{5}{0+1} + C = 2012 \Rightarrow C = 2007$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដោយស្គាល់ $y(0) = 2012$ គឺ $y = 4 \ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + 2007$ ។

IV **ក** រកដែនកំណត់

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$

- $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ។

+ សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2+x+4}{x+1} \right)' = \frac{(x^2+x+4)'(x+1) - (x+1)'(x^2+x+4)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x+1) - x^2 - x - 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

ដោយ $(x+1)^2 > 0 \quad \forall x \in D_f$ គេបាន

- $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $x^2 + 2x - 3$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ មានឫស $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

+ តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$

- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$
- ត្រង់ $x = -3$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(-3) = -5$
- ត្រង់ $x = 1$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(1) = 3$

ខ សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = \pm\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = -1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

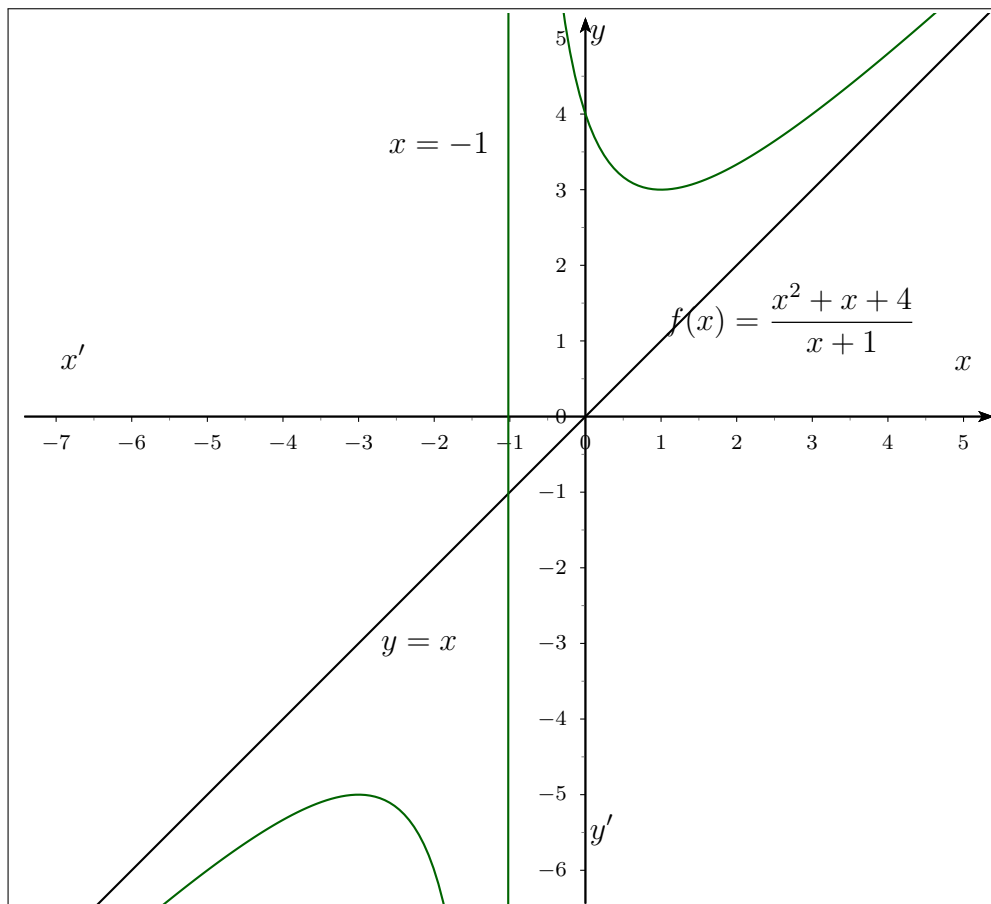
- $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = x + \frac{4}{x + 1}$ ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x + 1} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

គ សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$	3	$+\infty$



សម័យប្រឡង: _____ មណ្ឌលប្រឡង: _____

ហត្ថលេខាអនុវត្ត: _____ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន: _____

វិញ្ញាសាទី ៣

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៣៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានខ្មៅដែលណ៍ខៀវ 5 ដើម និង ខ្មៅដែលណ៍ក្រហម 4 ដើម។

សិស្សម្នាក់បានចាប់យកខ្មៅដែលណ៍ 3 ព្រមគ្នាចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។

- ក រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដែលណ៍ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដែលណ៍ក្រហម 1 ដើម»
- ខ រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដែលណ៍ដូចគ្នា»

II (១៥ពិន្ទុ)

- ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ (E) : $(e^x + 2013)y' = e^x$ ។
- ខ រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបចម្លើយកាត់តាមគល់អរដោនេ O នៃតម្រុយ។

III (២០ពិន្ទុ) គេឲ្យអេលីប E មានសមីការទូទៅ $25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$ ។

- ក សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប E ។
- ខ កំណត់កូអរដោនេ នៃផ្ចិត I កំពូល V_1 , V_2 និងកំណុំ F_1 , F_2 នៃអេលីប E ។

IV (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -2$, $x \neq 2$ ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$ និងមានក្រាប C ។

- ក គណនា $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។
- ខ សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
- គ គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

សម្រាយបញ្ជាក់

I ក កេហ្វបាប A : «សិស្សយកបានខ្មៅដែលណ៍ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដែលណ៍ក្រហម 1 ដើម»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(A) = C(5, 2)C(4, 1) = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \times 4}{2} \cdot \frac{4}{1} = 40$$

$$n(S) = C(9, 3) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{40}{84} = \frac{5 \times 4 \times 2}{3 \times 4 \times 7} = \frac{10}{21} \quad \boxed{\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{10}{21} \text{ ។}}$$

ខ កេហ្វបាប B : «សិស្សយកបានខ្មៅដែលណ៍ដូចគ្នា»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(B) = C(5, 3) + C(4, 3) = \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{1!3!} = 14$$

$$n(S) = 84$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{14}{84} = \frac{7 \times 2}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{6} \quad \boxed{\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{1}{6} \text{ ។}}$$

II ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ (E) : $(e^x + 2013)y' = e^x$

$$(e^x + 2013)y' = e^x \Rightarrow y' = \frac{e^x}{e^x + 2013}$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{e^x}{e^x + 2013} dx = \int \frac{(e^x + 2013)'}{(e^x + 2013)} dx$$

$$\Rightarrow y = \ln |e^x + 2013| + C ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ(E)គឺ } y = \ln(e^x + 2013) + C ; \quad C \in \mathbb{R} \text{ ។}}$$

ខ រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបចម្លើយកាត់តាមគល់អក្សរដេន O នៃតម្រុយ

$$(E) \text{ កាត់គល់ } O(0, 0) \text{ គេបាន } \ln(e^0 + 2013) + C = 0 \Rightarrow C = -\ln 2014$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ ចម្លើយនៃ(E) ដោយដឹងថាកាត់គល់ } O \text{ គឺ } y = \ln(e^x + 2013) - \ln 2014 \text{ ។}}$$

III ក សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប E

$$(E) : 25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 - 216 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 9(y - 1)^2 - 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2}{225} + \frac{9(y - 1)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 0)^2}{3^2} + \frac{(y - 1)^2}{5^2} = 1$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារនៃ (E) គឺ } \frac{(x - 0)^2}{3^2} + \frac{(y - 1)^2}{5^2} = 1 \text{ ។}}$$

ខ កំណត់កូអរដោនេ នៃផ្ចិត I កំពូល V_1, V_2 និងកំណុំ F_1, F_2 នៃអេលីប E

$$(E) \text{ មានសមីការស្តង់ដារ } \frac{(x - 0)^2}{3^2} + \frac{(y - 1)^2}{5^2} = 1 \text{ យើងបាន}$$

- អ័ក្ខរណ៍ជាអ័ក្ខរណ៍

- $h = 0, k = 1; \quad a = 5, b = 3; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

ដូចនេះ គេបាន

- ផ្ទៃក្រឡា $I(h, k)$ គឺ $I(0, 1)$
- កំពូល $V_1(h, k - a); V_2(h, k + a) \Rightarrow V_1(0, -4); V_2(0, 6)$
- កំណុំ $F_1(h, k - c); F_2(h, k + c) \Rightarrow F_1(0, -3); F_2(0, 5)$

IV ក គណនា $\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$ គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{4 - x^2} = \pm\infty \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{4 - x^2} = \pm\infty \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = -1 \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតលរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតលរ
- ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតលរ
- ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = -1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ខ សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4 - x^2} \right)' = \frac{2x(4 - x^2) + 2x(x^2)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x}{(4 - x^2)^2}$$

ដោយ $(4 - x^2)^2 \geq 0 \quad \forall x \in D_f$ គេបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាតាមកាតយក $8x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$
- ត្រង់ $x = 0; f'(x) = 0$ ហើយប្លូសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នោះ f មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយគឺ $f(0) = 0$

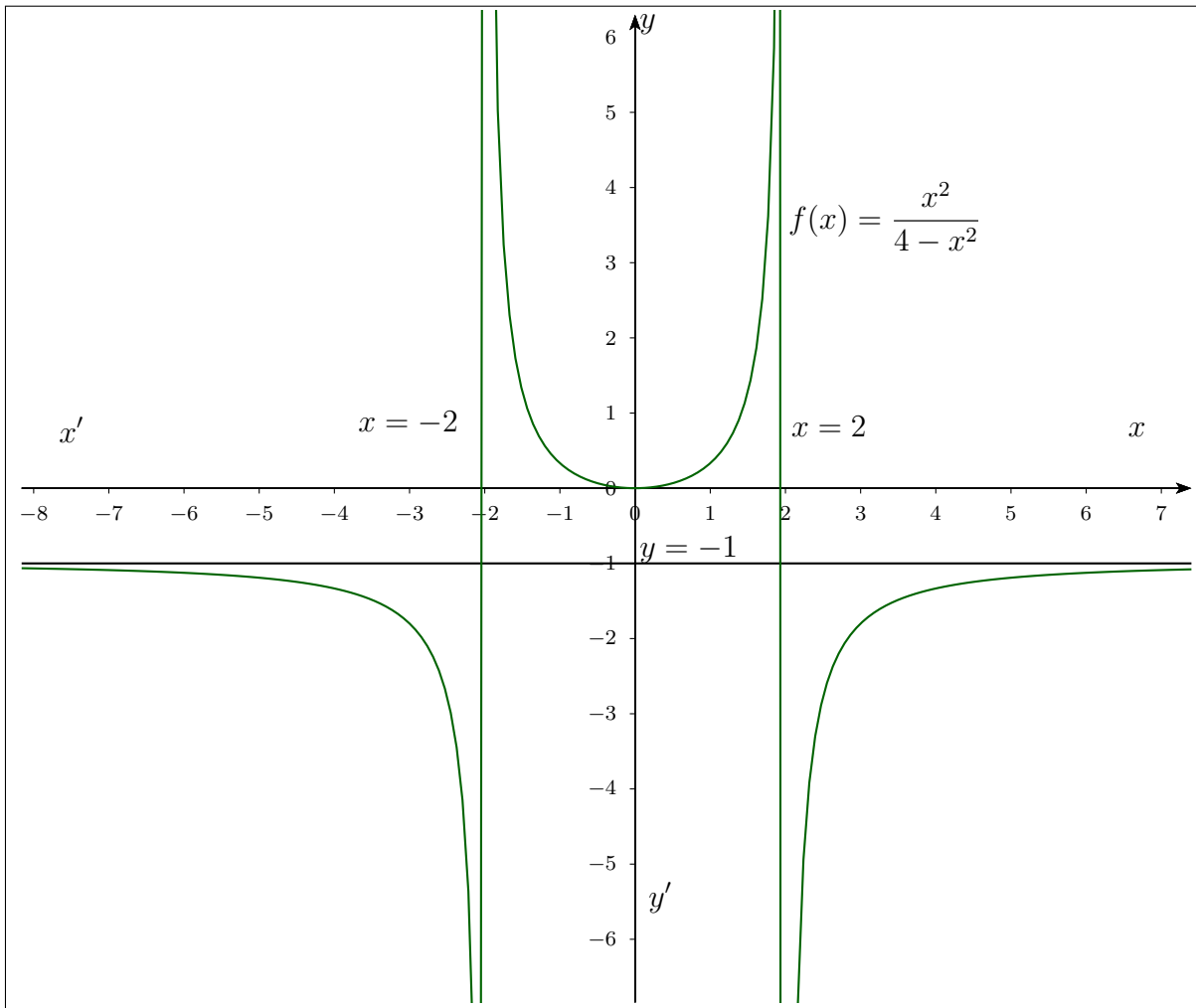
តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	-1

គ គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង្ខេប C នៃអនុគមន៍ f

$$\bullet f(-3) = \frac{(-3)^2}{4 - (-3)^2} = \frac{9}{-5} \quad \boxed{f(-3) = -\frac{9}{5}}$$

$$\bullet f(3) = \frac{3^2}{4 - 3^2} = \frac{9}{-5} \quad \boxed{f(3) = -\frac{9}{5}}$$



វិញ្ញាសាទី ៤

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៤៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន:

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:

ក $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$

ខ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$

II (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងក្របខណ្ឌមួយគេមានប៊ូលក្រហម៤ ប៊ូលស្ករ៣ និងប៊ូលខៀវ១។ គេចាប់យកប៊ូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីក្នុងដោយចៃដន្យ។

ក រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

ខ រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»

គ រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

III (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \frac{1}{1 + e^x} + \frac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f ។

១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ។

ក ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$ ។

ខ ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

២ ក រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។

ខ អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f' ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។

គ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។

IV (១៥ពិន្ទុ)

ក គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx$ ។

ខ បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x ; x \neq 1$ គេបាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$ ។

រួចទាញរក $I = \int_2^3 \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

I គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot x \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x \cdot x^2 \left(\frac{5}{x} + 2\right) \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)} = \frac{(2 - 0)(0 - 1)}{(0 + 2)(0 - 1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)} = 1$

ខ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - (x+3)}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} \\ &= \frac{-1}{(1+1)(2 + \sqrt{1+3})} = \frac{-1}{2(4)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = -\frac{1}{8}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0$

II ក កេហ្វេចប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាង A : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(4, 2) \times C(3, 1) + C(4, 2) \times C(1, 1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} + \frac{4!}{2!2!} \times \frac{1!}{0!1!} \\ &= 6 \times 3 + 6 = 24 \end{aligned}$$

$$n(S) = C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!3 \times 2 \times 1} = 56$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ ដូចនេះ: $P(A) = \frac{3}{7}$

ខ កេហ្វេចប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី» តាង B : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(4, 3) = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

$$n(S) = 56$$

គេបាន $P(B) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$ ដូចនេះ: $P(B) = \frac{1}{14}$

គ) រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

តាង C : «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

$$\text{ដោយ } n(C) = C(4, 2) \times C(3, 1) + C(4, 2) \times C(1, 1) + C(4, 3) = 24 + 4 = 28$$

$$n(S) = 56$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{1}{2}}$$

III ១ក) $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$

$$\text{ដោយ } (2e^x - 1)(e^x - 2) = 2e^x \cdot e^x - 4e^x - e^x + 2 = 2e^{2x} - 5e^x + 2 = g(x)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)}$$

ខ) ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ $g(x)$

$$\text{បើ } g(x) = 0 \Leftrightarrow (2e^x - 1)(e^x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2e^x - 1 = 0 & \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x = -\ln 2 \\ e^x - 2 = 0 & \Leftrightarrow e^x = 2 & \Leftrightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$

តារាងសញ្ញា $g(x)$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+

$$g(x) > 0 \text{ ពេល } x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty); \quad g(x) < 0 \text{ ពេល } x \in (-\ln 2, \ln 2)$$

២ក) រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right) = 0 + \frac{2}{9}(+\infty) \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right) = \frac{1}{1+0} + \frac{2}{9}(-\infty) = -\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

ខ) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right)' = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} = \frac{-9e^x + 2(1+e^x)^2}{9(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-9e^x + 2 + 4e^x + 2e^{2x}}{9(1+e^x)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{9(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{9(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } 9(1+e^x)^2 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{គេបាន } f'(x) \text{ មានសញ្ញាតាម } g(x)$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ: } f'(x) \text{ និង } g(x) \text{ មានសញ្ញាដូចគ្នា}}$$

គ) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា គេបាន តារាងសញ្ញា $f'(x)$ គឺ

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

- ត្រង់ $x = -\ln 2$; $f'(x) = 0$ ហើយបួសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន f មានអតិបរមាជ្រៀបមួយគឺ

$$f(-\ln 2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{2}{3} - \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{6 - \ln 4}{9}$$

- ត្រង់ $x = \ln 2$; $f'(x) = 0$ ហើយបួសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយគឺ

$$f(\ln 2) = \frac{1}{1 + 2} + \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{3 + \ln 4}{9}$$

+ គេបាន តារាងអថេរភាពនៃ f គឺ

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{6 - \ln 4}{9}$	$\frac{3 + \ln 4}{9}$	$+\infty$

តាមតារាងអថេរភាពគេបាន

- អនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ: $x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$
- អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ: $x \in (-\ln 2, \ln 2)$

IV គ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x \right]_1^5 = \frac{5^3}{3} + (5)^2 - 3(5) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 - 3(1) \right) \\ &= \frac{125}{3} + 25 - 15 - \frac{1}{3} - 1 + 3 \\ &= \frac{124}{3} + 12 = \frac{124 + 36}{3} = \frac{160}{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $I = \frac{160}{3}$ ។

ខ) បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $x \neq 1$ គេបាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$

$$\text{ដោយ } 2x - 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{(2x - 1)(x - 1) + 1}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 + 1}{x - 1} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

ដូចនេះ: $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$

+ ទាញរក I

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} dx = \int_2^3 \left(2x - 1 + \frac{1}{x - 1} \right) dx = \left[\frac{2x^2}{2} - x + \ln |x - 1| \right]_2^3 \\ &= 3^2 - 3 + \ln 2 - (2^2 - 2 + \ln 1) \\ &= 9 - 3 + \ln 2 - 4 + 2 - 0 = 4 + \ln 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = 4 + \ln 2$

វិញ្ញាសាទី ៥

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៥៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$

ខ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2)$

II (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហម៤ និងត្រីពណ៌ស៣។ គេចាប់ត្រី២មកដាក់ក្នុង អាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ»

ខ «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ»

គ «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌»

III (២៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ក រកដែនកំណត់ $f(x)$ ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$ ។

គ សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

IV (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក $I = \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx$

ខ $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$ ។ រួចគណនា $J = \int_2^3 f(x) dx$ ។

គ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x \ln x$ ។ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ នៅលើចន្លោះ $[1, e]$ ។ ទាញរកអាំងតេក្រាល $K = \int_1^e \ln x dx$ ។

V (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(4, 0)$ និង $(-4, 0)$ និង មានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $(3, 0)$ រួចសង់អេលីបនេះ។

សម្រាយបញ្ជាក់

I គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{-3+3}{-3+1} = \frac{0}{-2} = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3} = 0$ ។

ខ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-3} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \frac{1}{-3}(1)(0) = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x} = 0$ ។

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{x} \times \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x - (2-x)}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \frac{2}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2-0}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ឃ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = 2(+\infty) + 2(+\infty) - 2 = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = +\infty$ ។

II រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ» តាង A : «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ»

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} = 6$

$$n(S) = C(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{2}{7}$ ។

ខ «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ» តាង B : «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$

$$n(S) = 21$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ ដូចនេះ $P(B) = \frac{1}{7}$ ។

គ «ត្រឹមួយក្នុងមួយពណ៌» តាង C : «ត្រឹមួយក្នុងមួយពណ៌»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(C) = C(4, 1) \times C(3, 1) = \frac{4 \times 3!}{3!1!} \times \frac{3 \times 2!}{2!1!}$$

$$= 4 \times 3 = 12$$

$$n(S) = 21$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \quad \boxed{\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{4}{7} \text{ ។}}$$

III ក រកដែនកំណត់ $f(x)$; $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x}$

$$f(x) \text{ មានន័យលុះត្រាតែ } 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ } f \text{ គឺ } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \text{ ។}}$$

ខ បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } -x - 1 + \frac{3}{x-1} &= \frac{(-x-1)(x-1) + 3}{x-1} = \frac{-x^2 + x - x + 1 + 3}{-(1-x)} \\ &= \frac{-(x^2 - 4)}{-(1-x)} = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x} = f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1} \text{ ។}}$$

គ សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(x+2)(x-2)}{1-x} \right)' = \left(\frac{x^2-4}{1-x} \right)' = \frac{(x^2-4)'(1-x) - (1-x)'(x^2-4)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x(1-x) + (x^2-4)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2 - 4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-4) = 4 - 16 = -12 < 0$$

គេបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	

• លីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = \mp\infty$$

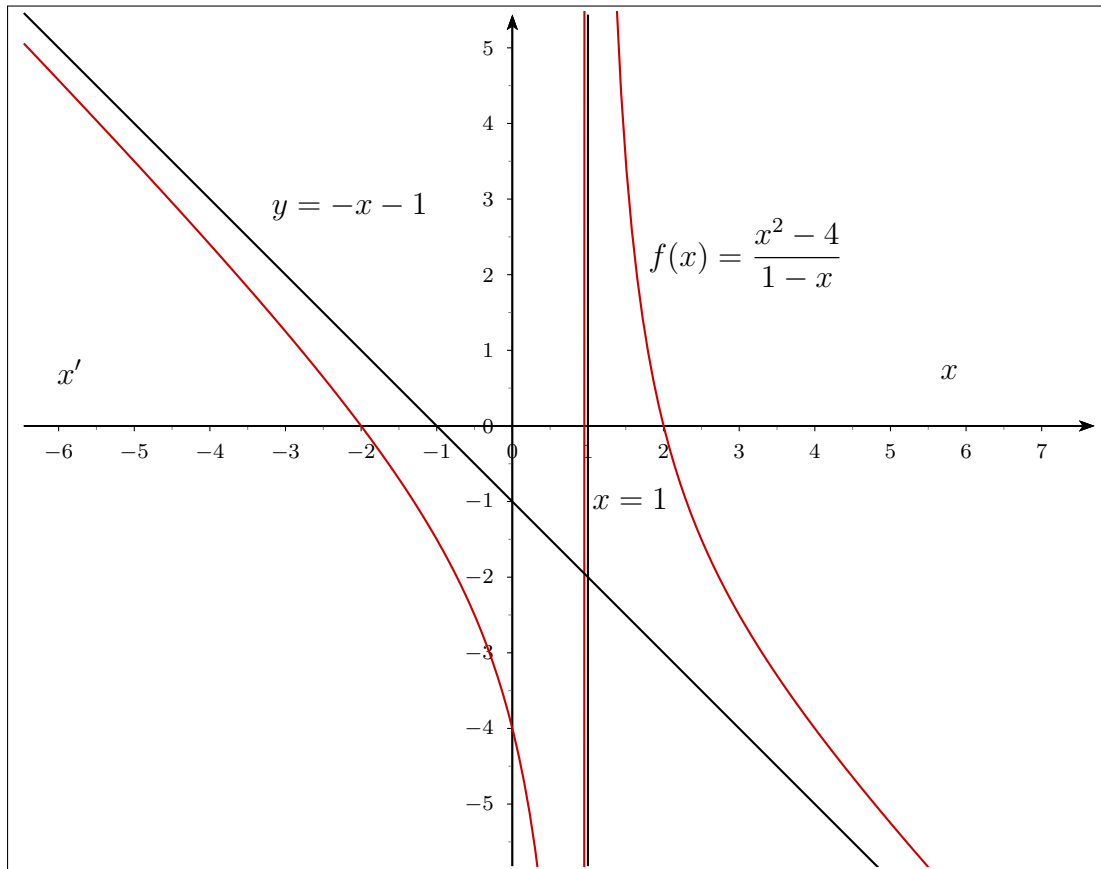
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{1-x} = \pm\infty$$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$ 		$+\infty$ 

- សង់ក្រាប

- ក្រាប(c) កាត់អ័ក្សអដេនេ ពេល $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{(0+2)(0-2)}{1-0} = -4$
- ក្រាប (c) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ពេល $y = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)} \Leftrightarrow x = -2; x = 2$



IV គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍៖

$$\begin{aligned}
 \text{ក) } I &= \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx = \left[2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 \\
 &= 2\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 3 - \left(2\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 1 \right) \\
 &= 18 - \frac{27}{2} + 3 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 = 20 - 12 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \frac{22}{3} \text{ ។}$$

$$\text{ខ) } f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4} ; \text{ បង្ហាញថា } f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$$

$$\text{ដោយ } \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} = \frac{-(x-4) + 3(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-x+4+3x-3}{x^2-5x+4} = \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = f(x)$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \text{ ។}$$

+ គណនា J

$$\begin{aligned} J &= \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \right) dx \\ &= \left[-\ln|x-1| + 3\ln|x-4| \right]_2^3 \\ &= -\ln|3-1| + 3\ln|3-4| - (-\ln|2-1| + 3\ln|2-4|) \\ &= -\ln 2 + 3\ln 1 + \ln 1 - 3\ln 2 = -4\ln 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $J = -4\ln 2$ ។

គ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x \ln x$ គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) = \ln x + 1$$

ដូចនេះ $f'(x) = \ln x + 1$ ។

+ ទាញរកអាំងតេក្រាល $K = \int_1^e \ln x dx$

$$\begin{aligned} K &= \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (\ln x + 1 - 1) dx = \int_1^e (\ln x + 1) dx - \int_1^e 1 dx \\ &= \int_1^e (x \ln x)' dx - [x]_1^e \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = e \ln e - \ln 1 - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $K = 1$ ។

V រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយ កំពូល កំណុំមានអរដោនេថេរ គេបាន អ័ក្សទទឹងស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នោះ សមីការស្តង់ដារ នៃអេលីបគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$

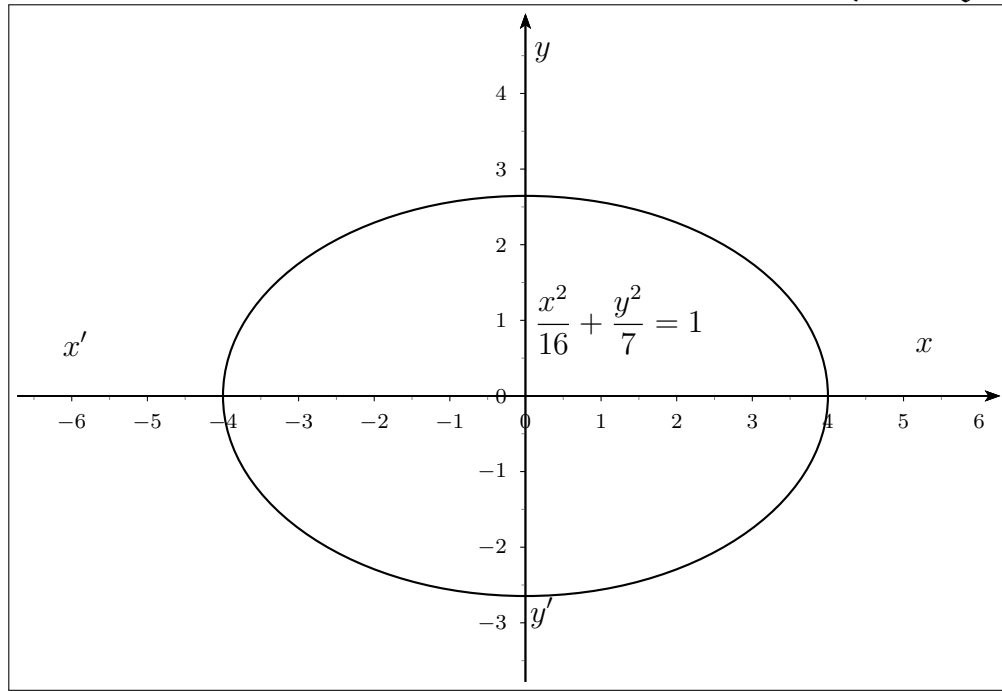
- កំពូល $V_1(h+a, k)$ គឺ $(4, 0) \Rightarrow h+a=4; \quad k=0$
- កំពូល $V_2(h-a, k)$ គឺ $(-4, 0) \Rightarrow h-a=-4; \quad k=0$

$$\begin{cases} h+a=4 \\ h-a=-4 \end{cases} \quad 2h = 0 \Rightarrow h=0; \quad a=4$$

- កំណុំ $F(h+c, 0)$ គឺ $(3, 0) \Rightarrow h+c=3 \Rightarrow c=3$
- $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

ដូចនេះ អេលីបមានសមីការ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ ។

- សង់អេលីប ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ $I(0, 0)$



វិញ្ញាសាទី ៦

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៦៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

- I** (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌សចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់យកឃ្លី២គ្រាប់ក្នុងពេល តែមួយចេញពី ថង់ថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ»

ខ «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌»

- II** (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

ខ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

- III** (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក គណនា $I = \int_2^3 (3x^2 + 3x - 1) dx$

ខ $f(x) = \frac{1 + 2x}{(x^2 - 4x) + (4 - x)}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{4 - x}$ ។ គណនា $J = \int_2^3 f(x) dx$ ។

- IV** (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $o(0, 0)$ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើ អ័ក្សអដ្ឋកោណ។

ក រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(2, 6)$ ។

ខ រកតម្លៃនៃ x បើ $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ។ ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

- V** (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1}$ និង គេតាងដោយ (C) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$ ។

គ បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ឃ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

សម្រាយបញ្ជាក់

I រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ» តាង A : «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(A) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \quad \boxed{\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{5}{14} \text{ ។}}$$

ខ «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌» តាង B : «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \text{ ដោយ } n(S) = 28$$

$$n(B) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3 \times 2!}{2!1!} \times \frac{5 \times 4!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{28} \quad \boxed{\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{15}{28} \text{ ។}}$$

II គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2 \quad \boxed{\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2 \text{ ។}}$$

ខ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \times \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2 \text{ ។}}$$

III គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} \text{ក } I &= \int_2^3 (3x^2 + 3x - 1) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - x \right]_2^3 \\ &= 3^3 + 3\frac{3^2}{2} - 3 - \left(2^3 + 3\frac{2^2}{2} - 2 \right) \\ &= 27 + \frac{27}{2} - 3 - 8 - \frac{12}{2} + 2 = 18 + \frac{15}{2} = \frac{36+15}{2} = \frac{51}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } I = \frac{51}{2} \text{ ។}}$$

ខ $f(x) = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}$

• បង្ហាញថា $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}$

ដោយ $\frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} = \frac{4-x-3(1-x)}{(1-x)(4-x)} = \frac{4-x-3+3x}{4-x-4x+x^2} = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}$
 $= f(x)$ ពិត

ដូចនេះ $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}$ ។

• គណនា $J = \int_2^3 f(x)dx$

$J = \int_2^3 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} \right) dx = \left[-\ln|1-x| + 3\ln|4-x| \right]_2^3$
 $= -\ln|1-3| + 3\ln|4-3| - (-\ln|1-2| + 3\ln|4-2|)$
 $= -\ln 2 + 3\ln 1 + \ln 1 - 3\ln 2 = -4\ln 2$

ដូចនេះ $J = -4\ln 2$ ។

IV ក) រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយ កំពូល $O(0, 0)$ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ គេបាន អ័ក្សផ្ទះជាអ័ក្សឈរ

គេបាន សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

• កំពូល (h, k) គឺ កំពូល $O(0, 0) \Rightarrow h=0, k=0$

• ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(2, 6)$ គេបាន $(2-0)^2 = 4p(6-0) \Leftrightarrow 4 = 24p \Rightarrow p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2 = \frac{4}{6}y \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$

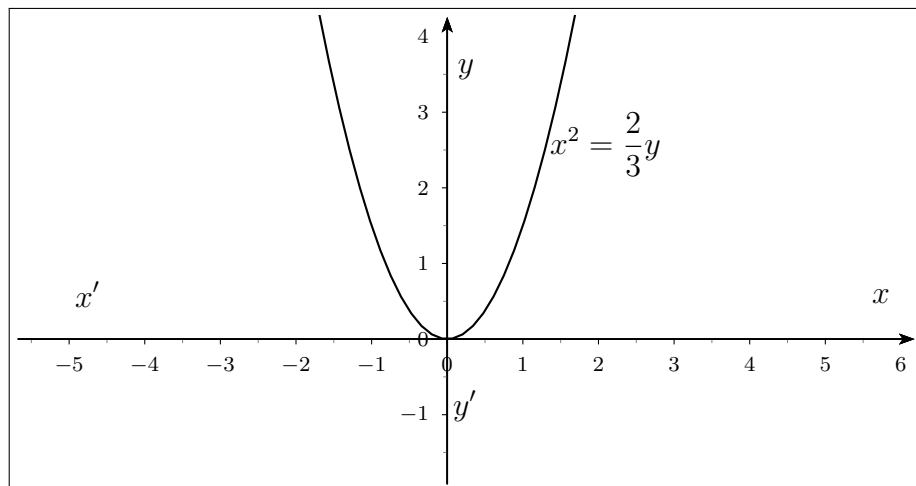
ដូចនេះ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $x^2 = \frac{2}{3}y$ ។

ខ រកតម្លៃនៃ x_1

បើ $B(x_1, \frac{3}{2})$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល គេបាន $x_1^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$

ដូចនេះ $x_1 = \pm 1$ ។

+ សង់ប៉ារ៉ាបូល



V ក) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1}$; $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$

ដោយ $x - 2 - \frac{1}{x + 1} = \frac{(x - 2)(x + 1) - 1}{x + 1} = \frac{x^2 + x - 2x - 2 - 1}{x + 1} = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1} = f(x)$

ដូចនេះ $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$ ។

គ បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 2 - \frac{1}{x + 1} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x + 1} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

ឃ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - x - 3}{x + 1} \right)' = \frac{(x^2 - x - 3)'(x + 1) - (x + 1)'(x^2 - x - 3)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 1)(x + 1) - (x^2 - x - 3)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}; \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)2 = -4 < 0$$

$f'(x)$ មានសញ្ញាតាមមេគុណ a

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

• តារាងអថេរភាពនៃ f

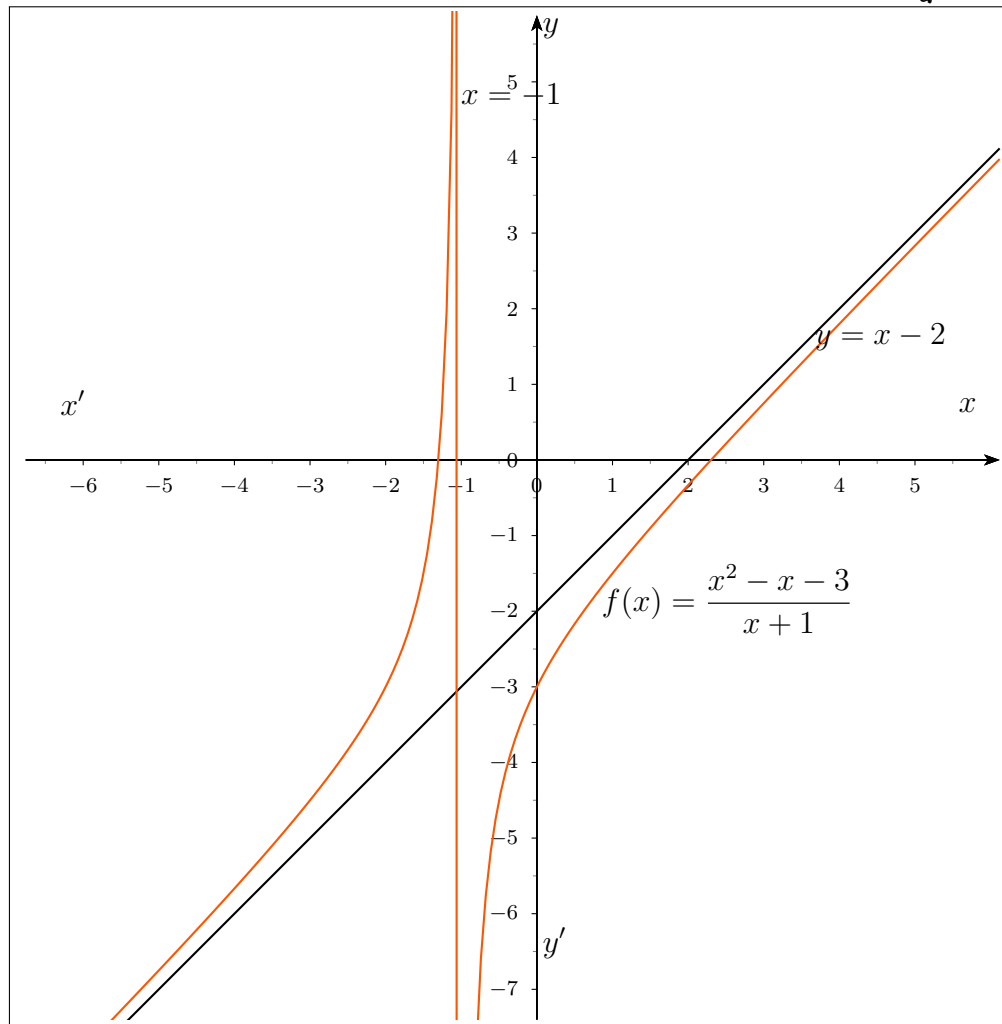
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

• សង់ក្រាប

$$- C \cap (y'oy) \text{ គឺ } x = 0; \Rightarrow y = \frac{0^2 - 0 - 3}{0 + 1} = -3$$

$$- C \cap (x'ox) \text{ គឺ } y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; x = 2.3, x = -1.3$$



វិញ្ញាសាទី ៧

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៧៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x)$

ខ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x + 2} - 2}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$

II (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល

ក $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx$

ខ $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$

គ $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x + e} - 1 \right) dx$

III (១០ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់ឃ្លី២ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក : A “ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម”

ខ : B “ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ”

គ : C “ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌”

IV (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយស្ថិតត្រង់ចំណុច $F_1(-2, 0)$ និង កំពូលពីរស្ថិតត្រង់ ចំណុច $A(-3, 0)$ និង $B(3, 0)$ ។

V (៣០ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ ។

១ សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$, -2 , 2 និង $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនិងឈរនៃក្រាបតាង f ។

២ សិក្សាអថេរភាព និង សង់តាងអថេរភាពនៃ f ។

៣ សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ក្រាបតាង f ។

I គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x) = 3(1)^3 - 4(1) = 3 - 4 = -1$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x) = -1$ ។

ខ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)}{(\sqrt{x+2} - 2)} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2) \\ &= (2^2 + 2 \cdot 2 + 4)(\sqrt{2+2} + 2) = 48 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = 48$ ។

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$ (មានរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = +\infty(0 - 1) = -\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) = -\infty$ ។

II គណនាអាំងតេក្រាល

ក $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx = \left[x - \frac{3x^3}{3} \right]_1^2 = 2 - 2^3 - (1 - 1^3) = 2 - 8 = -6$ ដូចនេះ $I = -6$ ។

ខ $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^3 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ $J = \frac{1}{6}$

គ $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+e} - 1 \right) dx = [\ln|x+e| - x]_0^1 = \ln|1+e| - 1 - (\ln|0+e| - 0)$

$$= \ln(1+e) - 1 - \ln e$$

$$= \ln(1+e) - 1 - 1 = \ln(1+e) - 2$$

ដូចនេះ $K = \ln(1+e) - 2$ ។

III ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក : “ឃើញទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម”

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1!2!} = 3$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{3}{28}$ ។

ខ : “ឃើញទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ”

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 28$;

$$n(B) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ ដូចនេះ $P(B) = \frac{5}{14}$ ។

គ : “ឃើញមួយក្នុងមួយពណ៌”

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 28$

$$n(C) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{28}$ ដូចនេះ $P(C) = \frac{15}{28}$ ។

IV រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយ អដោនេនៃកំណុំ និងកំពូលរបស់អេលីប គឺ ថេរ គេបានសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- កំពូល $A(-3, 0)$ គឺ $V_1(h-a, k)$ គេបាន $h-a = -3$; $k = 0$
- កំពូល $B(3, 0)$ គឺ $V_2(h+a, k)$ គេបាន $h+a = 3$; $k = 0$

គេបាន

$$\begin{cases} h-a = -3 \\ h+a = 3 \end{cases}$$

$$\frac{2h = 0}{2h = 0} \Rightarrow h = 0; a = 3$$

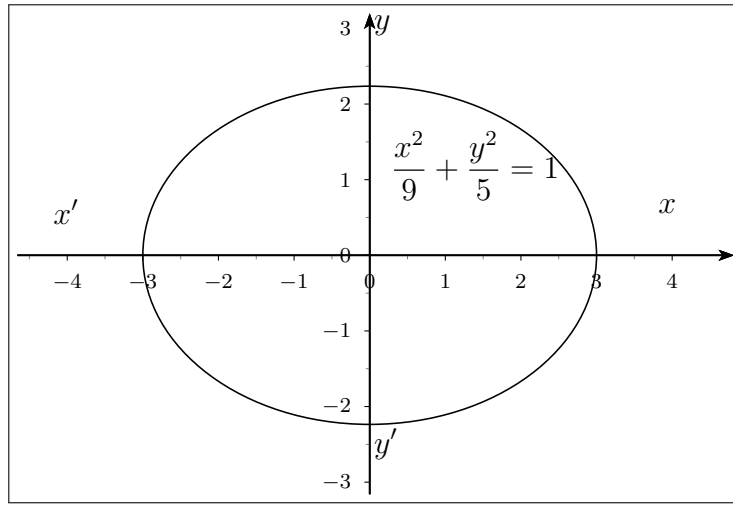
- កំណុំ $F_1(-2, 0)$ គឺ $F(h-c, k)$ គេបាន $h-c = -2 \Rightarrow c = 2$
- ដោយ $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

គេបាន សមីការអេលីប គឺ $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{5} = 1$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារអេលីប គឺ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ។

សង់អេលីប

ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ $I(0, 0)$



V ១ សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$, -2 , 2 និង $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1 - 0} = 2 \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1 - 0} = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

+ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = -2$ និង $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

២ សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2}{x^2 - 4} \right)' = \frac{(2x^2)'(x^2 - 4) - (x^2 - 4)'(2x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x(2x^2)}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

• តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-

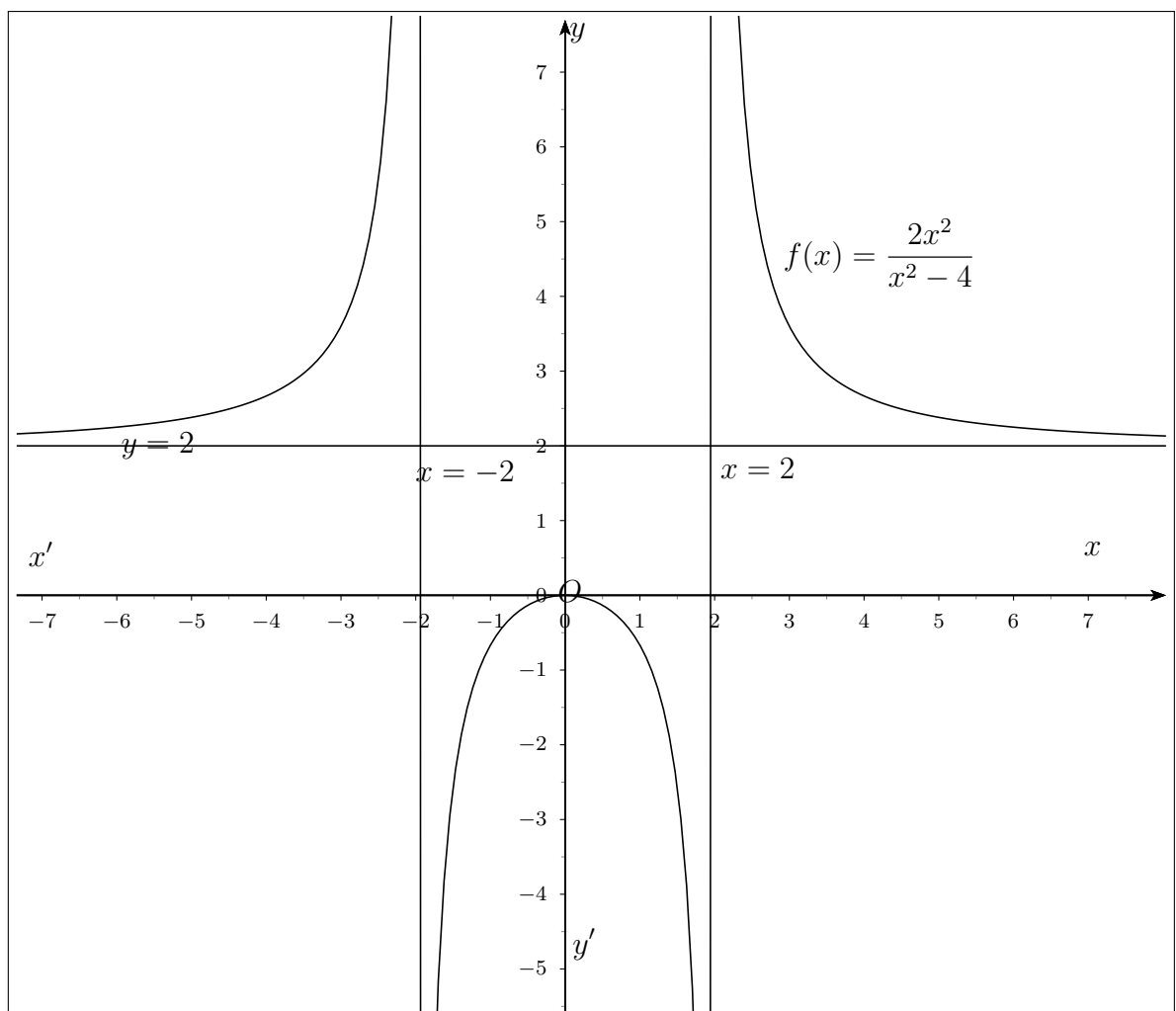
- ត្រង់ $x = 0$; $f'(x) = 0$ ហើយប្លុកសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

គេបាន f មានអតិបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(0) = \frac{2(0)^2}{0^2 - 4} = 0$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$		

៣ សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ក្រាបតាង f



វិញ្ញាសាទី ៨

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៨៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន:

I (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

ខ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x + 6} - 3}$

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

II (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមប្រព័ន្ធគីស្រាវប្រមាណ និងប្រព័ន្ធគីស្រាវប្រមាណ ៣ និងប្រព័ន្ធគីស្រាវប្រមាណ ៣ ក្នុងពេលតែមួយចេញពីចំណុចដើមចំណុច។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក : A “ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ស”

ខ : B “ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម”

គ : C “មានប៊ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរពណ៌ស”

III (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$

ខ $J = \int_0^1 (2e^x - 1) dx$

គ $K = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ។

ក បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និង កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។

ខ សង់អេលីបនេះ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ ។ យើងតាង C ជាក្រាប របស់វាលើ

តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

១ សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$ ។

២ សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣ ក រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ ។

ខ គេតាង d ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ។ បង្ហាញថា d ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

គ សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d ។

សម្រាយបញ្ជាក់

I គណនាលីមីត៖

ក $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = +\infty$ ។

ខ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 3^3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x+6) - 9}$$

$$= (3^2 + 3 \cdot 3 + 9)(\sqrt{3+6} + 3) = 27 \times 6 = 162$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3} = 162$ ។

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$ ។

II ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក : “ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ស”

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(3, 3) = \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$n(S) = C(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{84}$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{1}{84}$ ។

ខ : “ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម”

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 84$

$n(B) = C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 20$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$ ដូចនេះ $P(B) = \frac{5}{21}$ ។

គ : “មានប៊ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស”

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 84$

$n(C) = C(6, 1) \times C(3, 2) = \frac{6!}{(6-1)!1!} \times \frac{3!}{(3-2)!2!}$

$= \frac{6 \times 5!}{5! \times 1!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{1! \times 2 \times 1} = 18$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$ ដូចនេះ $P(C) = \frac{3}{14}$ ។

III គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} \text{ក)} \quad I &= \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 \\ &= 3^3 + 3^2 + 3 - (1^3 + 1^2 + 1) = 27 + 9 + 3 - 3 = 36 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = 36$ ។

$$\begin{aligned} \text{ខ)} \quad J &= \int_0^1 (2e^x - 1) dx = [2e^x - x]_0^1 = 2e^1 - 1 - (2e^0 - 0) \\ &= 2e - 1 - 2 = 2e - 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $J = 2e - 3$ ។

$$\begin{aligned} \text{គ)} \quad K &= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 (x + x^{-2}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{1} \right) = 2 - \frac{1}{2} + 1 = 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $K = 2$

IV ក) បង្ហាញថាសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ជាសមីការអេលីប

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } 9x^2 + 25y^2 &= 225 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីប} \end{aligned}$$

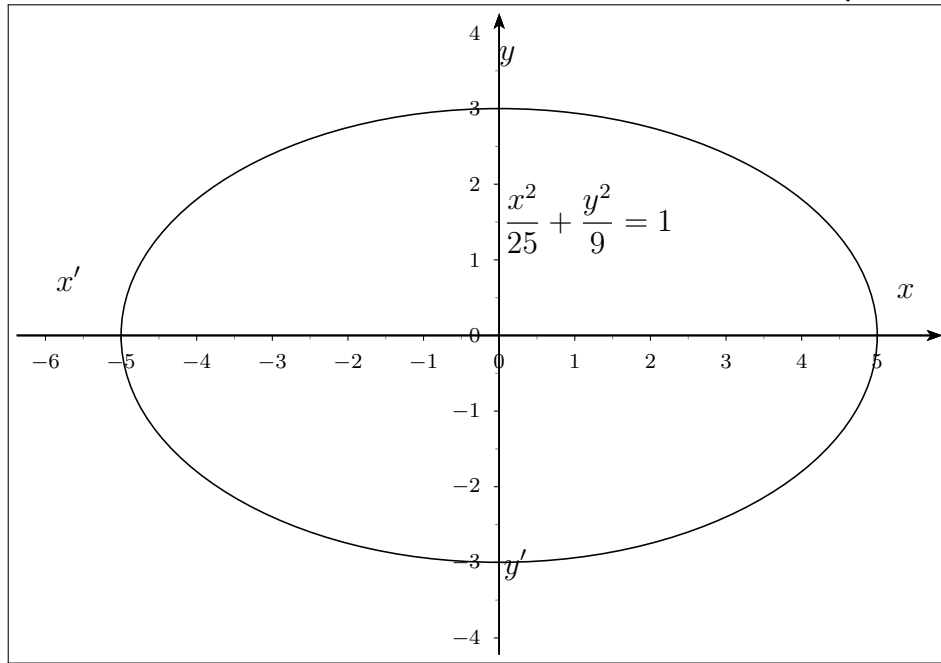
ដូចនេះ សមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ជាសមីការអេលីប។

+ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

$$\text{ដោយសមីការអេលីបមានរាង } \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \text{ គេបាន } h = 0, k = 0, \quad a = 5, b = 3$$

- ប្រវែងអ័ក្សតូច $= 2b = 2(3) = 6$
- ប្រវែងអ័ក្សធំ $= 2a = 2(5) = 10$
- កំពូល $V_1(h - a, k) \Rightarrow V_1(-5, 0)$
- កំពូល $V_2(h + a, k) \Rightarrow V_2(5, 0)$

ខ សង់អេលីប



V ១ សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = -\infty \frac{(1 - 0 - 0)}{1 - 0} = -\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ។

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \pm\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ ។

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = +\infty \frac{(1 - 0 - 0)}{1 - 0} = +\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ។

២ សិក្សាអថេរភាព និងសង្គតភាពអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - x - 1)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - x - 1)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 2) - (x^2 - x - 1)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{មានឫស } x_1 = 1; \quad x_2 = 3$$

- តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

- បើ $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$
- បើ $x \in (1, 2) \cup (2, 3) \Rightarrow f'(x) < 0$
- បរមាធៀប
 - ត្រង់ $x = 1$; $f'(x) = 0$ ហើយប្លុកសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(1) = 1$
 - ត្រង់ $x = 3$; $f'(x) = 0$ ហើយប្លុកសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(3) = 5$
- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$

ព រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1) + 1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow x + 1 + \frac{1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}
 \end{aligned}$$

ដោយផ្អែកលើមេគុណ យើងបាន $a = 1; b = 1; c = 1$

ខ បង្ហាញថា $d: y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + 1 + \frac{1}{x-2} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ។

+ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

$$C: y = x + 1 + \frac{1}{x-2}; \quad d: y = x + 1$$

$$\Rightarrow y_c - y_d = x + 1 + \frac{1}{x-2} - (x + 1) = \frac{1}{x-2}$$

$$y_c - y_d > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

ដូចនេះ (c) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ពេល $x > 2$ ។

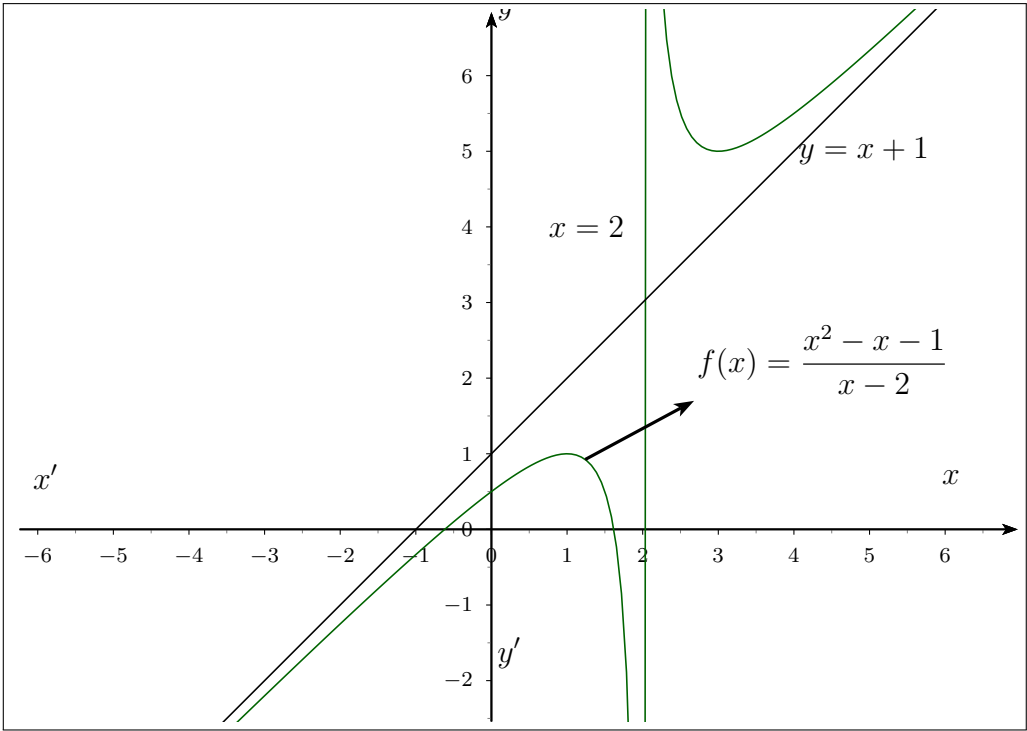
$$y_c - y_d < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

ដូចនេះ (c) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ពេល $x < 2$ ។

គ សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ $d(C) \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \text{ មានឫស } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

គេបាន $x = 1.62 \quad , \quad x = -0.62$



វិញ្ញាសាទី ៩

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាជាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី៩៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន:

I (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ខ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x)$

II (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 15 នាក់ ក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស 9 នាក់ និងសិស្សស្រី 6 នាក់។ គេជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់ ដោយចៃដន្យជាតំណាងយកទៅសម្ភាសន៍។

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក "A" ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សស្រី "។

ខ "B" ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស "។

គ "C" ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ មាន 2 នាក់ជាសិស្សស្រី "។

III (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

$$I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 3) dx \quad J = \int_0^1 (e^{2x} - e^x + 1) dx \quad K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយដែលមានកំពូលជាចំណុច $O(0, 0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ក រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះបើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ ។

ខ រកកូអរដោនេរបស់កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$ ។ យើងតាងដោយ (C) ជាក្រាប របស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

១ រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

២ សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ទាញយកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅ នឹងក្រាប (C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

៣ **ក** ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x \in D$: ដេរីវេ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$ ។

ខ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

I គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍៖

ក $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1} = \frac{3^4 + 6(3) + 1}{3^2 + 1} = \frac{100}{10} = 10$ ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1} = 10$ ។

ខ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 + \frac{1}{x})^2} = 0$ ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$ ។

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1) = (+\infty)^2(1) = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x) = +\infty$ ។

II រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក “ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សស្រី”

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4$
 $n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12! \times 3 \times 2 \times 1}$
 $= 5 \times 7 \times 13$

យើងបាន $P(A) = \frac{5 \times 4}{5 \times 7 \times 13} = \frac{4}{91} = 0.04$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{4}{91} = 0.04$ ។

ខ “ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស”

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7$
 $n(S) = 5 \times 7 \times 13$

យើងបាន $P(B) = \frac{3 \times 4 \times 7}{5 \times 7 \times 13} = \frac{12}{65} = 0.18$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{12}{65} = 0.18$ ។

គ “ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ មាន 2 នាក់ជាសិស្សស្រី”

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(C) = C(6, 2) \times C(9, 1) = \frac{6!}{(4)!2!} \times \frac{9!}{8!1!} = 3 \times 5 \times 9$
 $n(S) = 5 \times 7 \times 13$

យើងបាន $P(C) = \frac{3 \times 5 \times 9}{5 \times 7 \times 13} = \frac{27}{91} = 0.29$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{27}{91} = 0.29$ ។

III គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 (3x^2 - 2x + 3) dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_1^2 \\ &= 2^3 - 2^2 + 3(2) - (1^3 - 1^2 + 3(1)) \\ &= 8 - 4 + 6 - 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = 7$ ។

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int_0^1 \left(\frac{(2x)'e^{2x}}{2} - e^x + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{2(1)}}{2} - e^1 + 1 - \left(\frac{e^{2(0)}}{2} - e^0 + 0 \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - e + 1 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} = \frac{e^2 - 2e + 3}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $J = \frac{e^2 - 2e + 3}{2}$ ។

$$\begin{aligned} K &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{(x+3)'}{x+3} + x^{-2} \right) dx = \left[\ln|x+3| + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 \\ &= \left[\ln|x+3| - \frac{1}{x} \right]_1^2 \\ &= \ln 5 - \frac{1}{2} - \left(\ln 4 - \frac{1}{1} \right) \\ &= \ln 5 - \ln 4 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \ln \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $K = \frac{1}{2} + \ln \frac{5}{4}$ ។

IV រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយ ប៉ារ៉ាបូល មានកំពូល $(0, 0) \Rightarrow h = 0, k = 0$

ហើយ មានកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស (មានន័យថា $F(h + p, 0)$)

យើងបានសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y - k)^2 = 4p(x - h) \Rightarrow y^2 = 4px$

តែ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{3}{2}, -3\right) \Rightarrow (-3)^2 = 4p\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow 9 = 6p$$

$$\Rightarrow p = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $y^2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)x = 6x$ ។

ខ រកកូអរដោនេកំណុំ

កូអរដោនេកំណុំគឺ $F(h+p, 0) \Rightarrow F\left(0 + \frac{3}{2}, 0\right)$

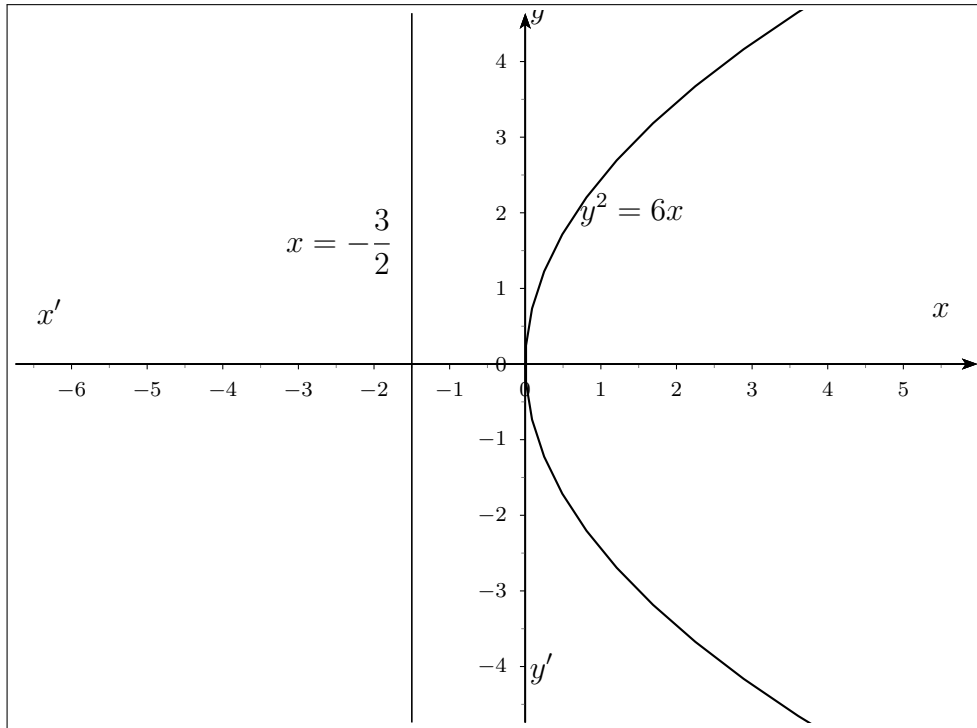
ដូចនេះ $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ។

+ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ

$x = h - p \Rightarrow x = 0 - \frac{3}{2}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ $x = -\frac{3}{2}$

+ សង់ប៉ារ៉ាបូល



V ១ រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$ កំណត់ ពេល $x^2 - 5x + 7 \neq 0$

ចំពោះ $x^2 - 5x + 7 = 0$

មាន $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(7) = 25 - 28 = -3 < 0 \Rightarrow$ សមីការគ្មានឫស

យើងបាន $x^2 - 5x + 7 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $D = \mathbb{R}$ ។

២ សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ។

៣ ទាញយកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

៤ ក ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x \in D$; ដេរីវេ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \right)' = \frac{(4x - 7)(x^2 - 5x + 7) - (2x - 5)(2x^2 - 7x + 5)}{(x^2 - 5x + 7)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 18x - 24}{(x^2 - 5x + 7)^2} \\ &= \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $x \in D$; ដេរីវេ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$ ។

ខ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3(x^2 - 6x + 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow (-3x + 6)(x - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -3x + 6 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

+ តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	—	0	+	0	—

• $f'(x) > 0$ ពេល $x \in (2, 4) \Rightarrow$ អនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $x \in (2, 4)$

• $f'(x) < 0$ ពេល $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

$\Rightarrow$ អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

បមាញ់ប

• ត្រង់ $x = 2$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី— ទៅ+ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(2) = \frac{2(2)^2 - 7(2) + 5}{(2)^2 - 5(2) + 7} = -1$$

• ត្រង់ $x = 4$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី+ ទៅ— យើងបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(4) = \frac{2(4)^2 - 7(4) + 5}{(4)^2 - 5(4) + 7} = 3$$

+ តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	2	-1	3	2

គ) សង់ក្រាប(C) នៃអនុគមន៍ f

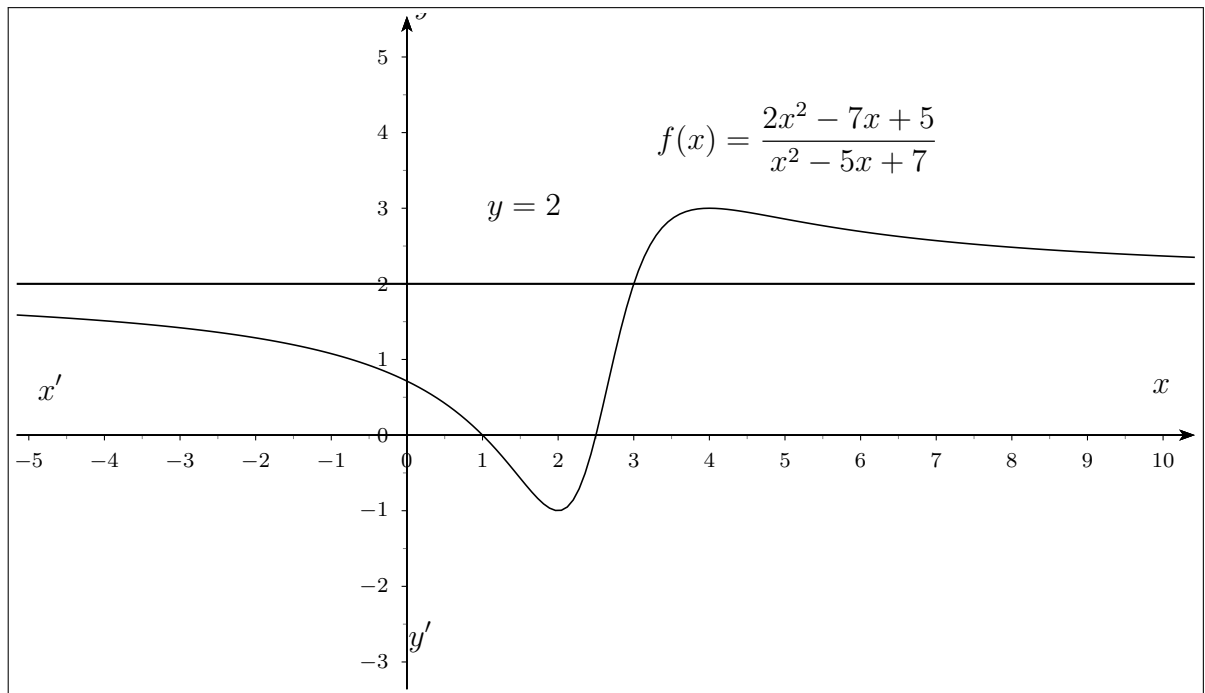
$$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$\text{មានរាង } a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{2(0)^2 - 7(0) + 5}{(0)^2 - 5(0) + 7} = \frac{5}{7}$$

$$(C) \cap (d) : y = 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \Rightarrow x = 3$$



វិញ្ញាសាទី ១០

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី ១០៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន:

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)}$

ខ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

II (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក $= \int_0^1 (2-3x+x^2)dx$

ខ $= \int_0^2 (2x - \frac{1}{x+e})dx$

គ $= \int_{-1}^0 \left[2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx$

III (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូល ១០ ដែលក្នុងនោះមូល ៥ មានពណ៌លឿង គេសរសេរលេខពី ១ ដល់ ៥ មូល ៣ មានពណ៌ក្រហម

ហើយ គេសរសេរលេខពី ១ ដល់ ៣ និង មូល ២ មានពណ៌ ស ហើយ គេសរសេរលេខពី ១ ដល់ ២ ។

គេចាប់យកមូលមួយពីក្នុងចំណោមចែងនេះ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក : មូលដែលចាប់បានមានពណ៌លឿង

ខ : មូលដែលចាប់បានមានលេខ ២

គ : មូលដែលចាប់បានមានលេខ ១ និង ពណ៌ក្រហម។

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ : $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ ។

ក បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។

រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ។

ខ សង់អេលីបនេះ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1}$ ។

យើងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍នេះ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x+1}$

ខ ចូររកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាប (C)

គ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

I គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)} = \frac{1}{4}$ ។

ខ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0+0}{2-0+0} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1} = \frac{1}{2}$ ។

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^0 - e^{-0}}{2e^0} = \frac{0-0}{2 \times 0} = 0$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = 0$ ។

ឃ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2-\sqrt{x}^2}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{1}{2}$ ។

II គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក $= \int_0^1 (2-3x+x^2)dx$

$$\int_0^1 (2-3x+x^2)dx = \left[2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$\left(2 \cdot 1 - \frac{3}{2}1^2 + \frac{1}{3}1^3 \right) - 0 = \frac{5}{6}$$

ដូចនេះ: $\int_0^1 (2-3x+x^2)dx = \frac{5}{6}$ ។

ខ $= \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{x+e} \right) dx$

$$\int_0^2 \left(2x - \frac{1}{x+e} \right) dx = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 \frac{1}{x+e} dx = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 \frac{(x+e)'}{x+e} dx$$

$$= [x^2]_0^2 - [\ln|x+e|]_0^2 = 4 - (\ln|2+e| - \ln e) = 5 - \ln(2+e)$$

ដូចនេះ: $\int_0^2 \left(2x - \frac{1}{x+e} \right) dx = 5 - \ln(2+e)$ ។

$$\begin{aligned} \text{គ} &= \int_{-1}^0 \left[2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx \\ \int_{-1}^0 \left[2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx &= \int_{-1}^0 2dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{-1}^0 \left[2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx \\ &= \int_{-1}^0 2dx - \int_{-1}^0 \frac{(x-1)'}{(x-1)^2} dx = [2x]_{-1}^0 - \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{-1}^0 = 2 - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \int_{-1}^0 \left[2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \frac{3}{2} \text{។}$$

III រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក : ចូលដែលចាប់បានមានពណ៌លឿង

យើងមាន:

- ករណីអាច $n(s) = 10$ ករណី
- ករណីស្រប $n(A) = 5$ ករណី $\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$$\text{ដូចនេះ: ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចូលដែលចាប់បានមានពណ៌លឿងគឺ } P(A) = \frac{1}{2} \text{។}$$

ខ : ចូលដែលចាប់បានមានលេខ ២

- ករណីស្រប $n(B) = 3$ ករណី $\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$

$$\text{ដូចនេះ: ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចូលដែលចាប់បានមានលេខ២គឺ } P(B) = \frac{3}{10} \text{។}$$

គ : ចូលដែលចាប់បានមានលេខ ១ និង ពណ៌ក្រហម

- ករណីស្រប $n(C) = 1$ ករណី $\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{10}$

$$\text{ដូចនេះ: ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចូលដែលចាប់បានមានលេខ ១ និង ពណ៌ក្រហមគឺ } P(C) = \frac{1}{10} \text{។}$$

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ : $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ ។

ក បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប, រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ:

- បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប:

យើងមានសមីការ : $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ យើងអាចសរសេរ

$$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 9y^2 = 225 \text{ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 225 យើងបាន:}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$\text{ដោយសមីការអេលីបមានរាង } \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ ជាសមីការទម្រង់ស្តង់ដារនៃសមីការអេលីបដែលមាន ផ្ចិត O និង អ័ក្សធំស្របអ័ក្សអ៊ែរដោនេ

$$\text{ដូចនេះ: សមីការ } 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0 \text{ ជាសមីការអេលីប។}$$

- រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ:

យើងមានសមីការ $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \text{ ធៀបនឹងសមីការ } \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

យើងបាន: $h = 0, k = 0, a = 5, b = 3$ នោះ $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} \Rightarrow c = 4$

★ ផ្ចិត $I = (h, k) \Rightarrow I = (0, 0)$

★ ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 5 = 10$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 10$ ។

★ ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 3 = 10$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 6$ ។

★ កូអរដោនេកំពូល $V = (0, k \pm a) \Rightarrow V = (0, 0 \pm 5)$

$V_1 = (0, 5)$ និង $V_2 = (0, -5)$

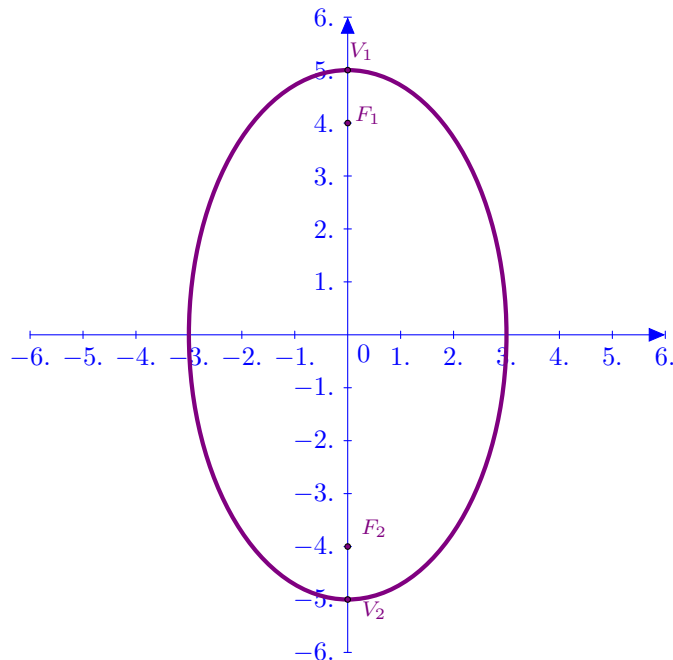
ដូចនេះ កូអរដោនេកំពូលគឺ $V_1 = (0, 5)$ និង $V_2 = (0, -5)$ ។

★ កូអរដោនេកំណុំ $F = (h, k \pm c) \Rightarrow F = (0, 0 \pm 4)$

$F_1 = (0, 4)$ និង $F_2 = (0, -4)$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំណុំគឺ $F_1 = (0, 4)$ និង $F_2 = (0, -4)$ ។

ខ សង់អេលីបនេះ



V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1}$ ។
យើងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍នេះ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x + 1}$

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1}$ យើងអាចសរសេរ៖

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x^2 + 2x + 1) - 3}{x + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x + 1)^2 - 3}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} - \frac{3}{x + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1} = x + 1 - \frac{3}{x + 1}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = x + 1 - \frac{3}{x+1}, \forall x \in \mathbb{D}$$

ខ ចូរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាប (C)

$$\forall x \in \mathbb{D} : f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = x + 1 - \frac{3}{x+1} \text{ យើងបាន:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}$$

$$\text{ដូចនេះ អាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) គឺ } x = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + 1 - \frac{3}{x+1} \right] \text{ ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow x + 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}$$

$$\text{ដូចនេះ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត (C) គឺ } y = x + 1$$

គ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

$$\text{ដោយ } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = x + 1 - \frac{3}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)' - \left(\frac{3}{x+1} \right)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - 3 \left[-\frac{1}{(x+1)^2} \right] = 1 + \frac{3}{(x+1)^2} \text{ ដោយ } (x+1)^2 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{D}$$

$$\text{ដូចនេះ } f \text{ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច (គ្មានអតិបរមា)។}$$

$$\bullet \text{តារាងសញ្ញា } f'(x)$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+		+

$$\bullet \text{តារាងអថេរភាពនៃ } f$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+		+
f(x)	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

$$\bullet \text{បើ } f \cap x'x \Leftrightarrow f(x) = y = 0 \text{ យើងបាន:}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \text{ ដោះស្រាយសមីការយើងបាន } x_1 \approx 0.7, x_2 \approx -2.7$$

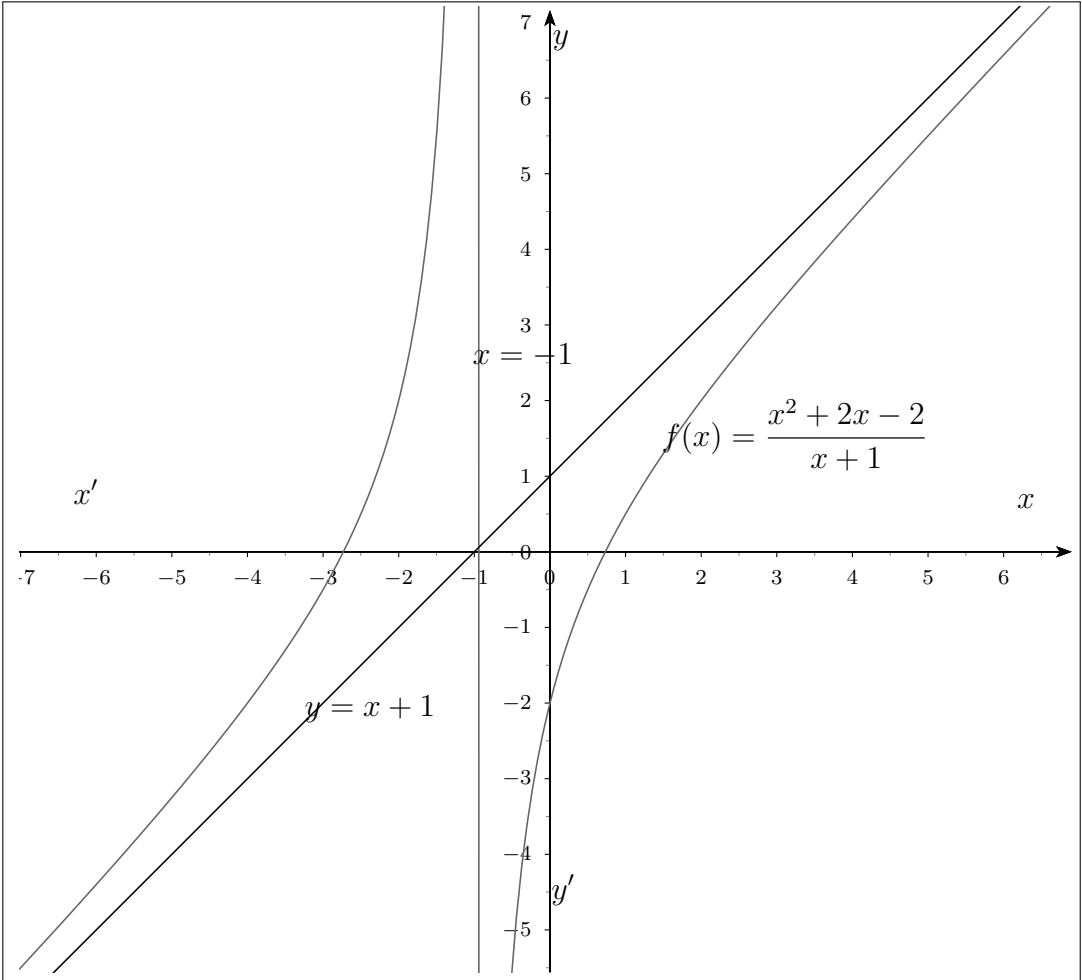
$$\bullet \text{បើ } f \cap y'y \Leftrightarrow x = 0 \text{ យើងបាន: កាលណា } x = 0 \Rightarrow f(0) = -2$$

$$\text{ដូចនេះ ក្រាប (C) កាត់តាម } A(0.7, 0), B(-2.7, 0) \text{ និង } C(0, -2)$$

• សង់ក្រាប

តារាងជំនួយ (d) : $y = x + 1$

x	-1	0
y	0	1



វិញ្ញាសាទី ១១

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី១១៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + x^2 - 2x - 4)$

ខ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3 - x}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(-x^2 + \frac{1}{x} \right)$ ។

II (១០ពិន្ទុ) គណនអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក $\int_0^1 (x^2 + x + 1) dx$

ខ $\int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} \right) dx$ ។

III (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៥ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន៣ ។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង ៣ ដោយចៃដន្យ ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីនីមួយៗជាសមប្រូបាប ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម

ខ ឃ្លី២មានពណ៌ក្រហមនិង១មានពណ៌ខ្មៅ ។

IV (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំនុច (2; 0) និង ចំណុចកំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ (-3; 0) និង (3; 0) ។ សង់អេលីបនេះ ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x}$ ។ យើងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = 3 - x + \frac{1}{2 - x}$ ។

គ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty ; +\infty ; 2$ ។

ឃ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ង សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + x^2 - 2x - 4)$, រាងកំណត់

$$\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + x^2 - 2x - 4) = -(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 4 = 0$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + x^2 - 2x - 4) = 0$

ខ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3-x}$, រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(\frac{3}{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1} = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3-x} = -2$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x^2 \left(-1 + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty(-1+0) = -\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$

II (១០ពិន្ទុ) គណនអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក $= \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx$

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - 0 = \frac{11}{6}$$

ដូចនេះ: $\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \frac{11}{6}$

ខ $= \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2}\right) dx$

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x^2}\right) = -\frac{4}{x} \Big|_1^2 = -4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = 2$$

III យើងមានករណីអាច $n(S) = C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2} = 56$ ករណី

ក ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម

តាង A ជាប្រូបាបចាប់បានឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម

យើងបានករណីស្រប $n(A) = C(5, 3)$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10 \text{ ករណី}$$

តាម $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{56} = 0.178$

ដូចនេះ: $P(A) = 0.178$

ខ ឃ្លី២ មានពណ៌ក្រហម និង ១មានពណ៌ខ្មៅ

តាង B ជាប្រូបាបចាប់បានឃ្លី 2 មានពណ៌ក្រហម និង 1 មានពណ៌ខ្មៅ

យើងបានករណីស្រប $n(B) = C(5, 2) \times C(3, 1)$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} \times \frac{3 \times 2!}{2! \times 1} = 30 \quad \text{ករណី}$$

$$\text{តាម } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{56} = 0.535$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = 0.535}$$

IV រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំនុច $(2; 0)$ និង ចំណុចកំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(-3; 0)$ និង $(3; 0)$

អេលីបមានសមីការស្តង់ដារ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; (ព្រោះអ្នកដោះស្រាយចេះ)

$$\text{តាមប្រាប់កំពូល } V(h \pm a, k) = V(-3, 0), V(3, 0) \Leftrightarrow k = 0, \begin{cases} h - a = -3 (1) \\ h + a = 3 (2) \end{cases}$$

យក(1) + (2) យើងបាន $2h = 0 \Rightarrow h = 0$ និងជំនួស h ចូល(1) យើងបាន $a = 3$

$$\text{កំណុំ } F(h \pm c, k) = F(2, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} h + c = 2 (1) \\ h - c = 2 (2) \end{cases}$$

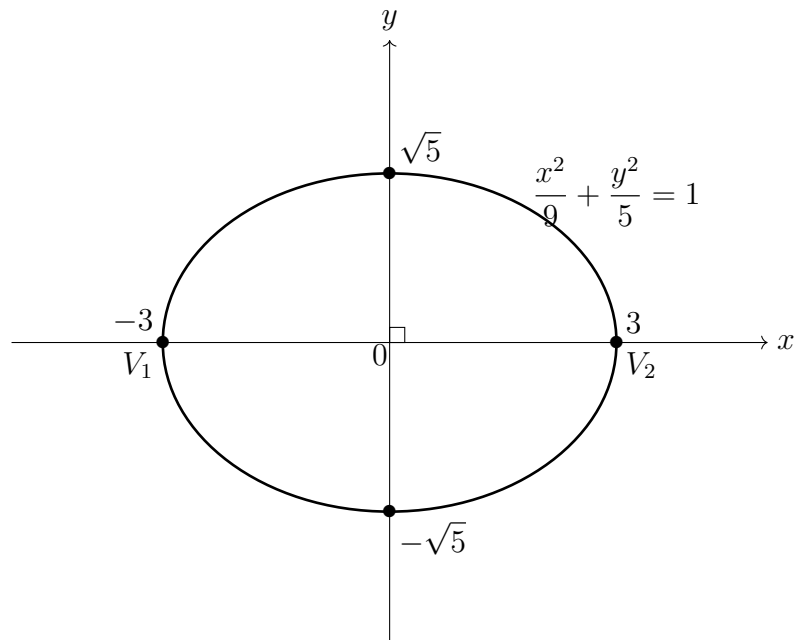
ដោយ $h = 0$ នោះ $c = 2$ និង $c = -2 < 0$ មិនយក

$$\text{តែ } b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

យើងបាន $k = h = 0; a = 3; b = \sqrt{5}$ និង $c = 2$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ } \frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1}$$

• សង់អេលីប



V គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x}$ យើងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$f(x)$ មានន័យកាលណា $2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$$

ខ បង្ហាញថា $f(x) = 3 - x + \frac{1}{2-x}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 7 & -x + 2 \\ -x^2 + 2x & -x + 3 \\ \hline -3x + 7 & \\ 3x - 6 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

ដូចនេះ: $f(x) = 3 - x + \frac{1}{2-x}$

គ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty; +\infty; 2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 5 + \frac{7}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 5 + \frac{7}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x} = \frac{4 - 10 + 7}{0} \Rightarrow \begin{cases} +\infty \text{ បើ } x \text{ ខិតជិត } 2^- \\ -\infty \text{ បើ } x \text{ ខិតជិត } 2^+ \end{cases}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

ឃ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C)

• អាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ នោះ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

• អាស៊ីមតូតទ្រូត

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (3 - x)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 - x + \frac{1}{2-x} - (3 - x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2-x} \right) = 0 \end{aligned}$$

នោះយើងបាន $y = -x + 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូត

ដូចនេះ: $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $y = -x + 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C)

ង សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

• សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{2 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 5)(2 - x) + x^2 - 5x + 7}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2 - x)^2}$$

ដោយ $(2 - x)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $-x^2 + 4x - 3$

ឲ្យ $-x^2 + 4x - 3 = 0$ រក $a + b + c = 0$ យើងបាន $x_1 = 1$ និង $x_2 = \frac{c}{a} = 3$

- តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	+		-	+

- ចំណុចបរិមា

* បើ $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2 - 5(1) + 7}{2 - 1} = 3$

* បើ $x = 3 \Rightarrow f(1) = \frac{3^2 - 5(3) + 7}{2 - 3} = -1$

ដូចនេះ: ចំនុចបរិមាណនៃ (C) គឺ $(1, 3)$ និង $(3, -1)$

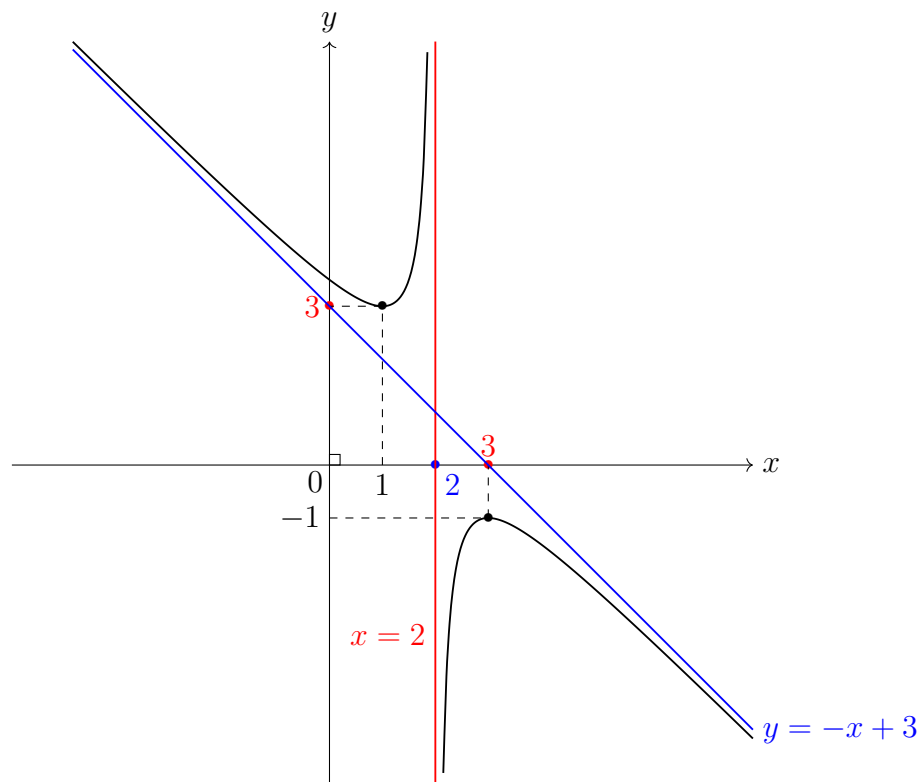
- តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		-1
		$\searrow$	$\nearrow$		
			3		
				$\nearrow$	$\searrow$
				$-\infty$	$-\infty$

• សង្កេត

យើងមាន $y = 3 - x$ នោះតារាងតម្លៃលេខ

x	0	3
y	3	0



វិញ្ញាសាទី ១២

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី១២៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2e^x + 1)$

ខ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{2x - 1}$ ។

II (១០ពិន្ទុ) គណនអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក $A = \int_0^1 [(x^2 - 3x + 1) + (2x + 1)] dx$

ខ $B = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

III (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីឈ្មោលចំនួន 4 និងញីចំនួន 6 ។ គេចាប់យកត្រី 3 មកដាក់នៅអាងថ្មីមួយដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក ត្រីទាំងបីដែលចាប់មកជាត្រីឈ្មោលទាំងបី។

ខ ត្រីទាំងបីដែលចាប់មកមានត្រីញីពីរនិងឈ្មោលមួយ។

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ: $12y^2 = 300 - 75x^2$ ។

ក បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរបស់អេលីបនេះ។

ខ សង់អេលីបនេះ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{4-x^2}{1-x}$ និងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 + \frac{3}{1-x}$ ។

គ គណនា $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ហើយទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត របស់ក្រាប (C) ។

ឃ សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2e^x + 1) = e^0 - 2e^0 + 1 = 0$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2e^x + 1) = 0$

ខ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{4}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{2x - 1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 1}{2 - \frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{2x - 1} = -\frac{1}{2}$

II (១០ពិន្ទុ) គណនអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក $A = \int_0^1 [(x^2 - 3x + 1) + (2x + 1)] dx$ យើងបាន

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(x^2 - 3x + 1) + (2x + 1)] dx &= \int_0^1 (x^2 - x + 2) dx \\ A &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 \\ A &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - (0) = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $A = \int_0^1 [(x^2 - 3x + 1) + (2x + 1)] dx = \frac{11}{6}$

ខ $B = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$ យើងបាន

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} \right) dx B = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$$

$$B = \left[\ln |x-1| - \frac{1}{x} \right]_2^3$$

$$B = \left(\ln 2 - \frac{1}{3} \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$B = \ln 2 + \frac{1}{6}$$

ដូចនេះ: $B = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln 2 + \frac{1}{6}$

III (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីឈ្មោលចំនួន 4 និងញីចំនួន 6 ។ គេចាប់យកត្រី 3 មកដាក់នៅអាងថ្មីមួយដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក ត្រីទាំងបីដែលចាប់មកជាត្រីឈ្មោលទាំងបី

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានត្រីទាំងបីជាត្រីឈ្មោល

យើងបានចំនួនករណីអាច $n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4, 3) = \frac{4!}{1!3!} = 4$ ករណី

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{30}$

ខ ត្រីទាំងបីដែលចាប់មកមានត្រីញីពីរនិងឈ្មោលមួយ

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់ត្រីទាំងបីដែលចាប់មកមានត្រីញីពីរនិងឈ្មោលមួយ

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(6, 2) \times C(4, 1) = \frac{6!}{4!2!} \times \frac{4!}{3!1!} = 15 \times 4 = 60$ ករណី

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{1}{2}$

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ: $12y^2 = 300 - 75x^2$

ក បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

យើងមាន $12y^2 = 300 - 75x^2$

$$\Leftrightarrow 12y^2 + 75x^2 = 300$$

$$\Leftrightarrow \frac{12y^2}{300} + \frac{75x^2}{300} = \frac{300}{300}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{4} = 1$$

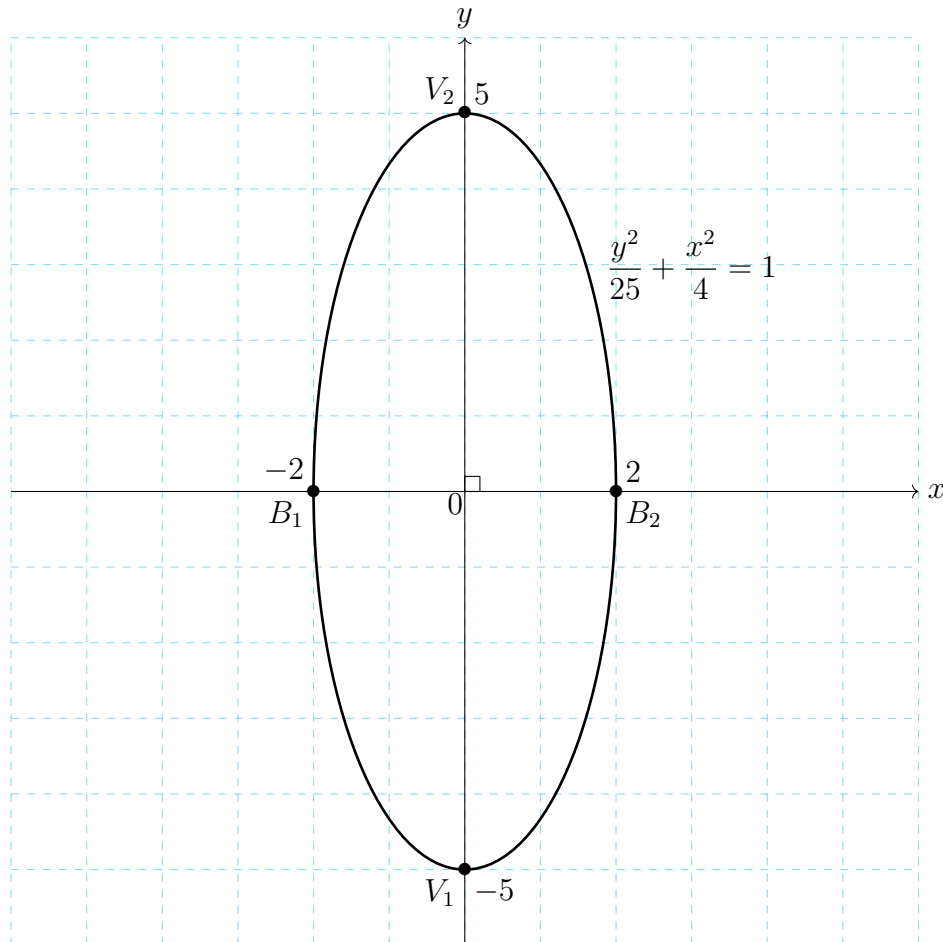
ដូចនេះ: $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{4} = 1$ ជាសមីការអេលីប

- រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កំណុំទាំងពីរបស់អេលីប

តាមសមីការ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{4} = 1$ យើងបាន $h = k = 0$ $a = 5$, $b = 2$ និង $c = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

- រកប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 2 = 4$ ឯកតាប្រវែង
- រកប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 5 = 10$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ $V_1(h, k - a) = (0, -5)$, $V_2(h, k + a) = (0, 5)$
- កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ $F_1(h, k - c) = (0, -\sqrt{21})$, $F_2(h, k + c) = (0, \sqrt{21})$

ខ សង់អេលីបនេះ



V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{4-x^2}{1-x}$ និងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$f(x) = \frac{4-x^2}{1-x}$ មានន័យលុះត្រាតែ $x \neq 1$

ដូចនេះ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ខ បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 + \frac{3}{1-x}$

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & +4 \\ \hline x^2 - x & \\ \hline -x + 4 & \\ \hline x - 1 & \\ \hline 3 & \end{array} \begin{array}{l} -x + 1 \\ x + 1 \end{array}$$

ដូចនេះ:
$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{1-x}$$

គណនា $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4-x^2}{1-x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4-x^2}{1-x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{1-x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-x^2}{1-x} = -\infty$
- ហើយទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត របស់ក្រាប (C)

- ហើយទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរដោយរបស់ក្រាប (C)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x^2}{1-x} = \infty$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- ហើយទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត របស់ក្រាប (C)

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + 1 + \frac{3}{1-x} - (x+1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{1-x} = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

• ដេរីវេ

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{1-x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{3}{(1-x)^2} = 1 + \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\text{ដោយ } (x-1)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{D}$$

ដូចនេះ: f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

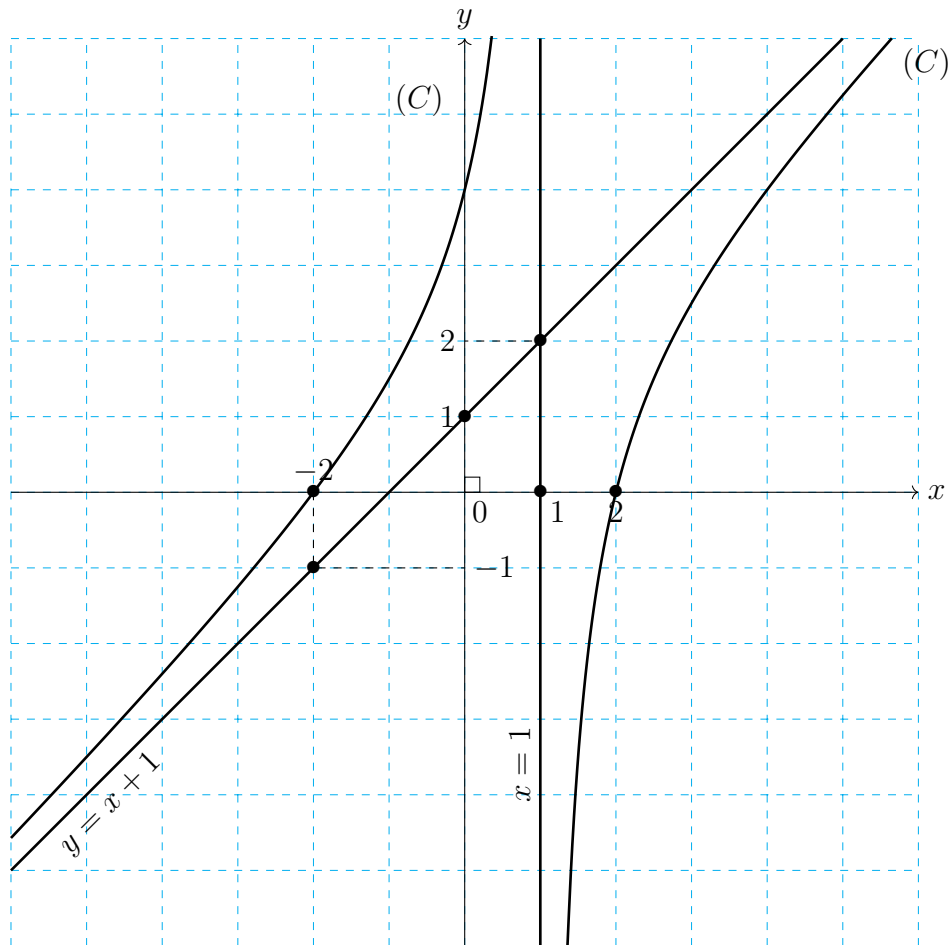
• សង់ក្រាប

$$- C \cap (y'oy) \text{ គឺ } x = 0; \Rightarrow y = \frac{4-0}{1-0} = 4$$

- $C \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0 \Rightarrow \frac{4 - x^2}{1 - x} = 0$ នោះយើងបាន $x_1 = -2$ និង $x_2 = 2$

យើងមាន $y = x + 1$ នោះតារាងតម្លៃលេខ

x	-2	0	1
y	-1	1	2



វិញ្ញាសាទី ១៣

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី១៣៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន៖

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x)$

ខ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2} - 2)}{4 - x^2}$

គ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(-x^2 + \frac{1}{x} \right)$

II (១០ពិន្ទុ) គណនអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក $\int_0^1 (1 - x + x^2) dx$

ខ $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

គ $\int_0^1 \left[\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{1 + e^x} \right] dx$

III (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូលពណ៌ក្រហមចំនួន 4 និង មូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 5។

ក គេចាប់យកមូល 2 ពីក្នុងចំណោមចំនួន។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលមូលចាប់យកទាំងពីរ មានមូលពណ៌ក្រហម និង មូលពណ៌ខ្មៅ។

ខ គេចាប់យកមូលមួយហើយដាក់ទៅវិញ បន្ទាប់មកគេចាប់យកមូលមួយទៀត។
រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលមូលលើកដំបូងពណ៌ខ្មៅ ហើយមូលទៀតពណ៌ក្រហម។

IV (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំ $F(0, -2)$ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y = 2$ ។
ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ និង គេតាងក្រាប (C) ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ គណនា $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ រកអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

គ បង្ហាញថា $f'(x) = -\frac{3x+1}{(x-1)^3}$ ។

ឃ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

I គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

៣ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x)$ មានរាង $+\infty - \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3 - \frac{1}{x} \right) \\ &= +\infty(3 - 0) = +\infty\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x) = +\infty$

៤ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2} - 2)}{4 - x^2}$ មានរាង $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2} - 2)}{4 - x^2} &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(4 - x^2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - 4}{-(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - 4}{-(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{-(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{-(x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= -4 \times \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

៥ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(-x^2 + \frac{1}{x} \right) = e^{+\infty}(-\infty + 0) = -\infty$

II (១០ពិន្ទុ) គណនអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

៦ $\int_0^1 (1 - x + x^2) dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1 - x + x^2) dx &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

៧ $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx &= \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} \\ &= [\ln(e^x + 1)]_0^1 \\ &= \ln(e + 1) - \ln(1 + 1) = \ln \frac{e + 1}{2}\end{aligned}$$

គ) $\int_0^1 \left[\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{1 + e^x} \right] dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{1 + e^x} \right] dx &= \int_0^1 \left[\frac{e^x + 1}{e^x + 1} \right] dx \\ &= \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

III (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមានប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន ៤ និង ប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន ៥។

ក) រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលប៊ូលចាប់មកទាំងពីរ មានមួយពណ៌ក្រហម និង មួយពណ៌ខ្មៅ

- រកចំនួនករណីអាច

តាង S ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានប៊ូល ២ ពីចំណោមចែងដូចខាងលើ

ដោយគេចាប់យកប៊ូល ២ ពីចំណោមចែងដូចខាងលើ ព្រឹត្តិការណ៍ S យើងបាន

$$n(S) = C(9, 2) = \frac{9!}{(9-2)!2!} = 36 \text{ ករណី}$$

- រកចំនួនករណីស្រប

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលប៊ូលចាប់បានក្រហមចំនួនមួយ និង ខ្មៅចំនួនមួយ យើងបាន

$$n(A) = C(4, 1) \times C(5, 1) = \frac{4!}{(4-1)!1!} \times \frac{5!}{(5-1)!1!} = 20 \text{ ករណី}$$

$$\text{នាំឲ្យយើងបានប្រូបាប } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

ខ) រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលប៊ូលលើកដំបូងពណ៌ខ្មៅ ហើយមួយទៀតពណ៌ក្រហម

$$\text{យើងបាន } P(B) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$$

IV (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំ $F(0, -2)$ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y = 2$

- រកសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល

ដោយបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាបន្ទាត់ដេកនោះ សមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជា អ័ក្សឈរដែលមានសមីការស្តង់ដារទម្រង់

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

យើងមានកំណុំ $F(0, -2)$ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y = 2$

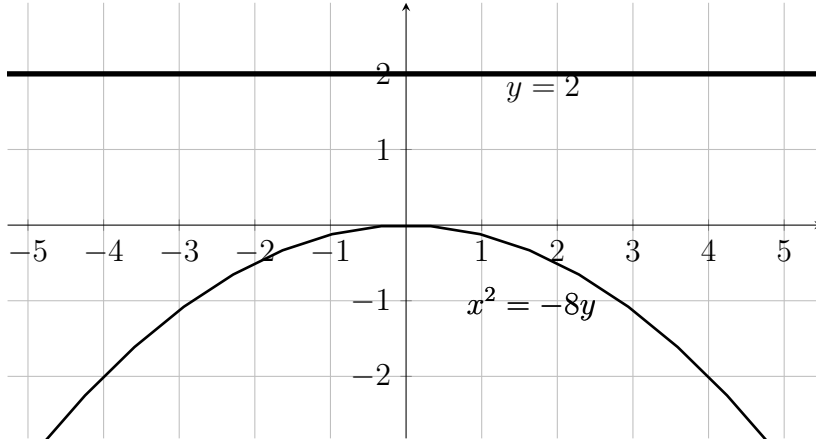
$$\text{ដោយកំណុំ } F(0, -2) = F(h, k + p) \Rightarrow h = 0, k + p = -2 \quad (1)$$

$$\text{បន្ទាត់ប្រាប់ទិស } y = 2, y = k - p \Rightarrow k - p = 2 \quad (2)$$

$$\text{តាមសមីការ (1) និង (2) គេបាន } \begin{cases} k + p = -2 \\ k - p = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 0, p = -2$$

$$\text{យើងបាន } (x - 0)^2 = 04(-2)(y - 0) \Rightarrow x^2 = -8y$$

- សង់ប៉ារ៉ាបូល



V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ និង គេតាងក្រាប (C) ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $(x-1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$$\text{ដូចនេះ } \mathbb{D} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

ខ គណនា $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} = 0$$

រកអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ នាំឲ្យ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ នាំឲ្យ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

គ បង្ហាញថា $f'(x) = -\frac{3x+1}{(x-1)^3}$

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(3x-1)'(x-1)^2 - [(x-1)^2]'(3x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3(x-1)^2 - 2(x-1)(3x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)[3x-3-2(3x-1)]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{-3x-1}{(x-1)^3} = -\frac{3x+1}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

ឃ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

• សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

យើងមាន $f'(x) = -\frac{3x+1}{(x-1)^3}$ បើ $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x-1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$-3x-1$	+	0	-	-
$(x-1)^3$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	-

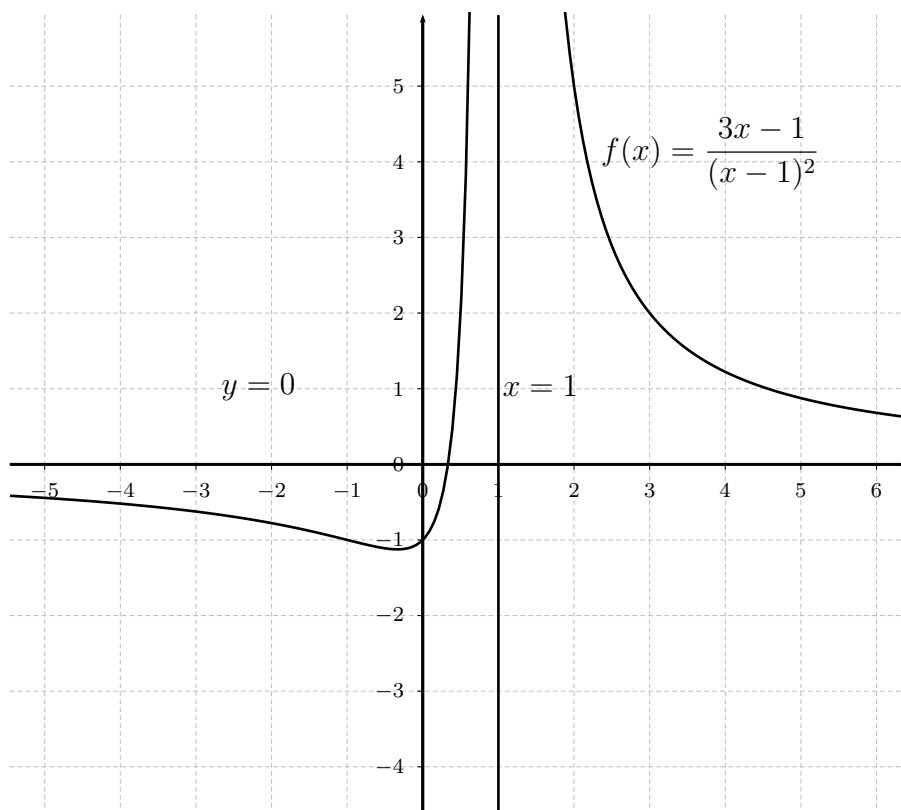
- ចំពោះ $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ នោះ $f'(x) < 0$ នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- ចំពោះ $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ នោះ $f'(x) > 0$ នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន
- ចំពោះ $x = -\frac{1}{3}, f'(x) = 0$ និង ប្លូសញ្ញាពី - ទៅ + នាំឲ្យអនុគមន៍ មានអប្បបរមាត្រង់

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{8}$$

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	0 $\nearrow$	$-\frac{9}{8}$ $\nearrow$	$+\infty$ $\nwarrow$	$+\infty$ $\nwarrow$ 0

• ក្រាបនៃអនុគមន៍



វិញ្ញាសាទី ១៤

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី១៤: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន:

I (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

១ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

២ $\lim_{x \rightarrow 0} [(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1]$

៣ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 5x + 1}$

៤ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

II (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានកូនបាល់ចំនួន 40 គ្រាប់ក្នុងនោះមានកូនបាល់ពណ៌បៃតងចំនួន 19 និងពណ៌លឿងចំនួន 21 គេចាប់យកកូនបាល់ម្តង២ ព្រមគ្នាចេញពីចង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក កូនបាល់ទាំងពីរមានពណ៌ខុសគ្នា។

ខ កូនបាល់ទាំងពីរមានពណ៌បៃតង។

គ កូនបាល់ទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នា។

III (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល

ក $\int_2^3 (x - 3) dx$

ខ $\int_0^{\ln 6} (e^x - 1) dx$

គ $\int_1^j \frac{\ln x}{x} dx$

IV គេមានសមីការ $(4x + 3y)^2 - 144 = 24xy$

១ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប៊។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេកំណុំទាំងពីររបស់អេលីប៊។

២ សង់អេលីប៊នេះ។

V គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x + 1}$ ។ យើងតាង (C) ជាក្រាបរបស់អនុគមន៍ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = -x + 2 + \frac{1}{x + 1}$

គ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty$; $+\infty$ និង -1 ។

ឃ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C) ។

ង សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

I គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

១ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

ជំនួសតម្លៃ $x = 2$ ចូល៖

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{2^2 - 4}{2 + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

២ $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1]$

យើងអាចសរសេរជា៖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1)^2$

កាលណា $x \rightarrow 0^+$ នាំឱ្យ $\ln x \rightarrow -\infty$ នោះ $(\ln x - 1) \rightarrow -\infty$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1] = (-\infty)^2 = +\infty$$

៣ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 5x + 1}$

ជំនួសតម្លៃ $x = 3$ ចូល៖

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 5x + 1} = \frac{2(3) - 3(3)^2}{3^2 + 5(3) + 1} = \frac{6 - 27}{9 + 15 + 1} = -\frac{21}{25}$$

៤ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

គុណនឹងកន្សោមធ្លាក់នៃភាគយក៖

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

II រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ចំនួនកូនបាល់សរុបមាន $19 + 21 = 40$ គ្រាប់។

ចាប់យកកូនបាល់ម្តង ២ ព្រមគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ នាំឱ្យចំនួនករណីអាចគឺ៖

$$n(S) = C(40, 2) = \frac{40 \times 39}{2} = 780$$

ក កូនបាល់ទាំងពីរមានពណ៌ខុសគ្នា (បៃតង១ និងលឿង១)៖

$$\text{ចំនួនករណីស្រប៖ } n(A) = C(19, 1) \times C(21, 1) = 19 \times 21 = 399$$

$$\text{ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖ } P(A) = \frac{399}{780} = \frac{133}{260}$$

ខ កូនបាល់ទាំងពីរមានពណ៌បៃតង៖

$$\text{ចំនួនករណីស្រប៖ } n(B) = C(19, 2) = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

$$\text{ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖ } P(B) = \frac{171}{780} = \frac{57}{260}$$

គ កូនបាល់ទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នា (បៃតងទាំងពីរ ឬលឿងទាំងពីរ)៖

$$\text{ចំនួនករណីស្រប៖ } n(C) = C(19, 2) + C(21, 2) = 171 + \frac{21 \times 20}{2} = 171 + 210 = 381$$

$$\text{ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖ } P(C) = \frac{381}{780} = \frac{127}{260}$$

$$*(\text{ឬអាចគណនាតាមព្រឹត្តិការណ៍បំពេញ៖ } P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{399}{780} = \frac{381}{780} = \frac{127}{260})^*$$

III គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក $\int_2^3 (x - 3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_2^3$

$$= \left(\frac{3^2}{2} - 3(3) \right) - \left(\frac{2^2}{2} - 3(2) \right) = \left(\frac{9}{2} - 9 \right) - (2 - 6)$$

$$= -\frac{9}{2} + 4 = -\frac{1}{2}$$

ខ $\int_0^{\ln 6} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln 6}$

$$= (e^{\ln 6} - \ln 6) - (e^0 - 0) = (6 - \ln 6) - 1 = 5 - \ln 6$$

គ $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ * (ដោយសន្មតអក្សរ j ក្នុងប្រធានជាកំហុសអក្សរអង្គលីលេខនៃ e) *

តាង $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx$

បើ $x = 1 \implies u = \ln 1 = 0$; បើ $x = e \implies u = \ln e = 1$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

IV គេមានសមីការ $(4x + 3y)^2 - 144 = 24xy$

១ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប និងរកធាតុរបស់វា៖

លាតកន្សោមសមីការ៖

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 144 = 24xy$$

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 144៖

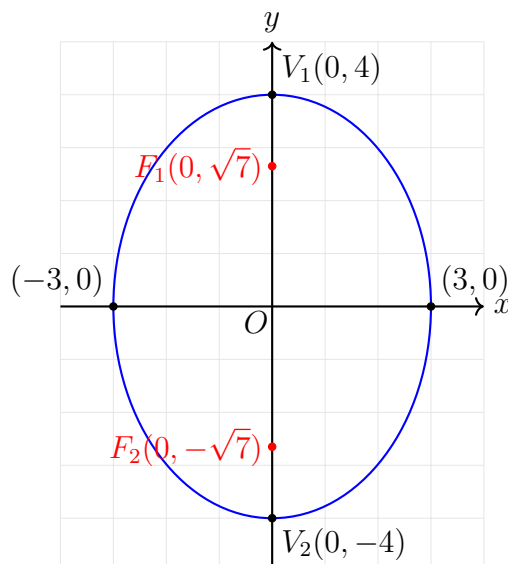
$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

សមីការនេះមានទម្រង់ស្តង់ដារ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ដែលជាសមីការអេលីបមានផ្ចិត $O(0, 0)$ និងមានអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអរដោនេ (y) ព្រោះ $16 > 9$ ។

យើងបាន៖ $a^2 = 16 \implies a = 4$ និង $b^2 = 9 \implies b = 3$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ៖ $2a = 2(4) = 8$
- ប្រវែងអ័ក្សតូច៖ $2b = 2(3) = 6$
- កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ៖ $V_1(0, 4)$ និង $V_2(0, -4)$
- រកប្រវែងត្រីកំណុំ c ៖ $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \implies c = \sqrt{7}$
- កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរ៖ $F_1(0, \sqrt{7})$ និង $F_2(0, -\sqrt{7})$

២ សង់អេលីបនេះ៖



V គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x + 1}$

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែភាគបែងខុសពីសូន្យ៖ $x + 1 \neq 0 \implies x \neq -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

ខ បង្ហាញថា $f(x) = -x + 2 + \frac{1}{x + 1}$ ៖

តម្រូវភាគបែងអង្គខាងស្តាំ៖

$$\begin{aligned} -x + 2 + \frac{1}{x + 1} &= \frac{(-x + 2)(x + 1) + 1}{x + 1} = \frac{-x^2 - x + 2x + 2 + 1}{x + 1} \\ &= \frac{-x^2 + x + 3}{x + 1} = f(x) \text{ (ពិត)} \end{aligned}$$

គ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty, +\infty$ និង -1 ៖

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) = (+\infty) + 2 + 0 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) = (-\infty) + 2 + 0 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) = 3 + \frac{1}{0^-} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) = 3 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

ឃ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ៖

- ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់មានសមីការ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់មានសមីការ $y = -x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ង សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

គណនាដេរីវេ៖ តាមរាង $f(x) = -x + 2 + \frac{1}{x + 1}$ គេបាន៖

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{-(x + 1)^2 - 1}{(x + 1)^2}$$

ដោយ $-(x + 1)^2 - 1 < 0$ ជានិច្ច និង $(x + 1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq -1$ នាំឱ្យ $f'(x) < 0$ ជានិច្ចលើ D ។ អនុគមន៍ចុះដាច់ខាតជានិច្ច។

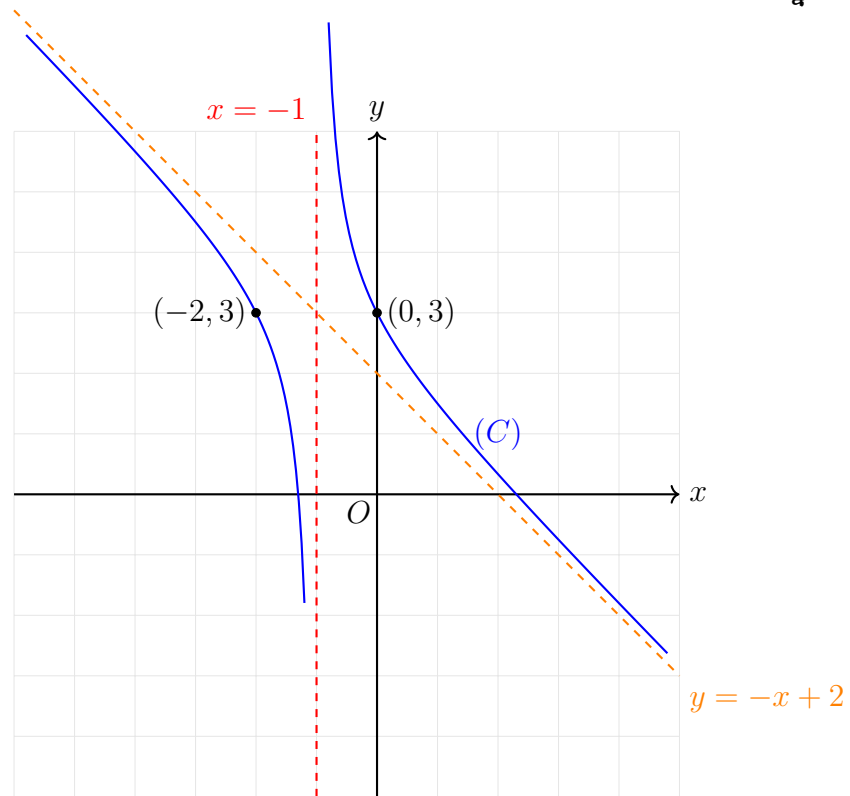
តារាងអថេរភាព៖

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$

សង់ក្រាប (C) ៖

រកចំណុចប្រសព្វពិសេស៖

- ប្រសព្វអ័ក្សអរដោនេ ($x = 0$)៖ $f(0) = \frac{3}{1} = 3 \implies (0, 3)$
- ចំណុចបន្ថែម៖ $x = 1 \implies f(1) = \frac{3}{2} = 1.5$; $x = -2 \implies f(-2) = \frac{-4 - 2 + 3}{-1} = 3$



វិញ្ញាសាទី ១៥

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត: _____

ហត្ថលេខា: _____

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាសប្រឡងឡើយ។ ក្រដាសប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាសប្រឡងជាដាច់ខាត។



វិញ្ញាសាទី ១៥៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល: ៩០ នាទី

អក្សរសម្ងាត់

ប្រធាន:

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

a $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 5x^2 - 2x^3)$

c $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$

b $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x - 1}{1 - \ln x}$

d $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{3x} + e^{-2x}}$

II (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល:

ក $I = \int_{-1}^1 (2x^3 - x^2 + 2x - 1) dx$

ខ $J = \int_1^e \left(\frac{2}{x} + e^x \right) dx$

គ $K = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$

III (១០ពិន្ទុ) ពេលប្រឡងបញ្ចប់ឆ្នាំសិក្សា ត្រូវបានរៀបចំប្រឡងជាសំណួរផ្ទាល់មាត់ ដោយបានរៀបចំសំណួរចំនួន ១០ សំណួរដែលចែកជា ៥ សំណួរដកចេញពីមេរៀនក្នុងត្រីមាសទី ១ ៣ សំណួរដកចេញពីមេរៀនក្នុងត្រីមាសទី ២ និង ២ សំណួរដកចេញពីមេរៀនក្នុងត្រីមាសទី ៣ ដាក់ក្នុងប្រអប់មួយ។ លោកគ្រូបានហៅសិស្សម្នាក់មកចាប់យក ៣ សំណួរព្រមគ្នាដោយចៃដន្យពីក្នុងប្រអប់។ ចូរកម្រិតបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A : សំណួរទាំងបីដែលចាប់បាន ជាសំណួរដកចេញពីមេរៀនត្រីមាសទី ១។

B : សំណួរទាំងបីដែលចាប់បាន មាននៅក្នុងមេរៀនទាំងបីត្រីមាស។

C : សំណួរទាំងបីដែលចាប់បាន ជាមេរៀននៅក្នុងត្រីមាសដូចគ្នា។

IV (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ: $y^2 + 4y - 2x = 0$ ។ ចូរបំប្លែងសមីការនេះជាទម្រង់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។ ចូររកអ៊ិចស៊ីតនៃកំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូលនេះ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{2-x-2x^2}{-1-x}$ ។ តាង (C) ជាក្រាបនៃ $f(x)$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

គ បង្ហាញថា $(d) : y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $\pm\infty$ ។

ឃ សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាង (C) និង (d) ។

ង សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

I (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 5x^2 - 2x^3)$
 $= 7 - 5(1)^2 - 2(1)^3 = 7 - 5 - 2 = 0$

ខ $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x - 1}{1 - \ln x}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)
 $= \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{-(\ln x - 1)} = \lim_{x \rightarrow e} -(\ln x + 1) = -(1 + 1) = -2$

គ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{-(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{2 + \sqrt{x}} = \frac{-1}{2 + \sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{3x} + e^{-2x}}$
 $= \frac{0}{e^0 + e^0} = \frac{0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$

II (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក $I = \int_{-1}^1 (2x^3 - x^2 + 2x - 1) dx$
 $I = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_{-1}^1$
 $I = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 - (-1) \right)$
 $I = \left(\frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{1}{6} - \frac{17}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$

ខ $J = \int_1^e \left(\frac{2}{x} + e^x \right) dx$
 $J = [2 \ln |x| + e^x]_1^e = (2 \ln e + e^e) - (2 \ln 1 + e^1)$
 $J = 2(1) + e^e - 0 - e = 2 - e + e^e$

គ $K = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$
 $K = \left[\ln |x-1| + \frac{1}{x-1} \right]_{-1}^0 = \left(\ln |-1| + \frac{1}{-1} \right) - \left(\ln |-2| + \frac{1}{-2} \right)$
 $K = (0 - 1) - \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = -1 - \ln 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \ln 2$

III (១០ពិន្ទុ) គណនាប្រូបាប៖

សរុបមាន 10 សំណួរ (ត្រឹមត្រូវទី១ មាន 5, ទី២ មាន 3, ទី៣ មាន 2)។ ចាប់យកសំណួរ ៣ ព្រមគ្នា៖

ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$ ករណី ។

A $P(A)$: “សំណួរទាំងបី ជាសំណួរដកចេញពីត្រឹមត្រូវទី១”

$n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{3!2!} = 10$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

B $P(B)$: “សំណួរទាំងបី មាននៅក្នុងមេរៀនទាំងបីត្រឹមត្រូវ (ចាប់បានត្រឹមត្រូវទី១ មួយ, ទី២ មួយ, និងទី៣ មួយ)”

$n(B) = C(5, 1) \times C(3, 1) \times C(2, 1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

C $P(C)$: “សំណួរទាំងបី ជាមេរៀននៅក្នុងត្រីមាសដូចគ្នា” (អាចសុទ្ធតែត្រីមាសទី១ ឬសុទ្ធតែទី២ ព្រោះទី៣មានតែ២សំណួរមិនអាចចាប់បានទេ)

$$n(C) = C(5, 3) + C(3, 3) = 10 + 1 = 11$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{11}{120}$$

IV (១០ពិន្ទុ) បំប្លែង និងសិក្សាប៉ារ៉ាបូល៖

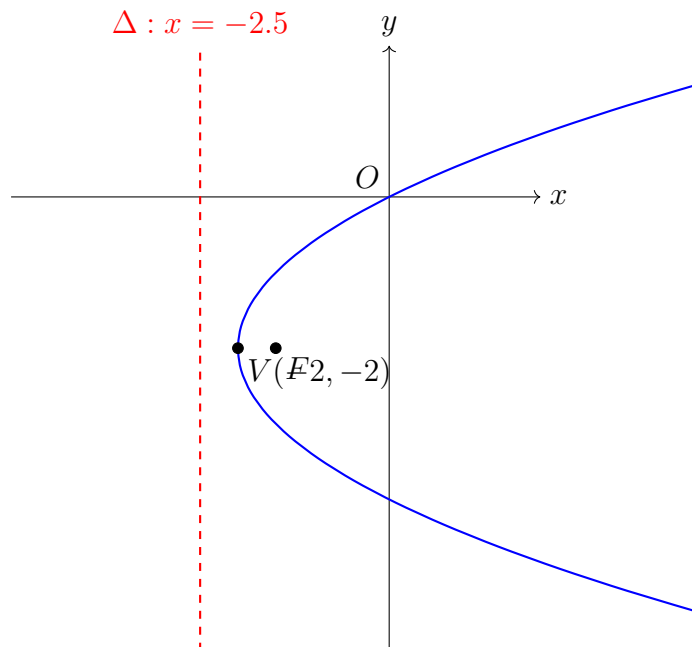
សមីការទូទៅ៖ $y^2 + 4y - 2x = 0$

$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \implies (y + 2)^2 = 2(x + 2)$$

នេះជាទម្រង់ស្តង់ដារ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ។ គេទាញបាន៖ $h = -2, k = -2$ និង $4p = 2 \implies p = \frac{1}{2}$ ។

- កំពូល៖ $V(h, k) = V(-2, -2)$
- កំណុំ៖ $F(h + p, k) = F\left(-2 + \frac{1}{2}, -2\right) = F\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស៖ $x = h - p = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ (ឬ $x = -2.5$)

សង់ប៉ារ៉ាបូល៖



V (៣០ពិន្ទុ) សិក្សាអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2 - x - 2x^2}{-1 - x} = \frac{2x^2 + x - 2}{x + 1}$

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ៖

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $-1 - x \neq 0 \implies x \neq -1$ ។

ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ។

ខ បង្ហាញថា $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$ ៖

ធ្វើវិធីចែកពហុធា $(2x^2 + x - 2)$ នឹង $(x + 1)$ ៖

$$2x^2 + x - 2 = (x + 1)(2x - 1) - 1$$

ដូចនេះ $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$ ។ គេទាញបាន $a = 2, b = -1, c = -1$ ។

គ បង្ហាញថា $(d) : y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត៖

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x + 1}\right) = 0$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(d) : y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

ឃ) សិក្សាទីតាំងជ្រៀបរវាង (C) និង (d) ៖

ផលសង $f(x) - y = -\frac{1}{x+1}$ មានសញ្ញាផ្ទុយពី $(x+1)$ ។

- បើ $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{x+1} > 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅពីលើបន្ទាត់ (d) ។
- បើ $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x+1} < 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅពីក្រោមបន្ទាត់ (d) ។

ង) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

- ដេរីវេ៖ $f'(x) = (2x-1)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 2 - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ នោះ $f'(x) > 0$ ជានិច្ច។

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(-\infty, -1)$ និង $(-1, +\infty)$ ។

- លីមីត និងអាស៊ីមតូតឈរ៖

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2x - 1 - \frac{1}{x+1}\right) = -3 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(2x - 1 - \frac{1}{x+1}\right) = -3 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

ដូចនេះបន្ទាត់ឈរ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

សង់ក្រាប (C) ៖ (ចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស (oy) គឺ $(0, -2)$)

