ចំនួនកុំផ្លិច

COMPLEX NUMBERS

ថ្នាក់ទី ១២ • GRADE 12

ទ្រឹស្តីសង្ខេប • វិធីសាស្ត្រគណនា • វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (MCQ)

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងប្រឡងសិស្សពូកែ

អ្នករៀបរៀង ៖ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០២៦

គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យ

គណៈកម្មការរៀបរៀង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
ត្រួតពិនិត្យខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
រៀបចំខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រចនាគម្រប និងទំព័រ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រូបភាព និងតារាង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
កែសម្រួលអក្ខរាវិរុទ្ធ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
គណៈកម្មការពិនិត្យចុងក្រោយ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ក្នុងការស្វ័យសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

ព័ត៌មានសៀវភៅ

កំណែសាកល្បង © ២០២៦

ចំនួនកុំផ្លិច ថ្នាក់ទី១២

COMPLEX NUMBERS GRADE 12

រៀបរៀងដោយ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

សម្រាប់បោះពុម្ពផ្សាយ៖ **បណ្ណាគារអង្គរ**

សេចក្តីឧទ្ទិស

សៀវភៅ «**ចំនួនកុំផ្លិច**» នេះ
សូមឧទ្ទិសជូនចំពោះ៖

ភរិយាជាទីស្រឡាញ់

ង៉ែត សុគន្ធា

និង

កូនស្រីជាទីស្រឡាញ់

ខែម សោភា

ដែលជាកម្លាំងចិត្ត និងជាប្រភពនៃសុភមង្គលដ៏កក់ក្តៅ
ក្នុងដំណើរជីវិត និងការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្ញុំបាទជានិច្ចនិរន្តរ៍។

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យា គឺជាវិទ្យាសាស្ត្រមួយដែលមានតួនាទីយ៉ាងសំខាន់ក្នុងការអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពត្រិះរិះពិចារណា និងការដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ។ ក្នុងចំណោមមែកធាងជាច្រើននៃគណិតវិទ្យា ការសិក្សាអំពី «**ចំនួនកុំផ្លិច**» គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដ៏សំខាន់បំផុតមួយនៃគណិតវិទ្យា ដែលសិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ចាំបាច់ត្រូវតែស្វែងយល់ឱ្យបានច្បាស់លាស់។ ចំនួនកុំផ្លិចមិនត្រឹមតែជាស្ពានចម្លងដ៏រឹងមាំក្នុងការដោះស្រាយសមីការពិជគណិតដែលគ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតប៉ុណ្ណោះទេ តែថែមទាំងជាគន្លឹះក្នុងការយល់ដឹងអំពីទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រូបមន្តដឺម័រ ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច និងការអនុវត្តក្នុងធរណីមាត្រផងដែរ។

ដោយយល់ឃើញពីសារៈសំខាន់នេះ និងកត់សម្គាល់ឃើញពីការលំបាករបស់សិស្សានុសិស្សមួយចំនួនក្នុងការស្វែងយល់អំពីការគណនា និងដោះស្រាយលំហាត់ចំនួនកុំផ្លិច ខ្ញុំបាទបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងសៀវភៅ «**ចំនួនកុំផ្លិច**» នេះឡើង។ សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង ដោយបែងចែកជា ៥ ជំពូករួមមាន៖ **មេរៀនសង្ខេប វិធីសាស្ត្រក្នុងការគណនា លំហាត់មានដំណោះស្រាយ និងលំហាត់ប្រតិបត្តិសម្រាប់អនុវត្ត** ដើម្បីសម្រួលដល់ការសិក្សាស្រាវជ្រាវរបស់សិស្សានុសិស្សឱ្យកាន់តែមានភាពងាយស្រួល និងស៊ីជម្រៅ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាឯកសារយោងដ៏មានតម្លៃសម្រាប់ការត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងជួយជំរុញទឹកចិត្តសិស្សានុសិស្សទាំងអស់ឱ្យកាន់តែមានភាពជឿជាក់លើសមត្ថភាពរបស់ខ្លួន។ ទោះបីជាខ្ញុំបាទបានខិតខំប្រឹងប្រែងយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាអាចនឹងកើតមាន អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិរិះគន់ស្ថាបនាតាមរយៈលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកអានដោយក្តីសោមនស្សរីករាយបំផុត។

ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

សេចក្តីដឹងគុណ

ជាបឋម ខ្ញុំបាទ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី** សូមលំឱនកាយវាចាចិត្ត ថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុត ជូនចំពោះលោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ គឺមាតា និងបិតារបស់ខ្ញុំ ដែលលោកទាំងពីរបានពលិកម្មគ្រប់បែបយ៉ាង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ និងអប់រំទូន្មានប្រៀនប្រដៅខ្ញុំបាទតាំងពីកុមារភាព រហូតធ្វើឱ្យខ្ញុំអាចឈរយ៉ាងរឹងមាំនៅលើវិថីជីវិតមួយនេះ។ បើគ្មានការលះបង់ និងសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏មហាសាលពីលោកទាំងពីរទេ នោះខ្ញុំបាទក៏ប្រហែលជាគ្មានថ្ងៃនេះឡើយ។

ជាបន្តបន្ទាប់ ខ្ញុំបាទសូមសម្តែងនូវសេចក្តីគោរពដឹងគុណយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រ ជូនចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ តាំងពីកម្រិតបឋមសិក្សា រហូតដល់ថ្នាក់សាកលវិទ្យាល័យ ដែលបានខិតខំចំណាយកម្លាំងកាយចិត្តក្នុងការផ្ទេរនូវចំណេះដឹង និងបណ្តុះបណ្តាលរូបខ្ញុំឱ្យក្លាយជាធនធានមនុស្សមួយរូបប្រកបដោយសមត្ថភាព។ រាល់ដំបូន្មានដែលទទួលបានពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ គឺជាប្រទីបបំភ្លឺផ្លូវដែលតែងតែចង្អុលបង្ហាញឱ្យខ្ញុំបាទដើរលើកន្លងដ៏ត្រឹមត្រូវ។

ជាពិសេសលើសពីនេះទៅទៀត ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងផ្ញើជូននូវសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏ធំធេងមិនអាចកាត់ថ្លៃបាន ជូនចំពោះភរិយាជាទីស្រឡាញ់របស់ខ្ញុំ គឺលោកស្រី **ចែ៉ត សុគន្ធា** ព្រមទាំងកូនស្រីជាទីស្រឡាញ់ **ខែម សោភា** ដែលតែងតែនៅក្បែរ ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ មើលថែទាំ លើកទឹកចិត្ត និងលះបង់គ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យខ្ញុំបាទមានពេលវេលាពេញលេញក្នុងការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងសៀវភៅមួយក្បាលនេះឡើងរហូតទទួលបានជោគជ័យ។

សៀវភៅ «**ចំនួនកុំផ្លិច**» មួយក្បាលនេះ មិនអាចលេចចេញជារូបរាងឡើងបានឡើយ ប្រសិនបើគ្មានការលើកទឹកចិត្តពីមនុស្សជាច្រើនជុំវិញខ្លួនខ្ញុំ។ ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់មិត្តភក្តិ បងប្អូន និងសហការីទាំងអស់ ដែលតែងតែផ្តល់មតិយោបល់ជួយកែសម្រួល និងជួយជំរុញទឹកចិត្តខ្ញុំនៅក្នុងដំណើរការនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះជាភាសា LaTeX។ ជាចុងបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមប្រសិទ្ធពរជ័យ សិរីសួស្តី ជ័យមង្គល ជូនដល់លោកអ្នកមានគុណ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ភរិយា កូនស្រី ព្រមទាំងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមប្រកបដោយសុខភាពល្អបរិបូរណ៍ ប្រាជ្ញាភ្លឺថ្លា ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និងសម្រេចបាននូវរាល់បំណងប្រាថ្នាក្នុងជីវិតជានិរន្តរ៍។

ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

និមិត្តសញ្ញាដែលប្រើក្នុងសៀវភៅនេះ

និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ / ការកំណត់	និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ / ការកំណត់
សំណុំចំនួន និងចំនួនកុំផ្លិច		**ធរណីមាត្រ និងប្លង់កុំផ្លិច**	
$\mathbb{C}$	សំណុំចំនួនកុំផ្លិច	(P)	ប្លង់កុំផ្លិច (ប្លង់អារហ្គង់)
$\mathbb{R}$	សំណុំចំនួនពិត	$(O,\vec{u},\vec{v})$	តម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃប្លង់កុំផ្លិច
$\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$	សំណុំចំនួនសនិទាន, គត់, ធម្មជាតិ	$M(z)$ ឬ $M(a,b)$	ចំណុចរូបភាពនៃ z (អាភិចនៃ M)
i	ឯកតានិម្មិត ($i^2=-1$)	$\vec{w}(z)$	វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z
$z=a+bi$	ទម្រង់ពិជគណិត ($a,b\in\mathbb{R}$)	$z_{\vec{AB}}=z_B-z_A$	អាភិចនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}$
$\mathrm{Re}(z)$	ផ្នែកពិតនៃ z ($\mathrm{Re}(z)=a$)	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$	ប្រវែងអង្កត់ AB (ចម្ងាយពី A ទៅ B)
$\mathrm{Im}(z)$	ផ្នែកនិម្មិតនៃ z ($\mathrm{Im}(z)=b$)	$(\vec{u},\vec{OM})$	មុំតម្រង់ទិសស្មើ $\arg(z) \pmod{2\pi}$
$\bar{z}$ ឬ $\bar{z}$	ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ ($\bar{z}=a-bi$)	$R_{(O,\theta)}$	ចលនាបង្វិលផ្ចិត O មុំ θ
$\lvert z\rvert$	ម៉ូឌុលនៃ z ($\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$)	$h_{(O,k)}$	ចលនាដូចគ្នាផ្ចិត O ផលធៀប k
$\arg(z)$	អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z	**និមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យាទូទៅ**	
$\mathrm{Arg}(z)$	អាគុយម៉ង់ចម្បង ($\in(-\pi,\pi]$)	$\forall$	ចំពោះគ្រប់ (For all)
ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងស្វ័យគុណ		$\exists$	មាន / មានយ៉ាងហោចណាស់មួយ
$r(\cos\theta+i\sin\theta)$	ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ($r=\lvert z\rvert$)	$\in,\notin$	ជាធាតុនៃ, មិនមែនជាធាតុនៃ
$\mathrm{cis}\,\theta$	សញ្ញាកាត់ $\cos\theta+i\sin\theta$	$\subset,\subseteq$	ជាសំណុំរងនៃ
$e^{i\theta}$	រូបមន្តអយល័រ ($\cos\theta+i\sin\theta$)	$\cap,\cup$	ប្រសព្វ, ប្រជុំ នៃសំណុំ
$re^{i\theta}$	ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ z	$\Longleftrightarrow$	សមមូល / លុះត្រាតែ
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$	រូបមន្តដឺម័រ ($\cos n\theta+i\sin n\theta$)	$\Longrightarrow$	នាំឱ្យ / នាំមកនូវ
$w_k=\sqrt[n]{z}$	ឫសទី n នៃ z ($k=0,\ldots,n-1$)	$\sum_{k=1}^{n}$	ផលបូកពីតួទី 1 ដល់ n
$\mathbb{U}_n$	សំណុំឫសទី n នៃឯកតា	$\prod_{k=1}^{n}$	ផលគុណពីតួទី 1 ដល់ n

មាតិកា

មេរៀនទី ១ : ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត **9**

១ សញ្ញាណនៃចំនួនកុំផ្លិច 10

២ ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច 16

៣ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ 17

៤ សមីការដឺក្រេទី២ មានមេគុណពិត 18

៥ ការតាងតាមបែបធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច 21

៦ ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច 21

៧ វ៉ិចទ័ររូបភាព នៃផលបូក និង ផលដកចំនួនកុំផ្លិច និង ផលគុណចំនួនពិតជាមួយនឹងចំនួនកុំផ្លិច 22

▸ វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (១០០ លំហាត់) 25

▸ លំហាត់អនុវត្តន៍បន្ថែម 34

មេរៀនទី ២ : ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ **55**

១ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច 55

២ អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច 58

៣ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច 60

៤ ផលគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ 61

៥ ផលចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ 63

៦ បំប្លែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិច 64

▸ វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (១០០ លំហាត់) 65

▸ លំហាត់អនុវត្តន៍ 74

មេរៀនទី ៣ : ស្វ័យគុណទី n និង ឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច **95**

១ ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច 95

២ អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រត្រីកោណ 97

៣ ឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច 98

▸ វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (១០០ លំហាត់) 102

▸ លំហាត់មេរៀន 111

▸ លំហាត់ជំពូកទី១ 119

▸ លំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញ 131

មេរៀនទី ៤ : លំហាត់ស្រាវជ្រាវ និង វិញ្ញាសាពង្រឹងសមត្ថភាព **151**

១ វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើសត្រៀមប្រឡងប្រជែង 151

២ លំហាត់ស្រាវជ្រាវ និង កម្រិតខ្ពស់ 156

មេរៀនទី ៥ : ផ្នែកចម្លើយ **163**

១ តារាងចម្លើយពហុជ្រើសរើស (Answer Keys) 163

២ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់អនុវត្តន៍មេរៀនទី១ 167

៣ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់មេរៀនទី២ 172

៤ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់មេរៀនទី៣ និងលំហាត់ជំពូក 175

៥ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់ស្រាវជ្រាវ និង កម្រិតខ្ពស់ 178

ឯកសារយោង **183**

មេរៀនទី ១
ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

ប្រវត្តិនៃការកកើតចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច (Complex Numbers) គឺជាប្រភេទចំនួនដែលត្រូវបានបង្កើតឡើងដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាដែលចំនួនពិត (Real Numbers) មិនអាចដោះស្រាយបាន។ ការរកឃើញរបស់វាមានប្រវត្តិយូរលង់ណាស់មកហើយ ដោយចាប់ផ្តើមពីតម្រូវការដោះស្រាយសមីការគណិតវិទ្យា៖

- **សម័យគ្រិចបុរាណ៖** គណិតវិទូដឹងពីបញ្ហាដែលថាឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមានមិនមានចម្លើយនៅក្នុងប្រព័ន្ធចំនួនដែលពួកគេស្គាល់ (ឧទាហរណ៍ គ្មានតម្លៃ x ណាដែលបំពេញ $x^2 = -1$ ឡើយ)។

- **Gerolamo Cardano (១៥០១–១៥៧៦)៖** គណិតវិទូជនជាតិអ៊ីតាលីដែលបានរកឃើញរូបមន្តដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣ (Cubic Equations) ដូចជា $x^3 - 15x = 4$។ ក្នុងដំណើរការដោះស្រាយ គាត់បានជួបប្រទះឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន ដែលកាលនោះហៅថា "ចំនួនមិនអាចទៅរួច" (Impossible Numbers)។

- **Rafael Bombelli (១៥២៦–១៥៧២)៖** គណិតវិទូដំបូងគេដែលបានសិក្សាស៊ីជម្រៅលើចំនួនទាំងនេះ។ គាត់បានបង្ហាញពីរបៀបប្រើឫសនៃចំនួនអវិជ្ជមានដើម្បីដោះស្រាយសមីការគូប និងបានបង្កើតក្បួនប្រមាណវិធីបូក ដក គុណ ចែក ដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃចំនួនកុំផ្លិច។

- **René Descartes (១៥៩៦–១៦៥០)៖** បានបង្កើតពាក្យ **"Imaginary Number"** (ចំនួននិម្មិត) សម្រាប់សម្គាល់ឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន។

- **Leonhard Euler (១៧០៧–១៧៨៣)៖** បានធ្វើឱ្យចំនួនកុំផ្លិចមានសារៈសំខាន់បំផុត ដោយបង្កើតនិមិត្តសញ្ញា i តំណាងឱ្យ $\sqrt{-1}$ (មកពីពាក្យ "Imaginary") និងរកឃើញរូបមន្តដ៏ល្បីល្បាញ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$។

- **Carl Friedrich Gauss (១៧៧៧–១៨៥៥)៖** បានផ្តល់ឈ្មោះជាផ្លូវការថា **"Complex Number"** (ចំនួនកុំផ្លិច) និងបង្ហាញពីរបៀបតាងចំនួនទាំងនេះលើប្លង់ធរណីមាត្រ (ប្លង់កុំផ្លិច) ដែលធ្វើឱ្យងាយស្រួលយល់ និងមើលឃើញជាក់ស្តែង។

១ សញ្ញាណនៃចំនួនកុំផ្លិច

១.១ ឯកតានិម្មិត

និយមន័យ ១ : ចំនួននិម្មិត

បើ $c>0$ នោះឫសការេនៃ $-c$គឺ $\sqrt{-c}=\sqrt{(-1)c}=\sqrt{c}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{c}i$ ដែល $i^2=-1$។

លំហាត់គំរូ ១

គណនាចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $\sqrt{-144}$ ខ. $\sqrt{-12}$ គ. $\sqrt{-169}$ ឃ. $\sqrt{-25}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ជាទូទៅ បើយើងមានរ៉ាឌីកង់អវិជ្ជមាន $-c$ $(c>0)$ យើងអាចសរសេរវាជា $c(-1)$ រួចជំនួស -1 ដោយ i^2 ព្រោះ $i^2=-1$។ ដូច្នេះ $\sqrt{-c}=\sqrt{ci^2}=i\sqrt{c}$។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $\sqrt{-144}=\sqrt{144\times(-1)}=\sqrt{144i^2}=12i$

ខ. $\sqrt{-12}=\sqrt{12\times(-1)}=\sqrt{12i^2}=\sqrt{4\times3}i=2i\sqrt{3}$

គ. $\sqrt{-169}=\sqrt{169\times(-1)}=\sqrt{169i^2}=13i$

ឃ. $\sqrt{-25}=\sqrt{25\times(-1)}=\sqrt{25i^2}=5i$

១.២ ស្វ័យទីn នៃi

ជាទូទៅ ១

ស្វ័យទីn នៃi ចំពោះគ្រប់k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគេបាន៖

ក. $i^{4k}=1$ ខ. $i^{4k+1}=i$ គ. $i^{4k+2}=-1$ ឃ. $i^{4k+3}=-i$

លំហាត់គំរូ ២

គណនាចំនួនខាងក្រោម៖

ក. i^{1975} ខ. i^{1979} គ. i^{2019} ឃ. i^{2021} ង. i^{2025} ច. i^{2026}

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ដើម្បីគណនាស្វ័យគុណ i^n យើងត្រូវយកនិទស្សន្ត n ចែកនឹង 4 ដើម្បីរកសំណល់ r។ ពេលនោះ $i^n = i^r$។ សំណល់ r អាចជា $0,1,2,3$ ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $1, i, -1, -i$ តាមលំដាប់។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. យក $1975 \div 4$ បានផលចែក 493 សំណល់ 3។ ដូច្នេះ $i^{1975} = i^{4(493)+3} = (i^4)^{493} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

ខ. យក $1979 \div 4$ បានផលចែក 494 សំណល់ 3។ ដូច្នេះ $i^{1979} = i^{4(494)+3} = (i^4)^{494} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

គ. យក $2019 \div 4$ បានផលចែក 504 សំណល់ 3។ ដូច្នេះ $i^{2019} = i^{4(504)+3} = (i^4)^{504} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

ឃ. យក $2021 \div 4$ បានផលចែក 505 សំណល់ 1។ ដូច្នេះ $i^{2021} = i^{4(505)+1} = (i^4)^{505} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$

ង. យក $2025 \div 4$ បានផលចែក 506 សំណល់ 1។ ដូច្នេះ $i^{2025} = i^{4(506)+1} = (i^4)^{506} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$

ច. យក $2026 \div 4$ បានផលចែក 506 សំណល់ 2។ ដូច្នេះ $i^{2026} = i^{4(506)+2} = (i^4)^{506} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

១.៣ សញ្ញាណនៃចំនួនកុំផ្លិច

និយមន័យ ២ : ចំនួននិម្មិត

ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានរាង $a+bi$ ដែលa និង bជាចំនួនពិត។ គេតាងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$។

លំហាត់គំរូ ៣

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $3+\sqrt{-144}$ ខ. $5+\sqrt{-12}$ គ. $6+\sqrt{-169}$ ឃ. $18-\sqrt{-169}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ បើយើងមានចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរាង $a+\sqrt{-c}$ នោះយើងត្រូវបំប្លែងរ៉ាឌីកង់អវិជ្ជមានទៅជាចំនួននិម្មិត ដោយប្រើលក្ខណៈ $\sqrt{-c} = i\sqrt{c}$។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $3+\sqrt{-144}=3+\sqrt{144\cdot(-1)}=3+12i$

ខ. $5+\sqrt{-12}=5+\sqrt{12\cdot(-1)}=5+i\sqrt{4\cdot 3}=5+2i\sqrt{3}$

គ. $6+\sqrt{-169}=6+\sqrt{169\cdot(-1)}=6+13i$

ឃ. $18-\sqrt{-169}=18-\sqrt{169\cdot(-1)}=18-13i$

ជាទូទៅ ២

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z តាងដោយ $\bar{z}=a-bi$។

លំហាត់គំរូ ៤

កំណត់ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $7+\sqrt{-49}$ ខ. $15+\sqrt{-121}$ គ. $11+\sqrt{-216}$ ឃ. $12-\sqrt{-288}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z=a+bi$ គឺ $\bar{z}=a-bi$។ ដូច្នេះយើងត្រូវសរសេរចំនួនដែលគេឲ្យជាទម្រង់ពីជគណិត $a+bi$ សិន ទើបទាញរកចំនួនឆ្លាស់របស់វា។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. តាង $z=7+\sqrt{-49}=7+7i$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $\bar{z}=7-7i$

ខ. តាង $z=15+\sqrt{-121}=15+11i$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $\bar{z}=15-11i$

គ. តាង $z=11+\sqrt{-216}=11+i\sqrt{36\cdot 6}=11+6i\sqrt{6}$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $\bar{z}=11-6i\sqrt{6}$

ឃ. តាង $z=12-\sqrt{-288}=12-i\sqrt{144\cdot 2}=12-12i\sqrt{2}$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $\bar{z}=12+12i\sqrt{2}$

ជាទូទៅ ៣

ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ តាងដោយ $-z=-a-bi$។

លំហាត់គំរូ ៥

កំណត់ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $7+\sqrt{-49}$ ខ. $15+\sqrt{-121}$ គ. $11+\sqrt{-216}$ ឃ. $12-\sqrt{-288}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ $z=a+bi$ គឺ $-z=-a-bi$ (ប្តូរសញ្ញាទាំងផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត)។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. តាង $z=7+\sqrt{-49}=7+7i$ នោះចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយគឺ $-z=-7-7i$

ខ. តាង $z=15+\sqrt{-121}=15+11i$ នោះចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយគឺ $-z=-15-11i$

គ. តាង $z=11+\sqrt{-216}=11+6i\sqrt{6}$ នោះចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយគឺ $-z=-11-6i\sqrt{6}$

ឃ. តាង $z=12-\sqrt{-288}=12-12i\sqrt{2}$ នោះចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយគឺ $-z=-12+12i\sqrt{2}$

១.៤ ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា

ជាទូទៅ ៤

ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា គេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ បើ $z_1=z_2 \Rightarrow a=c$ និង $b=d$។

លំហាត់គំរូ ៦

ចូរកំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិចទាំងពីរខាងក្រោមស្មើគ្នា៖

ក. $(a+bi)+(2-3i)=5+i$

ខ. $(a+bi)(1+i)=2+4i$

គ. $(a+bi)(2-i)=7+i$

ឃ. $(a+bi)^2=3+4i$

ង. $(a+bi)(a-bi)=13$

ច. $\dfrac{a+bi}{1+i}=2-i$

ឆ. $(a+bi)+(b-ai)=3+i$

ជ. $(a+bi)i=-2+5i$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ពីរចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា លុះត្រាតែផ្នែកពិតស្មើផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតស្មើផ្នែកនិម្មិត។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $(a+bi)+(2-3i)=5+i \implies (a+2)+(b-3)i=5+i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត យើងបាន៖

$$\begin{cases} a+2=5 \\ b-3=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$$

ខ. $(a+bi)(1+i)=2+4i \implies a+ai+bi+bi^2=2+4i$

$\implies (a-b)+(a+b)i=2+4i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=4 \end{cases}$$

បូកសមីការទាំងពីរបញ្ចូលគ្នាបាន $2a=6 \implies a=3$ ។ ជំនួសក្នុងសមីការទីពីរ $3+b=4 \implies b=1$។

ដូចនេះ $a=3, b=1$។

គ. $(a+bi)(2-i)=7+i \implies 2a-ai+2bi-bi^2=7+i$

$\implies (2a+b)+(-a+2b)i=7+i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} 2a+b=7 \\ -a+2b=1 \end{cases}$$

គុណសមីការទីពីរនឹង ២ រួចបូកនឹងសមីការទីមួយ យើងបាន $5b=9 \implies b=\frac{9}{5}$។ ជំនួសក្នុងសមីការទីមួយ $2a+\frac{9}{5}=7 \implies 2a=\frac{26}{5} \implies a=\frac{13}{5}$។

ដូចនេះ $a=\frac{13}{5}, b=\frac{9}{5}$។

ឃ. $(a+bi)^2=3+4i \implies a^2+2abi+b^2i^2=3+4i$

$\implies (a^2-b^2)+2abi=3+4i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \quad (1) \\ 2ab=4 \implies ab=2 \quad (2) \end{cases}$$

តាមលក្ខណៈម៉ូឌុល $|(a+bi)^2|=|3+4i| \implies a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5 \quad (3)$។

បូកសមីការ (1) និង (3) គេបាន $2a^2=8 \implies a^2=4 \implies a=\pm 2$។

- បើ $a=2$ នោះពី (2) គេបាន $b=1$។
- បើ $a=-2$ នោះពី (2) គេបាន $b=-1$។

ដូចនេះ $(a=2, b=1)$ ឬ $(a=-2, b=-1)$។

ង. $(a+bi)(a-bi)=13 \implies a^2-b^2i^2=13 \implies a^2+b^2=13$

សមីការនេះមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ (រាល់គូ (a,b) នៃចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2=13$)។ ឧទាហរណ៍ $a=\pm 3, b=\pm 2$ ឬ $a=\pm 2, b=\pm 3$ ជាដើម។

ឋ. $\dfrac{a+bi}{1+i}=2-i \implies a+bi=(2-i)(1+i)$

$\implies a+bi=2+2i-i-i^2=2+i+1=3+i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត គេបាន $a=3, b=1$។

ឆ. $(a+bi)+(b-ai)=3+i \implies (a+b)+(b-a)i=3+i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

បូកបញ្ចូលគ្នាបាន $2b=4 \implies b=2$។ ជំនួសបាន $a+2=3 \implies a=1$។

ដូចនេះ $a=1, b=2$។

ជ. $(a+bi)i=-2+5i \implies ai+bi^2=-2+5i$

$\implies -b+ai=-2+5i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត គេបាន $-b=-2 \implies b=2$ និង $a=5$។

ដូចនេះ $a=5, b=2$។

លំហាត់គំរូ ៧

កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម៖

១. $-6+3yi=3x-\sqrt{-25}$

២. $x-iy=3+4i$

៣. $(2+i)x+y=2-3i$

៤. $(1+i)x+(3-5i)y=1-3i$

ចម្លើយ:

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

១. $-6+3yi=3x-\sqrt{-25}$

ដោយ $\sqrt{-25}=5i$ គេបាន $-6+3yi=3x-5i$។ ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត៖ $\begin{cases} 3x=-6 \\ 3y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$

២. $x-iy=3+4i$

ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត គេបាន៖ $\begin{cases} x=3 \\ -y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$

៣. $(2+i)x+y=2-3i$

ពន្លាតអង្គទី១៖ $2x+xi+y=(2x+y)+xi$។ ផ្ទឹមអង្គទាំងពីរ៖ $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2(-3)+y=2 \Rightarrow y=8 \end{cases}$

៤. $(1+i)x+(3-5i)y=1-3i$

ពន្លាតអង្គទី១៖ $x+xi+3y-5yi=(x+3y)+(x-5y)i$។ ផ្ទឹមអង្គទាំងពីរ៖ $\begin{cases} x+3y=1 \\ x-5y=-3 \end{cases} \Rightarrow 8y=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ និង $x=-\frac{1}{2}$

២ ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

ក. ប្រមាណវិធីបូក
បើ $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ នោះគេបាន $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$។

ខ. ប្រមាណវិធីដក
បើ $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ នោះគេបាន $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$។

គ. ប្រមាណវិធីគុណ
បើ $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ នោះគេបាន $z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bci$។

ឃ. ប្រមាណវិធីចែក
បើ $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ នោះគេបាន $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$។

លំហាត់គំរូ ៨

ចូរធ្វើប្រមាណវិធីនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $(3+2i)+(5-4i)$

ខ. $(7-3i)-(2+5i)$

គ. $(2+i)(4-3i)$

ឃ. $(5-2i)(1+3i)$

ង. $\frac{6+4i}{2-i}$

ច. $\frac{3-5i}{1+2i}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ - វិធីបូកនិងដក៖ គណនាផ្នែកពិតជាមួយផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតជាមួយផ្នែកនិម្មិត។ - វិធីគុណ៖ គុណពង្រាយធម្មតា រួចជំនួស $i^2=-1$។ - វិធីចែក៖ គុណយកភាគយកនិងភាគបែងនឹងចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃភាគបែង រួចប្រើរូបមន្ត $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $(3+2i)+(5-4i)=(3+5)+(2-4)i=8-2i$

ខ. $(7-3i)-(2+5i)=(7-2)+(-3-5)i=5-8i$

គ. $(2+i)(4-3i)=8-6i+4i-3i^2=8-2i-3(-1)=11-2i$

ឃ. $(5-2i)(1+3i)=5+15i-2i-6i^2=5+13i-6(-1)=11+13i$

ង. $\frac{2+3i}{1-2i}=\frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{2+4i+3i+6i^2}{1^2+2^2}=\frac{2+7i-6}{5}=\frac{-4+7i}{5}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

ច. $\frac{4-i}{3+2i}=\frac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{12-8i-3i+2i^2}{3^2+2^2}=\frac{12-11i-2}{13}=\frac{10-11i}{13}=\frac{10}{13}-\frac{11}{13}i$

៣ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើ$z=a+bi$ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វាកំណត់ដោយ$\bar{z}=a-bi$។ ហើយបើគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិចz,wនោះគេបាន៖

ក. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ ខ. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$ គ. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ ឃ. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

លំហាត់គំរូ ៩

គេមាន $z=2-3i$ និង $w=3-i$ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាលក្ខណៈខាងក្រោមពិតជានិច្ច៖

ក. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ ខ. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$ គ. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ ឃ. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ យើងត្រូវគណនាអង្គខាងឆ្វេង និងអង្គខាងស្តាំដោយឡែកពីគ្នា រួចប្រៀបធៀបលទ្ធផល។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖ គេមាន $z=2-3i$ និង $w=3-i$

ក. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

អង្គខាងឆ្វេង៖ $z+w=(2-3i)+(3-i)=5-4i \implies \overline{z+w}=5+4i$

អង្គខាងស្តាំ៖ $\bar{z}+\bar{w}=(2+3i)+(3+i)=5+4i$

ដូចនេះ $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ ពិត។

ខ. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$

អង្គខាងឆ្វេង៖ $z-w=(2-3i)-(3-i)=-1-2i \implies \overline{z-w}=-1+2i$

អង្គខាងស្តាំ៖ $\bar{z}-\bar{w}=(2+3i)-(3+i)=-1+2i$

ដូចនេះ $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$ ពិត។

គ. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

អង្គខាងឆ្វេង៖ $z\cdot w=(2-3i)(3-i)=6-2i-9i+3i^2=3-11i \implies \overline{z\cdot w}=3+11i$

អង្គខាងស្តាំ៖ $\bar{z}\cdot\bar{w}=(2+3i)(3+i)=6+2i+9i+3i^2=3+11i$

ដូចនេះ $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ ពិត។

ឃ. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

អង្គខាងឆ្វេង៖ $\frac{z}{w} = \frac{2-3i}{3-i} = \frac{(2-3i)(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{6+2i-9i-3i^2}{10} = \frac{9-7i}{10} \implies \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{9+7i}{10}$

អង្គខាងស្តាំ៖ $\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{2+3i}{3+i} = \frac{(2+3i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{6-2i+9i-3i^2}{10} = \frac{9+7i}{10}$

ដូចនេះ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ពិត។

៤ សមីការដឺក្រេទី២ មានមេគុណពិត

ជាទូទៅ ៥

គេមានសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានរាង $ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$ និង $\Delta = b^2-4ac$ នោះឫសរបស់សមីការមានបីករណីដូចខាងក្រោម៖

ក. បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរគឺ $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$។

ខ. បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

គ. បើ $\Delta < 0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ ។ យើងអាចសរសេរសមីការជាទម្រង់កាណូនិច៖

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

តាង $\Delta = b^2-4ac$ ហៅថា ឌីសគ្រីមីណង់។ សមីការក្លាយជា $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$។

- បើ $\Delta > 0$ នោះ $x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \implies x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$។
- បើ $\Delta = 0$ នោះ $x+\frac{b}{2a} = 0 \implies x = \frac{-b}{2a}$។
- បើ $\Delta < 0$ នោះ $-\Delta > 0$។ ដោយ $i^2=-1$ គេអាចសរសេរ $\Delta = i^2(-\Delta) = (i\sqrt{-\Delta})^2$។
  សមីការក្លាយជា $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{(2a)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$។
  ទាញបាន $x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \implies x = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$។

លំហាត់គំរូ ១០

ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ខាងក្រោម៖

ក. $x^2-5x+6=0$

ខ. $x^2+3x-10=0$

គ. $2x^2-7x+3=0$

ឃ. $3x^2+5x-2=0$

ង. $x^2+2x+5=0$

ច. $2x^2-x+4=0$

ឆ. $x^2+4x+8=0$

ជ. $x^2+2x+5=0$

ឈ. $2x^2+3x+7=0$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ សមីការដឺក្រេទី២ មានរាង $ax^2+bx+c=0$ យើងអាចគណនាឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$ ដើម្បីរកឫស។ (ចំពោះលំហាត់នេះ $\Delta>0$ នាំឱ្យសមីការមានឫសជាចំនួនពិត)។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $x^2-5x+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1 \implies \sqrt{\Delta}=1$

$x_1=\dfrac{5-1}{2}=2,\quad x_2=\dfrac{5+1}{2}=3$

ខ. $x^2+3x-10=0$

$\Delta=(3)^2-4(1)(-10)=9+40=49 \implies \sqrt{\Delta}=7$

$x_1=\dfrac{-3-7}{2}=-5,\quad x_2=\dfrac{-3+7}{2}=2$

គ. $2x^2-7x+3=0$

$\Delta=(-7)^2-4(2)(3)=49-24=25 \implies \sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\dfrac{7-5}{4}=\dfrac{1}{2},\quad x_2=\dfrac{7+5}{4}=3$

ឃ. $3x^2+5x-2=0$

$\Delta=5^2-4(3)(-2)=25+24=49 \implies \sqrt{\Delta}=7$

$x_1=\dfrac{-5-7}{6}=-2,\quad x_2=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{1}{3}$

ង. $x^2+2x+5=0$

$\Delta=2^2-4(1)(5)=4-20=-16 \implies \sqrt{\Delta}=4i$

$x_1=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i,\quad x_2=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i$

ច. $2x^2-x+4=0$

$\Delta=(-1)^2-4(2)(4)=1-32=-31 \implies \sqrt{\Delta}=i\sqrt{31}$

$x_1=\dfrac{1-i\sqrt{31}}{4},\quad x_2=\dfrac{1+i\sqrt{31}}{4}$

ឆ. $x^2+4x+8=0$

$\Delta=4^2-4(1)(8)=16-32=-16 \implies \sqrt{\Delta}=4i$

$x_1=\dfrac{-4-4i}{2}=-2-2i,\quad x_2=\dfrac{-4+4i}{2}=-2+2i$

ជ. $x^2+2x+5=0$

$\Delta=2^2-4(1)(5)=4-20=-16 \implies \sqrt{\Delta}=4i$

$x_1=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i,\quad x_2=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i$

ឈ. $2x^2+3x+7=0$

$\Delta=3^2-4(2)(7)=9-56=-47 \implies \sqrt{\Delta}=i\sqrt{47}$

$x_1=\dfrac{-3-i\sqrt{47}}{4},\quad x_2=\dfrac{-3+i\sqrt{47}}{4}$

ករណីពិសេស (Special Cases)

ចំពោះសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ យើងមានករណីពិសេសមួយចំនួនដែលអាចរកឫសបានយ៉ាងរហ័ស៖

- **ករណីទី១** $(b=0)$៖ សមីការក្លាយជា $ax^2+c=0 \iff x^2=-\dfrac{c}{a}$។
  បើ $\dfrac{c}{a}>0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួននិម្មិតឆ្លាស់គ្នាគឺ $x=\pm i\sqrt{\dfrac{c}{a}}$។
- **ករណីទី២** $(c=0)$៖ សមីការក្លាយជា $ax^2+bx=0 \iff x(ax+b)=0$
  ទាញបានឫស៖ $x_1=0$ និង $x_2=-\dfrac{b}{a}$។
- **ករណីទី៣** $(a+b+c=0)$៖ សមីការមានឫសពីរគឺ $x_1=1$ និង $x_2=\dfrac{c}{a}$។
- **ករណីទី៤** $(a-b+c=0)$៖ សមីការមានឫសពីរគឺ $x_1=-1$ និង $x_2=-\dfrac{c}{a}$។

ជាទូទៅ ៦

ទ្រឹស្តីបទផលបូក និងផលគុណឫស (Vieta's Formulas) បើ x_1 និង x_2 ជាឫសទាំងពីរនៃសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ នោះយើងបានទំនាក់ទំនង៖

- **ផលបូកឫស** (Sum of Roots)៖ $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
- **ផលគុណឫស** (Product of Roots)៖ $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

បើដឹងផលបូក S និងផលគុណ P នោះ x_1,x_2 ជាឫសនៃសមីការ $X^2-SX+P=0$។

៥ ការតាងតាមបែបធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

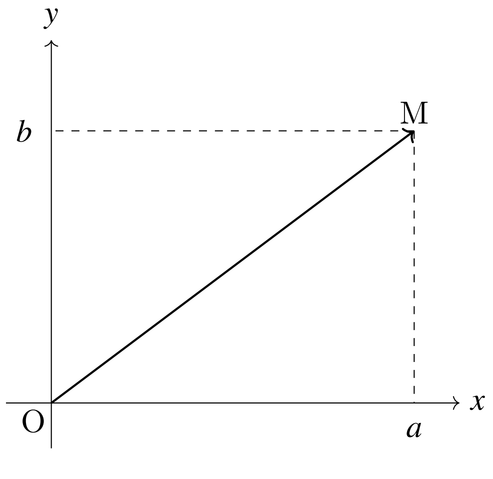
និយមន័យ ៣ : ប្លង់កុំផ្លិច

បើ $z=a+bi$ ជាចំនួនកុំផ្លិចគេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច z នេះនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចដោយចំនុច $P(a,b)$ ចំនុច P ហៅថាអាភិចនៃចំនួនកុំផ្លិច z។

៦ ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

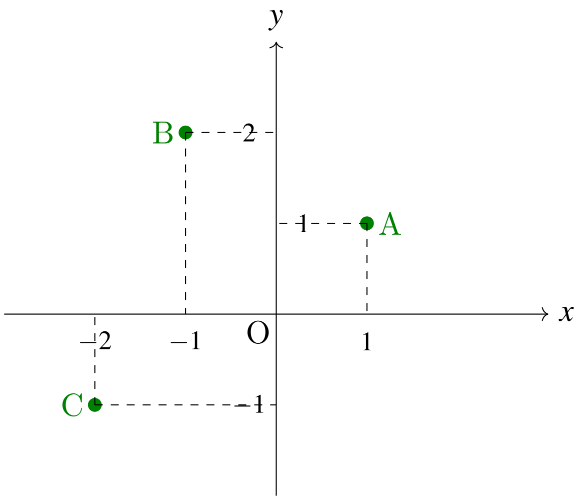
៦.១ ការតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

គេមានតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ xOy។ គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដោយចំនុច M ដែលមានកូអរដោនេ (a,b) ក្នុងតម្រុយនេះ។ គេថាចំណុច M ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ គេកំណត់សរសេរដោយ $M(z)$។ ម្យ៉ាងទៀតចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ អាចតាងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}=(a,b)$ គេថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួននៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ហើយកំណត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{OM}=(z)$។ នៅពេលដែលគេដៅចំណុចក្នុងតម្រុយតាងចំនួនកុំផ្លិចប្លង់ដែលប្រដាប់ដោយតម្រុយនេះហៅថា ប្លង់កុំផ្លិច។ អ័ក្ស $(x'Ox)$ ហៅថាអ័ក្សពិត ហើយអ័ក្ស $(y'Oy)$ ហៅថាអ័ក្សនិម្មិត។



លំហាត់គំរូ ១១

តាងរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $1+i, -1+2i$ និង $-2-i$ ដោយចំណុចក្នុងប្លង់ចំនួនកុំផ្លិច។ យើងតាងចំណុច A,B និង C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ $1+i, -1+2i$ និង $-2-i$ ដូចរូបខាងក្រោម៖

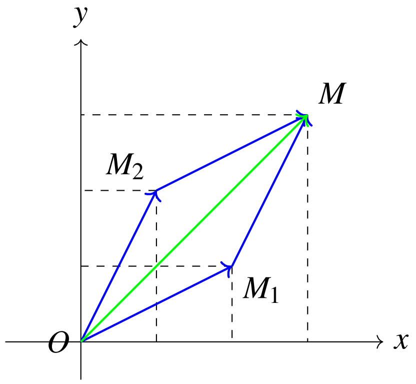


៧ វិចទ័ររូបភាព នៃផលបូក និង ផលដកចំនួនកុំផ្លិច និង ផលគុណចំនួនពិតជាមួយនឹងចំនួនកុំផ្លិច

៧.១ វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

លំហាត់គំរូ ១២

កំណត់រូបភាពនៃ z_1+z_2 ដែល $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ តាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង វិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_2។
គេបាន $z_1+z_2=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM}$ (OM ជាអង្កត់ទ្រូងប្រលេឡូក្រាម)



ដូចនេះ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃ z_1+z_2 ផលបូក $z_1+z_2=(2+i)+(1+2i)=3+3i$។

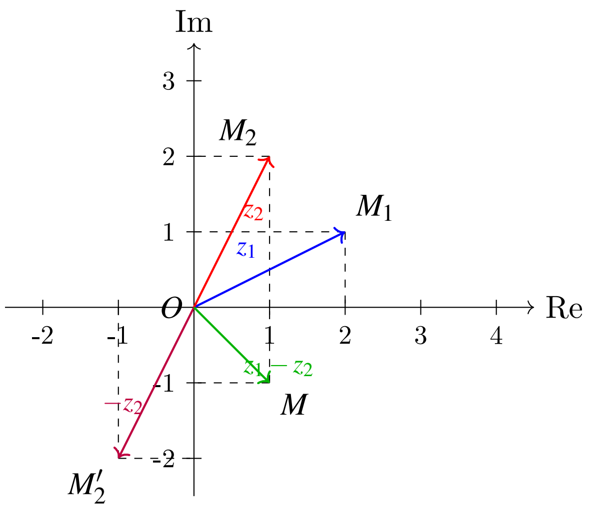
៧.២ វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃផលដកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

លំហាត់គំរូ ១៣

កំណត់រូបភាពនៃផលដក $z_1 - z_2$ ដែល $z_1 = 2+i$ និង $z_2 = 1+2i$។ យើងចាត់ទុកថា $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_2 និង វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2'}$ ជារូបភាពនៃ $-z_2 = -1-2i$ ។

គេបាន $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2'} = \overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃផលដក។

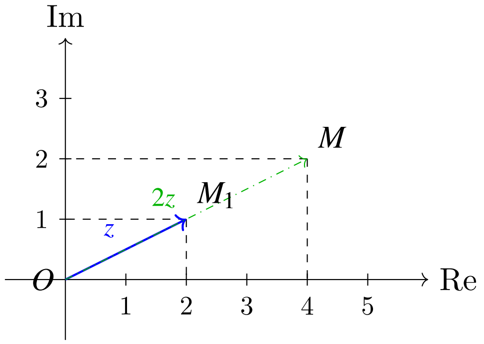
ចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2 = 2+i-(1+2i) = 1-i$។



៧.៣ វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃផលគុណចំនួនពិត នឹង ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

លំហាត់គំរូ ១៤

កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $2z$ បើ $z = 2+i$។ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូពភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ហើយ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $2z$ ។ គេបាន $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃ $2z$ ដែល $2z = 2(2+i) = 4+2i$។


Im
Re
3
2
1
O
1
2
3
4
5
M
M_1
2z
z

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ ចំនួនកុំផ្លិច (១០០ លំហាត់)

រៀបតាមកម្រិត *Bloom's Taxonomy Level 1 - 6*

១. តើឯកតានិម្មិត i^2 ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

២. បើ $z = a + bi$ តើ a ហៅថាផ្នែកអ្វី ?

ក. ផ្នែកនិម្មិត ខ. ផ្នែកពិត គ. ផ្នែកឆ្លាស់ ឃ. ផ្នែកផ្ទុយ

៣. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z = a + bi$ តាងដោយ៖

ក. $-z$ ខ. $|z|$ គ. $\bar{z}$ ឃ. z'

៤. តើ i^{4k} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ចំពោះ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. 0

៥. តើផ្នែកនិម្មិតនៃ $z = 7i$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 7 គ. $7i$ ឃ. -7

៦. រូបមន្តផលបូក $z_1 + z_2$ បើ $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ គឺ៖

ក. $(a+c)+(b+d)i$ គ. $ac+bdi$

ខ. $(a-c)+(b-d)i$ ឃ. $(a+d)+(b+c)i$

៧. បើ $z = a + bi$ នោះចំនួនផ្ទុយ $-z$ គឺ៖

ក. $a - bi$ ខ. $-a + bi$ គ. $-a - bi$ ឃ. $b + ai$

៨. តើ i^3 ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៩. សំណុំចំនួនកុំផ្លិចតាងដោយអក្សរអ្វី ?

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $\mathbb{Q}$ គ. $\mathbb{C}$ ឃ. $\mathbb{Z}$

១០. តើ i^1 ស្មើនឹងអ្វី ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

១១. ក្នុង $z = a + bi$ បើ $b = 0$ នោះ z ជា៖

ក. ចំនួនពិត ខ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ គ. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ ឃ. សូន្យ

១២. តើ i^{4k+1} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

១៣. តើ i^{4k+2} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

១៤. តើ i^{4k+3} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

១៥. អ័ក្សដេកក្នុងប្លង់កុំផ្លិចហៅថា៖

ក. អ័ក្សនិម្មិត ខ. អ័ក្សពិត គ. អ័ក្សអរដោនេ ឃ. គ្មានចម្លើយ

១៦. បើ $z=bi$ នោះ z ហៅថា៖

ក. ចំនួនពិត ខ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ គ. ចំនួនផ្ទុយ ឃ. ចំនួនឆ្លាស់

១៧. រូបមន្តផលដក z_1-z_2 គឺ៖

ក. $(a+c)+(b+d)i$ គ. $ac-bd$
ខ. $(a-c)+(b-d)i$ ឃ. $(a-d)+(b-c)i$

១៨. តើ i^0 ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. -1

១៩. ចំណុច $M(a,b)$ ហៅថាអ្វីនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$?

ក. ម៉ូឌុល ខ. អាភិច គ. អាគុយម៉ង់ ឃ. រូបភាព

២០. តើ $\sqrt{-1}$ កំណត់ដោយសញ្ញាអ្វី ?

ក. 1 ខ. i គ. -1 ឃ. π

២១. តើលទ្ធផលនៃ $\sqrt{-144}$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 12 ខ. -12 គ. $12i$ ឃ. $-12i$

២២. បើ $z=3-2i$ តើផ្នែកនិម្មិត $Im(z)$ គឺ៖

ក. 3 ខ. 2 គ. -2 ឃ. $-2i$

២៣. បើ z ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ នោះគេបាន៖

ក. $Re(z)=0$ ខ. $Im(z)=0$ គ. $z=0$ ឃ. $Re(z)=Im(z)$

២៤. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ចំណុច $M(a,b)$ ជាអាភិចនៃ៖

ក. $z = b + ai$ ខ. $z = a + bi$ គ. $z = a - bi$ ឃ. $z = -a - bi$

២៥. ស្វ័យគុណ i^{2026} មានតម្លៃស្មើនឹង៖

ក. i ខ. $-i$ គ. 1 ឃ. -1

២៦. តើ $\sqrt{-25}$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 5 ខ. -5 គ. $5i$ ឃ. $-5i$

២៧. តើផ្នែកពិតនៃ $z = -4 + 9i$ គឺ៖

ក. 4 ខ. -4 គ. 9 ឃ. $9i$

២៨. បើ $z = \sqrt{-16} + 3$ នោះទម្រង់ពីជគណិតគឺ៖

ក. $4i + 3$ ខ. $3 + 4i$ គ. $3 - 4i$ ឃ. $-3 + 4i$

២៩. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z = -2 - 5i$ គឺ៖

ក. $2 + 5i$ ខ. $-2 + 5i$ គ. $2 - 5i$ ឃ. $-2 - 5i$

៣០. ចំនួនផ្ទុយនៃ $z = 6 - i$ គឺ៖

ក. $-6 - i$ ខ. $6 + i$ គ. $-6 + i$ ឃ. $i - 6$

៣១. តើ i^{100} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៣២. តើ i^{50} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៣៣. បើ $z_1 = z_2$ នោះ៖

ក. ផ្នែកពិតស្មើគ្នា គ. ទាំង a និង b ត្រឹមត្រូវ

ខ. ផ្នែកនិម្មិតស្មើគ្នា ឃ. ផ្នែកពិតស្មើផ្នែកនិម្មិត

៣៤. តើ $\sqrt{-c}$ (បើ $c > 0$) ស្មើនឹង៖

ក. ci ខ. $\sqrt{ci}$ គ. $-\sqrt{c}$ ឃ. $\sqrt{c}i$

៣៥. អាភិចនៃចំណុច $P(0,3)$ គឺ៖

ក. 3 ខ. $3i$ គ. $-3i$ ឃ. 0

៣៦. អាភិចនៃចំណុច $Q(-2,0)$ គឺ៖

ក. -2 ខ. $-2i$ គ. 2 ឃ. $2i$

៣៧. តើ i^{11} ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៣៨. ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ជាចំនួនពិត លុះត្រាតែ៖

ក. $a=0$ ខ. $b=0$ គ. $a=b$ ឃ. $a=1$

៣៩. តើ $\sqrt{-12}$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\sqrt{3}$ ខ. $2\sqrt{3}i$ គ. $3\sqrt{2}i$ ឃ. $12i$

៤០. បើ $z=a-bi$ នោះ $\bar{z}$ គឺ៖

ក. $a-bi$ ខ. $a+bi$ គ. $-a+bi$ ឃ. $-a-bi$

៤១. គណនា $(3+2i)+(5-4i)$៖

ក. $8+6i$ ខ. $8-2i$ គ. $2-2i$ ឃ. $8+2i$

៤២. គណនាផលគុណ $(2+i)(3-i)$៖

ក. $6-i$ ខ. $5+i$ គ. $7+i$ ឃ. $7-i$

៤៣. រក x,y បើ $x+yi=(2-i)^2$៖

ក. $x=3,y=-4$ ខ. $x=5,y=-4$ គ. $x=3,y=4$ ឃ. $x=5,y=4$

៤៤. គណនា $\frac{1+i}{1-i}$៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៤៥. ឫសនៃសមីការ $x^2+9=0$ គឺ៖

ក. $x=\pm 3$ ខ. $x=\pm 3i$ គ. $x=3i$ ឃ. $x=-9$

៤៦. គណនា $(1+i)+(2-3i)$៖

ក. $3-2i$ ខ. $3+2i$ គ. $3-4i$ ឃ. $1-2i$

៤៧. គណនា $(5+4i)-(2+i)$៖

ក. $3+3i$ ខ. $7+5i$ គ. $3+5i$ ឃ. $7+3i$

៤៨. គណនា $i^{10}+i^{20}$៖

ក. 0 ខ. 2 គ. $1-i$ ឃ. $i+1$

៤៩. គណនា $(2i)^3$៖

ក. $8i$ ខ. $-8i$ គ. $6i$ ឃ. $-6i$

៥០. គណនា $\frac{2}{i}$៖

ក. 2 ខ. -2 គ. $2i$ ឃ. $-2i$

៥១. បើ $z=1+i$ នោះ z^2 គឺ៖

ក. 2 ខ. $2i$ គ. $-2i$ ឃ. 1

៥២. គណនា $(3+i)(3-i)$៖

ក. 8 ខ. 9 គ. 10 ឃ. $10i$

៥៣. ឫសនៃសមីការ $x^2+16=0$ គឺ៖

ក. ± 4 ខ. $\pm 4i$ គ. 4 ឃ. $4i$

៥៤. គណនា $i(2-3i)$៖

ក. $3+2i$ ខ. $2i-3$ គ. $-3+2i$ ឃ. $3-2i$

៥៥. បើ $z=4-3i$ នោះ $z\cdot\bar{z}$ គឺ៖

ក. 7 ខ. 25 គ. 5 ឃ. 1

៥៦. គណនា $(1-i)^2$៖

ក. $2i$ ខ. $-2i$ គ. 2 ឃ. -2

៥៧. ឫសនៃសមីការ $x^2+1=0$ គឺ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. $\pm i$ ឃ. 0

៥៨. គណនា i^4+i^2៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 2 ឃ. -1

៥៩. បើ $x+yi=3-4i$ នោះ $x+y$ គឺ៖

ក. 7 ខ. -1 គ. 1 ឃ. -7

៦០. គណនា $(1+i)(1+i)$៖

ក. 2 ខ. $2i$ គ. 0 ឃ. $1+2i$

៦១. បើ $z=\frac{3-i}{1+2i}$ តើផ្នែកពិតរបស់ z គឺ៖

ក. $1/5$ ខ. 1 គ. $-7/5$ ឃ. 3

៦២. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $z=\frac{x-i}{1+i}$ ជាចំនួនពិត៖

ក. $x=1$ ខ. $x=-1$ គ. $x=0$ ឃ. $x=2$

៦៣. បើ $z_1=2+i$ និង $z_2=-2+i$ តើ z_1+z_2 ជាអ្វី?

ក. ចំនួនពិត ខ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ គ. សូន្យ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៦៤. បើ $z=(a+bi)^2$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ នោះគេបាន៖

ក. $a=0$ ខ. $b=0$ គ. $a^2=b^2$ ឃ. $a=b=0$

៦៥. តម្លៃនៃ $i+i^2+i^3$ គឺ៖

ក. i ខ. -1 គ. $-1+i$ ឃ. $-1-i$

៦៦. បើ $(x+yi)i=1$ នោះ x,y គឺ៖

ក. $x=0,y=1$ ខ. $x=0,y=-1$ គ. $x=1,y=0$ ឃ. $x=-1,y=0$

៦៧. បើ $z=\frac{1}{1+i}$ នោះ z ស្មើនឹង៖

ក. $1-i$ ខ. $\frac{1-i}{2}$ គ. $\frac{1+i}{2}$ ឃ. i

៦៨. ឫសនៃសមីការ $x^2-2x+2=0$ គឺ៖

ក. $1\pm i$ ខ. $2\pm 2i$ គ. $-1\pm i$ ឃ. ± 1

៦៩. បើ $z=i^{1975}$ តើ z ស្មើនឹងអ្វី?

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៧០. បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $z+\bar{z}$ ជានិច្ចកាលជា៖

ក. ចំនួនពិត ខ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ គ. សូន្យ ឃ. មិនអាចកំណត់

៧១. បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $z-\bar{z}$ ជានិច្ចកាលជា៖

ក. ចំនួនពិត ខ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ គ. សូន្យ ឃ. មិនអាចកំណត់

៧២. កំណត់តម្លៃ a បើ $a+2i=3+bi$៖

ក. 2 ខ. 3 គ. b ឃ. 0

៧៣. បើ $z=(1+i)^4$ នោះ z ស្មើនឹង៖

ក. $4i$ ខ. -4 គ. 4 ឃ. $-4i$

៧៤. តើផ្នែកនិម្មិតនៃ $z=\frac{1}{i}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. 0 ឃ. i

៧៥. បើ $z=1-i$ នោះ $\bar{z}^2$ គឺ៖

ក. $2i$ ខ. $-2i$ គ. 2 ឃ. -2

៧៦. រក x បើ $x+i=\bar{i}$៖

ក. 0 ខ. 1 គ. -1 ឃ. គ្មានចម្លើយ

៧៧. បើ $z=\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ នោះ z ស្មើនឹង៖

ក. 6 ខ. -6 គ. $6i$ ឃ. $-6i$

៧៨. បើ $z=a+bi$ និង $\bar{z}=a-bi$ នោះ $z\cdot\bar{z}$ គឺ៖

ក. a^2-b^2 ខ. a^2+b^2 គ. $2a$ ឃ. $2bi$

៧៩. បើ $z=i+i^2+i^3+i^4$ នោះ z គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. -1

៨០. ឫសនៃសមីការ $x^2+x+1=0$ មានឌីស្ក្រីមីណង់ Δ ស្មើ៖

ក. 1 ខ. -3 គ. 3 ឃ. -4

៨១. តើតម្លៃនៃ $i^1+i^2+i^3+i^4$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. -1

៨២. បើ $\bar{z}=-z$ នោះ z ជាចំនួនប្រភេទអ្វី?

ក. ចំនួនពិត ខ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ គ. ចំនួនសូន្យ ឃ. មិនអាចកំណត់

៨៣. តើតម្លៃនៃ $(1+i)^{10}$ ស្មើនឹង៖

ក. $32i$ ខ. $-32i$ គ. 32 ឃ. -32

៨៤. បើ $z=\frac{1+i}{2+i}$ នោះផ្នែកនិម្មិតគឺ៖

ក. $1/5$ ខ. $3/5$ គ. $-1/5$ ឃ. $2/5$

៨៥. តើមួយណាជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ?

ក. $(1+i)^2$ ខ. $(1+i)^4$ គ. $(1-i)^2$ ឃ. ទាំង a និង c

៨៦. បើ $z=\cos\theta+i\sin\theta$ នោះ $|z|$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. $\sin\theta$ ឃ. $\cos\theta$

៨៧. បើ $z=1+i\sqrt{3}$ នោះ z^2-2z+4 ស្មើ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. 4

៨៨. តម្លៃ $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. i ឃ. -1

៨៩. បើ $z=\frac{1+2i}{1-i}$ នោះ $\bar{z}$ គឺ៖

ក. $-1/2-3i/2$ ខ. $-1/2+3i/2$ គ. $1/2-3i/2$ ឃ. $1/2+3i/2$

៩០. បើ $z_1=1+i, z_2=1-i$ នោះ $z_1/z_2+z_2/z_1$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 2 គ. $2i$ ឃ. -2

៩១. សមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឫស $x=1\pm 2i$ គឺ៖

ក. $x^2-2x+5=0$ គ. $x^2-2x-5=0$

ខ. $x^2+2x+5=0$ ឃ. $x^2+x+1=0$

៩២. រក z បើ $z^2=3+4i$៖

ក. $2+i$ និង $-2-i$ ខ. $2-i$ គ. $1+2i$ ឃ. $3+i$

៩៣. កំណត់តម្លៃ n តូចបំផុតដែលវិជ្ជមាន ដើម្បីឲ្យ $i^n=1$៖

ក. 2 ខ. 4 គ. 8 ឃ. 1

៩៤. បើ $z=x+yi$ និង $|z-i|=|z+i|$ នោះសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ជា៖

ក. រង្វង់ ខ. អ័ក្សពិត គ. អ័ក្សនិម្មិត ឃ. បន្ទាត់ $y=x$

៩៥. រកតម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ $x^2-2x+k=0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច៖

ក. $k>1$ ខ. $k<1$ គ. $k=1$ ឃ. $k=0$

៩៦. បើ $z=(1+i)^n$ ជាចំនួនពិត នោះ n អាចជា៖

ក. 2 ខ. 4 គ. 1 ឃ. 3

៩៧. បង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឫស i និង $-i$៖

ក. $x^2+1=0$ ខ. $x^2-1=0$ គ. $x^2+x+1=0$ ឃ. $x^2=0$

៩៨. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $\bar{z}=z^2$៖

ក. 1 គ. 0

ខ. $-1/2+i\sqrt{3}/2$ ឃ. គ្រប់ចម្លើយខាងលើ

៩៩. បើ $z+1/z=2$ នោះ $z^{100}+1/z^{100}$ គឺ៖

ក. 2 ខ. 1 គ. 0 ឃ. $2i$

១០០. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $z+2\bar{z}=6-i$៖

ក. $2+i$ ខ. $2-i$ គ. $1+i$ ឃ. $3-i$

លំហាត់អនុវត្តន៍បន្ថែម

១. ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួននិមិត្ត៖

ក. $\sqrt{-4}$ គ. $\sqrt{-6}$ ង. $\sqrt{-144}$ ឆ. $\sqrt{-64}$

ខ. $-\sqrt{-121}$ ឃ. $\sqrt{-12}$ ច. $-\sqrt{-17}$ ជ. $\sqrt{-169}$

២. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម៖

ក. $(1+i)x+(3-5i)y=1-3i$

ខ. $-4-\sqrt{-8}=-x-iy$

គ. $(x-1)+(y+3)i=1-3i$

ឃ. $(x+iy)^2=8-6i$

ង. $(x+iy)^2=-5+12i$

ច. $(x+iy)^2=24-10i$

៣. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច៖

ក. $x^2=-18$ គ. $x^2=-81$ ង. $x^2=-625$ ឆ. $x^2=-\frac{48}{121}$

ខ. $x^2=-24$ ឃ. $x^2=-75$ ច. $x^2=-10^{-4}$ ជ. $x^2=-\frac{3}{100}$

៤. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ សម្រាប់៖

ក. $z_1=2+5i, z_2=1-7i$

គ. $z_1=3+4i, z_2=-1+2i$

ខ. $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$

ឃ. $z_1=5-2i, z_2=2+3i$

ចម្លើយ:

៥. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$៖

ក. $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{2+i}$

គ. $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{1-i}{\sqrt{2}+i}$

ង. $\dfrac{4-3i}{2+3i}+\dfrac{2+i}{1-i}$

ខ. $\dfrac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}$

ឃ. $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{1-2i}{1+i}$

ច. $\dfrac{5-2i}{1+i}-\dfrac{3+4i}{2-i}$

ចម្លើយ:

៦. គណនា i^n សម្រាប់ចមនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. i^5 គ. i^{23} ង. i^{47} ឆ. i^{63} ឈ. i^{91}

ខ. i^{12} ឃ. i^{34} ច. i^{56} ជ. i^{78} ញ. i^{104}

ចម្លើយ:

៧. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$។

ក. $(2+i)^3$ គ. $(3+2i)^3$ ង. $(1+3i)^3$ ឆ. $(2-i)^3$

ខ. $(1-i)^4$ ឃ. $(2-3i)^4$ ច. $(4-i)^4$ ជ. $(3-2i)^4$

ចម្លើយ:

៨. គេឲ្យ x ជាចំនួនពិត។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត។

ក. $\frac{2+i}{1-i}+\frac{x+3i}{1+2i}$

គ. $\frac{3+4i}{2-i}+\frac{x+2i}{1+i}$

ខ. $\frac{1-2i}{1+i}+\frac{x-i}{2-i}$

ឃ. $\frac{5-3i}{3+2i}+\frac{x-i}{2-i}$

ចម្លើយ:

៩. តាងសំណុំចំណុចនៃចំនួនកុំផ្លិច $-1-3i, -1+3i, 2, 4i, 2-3i$ និង $1+i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ចម្លើយ:

១០. គេឲ្យ $z_1 = 3+2i$ និង $z_2 = 2+4i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ កំណត់រូបភាពនៃ៖

ក. z_1+z_2 គ. $2z_2$ ង. $-z_1$ ឆ. z_1+3z_2

ខ. z_1-z_2 ឃ. z_2+2z_1 ច. $-2z_1+z_2$ ជ. $2z_1-3z_2$

ចម្លើយ:

១១. កំណត់រូបភាពនៃ ចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម បើ $z_1 = 2+i$ និង $z_2 = -2+i$។

ក. z_1+z_2 ខ. z_1-z_2 គ. $-2z_2$ ឃ. $3z_1+z_2$

ចម្លើយ:

១២. ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់៖

ក. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\ z=2-i, w=1+3i$

ខ. $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w},\ z=3+i, w=2-2i$

គ. $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w},\ z=1+i, w=2-i$

ឃ. $\overline{\dfrac{z}{w}}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}},\ z=3-2i, w=1+2i$

ចម្លើយ:

១៣. គណនា $z\cdot\bar{z}$ និង $|z|$ សម្រាប់ចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $z = 3 - 4i$ | គ. $z = -2 + 3i$ | ង. $z = 4 + i$

ខ. $z = 1 + 2i$ | ឃ. $z = 2 - 5i$ | ច. $z = -3 - 4i$

ចម្លើយ:

១៤. ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេដែលមានមេគុណពិត៖

ក. $x^2+2x+5=0$

ខ. $x^2-4x+13=0$

គ. $2x^2+3x+4=0$

ឃ. $x^2+x+1=0$

ង. $x^2-2x+2=0$

ច. $x^2+6x+13=0$

ចម្លើយ:

១៥. ចូរកំណត់ a,b ដើម្បីឲ្យ $(a+bi)(1+i)=2+4i$ និង $(a+bi)^2=3+4i$។

ចម្លើយ:

១៦. កំណត់តម្លៃ a,b ដើម្បីឲ្យ $(a+bi)(2-i)=7+i$ និង $\frac{a+bi}{1+i}=2-i$។

ចម្លើយ:

១៧. គណនាប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិចៈ

ក. $(3+2i)+(5-4i)$

ខ. $(7-3i)-(2+5i)$

គ. $(2+i)(4-3i)$

ឃ. $(5-2i)(1+3i)$

ង. $\frac{6+4i}{2-i}$

ច. $\frac{3-5i}{1+2i}$

ចម្លើយ:

១៨. ចូរគោងរូបភាពវ៉ិចទ័រ z_1+z_2 និង z_1-z_2 សម្រាប់ $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$។

ចម្លើយ:

១៩. គណនារូបភាពវិចទ័រ $2z$ សម្រាប់ $z=2+i$ និង $z=-1+3i$។

ចម្លើយ:

២០. តាងចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i, -1+2i, -2-i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ចម្លើយ:

២១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$៖

ក. $(3+i)(2-4i)$ ខ. $\dfrac{5+2i}{2-i}$ គ. $\dfrac{3-4i}{1+3i}$

ចម្លើយ:

២២. ចូរសរសេរលក្ខណៈចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\overline{z_1+z_2}, \overline{z_1-z_2}, \overline{z_1 \cdot z_2}$ និង $\overline{\frac{z_1}{z_2}}$ សម្រាប់ $z_1 = 2-i, z_2 = 3+4i$។

ចម្លើយ:

២៣. ចូរកំណត់តម្លៃ x សម្រាប់ $\frac{1+i}{2-i}+\frac{x-i}{1+i}$ ជាចំនួនពិត។

ចម្លើយ:

២៤. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ បើ

ក. $z_1=2+5i, z_2=1-7i$

ខ. $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$

ចម្លើយ:

២៥. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $a+bi$

ក. $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{2+i}$

ខ. $\dfrac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}$

គ. $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{1-i}{\sqrt{2}+i}$

ចម្លើយ:

២៦. គណនា $(1+2i)^3$ និង $(3i-4)^4$។

ចម្លើយ:

២៧. គេឲ្យ x ជាចំនួនពិត។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត។

ចម្លើយ:

២៨. កំណត់រូបភាព តាងសំណុំចំណុចនៃចំនួនកុំផ្លិច $-1-3i, -1+3i, 2, 4i$ និង $2-3i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ចម្លើយ:

២៩. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+2i$ និង $z_2 = 2+4i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ កំណត់រូបភាពនៃ

ក. z_1+z_2 ខ. z_1-z_2 គ. $2z_2$ ឃ. z_2+2z_1

ចម្លើយ:

៣០. កំណត់រូភាពនៃ $z_1+z_2, z_1-z_2, -2z_2$ បើ $z_1 = 2+i$ និង $z_2 = -2+i$។

ចម្លើយ:

៣១. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1+3i$, $z_3 = 1-i$។ ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $a+bi$៖

ក. $z_4 = z_1 - 3z_2$ គ. $z_6 = -iz_3$ ង. $z_8 = z_2^4$

ខ. $z_5 = iz_1^2$ ឃ. $z_7 = z_1 \times z_2$ ច. $z_9 = \dfrac{z_1}{z_3}$

ចម្លើយ:

៣២. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = 1+2i$, $Z_2 = 1$ និង $Z_3 = 2i$។ ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $A = 2Z_1 - 3Z_2 + Z_3$ ខ. $B = Z_1^2 - Z_2Z_3$ គ. $C = \dfrac{Z_1+Z_3}{Z_2-Z_3}$

ចម្លើយ:

៣៣. ដោះស្រាយសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$៖

ក. $z+(2-i)\bar{z}=3+4i$

គ. $z^2+(1-i)z+4-2i=0$

ខ. $\dfrac{z-1}{z+1}=i$

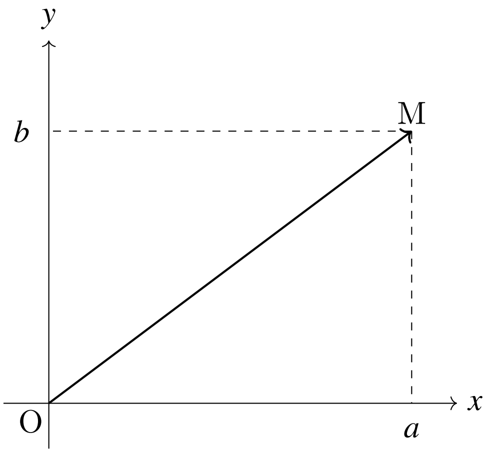
ឃ. $\begin{cases} z_1+z_2=4-2i \\ z_1\cdot z_2=5-i \end{cases}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ២ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

១ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ និង ចំណុច M ជារូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់ (xoy)។ OM ហៅថាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច យើងនឹងគណនាម៉ូឌុលនេះ។ រូបភាពខាងក្រោមយើងមានត្រីកោណ OMN ជាត្រីកោណកែងត្រង់ N។ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន $OM^2=ON^2+NM^2 \Rightarrow OM^2=a^2+b^2 \iff OM=\sqrt{a^2+b^2}$។ ដូចនេះ $OM=\sqrt{a^2+b^2}$ ជាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$។



និយមន័យ ១ : ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ $z=a+bi; \quad a,b\in\mathbb{R}$ ជាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z កំណត់ដោយ $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$។

លំហាត់គំរូ ១

គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $4-3i$ ខ. $-4-3i$ គ. $4+3i$ ឃ. $-4+3i$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ តាងដោយ $|z|$ និងកំណត់ដោយរូបមន្ត $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$។ ម៉ូឌុលជានិច្ចកាលជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ឬសូន្យ។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. តាង $z=4-3i$ នោះ $|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

ខ. តាង $z=-4-3i$ នោះ $|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

គ. តាង $z=4+3i$ នោះ $|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

ឃ. តាង $z=-4+3i$ នោះ $|z|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

ជាទូទៅ ១

បើគេមាន z,z_1,z_2 ជាបីចំនួនកុំផ្លិចនោះ យើងបានលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

ក. $|z|=|-z|=|\bar{z}|$

ខ. $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

គ. $|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|$

ឃ. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|};\quad z_2\neq 0$

ង. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $z=a+bi,\ z_1=a_1+b_1i,$ និង $z_2=a_2+b_2i$ ដែល $a,b,a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$ ។

ក. $|z|=|-z|=|\bar{z}|$

តាមរូបមន្តម៉ូឌុល $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ នោះយើងបាន៖

ម៉ូឌុលនៃ z គឺ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

ចំនួនផ្ទុយ $-z=-a-bi\Rightarrow|-z|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

ចំនួនឆ្លាស់ $\bar{z}=a-bi\Rightarrow|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

ដូចនេះ $|z|=|-z|=|\bar{z}|$ ។

ខ. $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

ផលគុណ $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

ម្យ៉ាងទៀត $|z|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$

ដូចនេះ $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ ។

គ. $|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|$

តាមលក្ខណៈ (b) ៖ $|z_1\cdot z_2|^2=(z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2})=(z_1\cdot z_2)(\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2)=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2=(|z_1||z_2|)^2$

ទាញឫសការេ (ដោយសារម៉ូឌុលវិជ្ជមាន) នោះ $|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|$ ។

ឃ. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

ស្រដៀងនឹងចំណុច (c) ដែរ៖ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2=\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{z_1\cdot\bar{z}_1}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\dfrac{|z_1|^2}{|z_2|^2}=\left(\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right)^2$

ទាញឫសការេ នោះ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ។

ង. $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$
តាមលក្ខណៈ (b) ៖ $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$
$= |z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2+2\Re(z_1\bar{z}_2)$
ដោយ $\Re(w) \le |w|$ នាំឱ្យ $2\Re(z_1\bar{z}_2) \le 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$
ដូចនេះ $|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$
ទាញឫសការេ នោះ $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ ។

លំហាត់គំរូ ២

គេមាន $z=4-3i, z_1=2-i, z_2=3+2i$ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា៖

ក. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

ខ. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

គ. $|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$

ឃ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad z_2 \neq 0$

ង. $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ប្រើរូបមន្តម៉ូឌុល $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ ដើម្បីគណនាអង្គនីមួយៗ រួចប្រៀបធៀបគ្នាដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖ គេមាន $z=4-3i, z_1=2-i, z_2=3+2i$

ក. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
$|z| = |4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$
$|-z| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$
$|\bar{z}| = |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$
ដូចនេះ $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ ពិត។

ខ. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$
$|z|^2 = 5^2 = 25$
$z\cdot\bar{z} = (4-3i)(4+3i) = 4^2+3^2 = 16+9 = 25$
ដូចនេះ $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ ពិត។

គ. $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$
$z_1\cdot z_2 = (2-i)(3+2i) = 6+4i-3i-2i^2 = 8+i \implies |z_1\cdot z_2| = \sqrt{8^2+1^2} = \sqrt{65}$
$|z_1| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$ និង $|z_2| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \implies |z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{13} = \sqrt{65}$
ដូចនេះ $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ ពិត។

ឃ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

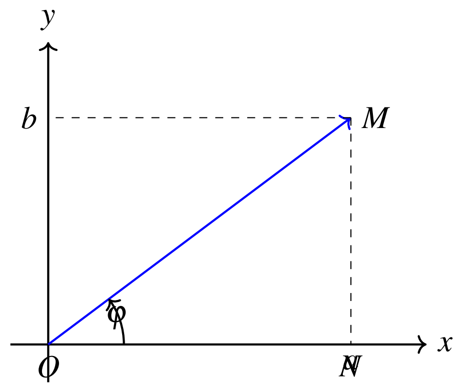
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{2-i}{3+2i}\right| = \left|\frac{(2-i)(3-2i)}{3^2+2^2}\right| = \left|\frac{6-4i-3i+2i^2}{13}\right| = \left|\frac{4-7i}{13}\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2+\left(\frac{-7}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+49}{169}} = \frac{\sqrt{65}}{13}$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{65}}{13}$$

ដូចនេះ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ពិត។

២ អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃ z ។ មុំដែលកំណត់ដោយ $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ ហៅថាអាគុយម៉ងនៃចំនួនកុំផ្លិច z តាងដោយ $arg(z)$។ បើ φ ជាអាគុយម៉ង់មួយនៃ z នោះគេបាន $arg(z)=\varphi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$។ N ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M លើអ័ក្ស (Ox) ក្នុងត្រីកោណកែង OMN កែងត្រង់ N គេបាន $\cos\varphi=\frac{a}{r}$ និង $\sin\varphi=\frac{b}{r}$ ដែល $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ជាម៉ូឌុលនៃ z។



និយមន័យ ២ : អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

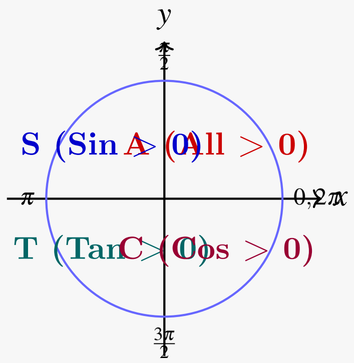
បើ $z=a+bi$ ជាទម្រង់ពីជគណិតដែលមានម៉ូឌុល $r=|z|$ និង អាគុយម៉ង់ $arg(z)=\varphi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$ នោះទម្រង់កុំផ្លិចនៃ z។

របៀបកំណត់អាគុយម៉ង់ θ តាមការ៉ាដង់ (ASTC)

ដើម្បីកំណត់អាគុយម៉ង់ θ នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ $(z\neq 0)$៖

1. គណនាម៉ូឌុល $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$។
2. ប្រើរូបមន្ត $\cos\theta=\frac{a}{r}$ និង $\sin\theta=\frac{b}{r}$ ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់សញ្ញាតាមការ៉ាដង់៖
   - **ការ៉ាដង់ទី១** $(a>0,b>0)$៖ $\theta=\alpha$ ស្ថិតក្នុង $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (អនុគមន៍ទាំងអស់វិជ្ជមាន All >0)

- **ការ្រដង់ទី២** $(a<0,b>0)$៖ $\theta=\pi-\alpha$ ស្ថិតក្នុង $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ $(\sin>0)$
- **ការ្រដង់ទី៣** $(a<0,b<0)$៖ $\theta=-(\pi-\alpha)$ ឬ $\theta=\pi+\alpha$ $(\tan>0)$
- **ការ្រដង់ទី៤** $(a>0,b<0)$៖ $\theta=-\alpha$ ឬ $\theta=2\pi-\alpha$ $(\cos>0)$



លំហាត់គំរូ ៣

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z_1=1+i\sqrt{3}$ ខ. $z_1=-1+i$ គ. $z_1=\sqrt{3}-i$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ដើម្បីសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$៖ ១. រកម៉ូឌុល $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ២. ទាញ r ជាកត្តា ធ្វើឱ្យ $z=r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)$ ៣. រកមុំ θ (អាគុយម៉ង់) ដែល $\cos\theta=\frac{a}{r}$ និង $\sin\theta=\frac{b}{r}$។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $z_1=1+i\sqrt{3}$

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$$

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ខ. $z_2=-1+i$

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

គ. $z_3=\sqrt{3}-i$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$z_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

ជាទូទៅ ២

លក្ខណៈនៃអាគុយម៉ង់ (Properties of Argument) ចំពោះចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ z_1, z_2 និង $n \in \mathbb{Z}$ យើងមានលក្ខណៈសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

ក. **អាគុយម៉ង់នៃផលគុណ៖** $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

ខ. **អាគុយម៉ង់នៃផលចែក៖** $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

គ. **អាគុយម៉ង់នៃស្វ័យគុណ៖** $\arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z) \pmod{2\pi}$

ឃ. **អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់៖** $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$

៣ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ជាទម្រង់ពីជគណិត យើងអាចសរសេរ z ទៅជាទម្រង់មួយផ្សេងទៀត។ ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\varphi$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\varphi$ បើយើងជំនួសតម្លៃ $a = r\cos\varphi$ និង $b = r\sin\varphi$ ក្នុងចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ គេបាន $z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$។

និយមន័យ ៣ : ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ អាចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$។

លំហាត់គំរូ ៤

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z_1 = 2 + 2i$ ខ. $z_2 = -\sqrt{3} + i$ គ. $z_3 = -8 - 8i$ ឃ. $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ អនុវត្តរូបមន្ត $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ និង $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ដូចលំហាត់មុនដែរ។ បើចំនួននោះជាចំនួនពិតសុទ្ធ ឬនិម្មិតសុទ្ធ មុំ θ អាចរកបានយ៉ាងងាយគឺ $0, \pi$ (សម្រាប់ពិតសុទ្ធ) ឬ $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (សម្រាប់និម្មិតសុទ្ធ)។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $z_1 = 2 + 2i$

$$r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ខ. $z_2=-\sqrt{3}+i$

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$
$$z_2=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

គ. $z_3=-3i$

$r=|-3|=3$ (ព្រោះវាជានិម្មិតសុទ្ធ)

$$z_3=3(0-i)=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ឃ. $z_4=4$

$r=|4|=4$ (ព្រោះវាជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន)

$$z_4=4(1+0i)=4(\cos 0+i\sin 0)$$

៤ ផលគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ជាទូទៅ ៣

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ និង $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ នោះគេបាន៖
$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងមាន $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ និង $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$។

$$\begin{aligned}z_1z_2&=[r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]\cdot[r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)]\\&=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]\end{aligned}$$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ៖ $\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2$ និង $\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2$។
ដូចនេះយើងបាន៖ $z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$។

លំហាត់គំរូ ៥

គេមានចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត $z_1=2\sqrt{3}-2i$ និង $z_2=-1+i\sqrt{3}$។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 ។ គណនាផលគុណ z_1z_2។

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ពេលយើងមានចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រពីរ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ នោះផលគុណមានរូបមន្ត៖ $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ ។ (គុណម៉ូឌុល និងបូកអាគុយម៉ង់)។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖ បំប្លែង z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រសិន៖

ចំពោះ $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ $r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$ $z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\right.\right.$

ចំពោះ $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ $r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ $z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

គណនាផលគុណ z_1z_2៖ $z_1z_2 = (4\times 2)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$ ដោយ $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi + 4\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $z_1z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0+i) = 8i$ ។

ប្រតិបត្តិ ១

គេមានចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 ។ គណនាផលគុណ z_1z_2។ ចម្លើយ $z_1z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

ចម្លើយ:

៥ ផលចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ជាទូទៅ ៤

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ នោះគេបាន៖
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងមាន $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ដែល $z_2 \neq 0$។

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}
\end{aligned}$$

ដោយ $\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 = 1$ និងតាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ៖ $\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$ ហើយ $\sin(\varphi_1-\varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2$។
ដូចនេះយើងបាន៖ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$។

លំហាត់គំរូ ៦

គេមានចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត $z_1 = i$ និង $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 ។ គណនាផលគុណ $\dfrac{z_1}{z_2}$។

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ចំពោះផលចែកជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ យើងប្រើរូបមន្ត៖ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ។ (ចែកម៉ូឌុល និងដកអាគុយម៉ង់)។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖ បំប្លែង z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ចំពោះ $z_1 = i$ មាន $r_1 = 1$ និង $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$។ ដូច្នេះ $z_1 = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

ចំពោះ $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ $r_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}} = 1$ មុំ θ_2 ដែល $\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\sin\theta_2 = \dfrac{1}{2}$ គឺ $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$។ ដូច្នេះ $z_2 = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

គណនាផលចែក $\frac{z_1}{z_2}$៖ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ ដោយ $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi-\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ ២

គេមានចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត $z_1=1+i$ និង $z_2=-1+i\sqrt{3}$។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 ។ គណនាផលគុណ $\frac{z_1}{z_2}$។

ចម្លើយ:

៦ បំប្លែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិច

ទ្រឹស្តីបទ ៥

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបំប្លែងវិលផ្ចិត O (O ជាគល់តម្រុយ) និង មុំ α នោះ $z'=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $M(z)$ និង $M'(z')$ ជារូបភាពក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ តាមនិយមន័យបំប្លែងវិលផ្ចិត O និងមុំ α គឺ៖

$$\begin{cases} OM'=OM \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=\alpha \end{cases}$$

បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ z' មានម៉ូឌុល $r'=OM'=OM=r$ និងអាគុយម៉ង់ $\theta'=\theta+\alpha$។
ដូចនេះ $z'=r[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)]$
ទាញបាន $z'=[\cos\alpha+i\sin\alpha]\cdot[r(\cos\theta+i\sin\theta)]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z$។

មេរៀនទី ២ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (១០០ លំហាត់)

១. រូបមន្តគណនាម៉ូឌុលនៃ $z = a + bi$ គឺ៖

ក. $a^2 + b^2$ ខ. $\sqrt{a^2 + b^2}$ គ. $\sqrt{a^2 - b^2}$ ឃ. $a + b$

២. ក្នុងទម្រង់ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ តើ r តំណាងឱ្យអ្វី?

ក. អាគុយម៉ង់ ខ. ផ្នែកពិត គ. ម៉ូឌុល ឃ. ផ្នែកនិម្មិត

៣. តើ $arg(z)$ ហៅថាអ្វីនៃចំនួនកុំផ្លិច z?

ក. ម៉ូឌុល ខ. អាគុយម៉ង់ គ. អាភិច ឃ. រូបភាព

៤. បើ z_1, z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច តើ $|z_1 \cdot z_2|$ ស្មើនឹងអ្វី?

ក. $|z_1| + |z_2|$ ខ. $|z_1| - |z_2|$ គ. $|z_1| \cdot |z_2|$ ឃ. $|z_1|/|z_2|$

៥. បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ នោះ $\bar{z}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ៖

ក. $r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ គ. $-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

ខ. $r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ ឃ. ទាំង a និង b

៦. តម្លៃ $|i|$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. -1 ឃ. i

៧. អាគុយម៉ង់នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន $z = a$ $(a > 0)$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. $3\pi/2$

៨. អាគុយម៉ង់នៃចំនួននិម្មិតសុទ្ធ $z = bi$ $(b > 0)$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. 2π

៩. បើ $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ តើ $|z|$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

ក. 0 ខ. 1 គ. 2 ឃ. $\cos\alpha$

១០. រូបមន្តផលចែក $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ គឺ៖

ក. $|z_1| - |z_2|$ ខ. $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ គ. $|z_1 + z_2|$ ឃ. $|z_1| \cdot |z_2|$

១១. បំប្លែងវិលផ្ចិត O មុំ α កំណត់ដោយ៖

ក. $z' = z + \alpha$ ខ. $z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ គ. $z' = z/\alpha$ ឃ. $z' = \bar{z}$

១២. តើ $|z|^2$ ស្មើនឹងអ្វី?

ក. $z \cdot \bar{z}$ ខ. z^2 គ. $\bar{z}^2$ ឃ. $2z$

១៣. អាគុយម៉ង់នៃ $z = -5$ គឺៈ

ក. 0 ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. $-\pi/2$

១៤. ក្នុងត្រីកោណកែង OMN បើ $OM = r$ នោះ a ស្មើនឹងៈ

ក. $r\sin\varphi$ ខ. $r\cos\varphi$ គ. $r\tan\varphi$ ឃ. r

១៥. ម៉ូឌុលនៃ $z = 3i$ គឺៈ

ក. 0 ខ. 3 គ. -3 ឃ. 9

១៦. ម៉ូឌុលនៃ $z = 4 - 3i$ គឺៈ

ក. 1 ខ. 7 គ. 5 ឃ. 25

១៧. បើ $z = 1 + i$ នោះអាគុយម៉ង់ចម្បង φ គឺៈ

ក. $\pi/6$ ខ. $\pi/4$ គ. $\pi/3$ ឃ. $\pi/2$

១៨. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z = 2i$ គឺៈ

ក. $2(\cos 0 + i\sin 0)$ គ. $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

ខ. $2(\cos\pi + i\sin\pi)$ ឃ. $2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

១៩. បើ $arg(z_1) = \pi/3$ និង $arg(z_2) = \pi/6$ នោះ $arg(z_1 z_2)$ គឺៈ

ក. $\pi/18$ ខ. $\pi/2$ គ. $\pi/9$ ឃ. $\pi/6$

២០. បើ $arg(z_1) = \pi/2$ និង $arg(z_2) = \pi/4$ នោះ $arg(z_1/z_2)$ គឺៈ

ក. $3\pi/4$ ខ. $\pi/4$ គ. $\pi/2$ ឃ. $\pi/8$

២១. ម៉ូឌុលនៃ $z = \sqrt{3} + i$ គឺៈ

ក. 1 ខ. 2 គ. 3 ឃ. 4

២២. ចំនួនកុំផ្លិច $z = -1 + i$ ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទីប៉ុន្មាន ?

ក. ទី១ ខ. ទី២ គ. ទី៣ ឃ. ទី៤

២៣. ម៉ូឌុលនៃ $z = (1 + i)^2$ គឺៈ

ក. 1 ខ. 2 គ. $\sqrt{2}$ ឃ. 4

២៤. បើ $|z| = 3$ នោះ $|-z|$ គឺៈ

ក. 3 ខ. -3 គ. 9 ឃ. 0

២៥. តម្លៃនៃ $arg(\bar{z})$ បើ $arg(z)=\theta$ គឺ៖

ក. θ ខ. $-\theta$ គ. $\pi-\theta$ ឃ. $\pi+\theta$

២៦. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z=-4$ គឺ៖

ក. $4(\cos 0+i\sin 0)$ ខ. $4(\cos\pi+i\sin\pi)$ គ. $4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ ឃ. $-4(\cos\pi+i\sin\pi)$

២៧. បើ $z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$ នោះអាគុយម៉ង់ φ គឺ៖

ក. $\pi/4$ ខ. $3\pi/4$ គ. $-\pi/4$ ឃ. $5\pi/4$

២៨. ម៉ូឌុលនៃ $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 2 ឃ. $\sqrt{2}$

២៩. បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ $1/z$ មានម៉ូឌុលស្មើនឹង៖

ក. r ខ. $1/r$ គ. $-r$ ឃ. r^2

៣០. អាគុយម៉ង់នៃ $z=-i$ គឺ៖

ក. $\pi/2$ ខ. π គ. $3\pi/2$ ឃ. 2π

៣១. ចំនួន $z=3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ មានផ្នែកពិតស្មើនឹង៖

ក. 3 ខ. $3/2$ គ. $3\sqrt{3}/2$ ឃ. $1/2$

៣២. ម៉ូឌុលនៃ $z=-7+24i$ គឺ៖

ក. 24 ខ. 25 គ. 31 ឃ. 17

៣៣. បើ $z=1-i\sqrt{3}$ នោះ φ គឺ៖

ក. $\pi/3$ ខ. $2\pi/3$ គ. $-\pi/3$ ឃ. $5\pi/6$

៣៤. តើ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ ហៅថាវិសមភាពអ្វី?

ក. វិសមភាពកូស៊ី គ. វិសមភាពមិនញ៉ាកូវស្គី
ខ. វិសមភាពត្រីកោណ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៣៥. បើ $z=\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$ តើនេះជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រត្រឹមត្រូវឬទេ?

ក. ត្រឹមត្រូវ គ. មិនត្រឹមត្រូវ (ព្រោះម៉ូឌុលអវិជ្ជមាន)
ខ. មិនត្រឹមត្រូវ (ព្រោះ sin និង cos ប្រទាំគ្នា) ឃ. គ្មានចម្លើយ

៣៦. គណនាម៉ូឌុលនៃ $z=(3+4i)(1+i)$៖

ក. 7 ខ. $5\sqrt{2}$ គ. 25 ឃ. 10

៣៧. សរសេរ $z=1+i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ គ. $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

ខ. $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ឃ. $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

៣៨. បើ $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ នោះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ៖

ក. $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ គ. $2(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ ឃ. $2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

ខ. $2(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

៣៩. គណនា $|z|$ បើ $z=\dfrac{(1+i)^4}{1-i}$៖

ក. 2 ខ. $2\sqrt{2}$ គ. 4 ឃ. $4\sqrt{2}$

៤០. បើ $z=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$ នោះទម្រង់ពីជគណិតគឺ៖

ក. $1+i\sqrt{3}$ ខ. $-1+i\sqrt{3}$ គ. $-1-i\sqrt{3}$ ឃ. $1-i\sqrt{3}$

៤១. រក z' ជាបំប្លែងវិលនៃ $z=1+i$ តាមមុំ $\pi/2$៖

ក. $1-i$ ខ. $-1+i$ គ. $-1-i$ ឃ. i

៤២. បើ $z_1=3(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$ និង $z_2=2(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$ នោះ z_1z_2 គឺ៖

ក. $6(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ គ. $5(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

ខ. $6(\cos 800^\circ+i\sin 800^\circ)$ ឃ. $6(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$

៤៣. គណនា z^2 បើ $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$៖

ក. $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ គ. $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

ខ. $2(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16})$ ឃ. $4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

៤៤. រកម៉ូឌុលនៃ $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i}$៖

ក. 1 ខ. 2 គ. $\sqrt{3}$ ឃ. 4

៤៥. អាគុយម៉ង់នៃ $z=(1+i)^2$ គឺ៖

ក. $\pi/4$ ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. 0

៤៦. បើ $z=6(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$ នោះទម្រង់ពីជគណិតគឺ៖

ក. $3\sqrt{3}+3i$ ខ. $-3\sqrt{3}-3i$ គ. $-3\sqrt{3}+3i$ ឃ. $3-3i\sqrt{3}$

៤៧. គណនា $arg(z_1/z_2)$ បើ $z_1 = i$ និង $z_2 = 1+i$៖

ក. $\pi/2$ ខ. $\pi/4$ គ. $3\pi/4$ ឃ. $-\pi/4$

៤៨. រក z' បើ $z = 2i$ បង្វិលតាមមុំ $\pi/3$៖

ក. $-\sqrt{3}+i$ ខ. $\sqrt{3}+i$ គ. $1+i\sqrt{3}$ ឃ. $-1+i\sqrt{3}$

៤៩. ម៉ូឌុលនៃ $z = \sqrt{2}-i\sqrt{7}$ គឺ៖

ក. 3 ខ. 9 គ. $\sqrt{5}$ ឃ. $\sqrt{11}$

៥០. បើ $z = 1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ នោះ $|z|$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. $\sqrt{3}$ គ. 2 ឃ. 3

៥១. សរសេរ $z = -i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$ គ. $-1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

ខ. $1(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$ ឃ. $1(\cos\pi+i\sin\pi)$

៥២. គណនា $|z_1+z_2|$ បើ $z_1 = 4$ និង $z_2 = 3i$៖

ក. 7 ខ. 1 គ. 5 ឃ. 25

៥៣. បើ $z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ នោះ z^n គឺ (រូបមន្តដឺម័រ)៖

ក. $r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ គ. $r^n(\cos\varphi^n+i\sin\varphi^n)$

ខ. $nr(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ ឃ. $r(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

៥៤. រក $arg(z)$ បើ $z = \dfrac{1}{1+i}$៖

ក. $\pi/4$ ខ. $-\pi/4$ គ. $3\pi/4$ ឃ. $\pi/2$

៥៥. គណនា $|z_1\cdot z_2|$ បើ $z_1 = 1-i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3}+i$៖

ក. 2 ខ. 4 គ. 8 ឃ. 1

៥៦. បើ $z = 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ នោះ z^4 គឺ៖

ក. 16 ខ. -16 គ. $16i$ ឃ. $-16i$

៥៧. រកម៉ូឌុលនៃ $z = \sin\theta+i\cos\theta$៖

ក. $\sin\theta+\cos\theta$ ខ. 1 គ. 0 ឃ. $\tan\theta$

៥៨. អាគុយម៉ង់នៃ $z = 5$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. 2π

៥៩. បើ $z=-1-i\sqrt{3}$ នោះ $arg(z)$ គឺ៖

ក. $2\pi/3$ ខ. $4\pi/3$ គ. $-\pi/3$ ឃ. $5\pi/6$

៦០. គណនា $\left|\frac{2+i}{2-i}\right|$៖

ក. 1 ខ. $5/3$ គ. 0 ឃ. 2

៦១. បើ $|z-i|=|z+i|$ នោះសំណុំចំណុច $M(z)$ ជា៖

ក. រង្វង់ ខ. អ័ក្សពិត (Ox) គ. អ័ក្សនិម្មិត (Oy) ឃ. បន្ទាត់ $y=x$

៦២. បើ $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ នោះ z អាចជា៖

ក. $\cos\theta+i\sin\theta$ ខ. $\sin\theta+i\cos\theta$ គ. $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៦៣. សរសេរ $z=\sin\theta+i\cos\theta$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$
គ. $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$
ខ. $\cos(\theta-\frac{\pi}{2})+i\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$
ឃ. គ្មានចម្លើយ

៦៤. បើ $|z|=1$ ស្រាយថា $\bar{z}$ ស្មើនឹង៖

ក. z ខ. $1/z$ គ. $-z$ ឃ. z^2

៦៥. អាគុយម៉ង់នៃ $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ គឺ៖

ក. $\pi/12$ ខ. $\pi/7$ គ. $5\pi/12$ ឃ. $\pi/6$

៦៦. បើ $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ នោះអាគុយម៉ង់ φ គឺ៖

ក. α ខ. $\alpha/2$ គ. 2α ឃ. $\pi-\alpha$

៦៧. តើ $z=-2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ បំប្លែងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រត្រូវគឺ៖

ក. $2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$
គ. $2(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$
ខ. $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$
ឃ. គ្មានចម្លើយ

៦៨. បើ $z=(1+i)^{10}$ នោះ z ជាចំនួន៖

ក. ចំនួនពិតវិជ្ជមាន
គ. ចំនួននិម្មិតសុទ្ធ
ខ. ចំនួនពិតអវិជ្ជមាន
ឃ. ស្មើនឹងសូន្យ

៦៩. បើ $|z|=2$ នោះ $|z^2\cdot\bar{z}|$ ស្មើនឹង៖

ក. 4 ខ. 8 គ. 16 ឃ. 2

៧០. តម្លៃនៃ $arg(z)+arg(\bar{z})$ ជានិច្ចកាលស្មើនឹង៖

ក. π ខ. 0 គ. 2π ឃ. $\pi/2$

៧១. បើ $z=\dfrac{2(\cos\pi+i\sin\pi)}{4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}$ នោះ r គឺ៖

ក. 2 ខ. 0.5 គ. 4 ឃ. 8

៧២. រកមុំបង្វិល θ បើ $z=1+i$ ទៅជា $z'=-1+i$៖

ក. $\pi/2$ ខ. π គ. $3\pi/4$ ឃ. $\pi/4$

៧៣. បើ $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$ នោះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រត្រឹមត្រូវគឺ៖

ក. $\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$ គ. $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$

ខ. $\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៧៤. ម៉ូឌុលនៃ $z=\dfrac{i}{1+i}$ គឺ៖

ក. $1/\sqrt{2}$ ខ. 1 គ. $\sqrt{2}$ ឃ. $1/2$

៧៥. បើ $z=\tan\alpha+i\ (0<\alpha<\pi/2)$ នោះ $|z|$ គឺ៖

ក. $1/\cos\alpha$ ខ. $1/\sin\alpha$ គ. 1 ឃ. $\tan\alpha$

៧៦. រក $arg(z)$ បើ $z=\sqrt{3}-i$៖

ក. $-\pi/6$ ខ. $\pi/6$ គ. $5\pi/6$ ឃ. $11\pi/6$

៧៧. បើ $z_1=z_2$ នោះគេបាន៖

ក. $r_1=r_2$ ខ. $\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$ គ. ទាំង a និង b ឃ. គ្មានចម្លើយ

៧៨. បើ $z=-1+i\sqrt{3}$ នោះ z^3 ជាចំនួន៖

ក. ពិត ខ. និម្មិតសុទ្ធ គ. សូន្យ ឃ. មិនអាចកំណត់

៧៩. សំណុំចំណុច $|z|=3$ ជា៖

ក. បន្ទាត់ត្រង់ ខ. រង្វង់ផ្ចិត O កាំ 3 គ. រង្វង់ផ្ចិត O កាំ 9 ឃ. ចំណុចមួយ

៨០. បើ $arg(z)=\pi/4$ នោះ $arg(z^2)$ គឺ៖

ក. $\pi/8$ ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. 0

៨១. តម្លៃនៃ $\left|\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{1-i}\right|$ គឺ៖

ក. 2 ខ. $2\sqrt{2}$ គ. 4 ឃ. $\sqrt{2}$

៨២. បើ $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ នោះ $1+z+z^2$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. i ឃ. -1

៨៣. គណនា $(1+i)^{10}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $32i$ ខ. $-32i$ គ. 32 ឃ. $1024i$

៨៤. បើ $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ នោះ z^{10} គឺ៖

ក. $1024i$ ខ. $-1024i$ គ. $32i$ ឃ. $-32i$

៨៥. ក្នុង $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ បង្ហាញថា $|z|=2\cos\frac{\theta}{2}$។ តើនេះពិតចំពោះ θ ក្នុងចន្លោះណា?

ក. $(-\pi,\pi)$ គ. $(-\pi/2,\pi/2)$
ខ. $(0,2\pi)$ ឃ. គ្រប់ θ

៨៦. បើ $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}}$ នោះអាគុយម៉ង់ចម្បងគឺ៖

ក. $5\pi/9$ ខ. $-\pi/3$ គ. $\pi/3$ ឃ. $2\pi/3$

៨៧. បើ $z=\dfrac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}$ នោះម៉ូឌុល $|z|$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. $\sin\alpha$ ឃ. $\cos\alpha$

៨៨. តម្លៃនៃ $(\sqrt{3}+i)^{100}$ នឹងស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទីប៉ុន្មាន? (តាមរយៈការគណនាអាគុយម៉ង់)

ក. ទី១ ខ. ទី២ គ. ទី៣ ឃ. ទី៤

៨៩. បើ $arg(z)=\alpha$ និង $arg(w)=\beta$ នោះ $arg(\bar{z}\cdot w)$ គឺ៖

ក. $\alpha+\beta$ ខ. $\beta-\alpha$ គ. $\alpha-\beta$ ឃ. $-\alpha-\beta$

៩០. ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z|=1$ និង $arg(z)=\pi$ គឺ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៩១. បង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឫស $z=2(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3})$៖

ក. $z^2-2z+4=0$ ខ. $z^2+2z+4=0$ គ. $z^2-4z+4=0$ ឃ. $z^2-2z-4=0$

៩២. រកចំនួនកុំផ្លិច z បើ $|z|=3$ និង $arg(z)=5\pi/6$៖

ក. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ខ. $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ គ. $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ឃ. $3i$

៩៣. បើ $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ នោះ z^n ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. -1

៩៤. កំណត់តម្លៃ a,b បើ $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=a+bi$៖

ក. $a=-1,b=\sqrt{3}$ ខ. $a=1,b=\sqrt{3}$ គ. $a=-1,b=-\sqrt{3}$ ឃ. $a=\sqrt{3},b=-1$

៩៥. បើ z ជាឫសនៃ $z^2-z+1=0$ នោះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z អាចជា៖

ក. $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ គ. $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ខ. $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៩៦. រក n តូចបំផុតដែលវិជ្ជមាន ដើម្បីឱ្យ $(1+i)^n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន៖

ក. 2 ខ. 4 គ. 8 ឃ. 16

៩៧. បើ $|z-1|=1$ តើចំណុច $M(z)$ បង្កើតបានជាអ្វី?

ក. រង្វង់ផ្ចិត $(1,0)$ កាំ 1 ខ. រង្វង់ផ្ចិត $(0,1)$ កាំ 1 គ. បន្ទាត់ $x=1$ ឃ. បន្ទាត់ $y=1$

៩៨. កំណត់ z បើ $z^2=i$ (ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ)៖

ក. $\pm(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ខ. $\pm(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ គ. $\pm(1+i)$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៩៩. បើ $z=\cos\theta+i\sin\theta$ រកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $1-z$៖

ក. $2\sin\frac{\theta}{2}[\cos(\frac{\theta-\pi}{2})+i\sin(\frac{\theta-\pi}{2})]$ គ. $2\sin\frac{\theta}{2}[\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}]$

ខ. $2\cos\frac{\theta}{2}[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}]$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

១០០. បើ $M'(z')$ ជាបំប្លែងវិលនៃ $M(z=-4+4i)$ តាមមុំ $\pi/6$ ជុំវិញគល់ O នោះ z' គឺ៖

ក. $2(-\sqrt{3}-1)+2(\sqrt{3}-1)i$ គ. $-4+4i$

ខ. $2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)i$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

លំហាត់

១. គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $|-2i|$

ខ. $|\sqrt{3}+i|$

គ. $|4+3i|+|4-3i|$

ឃ. $|(4+3i)+(4-3i)|$

ង. $|i^7|$

ច. $|i^{100}|$

ចម្លើយ:

២. បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច។ ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម៖

ក. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

ខ. $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

គ. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; z_2\neq 0$

ចម្លើយ:

៣. គណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $2+2i$ គ. $-2+2i\sqrt{3}$ ង. $4i$ ឆ. $-\sqrt{3}+i$

ខ. $-3+3i$ ឃ. $-1-i$ ច. $-4i$ ជ. $8+8i\sqrt{3}$

ចម្លើយ:

៤. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ

ក. z_1 ខ. z_2 គ. $z_1 \cdot z_2$ ឃ. $\frac{z_1}{z_2}$

ចម្លើយ:

៥. តើចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម មួយណាមានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ?

ក. $z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

ខ. $z_2 = -5\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

គ. $z_3 = -2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

ឃ. $z_4 = 6\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

ង. $z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ច. $z_6 = -\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

ចម្លើយ:

៦. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z_1 = -5 - 5i\sqrt{3}$ គ. $2 + 2i$ ង. $-20i$ ឆ. $2\sqrt{3} + 2i$

ខ. $\dfrac{-5+i}{2-3i}$ ឃ. $-i$ ច. $15i$ ជ. $-6i$

ចម្លើយ:

៧. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

៨. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត បើគេឲ្យ

ក. $|z| = 2$ និង $arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$

គ. $|z| = 1$ និង $arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$

ខ. $|z| = 4$ និង $arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

ឃ. $|z| = 6$ និង $arg(z) = \dfrac{7\pi}{6}$

ចម្លើយ:

៩. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\tan\alpha+i$ ដែល $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ និង $w=4\left(\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}\right)$ ចូរគណនា៖

ក. $|z|$ ខ. $|zw|$ គ. $|agr(z)|$ ឃ. $arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$

ចម្លើយ:

១០. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

១១. គេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច z និង w ដែល $z=-2+5i, zw=14+23i$។

ក. គណនា w។

ខ. កំណត់រូបភាពនៃ z និង w ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតែមួយ។

ចម្លើយ:

១២. ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 គណនា $z_1\cdot z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ បើ៖

ក. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ និង $z_2 = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

ខ. $z_1 = -5 + 5i$ និង $z_2 = -3i$

គ. $z_1 = 2i$ និង $z_2 = -3i$

ចម្លើយ:

១៣. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xOy) តាមចំណុច $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z=-4+4i)$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\frac{\pi}{6}$ ។ ចូរកំណត់ z'។

ចម្លើយ:

១៤. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xOy) ចំណុច $M(z)$ មានរូបភាព $M'(z')$ តាមបំប្លែងវិលផ្ចិត O មុំ θ។ ចូរកំណត់ θ ដោយដឹងថា z' កំណត់ដោយចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1}{2}\left(z+i\sqrt{3}z\right)$ ខ. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}z-iz\right)$ គ. iz

ចម្លើយ:

១៥. គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $z=-7+24i$ ខ. $z=(1+i)^4$ គ. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{7}$

ចម្លើយ:

១៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ គេបាន $|z| = |\bar{z}| = |-z|$។

ចម្លើយ:

១៧. គណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $1 + i\sqrt{3}$ ខ. $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ គ. 5 ឃ. $-3i$

ចម្លើយ:

១៨. គេមាន $z_1 = \sqrt{3} + i$ និង $z_2 = 1 + i$។ គណនា $arg(z_1 \cdot z_2)$ និង $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$។

ចម្លើយ:

១៩. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z_1 = -4$

ខ. $z_2 = 3i$

គ. $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$

ឃ. $z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

ចម្លើយ:

២០. គេឱ្យ $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$។ គណនា z^2 និង z^4 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

២១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{1-i}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

២២. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $2(\cos\theta+i\sin\theta)=a+bi$ នៅពេល $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$។

ចម្លើយ:

២៣. គេឱ្យ $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ z^{10} ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ:

២៤. បំប្លែង $z=-1-i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចកំណត់អាគុយម៉ង់នៃ z។

ចម្លើយ:

២៥. គណនាផលគុណ $z_1 \cdot z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

បើ $z_1 = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$ និង $z_2 = 2(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$។

ចម្លើយ:

២៦. សរសេរ $z=\dfrac{2(\cos\pi+i\sin\pi)}{4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$ ឱ្យទៅជាទម្រង់ $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$។

ចម្លើយ:

២៧. គេមាន $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$។ សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រត្រឹមត្រូវ (ដែល $r>0$)។

ចម្លើយ:

២៨. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច គេមានចំណុច $M(z=1+i\sqrt{3})$។
រកកូអរដោនេចំណុច M' ដែលជាចំណុចបង្វិលនៃ M ជុំវិញគល់ O នូវមុំ $\alpha=\frac{\pi}{3}$។

ចម្លើយ:

២៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមាន $|z|=1$ នោះគេបាន $\bar{z}=\frac{1}{z}$។

ចម្លើយ:

៣០. សរសេរ $z=(1+i)^{10}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ:

៣១. គេឱ្យ $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$។ បង្ហាញថា $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ ចំពោះ $-\pi < \theta < \pi$។

ចម្លើយ:

៣២. រកចំនួនកុំផ្លិច z ជាទម្រង់ពីជគណិត បើគេដឹងថា $|z| = 3$ និង $arg(z) = \frac{5\pi}{6}$។

ចម្លើយ:

៣៣. កំណត់មុំបង្វិល θ នៃបំប្លែងវិលផ្ចិត O ដែលប្លែងរូបភាពនៃ $z = 1 + i$ ទៅជា $z' = -1 + i$។

ចម្លើយ:

១ ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ ១

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ នោះគេបាន $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។ គេទាញបាន $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ហៅថារូបមន្តដឺម័រ។

សម្រាយបញ្ជាក់ (តាមវិចារណកថាគណិតវិទ្យា)៖

យើងចង់ស្រាយថា $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$។

- **ជំហានទី១៖** បើ $n = 1$ នោះ $z^1 = r^1(\cos 1\cdot\varphi + i\sin 1\cdot\varphi)$ ពិត។
- **ជំហានទី២៖** ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$។
- **ជំហានទី៣៖** យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$៖

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \\ &= [r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)]\cdot[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \\ &= r^{k+1}[\cos(k\varphi+\varphi) + i\sin(k\varphi+\varphi)] \quad \text{(តាមរូបមន្តផលគុណ)} \\ &= r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi] \end{aligned}$$

ពិត។ ដូចនេះ $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$។

លំហាត់គំរូ ១

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ គណនា z^7។

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ដើម្បីគណនាស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច យើងប្រើទ្រឹស្តីបទម័រ (De Moivre's Theorem)៖ $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ ។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖ គេមាន $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ តាមទ្រឹស្តីបទម័រ គេបាន៖ $z^7=2^7\left[\cos\left(7\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(7\times\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$z^7=128\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$

ដោយ $\frac{7\pi}{3}=2\pi+\frac{\pi}{3}$ នោះ $\cos\frac{7\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ និង $\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$។ ដូចនេះ $z^7=128\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=64+64i\sqrt{3}$ ។

លំហាត់គំរូ ២

ចូរគណនាចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $(1+i)^{2024}$ ខ. $(-2+2i)^{2026}$ គ. $(1+i\sqrt{3})^{2025}$

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ សម្រាប់ការគណនាស្វ័យគុណធំៗ យើងត្រូវ៖ ១. បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិចទៅជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រសិន។ ២. ប្រើទ្រឹស្តីបទម័រ ដើម្បីគណនា។ ៣. សម្រួលមុំ ដើម្បីកេតម្លៃពិតប្រាកដ។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

ក. $(1+i)^{2024}$

តាង $z=1+i \implies r=\sqrt{2}, \theta=\frac{\pi}{4}$។ ដូច្នេះ $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^{2024}=(\sqrt{2})^{2024}\left[\cos\left(2024\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2024\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]=2^{1012}(\cos 506\pi+i\sin 506\pi)$

ដោយ 506π ជាពហុគុណគូនៃ π នោះ $\cos(506\pi)=1$ និង $\sin(506\pi)=0$។ ដូចនេះ $(1+i)^{2024}=2^{1012}(1+0)=2^{1012}$ ។

ខ. $(-2+2i)^{2026}$

តាង $z=-2+2i \implies r=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}, \theta=\frac{3\pi}{4}$។ ដូច្នេះ $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z^{2026}=(2\sqrt{2})^{2026}\left[\cos\left(2026\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2026\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right]=2^{3039}\left(\cos\frac{3039\pi}{2}+i\sin\frac{3039\pi}{2}\right)$

ដោយ $\frac{3039\pi}{2}=1519\pi+\frac{\pi}{2}=1518\pi+\pi+\frac{\pi}{2}=1518\pi+\frac{3\pi}{2}$ ដែលត្រូវនឹងមុំ $\frac{3\pi}{2}$ (ឬ $-\frac{\pi}{2}$)។

នោះ $\cos\frac{3\pi}{2}=0, \sin\frac{3\pi}{2}=-1$។ ដូចនេះ $(-2+2i)^{2026}=-2^{3039}i$ ។

គ. $(1+i\sqrt{3})^{2025}$

តាង $z=1+i\sqrt{3} \implies r=2, \theta=\frac{\pi}{3}$។ ដូច្នេះ $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z^{2025} = 2^{2025}\left[\cos\left(2025\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2025\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2^{2025}(\cos 675\pi + i\sin 675\pi)$$

ដោយ 675π ជាពហុគុណសេសនៃ π នោះ $\cos(675\pi) = -1$ និង $\sin(675\pi) = 0$។ ដូចនេះ $(1+i\sqrt{3})^{2025} = 2^{2025}(-1) = -2^{2025}$ ។

២ អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រត្រីកោណ

ជាទូទៅ ២

ទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនកុំផ្លិច និងមុំក្នុងត្រីកោណ គេមានបីចំណុច $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ($A \neq B$ និង $A \neq C$)៖

ក. ផលធៀប $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ មានម៉ូឌុលស្មើ $\frac{AC}{AB}$ និងមានអាគុយម៉ង់ស្មើនឹងមុំតម្រង់ទិស $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$៖

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{AC}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{ដែល } \theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

ខ. **ត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់** A៖ លុះត្រាតែ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$។

គ. **ត្រីកោណសម័ង្ស** ABC៖ លុះត្រាតែ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ ដែលសមមូលនឹងលក្ខខណ្ឌ៖

$$z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A$$

លំហាត់គំរូ ៣

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ចំណុច A, B, C ជារូបភាពនៃឫសគូបទាំង ៣ នៃឯកតា ($z^3 = 1$)៖

$$z_0 = 1, \quad z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ គណនាប្រវែងជ្រុងទាំងបី $AB = |z_1 - z_0|$, $BC = |z_2 - z_1|$, $CA = |z_0 - z_2|$។ បើជ្រុងទាំងបីស្មើគ្នា នោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

- $AB = |z_1 - z_0| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

- $BC = |z_2 - z_1| = \left|\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
- $CA = |z_0 - z_2| = \left|1 - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

ដោយ $AB = BC = CA = \sqrt{3}$ នាំឱ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ដែលចារឹកក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រកាំ $R = 1$។

៣ ឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ ៣

បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ zមាន ឬសទី n កំណត់ដោយ $W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$ ដែល $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $W = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ជាឬសទី n នៃ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$។

តាមនិយមន័យ យើងបាន $W^n = z$។ ប្រើរូបមន្តដឺម័រ យើងបាន៖

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ដោយចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែម៉ូឌុលស្មើគ្នា និង អាគុយម៉ង់ស្មើគ្នា នោះយើងបាន៖

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

(យកត្រឹម n តម្លៃ ព្រោះបើ $k \geq n$ តម្លៃវានឹងត្រួតស៊ីគ្នាជុំវិជ្ជជាមួយ $0, 1, \ldots, n-1$)។

ដូចនេះយើងបាន $W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$។

លំហាត់គំរូ ៤

គណនាឬសទី 5 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-1 + i$ រួចតាងចំណុចរូបភាពនៃឬសទាំងនោះលើរង្វង់។

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ រូបមន្តឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ គឺ៖ $w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ ដែល $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$។ ចំណុចរូបភាពនៃឬសទាំងនោះ ស្ថិតនៅលើរង្វង់ផ្ចិត O កាំ $R = \sqrt[n]{r}$ និងបង្កើតបានជាពហុកោណនិយ័តមាន n ជ្រុង។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

តាង $z=-1+i \implies r=\sqrt{2}$ និង $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$។

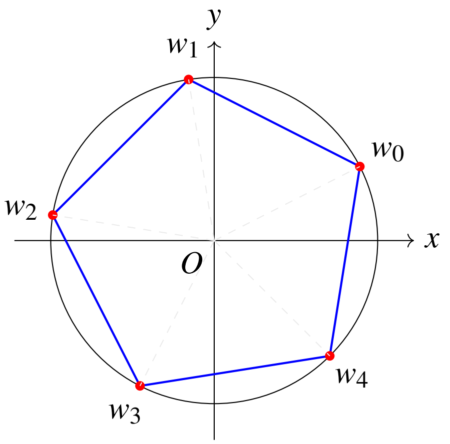
ឫសទី 5 នៃ z កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right] \\ &= \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi+8k\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi+8k\pi}{20}\right)\right], \quad k=0,1,2,3,4 \end{aligned}$$

គណនាតម្លៃឫសនីមួយៗ៖

- ពេល $k=0$៖ $w_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{20}+i\sin\dfrac{3\pi}{20}\right)$
- ពេល $k=1$៖ $w_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{20}+i\sin\dfrac{11\pi}{20}\right)$
- ពេល $k=2$៖ $w_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{20}+i\sin\dfrac{19\pi}{20}\right)$
- ពេល $k=3$៖ $w_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{27\pi}{20}+i\sin\dfrac{27\pi}{20}\right)$
- ពេល $k=4$៖ $w_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{35\pi}{20}+i\sin\dfrac{35\pi}{20}\right)$

ចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំង 5 គឺជាកំពូលនៃបញ្ចកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ $R=\sqrt[10]{2}$។



លំហាត់គំរូ ៥

គណនាឫសទី 4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-8-8i\sqrt{3}$ រួចតាងចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំងនោះលើរង្វង់។

ចម្លើយ:

គន្លឹះដោះស្រាយ៖ ប្រើរូបមន្តឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$។ ត្រង់នេះ $n=4$ ដូច្នេះយើងនឹងមានឫសចំនួន ៤ $(k=0,1,2,3)$ ដែលតំណាងដោយកំពូលនៃចតុកោណកែង (ការេ) ចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ $R=\sqrt[4]{r}$។

ដំណោះស្រាយលម្អិត៖

តាង $z=-8-8i\sqrt{3} \implies r=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16$។

ដោយ $\cos\theta=-\dfrac{8}{16}=-\dfrac{1}{2}$ និង $\sin\theta=-\dfrac{8\sqrt{3}}{16}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta=\dfrac{4\pi}{3}$។

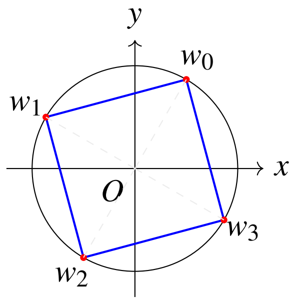
ឫសទី 4 នៃ z កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi+3k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+3k\pi}{6}\right)\right], \quad k=0,1,2,3 \end{aligned}$$

គណនាតម្លៃឫសនីមួយៗ $(k=0,1,2,3)$៖

- ពេល $k=0$៖ $w_0=1+i\sqrt{3}$
- ពេល $k=1$៖ $w_1=-\sqrt{3}+i$
- ពេល $k=2$៖ $w_2=-1-i\sqrt{3}$
- ពេល $k=3$៖ $w_3=\sqrt{3}-i$

ចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំង 4 ជាកំពូលនៃការេចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ $R=2$។



ប្រតិបត្តិ ១

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

ក. $(z-2)^3-1=0$

គ. $z^6+1=0$

ខ. $z^6+2z^3+1=0$

ឃ. $z^6+64=0$

ចម្លើយ:

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ ស្វ័យគុណ និងឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច (១០០ លំហាត់)

១. តើរូបមន្តដឺម័រ (De Moivre's Formula) មួយណាត្រឹមត្រូវ?

ក. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
គ. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
ខ. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\sin^n\varphi$
ឃ. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\varphi^n + i\sin\varphi^n$

២. បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ នោះ z^n ស្មើនឹង៖

ក. $r(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
គ. $r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
ខ. $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
ឃ. $nr(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

៣. គណនា $(i)^{2025}$៖

ក. 1 ខ. i គ. -1 ឃ. $-i$

៤. តម្លៃនៃ $i^{2024} - i^{2026}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 2 គ. -2 ឃ. $2i$

៥. បើ $z = 1 + i$ នោះ z^2 ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. $2i$ គ. -2 ឃ. $1+2i$

៦. គណនា $(1-i)^{10}$៖

ក. $32i$ ខ. $-32i$ គ. 32 ឃ. -32

៧. បើ $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ នោះ z^6 ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៨. គណនា $(\sqrt{3}+i)^3$៖

ក. $8i$ ខ. 8 គ. $-8i$ ឃ. $1+3i$

៩. បើ $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ នោះ z^3 គឺ៖

ក. 8 ខ. -8 គ. $8i$ ឃ. 6

១០. តម្លៃនៃ $(1+i\sqrt{3})^3$ គឺ៖

ក. 8 ខ. -8 គ. 4 ឃ. $1+3i$

១១. ឫសទី n នៃ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ មានរូបមន្តទូទៅ៖

ក. $W_k = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})]$
ខ. $W_k = r^n[\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})]$
គ. $W_k = \sqrt[n]{r}[\cos(n\varphi+2k\pi) + i\sin(n\varphi+2k\pi)]$
ឃ. $W_k = \sqrt{r}[\cos(\frac{\varphi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n})]$

១២. ចំនួនឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $z \neq 0$ គឺមានចំនួន៖

ក. 1 ខ. 2 គ. n ឃ. ឥតកំណត់

១៣. ឫសទី ២ នៃ $z=4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ គឺ៖

ក. $\pm2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ គ. $\pm4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

ខ. $\pm2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ ឃ. $2(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4})$

១៤. ឫសទី ៣ នៃ $z=1$ គឺ $1,\omega,\omega^2$។ តម្លៃនៃ $1+\omega+\omega^2$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. -1 ឃ. i

១៥. ឫសទី ២ នៃ i គឺ៖

ក. $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ គ. i និង $-i$

ខ. $1+i$ និង $-1-i$ ឃ. 1 និង -1

១៦. ចំណុចរូបភាពនៃឫសទី n នៃ z ស្ថិតនៅលើអ្វី?

ក. បន្ទាត់ត្រង់ ខ. ប៉ារ៉ាបូល គ. រង្វង់ផ្ចិត O កាំ $\sqrt[n]{|z|}$ ឃ. រង្វង់ផ្ចិត O កាំ $|z|$

១៧. គណនាឫសទី ២ នៃ $z=-i$៖

ក. $\pm(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ គ. $\pm(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

ខ. $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$ ឃ. ទាំង a និង b ត្រឹមត្រូវ

១៨. ឫសទី ៤ នៃ 1 គឺ៖

ក. $1,-1,i,-i$ ខ. $1,i$ គ. $1,-1$ ឃ. $1,\pm i,0$

១៩. បើ $z^3=8i$ នោះឫសមួយក្នុងចំណោមឫសទាំង ៣ គឺ៖

ក. $2i$ ខ. $-2i$ គ. 2 ឃ. -2

២០. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ចំណុចរូបភាពនៃឫសទី n បង្កើតបានជាពហុកោណនិយ័តដែលមាន n ជ្រុង។

ក. ពិត ខ. មិនពិត គ. មិនតែងតែ ឃ. គ្មានចម្លើយ

២១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2+1=0$៖

ក. $1,-1$ ខ. $i,-i$ គ. 0 ឃ. $1,i$

២២. ឫសនៃសមីការ $z^2-2z+2=0$ គឺ៖

ក. $1\pm i$ ខ. $2\pm2i$ គ. $-1\pm i$ ឃ. $1\pm2i$

២៣. បើ $z^2=4\sqrt{3}+4i$ នោះ $|z|$ ស្មើនឹង៖

ក. 8 ខ. $2\sqrt{2}$ គ. 4 ឃ. $\sqrt{8}$

២៤. សមីការ $z^6+1=0$ មានចំនួនឫសប៉ុន្មាន?

ក. 2 ខ. 3 គ. 6 ឃ. 1

២៥. បើ z ជាឫសនៃ $z^2-z+1=0$ នោះ z អាចសរសេរជា៖

ក. $\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$ គ. $\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}$

ខ. $\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}$ ឃ. $1\pm i\sqrt{3}$

២៦. បើ $z=1-i\sqrt{3}$ នោះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z គឺ៖

ក. $2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$ គ. $2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

ខ. $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ឃ. $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

២៧. គណនា $Z=\frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $1+i\sqrt{3}$ ខ. $1-i\sqrt{3}$ គ. $-1+i\sqrt{3}$ ឃ. $2i$

២៨. បើ $Z_1=\frac{2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^2}{1+i\sqrt{3}}$ នោះ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ៖

ក. $\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$ គ. $2(\cos 0+i\sin 0)$

ខ. $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ឃ. $\cos 0+i\sin 0$

២៩. សរសេរ $A=\frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$ គ. $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

ខ. $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ឃ. $4(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

៣០. បើ $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ នោះ x^{2013} ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៣១. បើ $z_1=-1+i\sqrt{3}$ នោះ z_1^3 ស្មើនឹង៖

ក. 8 ខ. -8 គ. $8i$ ឃ. 0

៣២. គណនា i^{2025}៖

ក. 1 ខ. i គ. -1 ឃ. $-i$

៣៣. បើ $z=\cos\theta+i\sin\theta$ នោះ $\frac{1}{z}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\bar{z}$ ខ. $\cos\theta-i\sin\theta$ គ. ទាំង a និង b ឃ. គ្មានចម្លើយ

៣៤. ម៉ូឌុលនៃ $z=(1+i)^{10}$ គឺ៖

ក. 10 ខ. 32 គ. 1024 ឃ. $\sqrt{2}$

៣៥. អាគុយម៉ង់នៃ $z=(\sqrt{3}+i)^6$ គឺ៖

ក. π ខ. 0 គ. $\pi/2$ ឃ. 2π

៣៦. បើ $z^2=-4$ នោះ z គឺ៖

ក. ± 2 ខ. $\pm 2i$ គ. $2i$ ឃ. -2

៣៧. បើ $z=1+i$ នោះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z^4 គឺ៖

ក. $4(\cos\pi+i\sin\pi)$ គ. $4(\cos 0+i\sin 0)$
ខ. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$ ឃ. $4i$

៣៨. ឫសទី ២ នៃ $z=-1$ គឺ៖

ក. $i,-i$ ខ. $1,-1$ គ. i ឃ. គ្មានឫស

៣៩. បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ $\bar{z}$ មានអាគុយម៉ង់៖

ក. θ ខ. $-\theta$ គ. $\pi-\theta$ ឃ. $\pi+\theta$

៤០. បើ $z^4=1$ នោះផលបូកឫសទាំង ៤ គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. 4

៤១. គណនា $(1-i\sqrt{3})^3$៖

ក. 8 ខ. -8 គ. $8i$ ឃ. $-8i$

៤២. បើ $|z|=2$ និង $arg(z)=\pi/4$ នោះ z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិតគឺ៖

ក. $4i$ ខ. 4 គ. $2+2i$ ឃ. $8i$

៤៣. បើ $z=i$ នោះ z^{100} គឺ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៤៤. ក្នុងរូបមន្តដឺម័រ បើ $n=0$ នោះ z^0 ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. z ឃ. មិនអាចកំណត់

៤៥. ឫសទី ៣ នៃ -8 គឺ៖

ក. $-2, 1\pm i\sqrt{3}$ ខ. $2,-1\pm i\sqrt{3}$ គ. -2 ឃ. $2, 2\omega, 2\omega^2$

៤៦. បើ $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ នោះ z ជាទម្រង់ពីជគណិតគឺ៖

ក. $1+i$ ខ. $1-i$ គ. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ឃ. $2+2i$

៤៧. បើ $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ នោះ z^5 ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. -1

៤៨. គណនា $(1+i)^8$៖

ក. 16 ខ. $16i$ គ. 256 ឃ. $8+8i$

៤៩. ឫសទី ២ នៃ $3+4i$ គឺ៖

ក. $\pm(2+i)$ ខ. $\pm(1+2i)$ គ. $\pm(2-i)$ ឃ. $\pm(1-2i)$

៥០. អាគុយម៉ង់នៃ $z=-5i$ គឺ៖

ក. $\pi/2$ ខ. $3\pi/2$ គ. π ឃ. 0

៥១. បើ $z=1+i$ នោះ $arg(z^{20})$ គឺ៖

ក. 0 ខ. π គ. 5π ឃ. 20π

៥២. បើ $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ នោះ z^n+z^{-n} ស្មើនឹង៖

ក. $2\cos n\alpha$ ខ. $2i\sin n\alpha$ គ. 0 ឃ. 1

៥៣. បើ $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ នោះ z^n-z^{-n} ស្មើនឹង៖

ក. $2\cos n\alpha$ ខ. $2i\sin n\alpha$ គ. 0 ឃ. 1

៥៤. រកឫសទី ៣ នៃ i៖

ក. $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ គ. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

ខ. $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$ ឃ. គ្រប់ចម្លើយខាងលើ

៥៥. បើ $z=2(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$ នោះ z^9 គឺ៖

ក. 512 ខ. $512i$ គ. 18 ឃ. 2

៥៦. បើ $z_1,z_2,\dots,z_n$ ជាឫសទី n នៃ 1 នោះ $z_1\cdot z_2\cdot\dots\cdot z_n$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. $(-1)^{n-1}$ គ. 0 ឃ. n

៥៧. តម្លៃនៃ $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៥៨. បើ $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ នោះ $1+z^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $1+i$ ខ. 0 គ. i ឃ. $\sqrt{2}i$

៥៩. ឫសទី ៤ នៃ -16 ដែលមានអាគុយម៉ង់ក្នុងកាជ្រង់ទី ១ គឺ៖

ក. $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ខ. $2+2i$ គ. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ឃ. $2i$

៦០. បើ $z^n=1$ នោះ $|z|$ ជានិច្ចកាលស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. n គ. 0 ឃ. $1/n$

៦១. $(1+i)^{2024}$ ជាចំនួន៖

ក. ពិត ខ. និម្មិតសុទ្ធ គ. សូន្យ ឃ. មិនអាចកំណត់

៦២. បើ $arg(z)=\pi/3$ នោះ $arg(z^4)$ គឺ៖

ក. $4\pi/3$ ខ. $\pi/3$ គ. $2\pi/3$ ឃ. π

៦៣. គណនា $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. 0

៦៤. ឫសទី ២ នៃ $1+i\sqrt{3}$ មានម៉ូឌុលស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. $\sqrt{2}$ គ. 1 ឃ. 4

៦៥. បើ $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ នោះ z^2 ស្មើនឹង៖

ក. $\bar{z}$ ខ. $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ គ. ទាំង a និង b ឃ. គ្មានចម្លើយ

៦៦. បើ $z^5=1$ នោះ $1+z+z^2+z^3+z^4$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 5 ឃ. -1

៦៧. គណនា $(2i)^4$៖

ក. 16 ខ. -16 គ. $16i$ ឃ. 8

៦៨. អាគុយម៉ង់នៃ $z=(-1-i)^4$ គឺ៖

ក. 0 ខ. π គ. 2π ឃ. 5π

៦៩. ឫសទី ៣ នៃ 27 គឺ៖

ក. 3 ខ. $3, 3\omega, 3\omega^2$ គ. $3, -3$ ឃ. 9

៧០. បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ z^{-1} មានម៉ូឌុល៖

ក. r ខ. $1/r$ គ. $-r$ ឃ. r^{-1}

៧១. គណនា $i^{100}+i^{101}+i^{102}+i^{103}$៖

ក. 0 ខ. 1 គ. i ឃ. -1

៧២. បើ $z=1-i$ នោះ z^8 គឺ៖

ក. 16 ខ. $16i$ គ. 256 ឃ. 1

៧៣. ឫសទី ២ នៃ $2i$ គឺ៖

ក. $\pm(1+i)$ ខ. $\pm(1-i)$ គ. $1+i$ ឃ. 2

៧៤. បើ $z=\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$ នោះ z^{10} គឺ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. 0

៧៥. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ចម្ងាយរវាងឫសនីមួយៗនៃឫសទី n នៃ 1 ទៅគល់ O គឺ៖

ក. 1 ខ. n គ. $2\pi/n$ ឃ. 0

៧៦. បើ $z=1+i\sqrt{3}$ នោះ z^6 គឺ៖

ក. 64 ខ. -64 គ. $64i$ ឃ. 1

៧៧. រកឫសទី ៣ នៃ $-i$៖

ក. $i, \frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$ ខ. $-i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$ គ. i ឃ. 1

៧៨. បើ $z=\cos\theta+i\sin\theta$ នោះ $z^n+\bar{z}^n$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\cos n\theta$ ខ. $2\sin n\theta$ គ. 0 ឃ. 2

៧៩. គណនា $(1+i)^{12}$៖

ក. 64 ខ. -64 គ. $64i$ ឃ. $-64i$

៨០. បើ $z^3=1$ តើ $|\omega|$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

ក. 1 ខ. $1/3$ គ. 3 ឃ. 0

៨១. តម្លៃនៃ $arg(i^n)$ គឺ៖

ក. $n\pi/2$ ខ. $\pi/2$ គ. $n\pi$ ឃ. 0

៨២. បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ $z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$។

ក. ពិត ខ. មិនពិត គ. មិនតែងតែ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៨៣. គណនា $(\frac{\sqrt{3}+i}{2})^6$៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

៨៤. ឫសទី ៤ នៃ 1 ដែលស្ថិតនៅលើអ័ក្សនិម្មិតគឺ៖

ក. $\pm i$ ខ. ± 1 គ. i ឃ. គ្មាន

៨៥. បើ $z=1+i$ នោះ z^4 ជាចំនួន៖

ក. ពិត ខ. និម្មិតសុទ្ធ គ. សូន្យ ឃ. មិនអាចកំណត់

៨៦. អាគុយម៉ង់នៃ $(1-i)^6$ គឺ៖

ក. $3\pi/2$ ខ. $\pi/2$ គ. π ឃ. 0

៨៧. បើ $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ នោះ $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 6 ឃ. -1

៨៨. គណនា $(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^2$ (ទម្រង់អ៊ុយលែទៅពីជគណិត)៖

ក. $2i$ ខ. 2 គ. -2 ឃ. $1+i$

៨៩. បើ $z^n=a$ នោះ ឫសទាំង n មានម៉ូឌុលស្មើៗគ្នា។

ក. ពិត ខ. មិនពិត គ. មិនតែងតែ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៩០. រកឫសទី ៣ នៃ $-27i$៖

ក. $3i$ ខ. $-3i$ គ. 3 ឃ. គ្មានឫស

៩១. បើ $z=1+i$ នោះ $\frac{z}{\bar{z}}$ គឺ៖

ក. i ខ. $-i$ គ. 1 ឃ. -1

៩២. គណនា $(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})^4$៖

ក. i ខ. $-i$ គ. 1 ឃ. -1

៩៣. បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ $|z^n|=|z|^n$។

ក. ពិត ខ. មិនពិត គ. មិនតែងតែ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៩៤. គណនា $(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$៖

ក. 32 ខ. -32 គ. 64 ឃ. 0

៩៥. ឫសទី ៥ នៃ 1 គឺ $W_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ ចំពោះ k ស្មើនឹង៖

ក. $0,1,2,3,4$ ខ. $1,2,3,4,5$ គ. $0,1,2$ ឃ. គ្រប់ចំនួនគត់

៩៦. បើ $z = \sin\theta + i\cos\theta$ នោះ z ក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ៖

ក. $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ គ. $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

ខ. $\cos\theta + i\sin\theta$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៩៧. គណនា $(1-i)^{12}$៖

ក. -64 ខ. 64 គ. $64i$ ឃ. $-64i$

៩៨. បើ $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ នោះ $1/z$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$ ខ. $2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$ គ. $\frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ ឃ. ទាំង a និង c

៩៩. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z^2 = i$ និងមានផ្នែកពិតវិជ្ជមាន៖

ក. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ខ. $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ គ. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ឃ. i

១០០. គណនា i^{2026}៖

ក. 1 ខ. -1 គ. i ឃ. $-i$

លំហាត់មេរៀន

១. គណនា

ក. $(1+i)^{12}$
ខ. $(1-i)^{10}$
គ. $(3+3i)^{5}$
ឃ. $(-4\sqrt{3}+4i)^{5}$
ង. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15}$
ច. $(\sqrt{3}+i)^{7}$
ឆ. $(-1+i)^{50}$
ជ. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{25}$

ចម្លើយ:

២. គណនាចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $u=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$ ខ. $u=(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$

ចម្លើយ:

៣. សរសេរចំនួនខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ ខ. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ គ. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$

ចម្លើយ:

៤. បង្ហាញថា

ក. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

ខ. $\left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

ចម្លើយ:

៥. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$។

ក. ដៅចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7$ លើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{11}$។

ចម្លើយ:

៦. គណនាឫសទី២នៃៈ

ក. $9\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ខ. $1-i$

គ. $4+4i$

ចម្លើយ:

៧. គណនាឫសទី៣នៃ៖

ក. $8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ខ. $-2+2i$ គ. $-1-i\sqrt{3}$

ចម្លើយ:

៨. គណនាឫសទី ៤ នៃ៖

ក. $1+i\sqrt{3}$ ខ. $2\sqrt{3}-2i$ គ. $-2-2i\sqrt{3}$

ចម្លើយ:

៩. គណនាឫសទី៥នៃ $-\sqrt{3}-i$ ហើយតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់។

ចម្លើយ:

១០. គណនាឫសទី៦នៃ 1 ហើយតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

១១. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $z^4-8(-1+i\sqrt{3})=0$ គ. $z^4+8i=0$ ង. $z^3-4\sqrt{3}+4i=0$

ខ. $z^3+8i=0$ ឃ. $z^3+27i=0$ ច. $z^5+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}=0$

ចម្លើយ:

លំហាត់ជំពូកទី១

១. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ បើ

ក. $z_1=3+2i$ និង $z_2=1-7i$

ខ. $z_1=\sqrt{3}-i\sqrt{5}$ និង $z_2=\sqrt{3}+i\sqrt{5}$

ចម្លើយ:

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z ខាងក្រោមជាទម្រង់ពីគណិត

ក. $z=\frac{-14+63i}{50}-\frac{6i+1}{1-7i}$

គ. $z=\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{2+i}$

ខ. $z=\frac{(1=2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

ឃ. $z=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^2$

ចម្លើយ:

៣. ក. ដោះស្រាយសមីការ $z^2-6z+13=0$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

ខ. ទាញរកចំនួនកុំផ្លិច u ដែល $\left(\frac{u-3i}{u+2}\right)^2-6\left(\frac{u-3i}{u+2}\right)+13=0$។

ចម្លើយ:

៤. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z, 1-z$ និង $\frac{1}{z}$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា។

ចម្លើយ:

៥. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{i-x}{i+x}$ ដែល x ជាចំនួនពិត។

ក. បង្ហាញថា $|z|=1$ រួចសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ z ស្មើគ្នារួចទាញរកតម្លៃ x បើ $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$។

ចម្លើយ:

៦. បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

ខ. $3+3i$

គ. $(\sqrt{3}-i)^{100}$

ឃ. $2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ង. $1+(2+\sqrt{3})i$

ច. $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$

ចម្លើយ:

៧. ចូរដោះស្រាយសមីការ

ក. $z^4+8+8i\sqrt{3}=0$

ខ. $z^2+|z|^2=0$

ចម្លើយ:

៨. ចំនួនកុំផ្លិច z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $|z+3-i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនោះ រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានអាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុត។

ចម្លើយ:

៩. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = a\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ ដែល a និង α ជាចំនួនពិត។ សរសេរ zជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

១០. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2020}$ ខ. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{2021}$ គ. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{2022}$

ចម្លើយ:

១១. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ និង $z_2 = 2 + 2i$។

ក. សរសេរ z_1, z_2 និង $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$។

ចម្លើយ:

១២. គេឲ្យ $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 2 - 2i$ និង $A = \frac{z_1^4}{z_2^3}$។

ក. សរសេរ z_1, z_2, z_1^4 និង z_2^3 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ទាញរកទម្រង់ពីជគណិតនៃ z_1^4 និង z_2^3 រួច A។

ខ. សរសេរ Aជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ទាញពីសំណួរខាងលើឲ្យបានតម្លៃពិតនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

ចម្លើយ:

១៣. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi, -\pi < \varphi < \pi$។

ក. ឧបមាថា $\varphi = \frac{\pi}{3}$។ សរសេរ z និង $\frac{1}{z}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. បង្ហាញថាគ្រប់តម្លៃនៃ φ ចំណុចរូបភាព $M(z)$ នៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចស្ថិតនៅលើរង្វង់មានកាំស្មើ 1 និង មានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុចរូបភាពនៃ1។

គ. បង្ហាញថាផ្នែកពិតនៃ $\frac{1}{z}$ ស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ φ។

ចម្លើយ:

១៤. ក. គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $4\sqrt{3}+4i$។

ខ. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z^2=4\sqrt{3}+4i$ ដោយប្រើ

i. ទម្រង់ពីជគណិត

ii. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

ចម្លើយ:

១៥. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$។

ក. ចូរសរសេរ a^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. ទាញឲ្យបានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ a។

គ. ទាញពីលទ្ធផលខាងលើនូវតម្លៃពិតនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

ចម្លើយ:

១៦. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$។

ក. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z^2 រួចទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z។

ខ. ទាញឲ្យបានតម្លៃពិតនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$ ក្នុង $\mathbb{R}$។ រួចដៅចម្លើយលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

លំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញ

①. (១០ពិន្ទុ) [2002]

ក. គេឲ្យ $z = 1 - i\sqrt{3}$។ ចូរសរសេរ z និង z^{2002} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. គេឲ្យ $u = x + iy$ និង $z_1 = a + ib$ ។ ចូរគណនា x, y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b បើដឹងថា $u = z_1^2 + iz_1 - \frac{1}{2}$ ។

ចម្លើយ:

②. (១៥ពិន្ទុ) [2003] គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$ ។

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ $Z' = 1 + i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{Z'}{Z}$ ។

ចម្លើយ:

៣. (១៥ពិន្ទុ) [2004]

ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi-y=\frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

ខ. គេឲ្យ $Z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

៤. (១០ពិន្ទុ) [2005] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$ និង $Z_2 = (1-i)x+(1-y)(1+i)$។

ក. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z}_1-(Z_2+y-1)=0$, ($\overline{Z}_1$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_1) ។

ចម្លើយ:

៥. (១០ពិន្ទុ) [2006]

១. កំណត់ចំនួនពិត $a; b$ ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$។

២. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ។ សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

៦. (១០ពិន្ទុ) [2007] គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$ និង $B=\frac{x+iy}{1+i}$ ដែល x,y ជាចំនួនពិត។

ក. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពិជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)។

ចម្លើយ:

៧. (១៥ពិន្ទុ) [2008]គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=x+iy$ និង $W=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិតខុសពី 0 ហើយ α ជាចំនួនពិត។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W|$ ។

ខ. ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z| = |W|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{Z} = \overline{Z}$ ។

គ. រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z = 1,\ W = 1$ ។

ចម្លើយ:

៤. (១០ពិន្ទុ) [2009] សរសេរ $A = \frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ:

៩. (១៥ពិន្ទុ) [2010]

ក. ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0 \quad (1)$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។
រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1) ។

ខ. សរសេរ $w=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

១០. (១០ពិន្ទុ) [2011]

ក. រកឫស t_1, t_2 នៃសមីការ $-t^2+2t-4=0$ ដោយយក t_1 ជាឫសដែលមាន ផ្នែកនិមិត្តអវិជ្ជមាន។

ខ. សរសេរ $Z=\frac{4t_2}{t_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

១១. (១០ពិន្ទុ)[2012] គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក. គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

ខ. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

ចម្លើយ:

១២. (១០ពិន្ទុ) [2013]គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 2\sqrt{3} - 2i$ និង $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។

ក. សរសេរ $Z = a^2 + b^2 + 4ai + \sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ a, b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

១៣. (១៥ពិន្ទុ) [2014][លើកទី១] គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។

ក. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ ។

ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$ ។

ចម្លើយ:

១៤. (២០ពិន្ទុ) [2014][លើកទី២]

ក. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = -i\sqrt{2},\ z_3 = +i\sqrt{2}$ ។

i. គណនា $z_1 + z_2,\ \ z_1 + z_3,\ \ (z_1 + z_2)(z_1 + z_3)$ ។

ii. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ $z_1 + z_2,\ \ z_1 + z_3,\ \ \left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2$ ។

ខ. កំណត់ i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ ។ ទាញរកតម្លៃ $i^{2015} - i^{2014}$ ។

ចម្លើយ:

១៥. (១៥ពិន្ទុ) [2015] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ។

ក. គណនា $z_1 + z_2,\ \ z_1 - z_2,\ \ z_1 \times z_2$ ។

ខ. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2,\ \ z_1 \times z_2$ ។

ចម្លើយ:

១៦. (១៥ពិន្ទុ) [2016] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = \left(1 - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \sqrt{3}\right) i$ និង $z_3 = -\frac{1}{2}$ ។
គណនា $z_1 + z_2$,$(z_1 + z_2) \times z_3$ ។
សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = (z_1 + z_2) \times z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3 ។
ចម្លើយ:

១៧. (១៥ពិន្ទុ) [2017] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z_1^3 ។

គ. សរសេរផលគុណ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ:

១៨. (១៥ពិន្ទុ) [2018] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3}+i$។

ក. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។

ខ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

ចម្លើយ:

១៩. (១៥ពិន្ទុ) [2019]

ក. ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2-8z+64=0$។

ខ. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=4+4i\sqrt{3}$ និង $z_2=4-4i\sqrt{3}$។ សរសេរ $(2z_1+\overline{z_2})$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និង គណនា $(2z_1+\overline{z_2})^3$។ (យើងតាង $\overline{z_2}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_2)។

ចម្លើយ:

២០. (១៥ពិន្ទុ) [2021]

ក. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$។ រក $\overline{z_1}$,($\overline{z_1}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1)

ខ. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចz_1 ។ សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. បង្ហាញថា $\overline{z_1}$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^2=2\left(z\sqrt{2}-2\right)$ ។

ចម្លើយ:

២១. (១៥ពិន្ទុ) [2022] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = i(3+2i)(2+i)^2$ ។

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ពីជគណិតរួចរក $\overline{z_1}$ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1 ។

ខ. សរសេរ $z_2 = z_1 + 19$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គណនា៖ z_2^4 និង z_2^6 ។

ចម្លើយ:

២២. (១៥ពិន្ទុ) [2023] ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចសមីការ $z^2+4z+16=0$។ សរសេរចម្លើយទាំងពីរតាងដោយ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ:

២៣. (១៥ពិន្ទុ) [2024] នៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $2z-(1+i)\bar{z}=-1+5i$ ។ គណនា i^{2025} ។

ខ. គេមាន $z_1=-4$; $z_2=3+i$ ។ គណនា z_1+z_2 រួចសរសេរ z_1+z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ:

២៤. (១៥ពិន្ទុ) [2025] គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3} - i; z_2 = 2(1-i)$ និង $Z = \frac{z_1^7}{z_2^6}$។ រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z_1, z_2 និង Z រួចសរសេរ z_1, z_2 និង Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ:

២៥. (១៥ពិន្ទុ) [2026]

ក. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច $1+i$ និង $1-i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n យើងតាង $S_n=(1+i)^n+(1-i)^n$ ។ គណនា S_2 , S_4 , S_6 ។ បង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}$ គេសរសេរ S_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ តើសំណើដែលថា "$\forall n\in\mathbb{N}, S_n$ ជាចំនួនគត់" ជាសំណើពិតឬទេ? តើមាន $n\in\mathbb{N}$ ដែល $S_n=0$ ឬទេ?

ចម្លើយ:

១ វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើសត្រៀមប្រឡងប្រជែង

១. សរសេរឫសការេនៃចំនួនខាងស្ដាំនេះជាចំនួននិមិត្ត $\sqrt{-4-2\sqrt{3}}$ ។ តើមួយណាជាជម្រើសត្រឹមត្រូវ?

ក. $(\sqrt{3}+1)i$ ខ. $(\sqrt{3}-1)i$ គ. $(\sqrt{2}+1)i$ ឃ. $(2\sqrt{3}+1)i$

២. ក្នុងសមីការ $Z^2+6Z+13=0$ មាន៖

ក. ឫសពីរជាចំនួនពិត ខ. ឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមិនមែនជាចំនួនពិត

គ. ឫសមួយជាចំនួនកុំផ្លិចនិងមួយទៀតជាចំនួនពិត ឃ. ឫសពីរចំនួនពិត

៣. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{2z-1}{z+1}=z$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$។ តើជម្រើសមួយណាត្រឹមត្រូវ?

ក. $z=\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

ខ. $z=\{-1,\frac{1}{2}\}$

គ. $z=\{i\sqrt{3},-i\sqrt{3}\}$

ឃ. គ្មានឫស

៤. បើ $z=5+i$ តើ z ជាឫសនៃសមីការមួយណាខាងក្រោម?

ក. $z^2-10z+26=0$ ខ. $z^2+10z+26=0$

គ. $z^2-10z-26=0$ ឃ. $-z^2+10z+26=0$

៥. បើ $z_1=-2+i\sqrt{5}$, $z_2=-2-i\sqrt{5}$ តើ z_1,z_2 ជាឫសនៃសមីការមួយណាខាងក្រោម?

ក. $-z^2+4z+9=0$ ខ. $z^2-4z+9=0$

គ. $z^2+4z-9=0$ ឃ. $z^2+4z+9=0$

៦. បើ $z=x+yi$ និង $3x+(3x-y)i=12+6i$ ។ កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $4+6i$ ខ. $4-6i$ គ. $-4+6i$ ឃ. $-4-6i$

៧. គេមាន $a=\sqrt{3}-i$ និង $b=2-2\sqrt{3}i$ ។ កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត $x+yi$ ។

ក. $x=-\frac{\sqrt{3}}{4}, y=\frac{1}{4}$ ខ. $x=\frac{\sqrt{3}}{4}, y=\frac{1}{4}$
គ. $x=\frac{\sqrt{3}}{4}, y=-\frac{1}{4}$ ឃ. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=\frac{1}{2}$

៨. គេមានស្វ័យគុណ i^n (i ជាឯកតានិមិត្ត) ។ បើ $n=4k+2$ ចូរកំណត់ចម្លើយត្រឹមត្រូវដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $i^n=1$ ខ. $i^n=i$ គ. $i^n=-1$ ឃ. $i^n=-i$

៩. គណនា $A=\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2025}$ ។

ក. $A=-i^{2025}$ ខ. $A=-i$ គ. $A=1$ ឃ. $A=-1$

១០. គណនា $z=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{100}$ ។

ក. $z=-i$ ខ. $z=i$ គ. $z=-1$ ឃ. $z=1$

១១. សរសេរ $z=\frac{1+i}{1-i}$ ជារាង $a+bi$ ។

ក. $z=1$ ខ. $z=i$ គ. $z=-i$ ឃ. $z=-1$

១២. គណនា $i+i^2+i^3+\ldots+i^{1000}$ ។

ក. $-i$ ខ. -1 គ. 0 ឃ. 1

១៣. បើ $x=1+i\sqrt{3}, y=-1-i\sqrt{3}$ ។ គណនា $x+\bar{y}$ ។

ក. $-2i\sqrt{3}$ ខ. 0 គ. 2 ឃ. $2i\sqrt{3}$

១៤. បើ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $z^2-az-b=0$ ។ គណនាតម្លៃនៃ a,b ។

ក. $a=-4, b=-5$ ខ. $a=4, b=5$
គ. $a=4, b=-5$ ឃ. $a=-4, b=5$

១៥. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-1+i\sqrt{3}$ នោះផលគុណ $z\cdot\bar{z}$ កំណត់ដោយ៖

ក. $-1^2+\sqrt{3}^2$ ខ. -2 គ. $1^2+\sqrt{3}^2$ ឃ. $(-1)^2+\sqrt{3}^2 i$

១៦. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z|\bar{z}=15-20i$ ។ ចូរគណនា $|z|$ ។

ក. $5\sqrt{2}$ ខ. $2\sqrt{5}$ គ. $3\sqrt{5}$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

១៧. ផលចែកចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{2}{-\sqrt{3}+i}$ កំណត់ដោយ៖

ក. $\frac{2}{-\sqrt{3}}+\frac{2}{i}$ ខ. $\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{i}$
គ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ឃ. $-\sqrt{3}+i$

១៨. ផលចែកចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{(1-i)^2}{2-i}$ កំណត់ដោយៈ

ក. $\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

ខ. $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$

គ. $-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

ឃ. $\frac{2}{5}-\frac{2}{5}i$

១៩. បើ $z=x+iy$ នោះ $\left|\frac{z-1}{1-\bar{z}}\right|$ ស្មើនឹងៈ

ក. $\sqrt{x^2+y^2}$

ខ. $\frac{x+y}{x-y}$

គ. 2

ឃ. 1

២០. ចូររកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ $z=\frac{1}{(1+i)^2}$ ។

ក. $r=\frac{1}{2}, \arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ខ. $r=1, \arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

គ. $r=\frac{1}{2}, \arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ឃ. $r=\frac{1}{2}, \arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

២១. តើមួយណាមិនមែនជាលក្ខណៈត្រឹមត្រូវនៃម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច ?

ក. $|Z|^2=Z\times\overline{Z}$

ខ. $|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|$

គ. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

ឃ. $|Z_1\times Z_2|=|Z_1|\times|Z_2|$

២២. រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{x+i}{\sqrt{3}-i}$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ។

ក. $x=-3$

ខ. $x=-\sqrt{3}$

គ. $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ឃ. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

២៣. តម្លៃ x ដែលធ្វើឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{x+i}{\sqrt{3}-i}$ ជាចំនួនពិតសុទ្ធគឺៈ

ក. $x=-3$

ខ. $x=-\sqrt{3}$

គ. $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ឃ. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

២៤. ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{-3i-\sqrt{3}}{3}$ គឺៈ

ក. $|z|=\frac{2\sqrt{3}}{2}$

ខ. $|z|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

គ. $|z|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

ឃ. $|z|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

២៥. គេឱ្យ $z=(1-i)^2(1+i\sqrt{3})$ និង $\bar{z}$ តាងឱ្យចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z ។ គណនា z ។

ក. $z=2\sqrt{3}+2i$

ខ. $z=2\sqrt{3}-2i$

គ. $z=3\sqrt{3}+3i$

ឃ. $z=4\sqrt{3}+4i$

២៦. ចំនួនកុំផ្លិច z មាន $|z|=4$ និង $\arg(z)=\frac{7\pi}{6}$ ។ នោះទម្រង់ពីជគណិតនៃ z កំណត់ដោយៈ

ក. $-2-2\sqrt{3}i$

ខ. $-2\sqrt{3}-2i$

គ. $2-2\sqrt{3}i$

ឃ. $2\sqrt{3}-2i$

២៧. សរសេរ $z=-5(1+i\sqrt{3})$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ តើមួយណាជាជម្រើសត្រឹមត្រូវ?

ក. $z=10(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$
ខ. $z=10(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{3})$
គ. $z=5(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$
ឃ. $z=5(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

២៨. សរសេរ $z=\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ តើមួយណាជម្រើសត្រឹមត្រូវ?

ក. $z=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$
ខ. $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$
គ. $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$
ឃ. $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

២៩. គេមាន $z=3+3\cos\frac{4\pi}{9}-3i\sin\frac{4\pi}{9}$ ។ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $|z|$ កំណត់ដោយៈ

ក. $|z|=6\cos\frac{2\pi}{9}$
ខ. $|z|=2\cos\frac{\pi}{9}$
គ. $|z|=2\cos\frac{3\pi}{9}$
ឃ. $|z|=\cos\frac{2\pi}{9}$

៣០. គេមាន $z=[(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})]^2$ ។ តើជម្រើសមួយណាជាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z?

ក. $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$
ខ. $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$
គ. $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$
ឃ. $\frac{\pi}{6}+2k\pi$

៣១. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ កំណត់ដោយៈ

ក. $z=\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})$
ខ. $z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$
គ. $z=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$
ឃ. $z=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$

៣២. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z=-3(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})$ កំណត់ដោយៈ

ក. $z=3[\cos(-\frac{\pi}{7})+i\sin(-\frac{\pi}{7})]$
ខ. $z=3(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7})$
គ. $z=3(\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7})$
ឃ. $z=3(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})$

៣៣. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$

ក. $2\cos\frac{\pi}{14}(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14})$
ខ. $2\cos\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})$
គ. $2\cos\frac{\pi}{14}(\sin\frac{\pi}{14}+i\cos\frac{\pi}{14})$
ឃ. $2(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})$

៣៤. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $1-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$

ក. $2\sin\frac{\pi}{10}(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})$
ខ. $\sin\frac{\pi}{10}(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10})$
គ. $2\cos\frac{\pi}{10}(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10})$
ឃ. $2\sin\frac{\pi}{10}(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})$

៣៥. បើ $Z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ គណនា $\arg(Z^2)$ ។

ក. 0
ខ. $\frac{\pi}{6}+2k\pi$
គ. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$
ឃ. $\frac{\pi}{4}+2k\pi$

៣៦. សរសេរ $A=\frac{2(1+i)^2}{1-\sqrt{3}i}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ក. $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$
ខ. $2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$
គ. $2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$
ឃ. $4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

៣៧. សរសេរកន្សោម $(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})^7$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ក. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ខ. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ គ. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ឃ. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

៣៨. តើចំនួនកុំផ្លិចណាមួយខាងក្រោមដែលជាឫសទី៣នៃ 8 ។

ក. $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ ខ. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$ គ. $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ ឃ. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

៣៩. គេមាន $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\beta+i\sin\beta$, $c=\cos\gamma+i\sin\gamma$ និង $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=1$ ។ គណនា $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)$ ។

ក. $\frac{3}{2}$ ខ. $-\frac{3}{2}$ គ. 0 ឃ. 1

៤០. បើ $z=x-yi$ និង $z^{\frac{1}{3}}=p+qi$ ។ គណនា $\frac{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}{p^2+q^2}$ ។

ក. 2 ខ. -1 គ. 1 ឃ. -2

៤១. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\arg(z+1)=\frac{\pi}{6}$ និង $\arg(z-1)=\frac{2\pi}{3}$ ។ កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ជាទម្រង់ $a+ib$

ក. $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ខ. $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ គ. $z=1+i\sqrt{3}$ ឃ. $z=-2$

៤២. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z-3+4i|=2$ ។ កំណត់សំណុំចំណុចនៃ z ?

ក. រង្វង់ផ្ចិតនៅចំនុច $(-3,4)$ កាំ $r=2$ ខ. រង្វង់ផ្ចិតនៅចំនុច $(3,-4)$ កាំ $r=2$

គ. រង្វង់ផ្ចិតនៅចំនុច $(-3,4)$ កាំ $r=4$ ឃ. រង្វង់ផ្ចិតនៅចំនុច $(3,-4)$ កាំ $r=4$

៤៣. គណនាផលបូក $S=1+i^2+i^4+i^6+\ldots+i^{2n}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ក. $S=1$ ខ. $S=0$ គ. $S=n+1$ ឃ. $S=n$

៤៤. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច Z ដែល $|Z|=1$ ។ គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $P=\frac{Z+1}{Z-1}$ ។

ក. P ជាចំនួនពិតសុទ្ធ ខ. P ជាចំនួននិមិត្តសុទ្ធ

គ. P ជាចំនួនកុំផ្លិចមានផ្នែកពិតនិងផ្នែកនិមិត្តមិនសូន្យ ឃ. $P=0$

២ លំហាត់ស្រាវជ្រាវ និង កម្រិតខ្ពស់

១. ចូរសរសេរកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $x+iy$ ៖

ក. $(9-3i)+(-4+5i)$ ខ. $(5-i)-(6-2i)$ គ. $(4-i)(3+2i)$ ឃ. $(3+2i)^3$

ង. $\frac{1+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$ ច. $\frac{1+i}{1+3i}$ ឆ. $\frac{(1+i)(1-2i)}{2-4i}$

២. ចូរដោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែរខាងក្រោមក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ៖

ក. $(1+i)z=3+i$ ខ. $(3-4i)(z-1)=10-5i$

គ. $(2+i)(z-7+3i)=15-10i$ ឃ. $(3+5i)(z+2-5i)=6+3i$

៣. ចូរកំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ដែលបំពេញសមភាពនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ ខ. $\frac{2-3i}{2a+bi}=3+2i$ គ. $(a+bi)^2=8+6i$

៤. ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ ៖

ក. $z^2+2z+2=0$ ខ. $4z^2-4z+17=0$ គ. $z^2+6z+34=0$ ឃ. $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

៥. ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរខាងក្រោមក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ៖

ក. $z^2-4iz-4=0$ ខ. $z^2+iz+6=0$

គ. $z^2+8iz-17=0$ ឃ. $z^2-(3+2i)z+5+i=0$

៦. ចូរកំណត់ឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $x+iy$ ៖

ក. $Z_1=3+4i$ ខ. $Z_2=-8-6i$ គ. $Z_3=-15+8i$ ឃ. $Z_4=5-12i$

៧. ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមក្នុង $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ៖

ក. $\begin{cases} z_1+z_2=3+i \\ 2z_1-iz_2=5 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} (1+i)z_1+z_2=2 \\ z_1-iz_2=1+i \end{cases}$

៨. ចំពោះគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z\in\mathbb{C}$ ចូរបង្ហាញថា៖

ក. $A=z^2-\bar{z}^2$ គឺជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ។

ខ. $B=z^n+\bar{z}^n$ គឺជាចំនួនពិតសុទ្ធ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$។

គ. $C=\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}$ គឺជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ។

៩. គេមាន $X=(2-\sqrt{5}i)^n+(2+\sqrt{5}i)^n$ និង $Y=(2-\sqrt{5}i)^n-(2+\sqrt{5}i)^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$។

ក. បង្ហាញថា X គឺជាចំនួនពិតសុទ្ធ។ ខ. បង្ហាញថា Y គឺជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ។

១០. ចូរគណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $z_1=\frac{(2+i)(1-3i)}{3+4i}$ ខ. $z_2=\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1-i)^6}$ គ. $z_3=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$

១១. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ៖

ក. 4 និង -6 ខ. $2i$ និង $-3i$ គ. $1+i$ និង $2-2i$ ឃ. $-\sqrt{3}+i$ និង $2\sqrt{3}+2i$

១២. សរសេរជាទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម (សម្គាល់៖ $\operatorname{cis}\alpha=\cos\alpha+i\sin\alpha$) ៖

ក. $2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ខ. $8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ គ. $4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$
ឃ. $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ង. $\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ច. $5\operatorname{cis}\pi$

១៣. គេឱ្យ $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ និង $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$។

ក. គណនាផលគុណ z_1z_2 និងផលចែក $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ z_1,z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចទាញរកទម្រង់ពីជគណិតនៃ $\frac{z_1}{z_2}$។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

១៤. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទដឺម័រ (De Moivre's Theorem) ចូររកចម្លើយសាមញ្ញនេះ៖

ក. $\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{5}\right)^{10}$ ខ. $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}\right)^{36}$ គ. $\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{8}\right)^{12}$ ឃ. $\left(2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}\right)^{6}$

១៥. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទដឺម័រ ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $x+iy$ ៖

ក. $(1+i)^{16}$ ខ. $(1-i\sqrt{3})^{11}$ គ. $(\sqrt{3}+i)^{10}$ ឃ. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}$

១៦. ចូរសរសេរ $z=2-2\sqrt{3}i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ក. រកតម្លៃទាំងអស់នៃ $n\in\mathbb{N}$ ដែលធ្វើឱ្យ z^n ជាចំនួនពិត។ ខ. រកតម្លៃទាំងអស់នៃ $n\in\mathbb{N}$ ដែលធ្វើឱ្យ z^n ជានិម្មិតសុទ្ធ។

១៧. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$។

ក. ចូរកំណត់ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ $-1+i$ និង $1+i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់ប៉ូលែរ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z។

គ. ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ហើយកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{5\pi}{12}$។

១៨. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$។

ក. គណនា Z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ចម្បងនៃ Z។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

ឃ. ដោះស្រាយសមីការលើ $\mathbb{R}$ ដែល $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$។

១៩. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ និង $Z=z^4$។

ក. គណនា z^2 រួចទាញរក Z ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$។

២០. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i$, $z_2=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ និង $z_3=-\sqrt{6}-\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$។

ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. បង្ហាញថា $z_3=z_1\overline{z_2}$ រួចទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_3។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$។

ឃ. គណនា z_3^{18}។

២១. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $u=4\sqrt{3}+4i$។

ក. គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ u។

ខ. រកឬសការេនៃ u ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. រកឬសការេនៃ u ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ឃ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$។

២២. ចូរកំណត់ឬសគូបទាំងអស់ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិចនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $Z_1=-27$ ខ. $Z_2=8i$ គ. $Z_3=-1+i$

២៣. គេឱ្យសមីការ $z^5-1=0$ លើសំណុំ $\mathbb{C}$។

ក. រកឬសទាំង ៥ នៃសមីការជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. តាង $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$។ បង្ហាញថា $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$។

គ. ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$។

ឃ. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{2\pi}{5}$ និង $\sin\frac{2\pi}{5}$។

២៤. តាង $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ជាឬសគូបមិនពិតនៃ 1។

ក. បង្ហាញថា $j^2=\overline{j}$ និង $1+j+j^2=0$។

ខ. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=(1-j+j^2)(1+j-j^2)$។

គ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ចូរបង្ហាញថា៖ $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)=a^3+b^3+c^3-3abc$។

២៥. ដោយប្រើកន្សោម $(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$ ៖

ក. ពន្លាតកន្សោមខាងឆ្វេងតាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន។

ខ. ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតដើម្បីទាញយករូបមន្ត៖ $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ និង $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$។

២៦. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទដឺម័រចំពោះ $(\cos\theta+i\sin\theta)^4$ ៖

ក. បង្ហាញថា $\cos4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$។

ខ. បង្ហាញថា $\sin4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$។

គ. ទាញបង្ហាញថា $\tan4\theta=\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$។

២៧. គេឱ្យ $z=\operatorname{cis}\theta=\cos\theta+i\sin\theta$។

ក. ចូរបង្ហាញថា $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ និង $z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$។

ខ. ពន្លាតកន្សោម $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3$ រួចទាញបង្ហាញថា៖ $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos^3\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{16}$។

២៨. ដោយប្រើរូបមន្តអយល័រ (Euler formulas) នៃ $\cos\theta$ និង $\sin\theta$ ៖

ក. ចូរបំប្លែង $\cos^4\theta$ ជាផលបូកកូស៊ីនុសនៃមុំគុណ។

ខ. ចូរបំប្លែង $\sin^4\theta$ ជាផលបូកកូស៊ីនុសនៃមុំគុណ។

គ. ទាញគណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta$។

២៩. គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $z^2-6z+13=0$។

ក. ដោះស្រាយសមីការនេះក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$។

ខ. ទាញរក u ដែល $\left(\frac{u-3i}{u+2}\right)^2-6\left(\frac{u-3i}{u+2}\right)+13=0$។

៣០. គេឱ្យសមីការ $(z+1)^4=(z-1)^4$ លើ $\mathbb{C}$។

ក. បង្ហាញថា បើ z ជាឫសនៃសមីការ នោះ $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=1$។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា ឫសទាំងអស់នៃសមីការសុទ្ធតែជានិម្មិតសុទ្ធ។

គ. រកឫសទាំងអស់នៃសមីការនេះ។

៣១. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ៖ $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\frac{z+i}{z-i}+1=0$។

៣២. គេឱ្យផលបូកត្រីកោណមាត្រពីរ៖ $S_n=1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$ និង $T_n=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ $(x\neq 2k\pi)$។

ក. គណនាផលបូក $C_n=S_n+iT_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}$ តាមរូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $S_n=\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ និង $T_n=\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$។

៣៣. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ និង $B=\frac{x+iy}{1+i}$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$។

ក. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$។

៣៤. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ និង $w=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ដែល $x,y\neq 0$ និង $\alpha\in\mathbb{R}$។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឱ្យ $|z|=|w|$។

ខ. ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|z|=|w|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{z}=\overline{z}$។

គ. រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឱ្យ $z=1$ និង $w=1$។

៣៥. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O,\vec{u},\vec{v})$ ចូរកំណត់ និងសង់សំណុំចំណុចរូបភាព $M(z)$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $|z-2+3i|=4$

ខ. $|z-3i|=|z+2-i|$

គ. $|z-1+2i|\leq 3$

៣៦. បើ $z = x + iy$ ហើយ $P(x,y)$ ធ្វើចលនានៅលើប្លង់កុំផ្លិច ចូរកំណត់សមីការដេកាត Cartesian នៃខ្សែកោងដែលបានមកពីសំណុំចំណុច P បើ៖

ក. $\arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$ ខ. $\left|\frac{z+2}{z-2}\right| = 2$

៣៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមិនសូន្យ។

ក. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z, $1-z$ និង $\frac{1}{z}$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា។

ខ. តាង A,B,C ជាចំណុចរូបភាពនៃ $z, 1-z, \frac{1}{z}$ រៀងគ្នាលើប្លង់កុំផ្លិច។ ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC គឺជាត្រីកោណសម័ង្ស។

៣៨. ចំនួនកុំផ្លិចអថេរ z ត្រូវបានកំណត់ដោយ $z = 1 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ ដែល $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$។

ក. ចូរបង្ហាញថា ម៉ូឌុលនៃ z គឺ $2\cos\theta$។ ខ. ចូរបង្ហាញថា ផ្នែកពិតនៃ $\frac{1}{z}$ គឺជាចំនួនថេរ។

៣៩. ចំនួនកុំផ្លិចអថេរ z ត្រូវបានកំណត់ដោយ $z = 2\cos\theta + i(1-2\sin\theta)$ ដែល $-\pi < \theta \leq \pi$។

ក. ចូរបង្ហាញថា $|z-i| = 2$ សម្រាប់គ្រប់តម្លៃនៃ θ។ ខ. ចូរបង្ហាញថា ផ្នែកពិតនៃ $\frac{1}{z+2-i}$ គឺជាចំនួនថេរ។

៤០. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច គេឱ្យចំណុចបី $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ ខុសៗគ្នា។

ក. បង្ហាញថា A,B,C រត់ត្រង់ជួរគ្នា លុះត្រាតែ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ជាចំនួនពិត។

ខ. បង្ហាញថា $AB \perp AC$ លុះត្រាតែ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ជានិម្មិតសុទ្ធ។

គ. អនុវត្ត៖ គេឱ្យ $z_A = 1+2i$, $z_B = -2-i$, $z_C = 4+5i$។ តើចំណុច A,B,C រត់ត្រង់ជួរគ្នាដែរឬទេ ?

៤១. គេឱ្យចំណុច $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ ជាកំពូលនៃត្រីកោណមួយក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស លុះត្រាតែ $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$។

ខ. ទាញបង្ហាញថា លក្ខខណ្ឌសមមូលគឺ៖ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$។

៤២. ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $z \neq -1$ គេកំណត់ចំនួនកុំផ្លិច $Z = \frac{z-2i}{z+1}$។

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ $X + iY$ ដោយតាង $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$។

ខ. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ នៃប្លង់កុំផ្លិចដើម្បីឱ្យ Z ជាចំនួនពិតសុទ្ធ។

គ. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ នៃប្លង់កុំផ្លិចដើម្បីឱ្យ Z ជានិម្មិតសុទ្ធ។

៤៣. គេឱ្យពហុធា $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$ ក្នុង $\mathbb{C}$។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $z = i$ ជាឫសមួយនៃពហុធា $P(z)$។

ខ. ទាញរកឫសមួយទៀតដែលជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ i រួចបំបែក $P(z)$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីពីរពីរលើ $\mathbb{R}$។

គ. រកឫសទាំងអស់ទាំង ៤ នៃសមីការ $P(z) = 0$ ក្នុង $\mathbb{C}$។

៤៤. គេឱ្យសមីការ $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$ លើ $\mathbb{C}$ ដែល $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$។

ក. បង្ហាញថា បើ z ជាឫសនៃសមីការ នោះ $|z+i| = |z-i|$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា z ត្រូវតែជាចំនួនពិត។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ និងបង្ហាញថាឫសទាំង $n-1$ នៃសមីការគឺ៖ $z_k = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ ដែល $k = 1, 2, \ldots, n-1$។

គ. អនុវត្តចំពោះករណី $n = 5$ ៖ ទាញរកឫសទាំង ៤ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៤៥. គេឱ្យសមីការ $z^{2n+1}-1=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$។

ក. បង្ហាញថា ឫសនៃសមីការគឺ $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$ ដែល $k\in\{-n,\dots,-1,0,1,\dots,n\}$។

ខ. ដោយបំបែកពហុធា $z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីពីរ ចូរបង្ហាញថា៖ $\prod_{k=1}^{n}\left|1-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right|^2=2n+1$

គ. ទាញបញ្ជាក់រូបមន្តផលគុណត្រីកោណមាត្រដ៏ល្បី៖ $\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$។

៤៦. ក. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពត្រីកោណ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ចំពោះគ្រប់ $z_1,z_2\in\mathbb{C}$។ តើសមភាពកើតឡើងនៅពេលណា?

ខ. ទាញបង្ហាញថា $||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|$។

គ. អនុវត្ត៖ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\left|z-\frac{3}{z}\right|=2$។ ចូរបង្ហាញថា $1\le|z|\le3$ រួចទាញរកតម្លៃអប្បបរមា និង អតិបរមានៃ $|z|$។

៤៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច u,v,w ដែលមានម៉ូឌុលស្មើគ្នា $|u|=|v|=|w|=1$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $u+v+w=0$។

ក. បង្ហាញថា $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$

ខ. បង្ហាញថា $uv+vw+wu=0$

គ. ទាញបង្ហាញថា $u^2+v^2+w^2=0$ និង $u^3=v^3=w^3$

ឃ. បង្ហាញថា ចំណុចរូបភាព u,v,w ជាកំពូលត្រីកោណសម័ង្ស

៤៨. ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមក្នុង $\mathbb{C}^3$ ៖

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ z_1+z_2+z_3=1\\ z_1z_2z_3=1\end{cases}$$

៤៩. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ដែលមានកំពូលតំណាងដោយ z_A,z_B,z_C តាមទិសដៅវិជ្ជមាន។ នៅលើជ្រុង BC,CA,AB គេសង់ត្រីកោណសម័ង្សក្រៅ BCD,CAE,ABF ដែលមានផ្ចិតរៀងគ្នា P,Q,R។

ក. បង្ហាញថាកំពូល D មានកូអរដោនេកុំផ្លិចផ្ទៀងផ្ទាត់ $z_D-z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_B)$។

ខ. កំណត់កូអរដោនេកុំផ្លិចនៃផ្ចិត P,Q,R ជាអនុគមន៍នៃ z_A,z_B,z_C។

គ. បង្ហាញថា ត្រីកោណ PQR គឺជាត្រីកោណសម័ង្ស (ទ្រឹស្តីបទណាប៉ូឡេអុង)។

៥០. ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ និង $x\in\mathbb{R}$ គេកំណត់ផលបូក៖ $C_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$ និង $S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$។

ក. គណនា $Z_n=C_n+iS_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}$ ដោយប្រើរូបមន្តទ្វេធាញូតុនចំពោះ $(1+e^{ix})^n$។

ខ. បង្ហាញថា $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$។

គ. ទាញបង្ហាញរូបមន្ត៖ $C_n=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$ និង $S_n=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$។

ឃ. អនុវត្ត៖ គណនាតម្លៃនៃ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$។

១ តារាងចម្លើយពហុជ្រើសរើស (Answer Keys)

តារាងចម្លើយមេរៀនទី១ (ចំនួនកុំផ្លិច ១០០ សំណួរ)

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ខ	21	គ	41	ខ	61	ក	81	ក
2	ខ	22	គ	42	គ	62	ខ	82	ខ
3	គ	23	ក	43	ក	63	ខ	83	ក
4	ក	24	ខ	44	គ	64	គ	84	ក
5	ខ	25	ឃ	45	ខ	65	ខ	85	ឃ
6	ក	26	គ	46	ក	66	ខ	86	ខ
7	គ	27	ខ	47	ក	67	ខ	87	ក
8	ឃ	28	ខ	48	ក	68	ក	88	ខ
9	គ	29	ខ	49	ខ	69	ឃ	89	ក
10	គ	30	គ	50	ឃ	70	ក	90	ក
11	ក	31	ក	51	ខ	71	ខ	91	ក
12	គ	32	ខ	52	គ	72	ខ	92	ក
13	ខ	33	គ	53	ខ	73	ខ	93	ខ
14	ឃ	34	ខ	54	ក	74	ខ	94	ខ
15	ខ	35	ខ	55	ខ	75	ក	95	ក
16	ខ	36	ក	56	ខ	76	ឃ	96	ខ
17	ខ	37	ឃ	57	គ	77	ខ	97	ក
18	ខ	38	ខ	58	ក	78	ខ	98	ឃ
19	ខ	39	ខ	59	ខ	79	ក	99	ក
20	ខ	40	ខ	60	ខ	80	ខ	100	ក

តារាងចម្លើយមេរៀនទី២ (ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់)

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ខ	21	ខ	41	ខ	61	ខ	81	ក
2	គ	22	ខ	42	ក	62	ក	82	ខ
3	ខ	23	ខ	43	ក	63	ក	83	ក
4	គ	24	ក	44	ខ	64	ខ	84	ខ
5	ឃ	25	ខ	45	ខ	65	ក	85	ក
6	ខ	26	ខ	46	ខ	66	ខ	86	ខ
7	ក	27	គ	47	ខ	67	ក	87	ក
8	ខ	28	ខ	48	ក	68	គ	88	ខ
9	ខ	29	ខ	49	ក	69	ខ	89	ខ
10	ខ	30	គ	50	ខ	70	ខ	90	ខ
11	ខ	31	ខ	51	ក	71	ខ	91	ក
12	ក	32	ខ	52	គ	72	ក	92	ក
13	គ	33	គ	53	ក	73	ក	93	ខ
14	ខ	34	ខ	54	ខ	74	ក	94	ក
15	ខ	35	ខ	55	ខ	75	ក	95	ក
16	គ	36	ខ	56	ខ	76	ក	96	គ
17	ខ	37	ខ	57	ខ	77	គ	97	ក
18	គ	38	ខ	58	ក	78	ក	98	ក
19	ខ	39	ខ	59	ខ	79	ខ	99	ក
20	ខ	40	ខ	60	ក	80	ខ	100	ក

តារាងចម្លើយមេរៀនទី៣ (ស្វ័យគុណ និង ឫសទី n)

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ក	21	ខ	41	ខ	61	ក	81	ក
2	ខ	22	ក	42	ក	62	ក	82	ក
3	ខ	23	ខ	43	ក	63	ខ	83	ខ
4	ខ	24	គ	44	ខ	64	ខ	84	ក
5	ខ	25	ក	45	ក	65	គ	85	ក
6	ខ	26	គ	46	ក	66	ក	86	ខ
7	ខ	27	ក	47	ខ	67	ក	87	ក
8	ក	28	ក	48	ក	68	ខ	88	ក
9	ខ	29	ក	49	ក	69	ខ	89	ក
10	ខ	30	ក	50	ខ	70	ខ	90	ក
11	ក	31	ក	51	ខ	71	ក	91	ក
12	គ	32	ខ	52	ក	72	ក	92	ក
13	ក	33	គ	53	ខ	73	ក	93	ក
14	ខ	34	ខ	54	ឃ	74	ខ	94	ក
15	ក	35	ក	55	ខ	75	ក	95	ក
16	គ	36	ខ	56	ខ	76	ក	96	ក
17	ឃ	37	ក	57	ខ	77	ក	97	ក
18	ខ	38	ខ	58	ខ	78	ក	98	ក
19	ខ	39	ខ	59	ខ	79	ក	99	ខ
20	ខ	40	ក	60	ខ	80	ខ	100	ខ

តារាងចម្លើយមេរៀនទី៤ (វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងប្រជែង ៤៤ សណួរ)

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ក	11	ខ	21	ខ	31	ខ	41	ក
2	ខ	12	គ	22	ឃ	32	គ	42	ខ
3	ក	13	ឃ	23	ខ	33	ក	43	ក
4	ក	14	គ	24	ខ	34	ក	44	ខ
5	ឃ	15	គ	25	ខ	35	គ	--	--
6	ក	16	ឃ	26	ខ	36	គ	--	--
7	ខ	17	គ	27	ក	37	ក	--	--
8	គ	18	ក	28	ខ	38	គ	--	--
9	ខ	19	ឃ	29	ក	39	ឃ	--	--
10	ឃ	20	ឃ	30	ក	40	ឃ	--	--

មេរៀនទី ៥ ផ្នែកចម្លើយ

២ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់អនុវត្តន៍មេរៀនទី១

លំហាត់ ១៖ បំប្លែងជាចំនួននិមិត្ត

រូបមន្តគន្លឹះ៖ ចំពោះ $a>0$ គេបាន $\sqrt{-a}=\sqrt{a\cdot(-1)}=i\sqrt{a}$ ដែល $i^2=-1$។

ក. $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$

ខ. $-\sqrt{-121}=-\sqrt{121}\cdot i=-11i$

គ. $\sqrt{-6}=\sqrt{6}\cdot i=i\sqrt{6}$

ឃ. $\sqrt{-12}=\sqrt{4\cdot 3}\cdot i=2i\sqrt{3}$

ង. $\sqrt{-144}=\sqrt{144}\cdot i=12i$

ច. $-\sqrt{-17}=-\sqrt{17}\cdot i=-i\sqrt{17}$

ឆ. $\sqrt{-64}=\sqrt{64}\cdot i=8i$

ជ. $\sqrt{-169}=\sqrt{169}\cdot i=13i$

លំហាត់ ២៖ កំណត់តម្លៃ x និង y

ទ្រឹស្តីបទ៖ ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា $A+Bi=C+Di \iff \begin{cases}A=C\\B=D\end{cases}$ $(A,B,C,D\in\mathbb{R})$។

ក. $(1+i)x+(3-5i)y=1-3i$
$\iff x+xi+3y-5yi=1-3i$
$\iff (x+3y)+(x-5y)i=1-3i$
តាមសមភាពចំនួនកុំផ្លិច គេទាញបានប្រព័ន្ធសមីការ៖
$\begin{cases}x+3y=1 \quad (1)\\ x-5y=-3 \quad (2)\end{cases}$
យក $(1)-(2)$ គេបាន៖ $8y=4 \implies y=\frac{1}{2}$
ជំនួស $y=\frac{1}{2}$ ក្នុង (1)៖ $x+3\left(\frac{1}{2}\right)=1 \implies x=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$
ដូចនេះ $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

ខ. $-4-\sqrt{-8}=-x-iy$
$\iff -4-i\sqrt{8}=-x-iy \iff -4-2i\sqrt{2}=-x-iy$
$\implies \begin{cases}-x=-4\\-y=-2\sqrt{2}\end{cases} \iff \begin{cases}x=4\\y=2\sqrt{2}\end{cases}$
ដូចនេះ $x=4,\ y=2\sqrt{2}$

គ. $(x-1)+(y+3)i=1-3i$
$\implies \begin{cases}x-1=1 \implies x=2\\ y+3=-3 \implies y=-6\end{cases}$
ដូចនេះ $x=2,\ y=-6$

ឃ. $(x+iy)^2=8-6i$
ពន្លាត៖ $x^2-y^2+2xyi=8-6i$
ម្យ៉ាងទៀត យកម៉ូឌុលសងខាង៖
$|(x+iy)^2|=|8-6i| \implies x^2+y^2=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$
គេបានប្រព័ន្ធសមីការ៖
$\begin{cases}x^2-y^2=8 \quad (1)\\ 2xy=-6 \implies xy=-3<0 \quad (2)\\ x^2+y^2=10 \quad (3)\end{cases}$
បូក $(1)+(3)$៖ $2x^2=18 \implies x^2=9 \implies x=\pm 3$
ដក $(3)-(1)$៖ $2y^2=2 \implies y^2=1 \implies y=\pm 1$
ដោយ $xy=-3<0 \implies x,y$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា៖
ដូចនេះ $(x,y)\in\{(3,-1),\ (-3,1)\}$

ង. $(x+iy)^2=-5+12i$
ប្រព័ន្ធសមីការ៖
$\begin{cases}x^2-y^2=-5 \quad (1)\\ xy=6>0 \quad (2)\\ x^2+y^2=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13 \quad (3)\end{cases}$
បូក $(1)+(3)$៖ $2x^2=8 \implies x^2=4 \implies x=\pm 2$
ដក $(3)-(1)$៖ $2y^2=18 \implies y^2=9 \implies y=\pm 3$
ដោយ $xy>0 \implies x,y$ មានសញ្ញាដូចគ្នា៖
ដូចនេះ $(x,y)\in\{(2,3),\ (-2,-3)\}$

ច. $(x+iy)^2=24-10i$
ប្រព័ន្ធសមីការ៖
$\begin{cases}x^2-y^2=24\\ xy=-5<0\\ x^2+y^2=\sqrt{24^2+(-10)^2}=26\end{cases}$
$\implies 2x^2=50 \implies x=\pm 5$
$\implies 2y^2=2 \implies y=\pm 1$
ដោយ $xy<0$៖
ដូចនេះ $(x,y)\in\{(5,-1),\ (-5,1)\}$

លំហាត់ ៣៖ ដោះស្រាយសមីការ $x^2=-a$

រូបមន្ត៖ ចំពោះ $a>0$ សមីការ $x^2=-a$ មានឫសកុំផ្លិចពីរគឺ $x=\pm i\sqrt{a}$។

ក. $x^2=-18 \iff x=\pm i\sqrt{18}=\pm 3i\sqrt{2}$

ខ. $x^2=-24 \iff x=\pm i\sqrt{24}=\pm 2i\sqrt{6}$

គ. $x^2=-81 \iff x=\pm i\sqrt{81}=\pm 9i$

ឃ. $x^2=-75 \iff x=\pm i\sqrt{75}=\pm 5i\sqrt{3}$

ង. $x^2=-625 \iff x=\pm i\sqrt{625}=\pm 25i$

ច. $x^2=-10^{-4} \iff x=\pm i\sqrt{10^{-4}}=\pm 10^{-2}i=\pm 0.01i$

ឆ. $x^2=-\frac{48}{121} \iff x=\pm i\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{121}}=\pm\frac{4\sqrt{3}}{11}i$

ជ. $x^2=-\frac{3}{100} \iff x=\pm i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{10}i$

លំហាត់ ៤៖ ប្រមាណវិធីលើ z_1,z_2

ក. $z_1=2+5i,\ z_2=1-7i$៖

- $z_1+z_2=(2+1)+(5-7)i=3-2i$
- $z_1-z_2=(2-1)+(5-(-7))i=1+12i$

- $z_1z_2=(2+5i)(1-7i)=2-14i+5i-35i^2$
  $=2-9i+35=37-9i$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2+5i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}=\frac{2+14i+5i+35i^2}{1^2+7^2}$
  $=\frac{2+19i-35}{50}=-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i$

ខ. $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{3},\ z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$៖

- $z_1+z_2=2\sqrt{2}$
- $z_1-z_2=-2i\sqrt{3}$
- $z_1z_2=(\sqrt{2})^2-(i\sqrt{3})^2=2-3(-1)=5$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2}{5}=\frac{2-2i\sqrt{6}-3}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}i$

គ. $z_1=3+4i,\ z_2=-1+2i$៖

- $z_1+z_2=2+6i$
- $z_1-z_2=4+2i$
- $z_1z_2=-3+6i-4i-8=-11+2i$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(3+4i)(-1-2i)}{(-1)^2+2^2}=\frac{-3-6i-4i+8}{5}=\frac{5-10i}{5}=1-2i$

ឃ. $z_1=5-2i,\ z_2=2+3i$៖

- $z_1+z_2=7+i$
- $z_1-z_2=3-5i$
- $z_1z_2=10+15i-4i+6=16+11i$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(5-2i)(2-3i)}{2^2+3^2}=\frac{10-15i-4i-6}{13}=\frac{4-19i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i$

លំហាត់ ៥៖ សរសេរជាទម្រង់ $a+bi$

ក. $A=\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{2+i}$៖
- ភាគទី១៖ $\frac{13+12i}{-8+6i}=\frac{(13+12i)(-8-6i)}{(-8)^2+6^2}=\frac{-32-174i}{100}=-\frac{8}{25}-\frac{87}{50}i$
- ភាគទី២៖ $\frac{(1+2i)^2}{2+i}=\frac{-3+4i}{2+i}=\frac{(-3+4i)(2-i)}{2^2+1^2}=\frac{-2+11i}{5}=-\frac{4}{10}+\frac{22}{10}i=-\frac{20}{50}+\frac{110}{50}i$
- បូកបញ្ចូលគ្នា៖
$A=(-\frac{16}{50}-\frac{87}{50}i)+(-\frac{20}{50}+\frac{110}{50}i)=-\frac{36}{50}+\frac{23}{50}i=-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$

ខ. $B=\frac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}$៖
ភាគយក៖ $i^2\sqrt{6}-2i-3i+\sqrt{6}=-\sqrt{6}-5i+\sqrt{6}=-5i$
$\Longrightarrow B=\frac{-5i}{1-i}=\frac{-5i(1+i)}{1^2+(-1)^2}=\frac{-5i+5}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$

គ. $C=\frac{1+i}{\sqrt{2}-i}+\frac{1-i}{\sqrt{2}+i}$៖
តម្រូវភាគបែងរួម៖
$C=\frac{(1+i)(\sqrt{2}+i)+(1-i)(\sqrt{2}-i)}{(\sqrt{2})^2-i^2}$
$=\frac{(\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1))+(\sqrt{2}-1-i(\sqrt{2}+1))}{2+1}=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$

ឃ. $D=\frac{3+i}{2-i}+\frac{1-2i}{1+i}$៖
$\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{5}=\frac{5+5i}{5}=1+i$
$\frac{1-2i}{1+i}=\frac{(1-2i)(1-i)}{2}=\frac{-1-3i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
$\Longrightarrow D=(1+i)+(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

ង. $E=\frac{4-3i}{2+3i}+\frac{2+i}{1-i}$៖
$=\frac{(4-3i)(2-3i)}{13}+\frac{(2+i)(1+i)}{2}=\frac{-1-18i}{13}+\frac{1+3i}{2}$
$=\frac{-2-36i+13+39i}{26}=\frac{11+3i}{26}=\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i$

ច. $F=\frac{5-2i}{1+i}-\frac{3+4i}{2-i}$៖
$=\frac{(5-2i)(1-i)}{2}-\frac{(3+4i)(2+i)}{5}=\frac{3-7i}{2}-\frac{2+11i}{5}$
$=\frac{15-35i-(4+22i)}{10}=\frac{11-57i}{10}=\frac{11}{10}-\frac{57}{10}i$

លំហាត់ ៦៖ គណនា i^n

រូបមន្ត៖ $i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$។ សម្រាប់ $n=4q+r$
នោះ៖ $i^n=(i^4)^q\cdot i^r=i^r$។

ក. $i^5=i^{4(1)+1}=i$

ខ. $i^{12}=i^{4(3)+0}=1$

គ. $i^{23}=i^{4(5)+3}=i^3=-i$

ឃ. $i^{34}=i^{4(8)+2}=i^2=-1$

ង. $i^{47}=i^{4(11)+3}=i^3=-i$

ច. $i^{56}=i^{4(14)+0}=1$

ឆ. $i^{63}=i^{4(15)+3}=i^3=-i$

ជ. $i^{78}=i^{4(19)+2}=i^2=-1$

ឈ. $i^{91}=i^{4(22)+3}=i^3=-i$

ញ. $i^{104}=i^{4(26)+0}=1$

លំហាត់ ៧៖ ពន្លាតជាទម្រង់ $a+bi$

ក. $(2+i)^3=2^3+3(2^2)(i)+3(2)(i^2)+i^3$
$=8+12i-6-i=2+11i$

ខ. $(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(1-2i-1)^2=(-2i)^2=4i^2=-4$

គ. $(3+2i)^3=3^3+3(3^2)(2i)+3(3)(2i)^2+(2i)^3$
$=27+54i-36-8i=-9+46i$

ឃ. $(2-3i)^4=[(2-3i)^2]^2=(4-12i-9)^2=(-5-12i)^2$
$=25+120i-144=-119+120i$

ង. $(1+3i)^3=1+9i-27-27i=-26-18i$

ច. $(4-i)^4=[(4-i)^2]^2=(15-8i)^2=225-240i-64=161-240i$

ឆ. $(2-i)^3=8-12i-6+i=2-11i$

ជ. $(3-2i)^4=[(3-2i)^2]^2=(5-12i)^2=-119-120i$

លំហាត់ ៨៖ កំណត់ x ឲ្យកន្សោមជាចំនួនពិត

ចំនួនកុំផ្លិច Z ជាចំនួនពិត $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(Z)=0$។
កន្សោមដើម៖ $Z=\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(x-i)(1+i)}{2}$
$=\frac{(4-2i)+(x+1+(x-1)i)}{2}=\frac{(x+5)+(x-3)i}{2}$
ដើម្បីឲ្យ $Z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow x-3=0\Longleftrightarrow x=3$។

ក. $Z=\frac{2+i}{1-i}+\frac{x+3i}{1+2i}=\frac{1+3i}{2}+\frac{x+6+(3-2x)i}{5}$
$\operatorname{Im}(Z)=\frac{3}{2}+\frac{3-2x}{5}=\frac{15+6-4x}{10}=\frac{21-4x}{10}$
$Z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow 21-4x=0\Longleftrightarrow x=\frac{21}{4}$

ខ. $Z=\frac{1-2i}{1+i}+\frac{x-i}{2-i}=\frac{-1-3i}{2}+\frac{2x-1+(x-2)i}{5}$
$\operatorname{Im}(Z)=-\frac{3}{2}+\frac{x-2}{5}=\frac{-15+2x-4}{10}=\frac{2x-19}{10}$
$Z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow 2x-19=0\Longleftrightarrow x=\frac{19}{2}$

គ. $Z=\frac{3+4i}{2-i}+\frac{x+2i}{1+i}=\frac{2+11i}{5}+\frac{x+2+(2-x)i}{2}$
$\operatorname{Im}(Z)=\frac{11}{5}+\frac{2-x}{2}=\frac{22+10-5x}{10}=\frac{32-5x}{10}$
$Z\in\mathbb{R}\iff 32-5x=0\iff x=\frac{32}{5}$

ឃ. $Z=\frac{5-3i}{3+2i}+\frac{x-i}{2-i}=\frac{9-19i}{13}+\frac{2x-1+(x-2)i}{5}$
$\operatorname{Im}(Z)=-\frac{19}{13}+\frac{x-2}{5}=\frac{-95+13x-26}{65}=\frac{13x-121}{65}$
$Z\in\mathbb{R}\iff 13x-121=0\iff x=\frac{121}{13}$

លំហាត់ ៩៖ សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ចំណុចរូបភាព $M(a,b)$ តំណាងឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$៖

- $z_1=-1-3i\implies A(-1,-3)$
- $z_2=-1+3i\implies B(-1,3)$
- $z_3=2=2+0i\implies C(2,0)$
- $z_4=4i=0+4i\implies D(0,4)$
- $z_5=2-3i\implies E(2,-3)$
- $z_6=1+i\implies F(1,1)$

លំហាត់ ១០៖ រូបភាពវ៉ិចទ័រ

គេឱ្យ $z_1=3+2i\implies\vec{u}(3,2)$ និង $z_2=2+4i\implies\vec{v}(2,4)$។

ក. $z_1+z_2=5+6i\implies\vec{w}_1(5,6)$

ខ. $z_1-z_2=1-2i\implies\vec{w}_2(1,-2)$

គ. $2z_2=4+8i\implies\vec{w}_3(4,8)$

ឃ. $z_2+2z_1=(2+4i)+(6+4i)=8+8i\implies\vec{w}_4(8,8)$

ង. $-z_1=-3-2i\implies\vec{w}_5(-3,-2)$

ច. $-2z_1+z_2=(-6-4i)+(2+4i)=-4\implies\vec{w}_6(-4,0)$

ឆ. $z_1+3z_2=(3+2i)+(6+12i)=9+14i\implies\vec{w}_7(9,14)$

ជ. $2z_1-3z_2=(6+4i)-(6+12i)=-8i\implies\vec{w}_8(0,-8)$

លំហាត់ ១១៖ រូបភាពវ៉ិចទ័រ z_1,z_2

គេឱ្យ $z_1=2+i\implies(2,1)$, $z_2=-2+i\implies(-2,1)$៖

ក. $z_1+z_2=2i\implies(0,2)$

ខ. $z_1-z_2=4\implies(4,0)$

គ. $-2z_2=4-2i\implies(4,-2)$

ឃ. $3z_1+z_2=(6+3i)+(-2+i)=4+4i\implies(4,4)$

លំហាត់ ១២៖ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈកុំផ្លិចឆ្លាស់

ក. $z=2-i,\ w=1+3i$៖
$z+w=3+2i\implies\overline{z+w}=3-2i$
$\bar z=2+i,\ \bar w=1-3i\implies\bar z+\bar w=3-2i$
ដូចនេះ $\overline{z+w}=\bar z+\bar w$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ខ. $z=3+i,\ w=2-2i$៖
$z-w=1+3i\implies\overline{z-w}=1-3i$
$\bar z=3-i,\ \bar w=2+2i\implies\bar z-\bar w=1-3i$
ដូចនេះ $\overline{z-w}=\bar z-\bar w$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

គ. $z=1+i,\ w=2-i$៖
$zw=(1+i)(2-i)=3+i\implies\overline{zw}=3-i$
$\bar z\bar w=(1-i)(2+i)=3-i$
ដូចនេះ $\overline{zw}=\bar z\bar w$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ឃ. $z=3-2i,\ w=1+2i$៖
$\frac{z}{w}=\frac{(3-2i)(1-2i)}{5}=\frac{-1-8i}{5}\implies\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$
$\frac{\bar z}{\bar w}=\frac{3+2i}{1-2i}=\frac{(3+2i)(1+2i)}{5}=\frac{-1+8i}{5}$
ដូចនេះ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar z}{\bar w}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

លំហាត់ ១៣៖ គណនា $z\cdot\bar z$ និង $|z|$

រូបមន្ត៖ ចំពោះ $z=a+bi$ គេបាន $z\cdot\bar z=a^2+b^2$ និង $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\bar z}$។

ក. $z=3-4i\implies z\bar z=3^2+(-4)^2=25\implies|z|=5$

ខ. $z=1+2i\implies z\bar z=1^2+2^2=5\implies|z|=\sqrt5$

គ. $z=-2+3i\implies z\bar z=(-2)^2+3^2=13\implies|z|=\sqrt{13}$

ឃ. $z=2-5i\implies z\bar z=2^2+(-5)^2=29\implies|z|=\sqrt{29}$

ង. $z=4+i\implies z\bar z=4^2+1^2=17\implies|z|=\sqrt{17}$

ច. $z=-3-4i\implies z\bar z=(-3)^2+(-4)^2=25\implies|z|=5$

លំហាត់ ១៤៖ សមីការដឺក្រេទីពីរមេគុណពិត

ក. $x^2+2x+5=0$៖
$\Delta'=1^2-5=-4=(2i)^2$
$\implies x=-1\pm2i$

ខ. $x^2-4x+13=0$៖
$\Delta'=(-2)^2-13=-9=(3i)^2$
$\implies x=2\pm3i$

គ. $2x^2+3x+4=0$៖
$\Delta=3^2-4(2)(4)=9-32=-23=(i\sqrt{23})^2$
$\implies x=\frac{-3\pm i\sqrt{23}}{4}$

ឃ. $x^2+x+1=0$៖
$\Delta=1-4=-3=(i\sqrt3)^2$
$\implies x=-\frac12\pm i\frac{\sqrt3}{2}$

ង. $x^2-2x+2=0$៖
$\Delta'=1-2=-1=i^2\implies x=1\pm i$

ច. $x^2+6x+13=0$៖
$\Delta'=9-13=-4=(2i)^2\implies x=-3\pm2i$

លំហាត់ ១៥៖ កំណត់តម្លៃ a និង b

- ករណី $(a+bi)(1+i)=2+4i$៖
$a+bi=\frac{2+4i}{1+i}=\frac{(2+4i)(1-i)}{2}=\frac{2-2i+4i+4}{2}=3+i$
$\implies a=3,\ b=1$

- ករណី $(a+bi)^2=3+4i$៖
$a^2-b^2=3,\ 2ab=4 \implies ab=2,\ a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5$
$\implies 2a^2=8 \implies a=\pm 2$ និង $b=\pm 1$
ដូចនេះ $(a,b)=(2,1)$ ឬ $(-2,-1)$

លំហាត់ ១៦៖ កំណត់តម្លៃ a និង b

- ករណី $(a+bi)(2-i)=7+i$៖
$a+bi=\frac{7+i}{2-i}=\frac{(7+i)(2+i)}{5}=\frac{14+7i+2i-1}{5}=\frac{13+9i}{5}$
$\implies a=\frac{13}{5},\ b=\frac{9}{5}$
- ករណី $\frac{a+bi}{1+i}=2-i$៖
$a+bi=(2-i)(1+i)=2+2i-i+1=3+i$
$\implies a=3,\ b=1$

លំហាត់ ១៧៖ ប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិច

ក. $(3+2i)+(5-4i)=8-2i$

ខ. $(7-3i)-(2+5i)=5-8i$

គ. $(2+i)(4-3i)=8-6i+4i+3=11-2i$

ឃ. $(5-2i)(1+3i)=5+15i-2i+6=11+13i$

ង. $\frac{6+4i}{2-i}=\frac{(6+4i)(2+i)}{5}=\frac{12+6i+8i-4}{5}=\frac{8+14i}{5}=\frac{8}{5}+\frac{14}{5}i$

ច. $\frac{3-5i}{1+2i}=\frac{(3-5i)(1-2i)}{5}=\frac{3-6i-5i-10}{5}=\frac{-7-11i}{5}=-\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$

លំហាត់ ១៨៖ រូបភាពវ៉ិចទ័រ z_1, z_2

$z_1=2+i \implies \vec{u}(2,1),\ z_2=1+2i \implies \vec{v}(1,2)$៖

- $z_1+z_2=3+3i \implies$ តំណាងដោយវ៉ិចទ័រ $(3,3)$
- $z_1-z_2=1-i \implies$ តំណាងដោយវ៉ិចទ័រ $(1,-1)$

លំហាត់ ១៩៖ រូបភាពវ៉ិចទ័រ $2z$

- ចំពោះ $z=2+i \implies 2z=4+2i$ តំណាងដោយ $(4,2)$
- ចំពោះ $z=-1+3i \implies 2z=-2+6i$ តំណាងដោយ $(-2,6)$

លំហាត់ ២០៖ សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

- $z_1=1+i \implies A(1,1)$
- $z_2=-1+2i \implies B(-1,2)$
- $z_3=-2-i \implies C(-2,-1)$

លំហាត់ ២១៖ សរសេរជាទម្រង់ $a+bi$

ក. $(3+i)(2-4i)=6-12i+2i+4=10-10i$

ខ. $\frac{5+2i}{2-i}=\frac{(5+2i)(2+i)}{5}=\frac{10+5i+4i-2}{5}=\frac{8}{5}+\frac{9}{5}i$

គ. $\frac{3-4i}{1+3i}=\frac{(3-4i)(1-3i)}{10}=\frac{3-9i-4i-12}{10}=-\frac{9}{10}-\frac{13}{10}i$

លំហាត់ ២២៖ លក្ខណៈឆ្លាស់

គេឱ្យ $z_1=2-i,\ z_2=3+4i$៖

- $z_1+z_2=5+3i \implies \overline{z_1+z_2}=5-3i$
- $z_1-z_2=-1-5i \implies \overline{z_1-z_2}=-1+5i$
- $z_1z_2=(2-i)(3+4i)=10+5i \implies \overline{z_1z_2}=10-5i$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2-i)(3-4i)}{25}=\frac{2-11i}{25} \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{2+11i}{25}$

លំហាត់ ២៣៖ កំណត់ x ឲ្យកន្សោមជាចំនួនពិត

$Z=\frac{1+i}{2-i}+\frac{x-i}{1+i}=\frac{1+3i}{5}+\frac{x-1-(x+1)i}{2}$
$\text{Im}(Z)=\frac{3}{5}-\frac{x+1}{2}=\frac{6-5(x+1)}{10}=\frac{1-5x}{10}$
$Z\in\mathbb{R} \iff 1-5x=0 \iff x=\frac{1}{5}$

លំហាត់ ២៤៖ ប្រមាណវិធី z_1, z_2

ក. $z_1=2+5i, z_2=1-7i$៖
$z_1+z_2=3-2i,\ z_1-z_2=1+12i,\ z_1z_2=37-9i,\ \frac{z_1}{z_2}=-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i$

ខ. $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$៖
$z_1+z_2=2\sqrt{2},\ z_1-z_2=-2i\sqrt{3},\ z_1z_2=5,\ \frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}i$

លំហាត់ ២៥៖ ទម្រង់ពីជគណិត

ក. $A=\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{2+i}=-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$

ខ. $B=\frac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$

គ. $C=\frac{1+i}{\sqrt{2}-i}+\frac{1-i}{\sqrt{2}+i}=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$

លំហាត់ ២៦៖ គណនាស្វ័យគុណ

- $(1+2i)^3=1+3(2i)+3(2i)^2+(2i)^3=1+6i-12-8i=-11-2i$
- $(3i-4)^4=[(-4+3i)^2]^2=(16-24i-9)^2=(7-24i)^2$
$=49-336i-576=-527-336i$

លំហាត់ ២៧៖ កំណត់ x ឲ្យជាចំនួនពិត

$Z=\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}=\frac{(x+5)+(x-3)i}{2}$
$\text{Im}(Z)=\frac{x-3}{2}=0 \iff x=3$។

លំហាត់ ២៨៖ រូបភាពសំណុំចំណុច

$A(-1,-3),\ B(-1,3),\ C(2,0),\ D(0,4),\ E(2,-3)$។

លំហាត់ ២៩៖ រូបភាពវ៉ិចទ័រ

$z_1=3+2i, z_2=2+4i$៖
$z_1+z_2=(5,6),\ z_1-z_2=(1,-2),\ 2z_2=(4,8),\ z_2+2z_1=(8,8)$។

លំហាត់ ៣០៖ រូបភាព z_1, z_2

$z_1=2+i, z_2=-2+i$៖
$z_1+z_2=(0,2),\ z_1-z_2=(4,0),\ -2z_2=(4,-2)$។

លំហាត់ ៣១៖ គណនាកន្សោម z_4 ដល់ z_9

គេឱ្យ $z_1=3+2i,\ z_2=-1+3i,\ z_3=1-i$៖

ក. $z_4=z_1-3z_2=(3+2i)-3(-1+3i)=6-7i$

ខ. $z_5 = iz_1^2 = i(3+2i)^2 = i(5+12i) = -12+5i$

គ. $z_6 = -iz_3 = -i(1-i) = -1-i$

ឃ. $z_7 = z_1z_2 = (3+2i)(-1+3i) = -3+9i-2i-6 = -9+7i$

ង. $z_8 = z_2^4 = [(-1+3i)^2]^2 = (-8-6i)^2 = 64+96i-36 = 28+96i$

ច. $z_9 = \frac{z_1}{z_3} = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

លំហាត់ ៣២៖ កន្សោម និងសមីការ

គេឱ្យ $Z_1 = 1+2i,\ Z_2 = 1,\ Z_3 = 2i$៖

ក. $A = 2Z_1 - 3Z_2 + Z_3 = 2(1+2i) - 3(1) + 2i = -1+6i$

ខ. $B = Z_1^2 - Z_2Z_3 = (1+2i)^2 - (1)(2i) = (-3+4i) - 2i = -3+2i$

គ. $C = \frac{Z_1+Z_3}{Z_2-Z_3} = \frac{1+4i}{1-2i} = \frac{(1+4i)(1+2i)}{5} = \frac{-7+6i}{5} = -\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i$

ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{C}$៖

ក. $z + (2-i)\bar{z} = 3+4i$

តាង $z = x+iy$ គេបាន៖

$(x+iy)+(2-i)(x-iy) = 3+4i$

$\iff (x+iy)+(2x-2iy-ix-y) = 3+4i$

$\iff (3x-y)-(x+y)i = 3+4i$

$\implies \begin{cases} 3x-y=3 \\ -(x+y)=4 \implies x+y=-4 \end{cases}$

បូកបញ្ចូលគ្នា៖ $4x = -1 \implies x = -\frac{1}{4}$

$y = -4-x = -4+\frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$

ដូចនេះ $z = -\frac{1}{4} - \frac{15}{4}i$

ខ. $\frac{z-1}{z+1} = i \iff z-1 = i(z+1) \iff z(1-i) = 1+i$

$\implies z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

ដូចនេះ $z = i$

គ. $z^2+(1-i)z+4-2i = 0$

$\Delta = (1-i)^2 - 4(4-2i) = -2i-16+8i = -16+6i$

រកឫសការេ $\delta = u+iv$ នៃ Δ៖

$u^2-v^2 = -16,\ 2uv = 6 \implies uv = 3 > 0,\ u^2+v^2 = \sqrt{256+36} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$

$\implies u = \pm\sqrt{\sqrt{73}-8},\ v = \pm\sqrt{\sqrt{73}+8}$

ឫសសមីការ៖ $z = \frac{-(1-i)\pm\delta}{2}$

ឃ. $\begin{cases} z_1+z_2 = 4-2i \\ z_1z_2 = 5-i \end{cases}$

z_1, z_2 ជាឫសនៃសមីការ $Z^2-(4-2i)Z+(5-i) = 0$៖

$\Delta' = (2-i)^2-(5-i) = (3-4i)-(5-i) = -2-3i$

ទាញរកឫសការេ និងទាញបានគូឫស (z_1, z_2)។

៣ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់មេរៀនទី២

លំហាត់ ១៖ គណនាម៉ូឌុល

រូបមន្ត៖ ចំពោះ $z=a+bi$ គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$។

ក. $|-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

ខ. $|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

គ. $|4+3i|+|4-3i|=\sqrt{4^2+3^2}+\sqrt{4^2+(-3)^2}=5+5=10$

ឃ. $|(4+3i)+(4-3i)|=|8|=8$

ង. $|i^7|=|(i^4)(i^3)|=|-i|=1$

ច. $|i^{100}|=|(i^4)^{25}|=|1|=1$

លំហាត់ ២៖ ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈកុំផ្លិចឆ្លាស់

តាង $z_1=a_1+b_1i$ និង $z_2=a_2+b_2i$ ដែល $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$។

ក. $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}$
$=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i$
$=(a_1-b_1i)+(a_2-b_2i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (ពិត)

ខ. $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$
$\Longrightarrow \overline{z_1z_2}=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$
ម្យ៉ាងទៀត $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)$
$=a_1a_2-a_1b_2i-a_2b_1i+b_1b_2i^2$
$=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i=\overline{z_1z_2}$ (ពិត)

គ. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$៖
តាង $w=\frac{z_1}{z_2}\iff z_1=wz_2$
តាមលក្ខណៈ (b)៖ $\overline{z_1}=\overline{wz_2}=\overline{w}\cdot\overline{z_2}$
ដោយ $z_2\neq 0\Longrightarrow \overline{z_2}\neq 0$ គេទាញបាន៖
$\overline{w}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\iff \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (ពិត)

លំហាត់ ៣៖ គណនាអាគុយម៉ង់

វិធីសាស្ត្រ៖ រក $r=|z|$ រួចទាញរក θ តាម $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$។

ក. $z=2+2i\Longrightarrow r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$
$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{4}$

ខ. $z=-3+3i\Longrightarrow r=3\sqrt{2}$
$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \arg(z)=\frac{3\pi}{4}$

គ. $z=-2+2i\sqrt{3}\Longrightarrow r=\sqrt{4+12}=4$
$\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow \arg(z)=\frac{2\pi}{3}$

ឃ. $z=-1-i\Longrightarrow r=\sqrt{2}$
$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \arg(z)=-\frac{3\pi}{4}$ (ឬ $\frac{5\pi}{4}$)

ង. $z=4i\Longrightarrow r=4$, $\cos\theta=0$, $\sin\theta=1\Longrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}$

ច. $z=-4i\Longrightarrow r=4$, $\cos\theta=0$, $\sin\theta=-1\Longrightarrow \arg(z)=-\frac{\pi}{2}$

ឆ. $z=-\sqrt{3}+i\Longrightarrow r=2$
$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}\Longrightarrow \arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

ជ. $z=8+8i\sqrt{3}\Longrightarrow r=16$
$\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{3}$

លំហាត់ ៤៖ ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់

គេឱ្យ $z_1=1+i$ និង $z_2=-1+i\sqrt{3}$៖

ក. $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
$\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow \arg(z_1)=\frac{\pi}{4}$

ខ. $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$
$\cos\theta_2=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow \arg(z_2)=\frac{2\pi}{3}$

គ. ផលគុណ z_1z_2៖
$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=2\sqrt{2}$
$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$

ឃ. ផលចែក $\frac{z_1}{z_2}$៖
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{5\pi}{12}$

លំហាត់ ៥៖ កំណត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

លក្ខខណ្ឌ៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រត្រូវមានទម្រង់ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ដែល $r>0$ និងមុំដូចគ្នា។

- $z_1=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$៖ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $(r=2>0)$។
- $z_2=-5\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$៖ មិនមែនទេ ព្រោះ $r=-5<0$។
- $z_3=-2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$៖ មិនមែនទេ ព្រោះ $r=-2<0$។
- $z_4=6\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$៖ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $(r=6>0)$។
- $z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$៖ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $(r=\sqrt{2}>0)$។
- $z_6=-\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$៖ មិនមែនទេ ព្រោះ $r=-\sqrt{3}<0$។

លំហាត់ ៦៖ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z_1=-5-5i\sqrt{3}=10\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=10\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

ខ. $\frac{-5+i}{2-3i}=\frac{(-5+i)(2+3i)}{13}=\frac{-13-13i}{13}=-1-i$
$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

គ. $2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ឃ. $-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

ង. $-20i = 20\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

ច. $15i = 15\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ឆ. $2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ជ. $-6i = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

លំហាត់ ៧៖ ផលចែកត្រីកោណមាត្រ

$z = \frac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}} = \cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\right)$
$= \cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{9}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

លំហាត់ ៨៖ ទម្រង់ពីជគណិត $x+iy$

ក. $|z| = 2,\ \arg(z) = \frac{\pi}{3}$៖
$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

ខ. $|z| = 4,\ \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$៖
$z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

គ. $|z| = 1,\ \arg(z) = -\frac{\pi}{2}$៖
$z = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0 - i = -i$

ឃ. $|z| = 6,\ \arg(z) = \frac{7\pi}{6}$៖
$z = 6\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} - 3i$

លំហាត់ ៩៖ កន្សោមត្រីកោណមាត្រ

$z = \tan\alpha + i\ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}),\ w = 4\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$៖

ក. $|z| = \sqrt{\tan^2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$ (ព្រោះ $\cos\alpha > 0$)

ខ. $|zw| = |z||w| = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot 4 = \frac{4}{\cos\alpha}$

គ. $z = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + i = \frac{1}{\cos\alpha}(\sin\alpha + i\cos\alpha)$
$= \frac{1}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$
$\Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

ឃ. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} - \alpha$

លំហាត់ ១០៖ បំប្លែងត្រីកោណមាត្រ

$z = \frac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha} = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

តាង $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ នោះ $\frac{\pi}{2} - \alpha = 2\varphi$៖

ភាគយក៖ $2\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = 2\cos\varphi e^{i\varphi}$

ភាគបែង៖ $2\cos^2\varphi - 2i\sin\varphi\cos\varphi = 2\cos\varphi e^{-i\varphi}$

$\Longrightarrow z = \frac{2\cos\varphi e^{i\varphi}}{2\cos\varphi e^{-i\varphi}} = e^{i2\varphi} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

លំហាត់ ១១៖ រក w និងរូបភាព

ក. $z = -2 + 5i,\ zw = 14 + 23i$
$\Longrightarrow w = \frac{14+23i}{-2+5i} = \frac{(14+23i)(-2-5i)}{(-2)^2+5^2}$
$= \frac{-28-70i-46i+115}{29} = \frac{87-116i}{29} = 3 - 4i$

ខ. រូបភាពក្នុងប្លង់កុំផ្លិច៖
$z = -2 + 5i \Longrightarrow M(-2, 5)$
$w = 3 - 4i \Longrightarrow N(3, -4)$

លំហាត់ ១២៖ ផលគុណ និងផលចែក

ក. $z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ z_2 = 3\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{15}\right)$៖
$z_1 z_2 = 3\sqrt{6}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{15}\right) = 3\sqrt{6}\operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{30}\right)$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}}{9}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{30}\right)$

ខ. $z_1 = -5 + 5i = 5\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right),\ z_2 = -3i = 3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$៖
$z_1 z_2 = 15\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 15\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 15 + 15i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{5}{3} - \frac{5}{3}i$

គ. $z_1 = 2i = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ z_2 = -3i = 3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$៖
$z_1 z_2 = 6\operatorname{cis}(0) = 6$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\operatorname{cis}(\pi) = -\frac{2}{3}$

លំហាត់ ១៣៖ បំប្លែងវិល

$M'(z')$ ជារូបភាព $M(z = -4 + 4i)$ តាមបំប្លែងវិល $\mathscr{R}(O, \frac{\pi}{6})$៖
$z' = z \cdot e^{i\pi/6} = (-4 + 4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= -2\sqrt{3} - 2i + 2i\sqrt{3} - 2$
$= 2(-\sqrt{3} - 1) + 2(\sqrt{3} - 1)i$

លំហាត់ ១៤៖ កំណត់មុំវិល θ

ក. $z' = \frac{1}{2}(z + i\sqrt{3}z) = z\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ze^{i\pi/3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

ខ. $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}z - iz) = z\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = ze^{-i\pi/6} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

គ. $z' = iz = ze^{i\pi/2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

លំហាត់ ១៥៖ គណនាម៉ូឌុល

ក. $z = -7 + 24i \Longrightarrow |z| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$

ខ. $z = (1+i)^4 \Longrightarrow |z| = |1+i|^4 = (\sqrt{1^2 + 1^2})^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$

គ. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{7} \Longrightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{7})^2} = \sqrt{2 + 7} = 3$

លំហាត់ ១៦៖ ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈម៉ូឌុល

ចំពោះ $z = a + bi \Longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$៖
$\bar{z} = a - bi \Longrightarrow |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$
$-z = -a - bi \Longrightarrow |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$
ដូចនេះ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

លំហាត់ ១៧៖ គណនាអាគុយម៉ង់

ក. $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3}$

ខ. $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow \arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

គ. $z = 5 = 5(1 + 0i) \Longrightarrow \arg(z) = 0$

ឃ. $z = -3i = 3(0 - i) \Longrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

លំហាត់ ១៨៖ អាគុយម៉ង់នៃផលគុណ និងផលចែក

$z_1 = \sqrt{3} + i \Longrightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$
$z_2 = 1 + i \Longrightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$
$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$
$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$

លំហាត់ ១៩៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z_1 = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

ខ. $z_2 = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

គ. $z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

ឃ. $z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

លំហាត់ ២០៖ គណនា z^2, z^4

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$៖

$z^2 = 2^2\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i$

$z^4 = 2^4\left(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right) = 16(\cos\pi + i\sin\pi) = -16$

លំហាត់ ២១៖ បំប្លែងត្រីកោណមាត្រ

$z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/3}\cdot\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

លំហាត់ ២២៖ កំណត់ a, b

$2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$\Longrightarrow a + bi = -1 + i\sqrt{3} \Longrightarrow a = -1,\ b = \sqrt{3}$

លំហាត់ ២៣៖ ស្វ័យគុណទី ១០

$z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$៖

ក. $z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ខ. $z^{10} = 2^{10}\left[\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right]$
$= 1024\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right] = 1024(0-i) = -1024i$

លំហាត់ ២៤៖ អាគុយម៉ង់នៃ $\bar{z}$

$z = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$\bar{z} = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow \arg(\bar{z}) = \frac{3\pi}{4}$

លំហាត់ ២៥៖ ផលគុណមុំដឺក្រេ

$z_1 = 3\,\text{cis}(20^\circ),\ z_2 = 2\,\text{cis}(40^\circ)$

$z_1z_2 = 6\,\text{cis}(20^\circ + 40^\circ) = 6\,\text{cis}(60^\circ)$

$= 6(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + 3i\sqrt{3}$

លំហាត់ ២៦៖ ទម្រង់ $r\,\text{cis}\,\varphi$

$z = \frac{2(\cos\pi + i\sin\pi)}{4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

លំហាត់ ២៧៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រត្រឹមត្រូវ

$z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

ដោយ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ និង $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ គេបាន៖

$z = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$ (ដែលមាន $r = 1 > 0$)

លំហាត់ ២៨៖ ចំណុចបង្វិល M'

$z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$

$z' = ze^{i\pi/3} = 2e^{i2\pi/3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $M'(-1, \sqrt{3})$

លំហាត់ ២៩៖ ស្រាយបញ្ជាក់ $\bar{z} = 1/z$

ដោយ $|z| = 1 \Longrightarrow |z|^2 = 1$

តាមរូបមន្ត $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ គេបាន៖

$z\cdot\bar{z} = 1 \Longrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ (ពិត)

លំហាត់ ៣០៖ គណនា $(1+i)^{10}$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$z = (1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{i10\pi/4} = 32e^{i5\pi/2}$

- ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖ $z = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
- ទម្រង់ពីជគណិត៖ $z = 32(0+i) = 32i$

លំហាត់ ៣១៖ ម៉ូឌុល $1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$z = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

ដោយ $-\pi < \theta < \pi \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$

ដូចនេះ $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$

លំហាត់ ៣២៖ រក z ពីម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់

$z = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

លំហាត់ ៣៣៖ កំណត់មុំបង្វិល θ

$z' = ze^{i\theta} \Longrightarrow e^{i\theta} = \frac{z'}{z} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Longrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = i \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

៤ ដំណោះស្រាយលម្អិត លំហាត់មេរៀនទី៣ និងលំហាត់ជំពូក

■ ផ្នែកទី ១៖ លំហាត់មេរៀនទី៣ (១១ លំហាត់)

លំហាត់ ១៖ គណនាស្វ័យគុណតាមដឺម័រ

រូបមន្តដឺម័រ៖ $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$។

ក. $(1+i)^{12} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{12} = 2^6 e^{i3\pi}$
$= 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -64$

ខ. $(1-i)^{10} = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{10} = 2^5 e^{-i5\pi/2}$
$= 32(0-i) = -32i$

គ. $(3+3i)^5 = (3\sqrt{2}e^{i\pi/4})^5 = 972\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$
$= 972\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -972 - 972i$

ឃ. $(-4\sqrt{3}+4i)^5 = (8e^{i5\pi/6})^5 = 32768e^{i25\pi/6}$
$= 32768e^{i\pi/6} = 32768\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= 16384\sqrt{3} + 16384i$

ង. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{15} = (e^{i3\pi/4})^{15} = e^{i45\pi/4}$
$= e^{i(10\pi + 5\pi/4)} = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ច. $(\sqrt{3}+i)^7 = (2e^{i\pi/6})^7 = 128e^{i7\pi/6}$
$= 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -64\sqrt{3} - 64i$

ឆ. $(-1+i)^{50} = (\sqrt{2}e^{i3\pi/4})^{50} = 2^{25}e^{i75\pi/2}$
$= 2^{25}e^{i(36\pi + 3\pi/2)} = 2^{25}(0-i) = -2^{25}i$

ជ. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{25} = (e^{i\pi/4})^{25} = e^{i25\pi/4}$
$= e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

លំហាត់ ២៖ គណនាកន្សោម u, v

គេមាន $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ និង $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$៖

ក. $u = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
$= 2^5 e^{i5\pi/3} + 2^5 e^{-i5\pi/3} = 32\left(2\cos\frac{5\pi}{3}\right)$
$= 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$

ខ. $v = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
$= 2^5 e^{i5\pi/3} - 2^5 e^{-i5\pi/3} = 32\left(2i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
$= 64i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -32i\sqrt{3}$

លំហាត់ ៣៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^5}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^3} = \frac{4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}}{2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}}$
$= 2e^{i2\pi} = 2(\cos 0 + i\sin 0)$

ខ. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = (\sqrt{2}e^{i7\pi/12})^{20}$
$= 2^{10}e^{i35\pi/3} = 1024e^{-i\pi/3}$
$= 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

គ. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6} = \frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}$
$= \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^8}{(2e^{-i\pi/3})^6} = \frac{16e^{i2\pi}}{64e^{-i2\pi}} = \frac{1}{4}e^{i4\pi} = \frac{1}{4}(\cos 0 + i\sin 0)$

លំហាត់ ៤៖ បង្ហាញសមភាព

ក. $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
តាមដឺម័រ៖ $(1+i)^n = (2^{1/2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$
$= 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ (ពិត)

ខ. $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$
$\Longrightarrow (\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

លំហាត់ ៥៖ ផលបូកស្វ័យគុណ z^k

$z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\pi/6}$៖

ក. ចំណុចរូបភាព $z^k = e^{ik\pi/6}$ $(k = 1,\ldots,7)$ ចែករង្វង់ត្រីកោណមាត្រជាធ្នូមានមុំ $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ ស្មើៗគ្នា។

ខ. $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{11} = \frac{z^{12}-1}{z-1}$
ដោយ $z^{12} = (e^{i\pi/6})^{12} = e^{i2\pi} = 1$
$\Longrightarrow S = \frac{1-1}{z-1} = 0$

លំហាត់ ៦៖ គណនាឫសទី ២

រូបមន្ត៖ ឫសទី n នៃ $re^{i\theta}$ គឺ $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $(k = 0,\ldots,n-1)$។

ក. $Z = 9\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$៖
$w_0 = 3\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $w_1 = 3\,\text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -3\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

ខ. $Z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$៖
$w_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}$, $w_1 = -\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}$

គ. $Z = 4 + 4i = 4\sqrt{2}e^{i\pi/4}$៖
$w_0 = 2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$, $w_1 = -2\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$

លំហាត់ ៧៖ គណនាឫសទី ៣

ក. $Z = 8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$៖
$w_k = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)$ $(k \in \{0,1,2\})$
$w_0 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $w_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

ខ. $Z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$៖
$w_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k = 0,1,2$

គ. $Z = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i2\pi/3}$៖
$w_k = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k = 0,1,2$

លំហាត់ ៨៖ គណនាឫសទី ៤

ក. $Z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \Longrightarrow w_k = \sqrt[4]{2}e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})}$, $k = 0,1,2,3$

ខ. $Z=2\sqrt{3}-2i=4e^{-i\pi/6} \implies w_k=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$

គ. $Z=-2-2i\sqrt{3}=4e^{-i2\pi/3} \implies w_k=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$

លំហាត់ ៩៖ ឫសទី ៥ នៃ $-\sqrt{3}-i$

$-\sqrt{3}-i=2e^{i7\pi/6}$

$\implies w_k=\sqrt[5]{2}e^{i(\frac{7\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5})},\ k=0,1,2,3,4$។

កំពូលទាំង ៥ បង្កើតបានជាបញ្ចកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ $R=\sqrt[5]{2}$។

លំហាត់ ១០៖ ឫសទី ៦ នៃ 1

$1=e^{i0}\implies w_k=e^{i\frac{2k\pi}{6}}=e^{i\frac{k\pi}{3}},\ k=0,1,2,3,4,5$។

ឫសទាំង ៦ គឺ៖ $1,\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$។

ពួកវាជាកំពូលនៃឆកោននិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ឯកតា។

លំហាត់ ១១៖ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $z^4=8(-1+i\sqrt{3})=16e^{i2\pi/3}\implies z_k=2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$

ខ. $z^3=-8i=8e^{-i\pi/2}\implies z_k=2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})},\ k=0,1,2$

គ. $z^4=-8i=8e^{-i\pi/2}\implies z_k=\sqrt[4]{8}e^{i(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$

ឃ. $z^3=-27i=27e^{-i\pi/2}\implies z_k=3e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})},\ k=0,1,2$

ង. $z^3=4\sqrt{3}-4i=8e^{-i\pi/6}\implies z_k=2e^{i(-\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3})},\ k=0,1,2$

ច. $z^5=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{i5\pi/4}\implies z_k=e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5})},\ k=0,1,2,3,4$

■ ផ្នែកទី ២៖ លំហាត់ជំពូកទី១ (១៤ លំហាត់)

លំហាត់ ១៖ ប្រមាណវិធីលើ z_1, z_2

ក. $z_1=3+2i, z_2=1-7i$៖

$z_1+z_2=4-5i,\ z_1-z_2=2+9i$

$z_1z_2=(3+2i)(1-7i)=3-21i+2i+14=17-19i$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(3+2i)(1+7i)}{50}=\frac{3+21i+2i-14}{50}=-\frac{11}{50}+\frac{23}{50}i$

ខ. $z_1=\sqrt{3}-i\sqrt{5}, z_2=\sqrt{3}+i\sqrt{5}$៖

$z_1+z_2=2\sqrt{3},\ z_1-z_2=-2i\sqrt{5}$

$z_1z_2=3-(-5)=8$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(\sqrt{3}-i\sqrt{5})^2}{8}=\frac{3-2i\sqrt{15}-5}{8}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{4}i$

លំហាត់ ២៖ សរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $z=\frac{-14+63i}{50}-\frac{6i+1}{1-7i}$

$\frac{1+6i}{1-7i}=\frac{(1+6i)(1+7i)}{50}=\frac{1+7i+6i-42}{50}=\frac{-41+13i}{50}$

$\implies z=\frac{-14+63i-(-41+13i)}{50}=\frac{27+50i}{50}=\frac{27}{50}+i$

ខ. $z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

ភាគយក៖ $(-3+4i)-(-2i)=-3+6i=3(-1+2i)$

ភាគបែង៖ $(-9+46i)-(3+4i)=-12+42i=6(-2+7i)$

$\implies z=\frac{-1+2i}{2(-2+7i)}=\frac{(-1+2i)(-2-7i)}{2(4+49)}=\frac{16+3i}{106}$

គ. $z=\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{2+i}=-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$

ឃ. $z=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{-4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{-4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៣៖ សមីការដឺក្រេទីពីរ និងសមីការបំប្លែង

ក. $z^2-6z+13=0$៖

$\Delta'=(-3)^2-13=-4=(2i)^2$

ដូចនេះ $z=3\pm 2i$

ខ. តាង $X=\frac{u-3i}{u+2}$ នោះសមីការក្លាយជា $X^2-6X+13=0$

$\implies X=3\pm 2i$

- បើ $\frac{u-3i}{u+2}=3+2i\implies u-3i=(3+2i)(u+2)$

$\iff u(2+2i)=-6-7i\implies u=\frac{-6-7i}{2+2i}=-\frac{13}{4}+\frac{1}{4}i$

- បើ $\frac{u-3i}{u+2}=3-2i\implies u-3i=(3-2i)(u+2)$

$\iff u(2-2i)=-6+i\implies u=\frac{-6+i}{2-2i}=-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}i$

លំហាត់ ៤៖ ស្វែងរក z

$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|\implies |z|=\frac{1}{|z|}\implies |z|^2=1\implies |z|=1$។

ម្យ៉ាងទៀត $|1-z|=|z|=1$។

តាង $z=\cos\theta+i\sin\theta$ នោះ៖

$|1-\cos\theta-i\sin\theta|^2=1\iff (1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=1$

$\iff 2-2\cos\theta=1\iff \cos\theta=\frac{1}{2}\implies \theta=\pm\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៥៖ កន្សោម $z=\frac{i-x}{i+x}$

ក. $|z|=\frac{|-x+i|}{|x+i|}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=1$

$z=\frac{(-x+i)(x-i)}{x^2+1}=\frac{-x^2+1+2xi}{x^2+1}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2}$

ខ. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\iff 1-x^2=2x\iff x^2+2x-1=0$

$\implies x=-1\pm\sqrt{2}$

បើ $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\implies \frac{2x}{1+x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0\implies x=\sqrt{2}-1$

លំហាត់ ៦៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ខ. $3+3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

គ. $(\sqrt{3}-i)^{100}=(2e^{-i\pi/6})^{100}=2^{100}e^{-i50\pi/3}$

$=2^{100}e^{-i2\pi/3}=2^{100}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

ឃ. $2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(1+e^{i\pi/4})=4\cos\frac{\pi}{8}e^{i\pi/8}$

$=4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

ង. $1+(2+\sqrt{3})i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

ច. $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}=2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$

លំហាត់ ៧៖ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $z^4=-8-8i\sqrt{3}=16e^{-i2\pi/3}$

$\implies z_k=2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$

ខ. $z^2+|z|^2=0 \iff z^2=-|z|^2$
តាង $z=x+iy \implies x^2-y^2+2xyi=-(x^2+y^2)$
$\implies 2x^2=0 \implies x=0$ និង $2xy=0$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច)
ដូចនេះ $z=iy$ ដែល $y\in\mathbb{R}$ (z ជានិម្មិតសុទ្ធ)

លំហាត់ ៨៖ អាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុត

$|z-(-3+i\sqrt{3})|=\sqrt{3}$ ជារង្វង់ផ្ចិត $\Omega(-3,\sqrt{3})$ កាំ $R=\sqrt{3}$។
ចំងាយ $O\Omega=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}=2R$។
បន្ទាត់ប៉ះ OT ចេញពី O បង្កើតមុំ $\angle O\Omega T$ ដែល $\sin\angle TO\Omega=\frac{R}{O\Omega}=\frac{1}{2}\implies\angle TO\Omega=\frac{\pi}{6}$។
មុំ $\arg(\Omega)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$។
អាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុតគឺ $\theta_{\min}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$។
ប្រវែង $OT=\sqrt{O\Omega^2-R^2}=\sqrt{12-3}=3$។
ដូចនេះ $z=3e^{i2\pi/3}=3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៩៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z=a\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=a\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=a\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=ae^{i2\alpha}$
$=a(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)$ (បំពោះ $a>0$)

លំហាត់ ១០៖ ស្វ័យគុណកុំផ្លិច

ក. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2020}=(e^{i\pi/4})^{2020}=e^{i505\pi}=-1$

ខ. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}}=e^{i\pi/6}$
$\implies (e^{i\pi/6})^{2021}=e^{i\frac{2021\pi}{6}}=e^{i5\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

គ. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/4}}=e^{i\pi/12}$
$\implies (e^{i\pi/12})^{2022}=e^{i\frac{2022\pi}{12}}=e^{i\pi/2}=i$

លំហាត់ ១១៖ តម្លៃពិត $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

ក. $z_1=\sqrt{6}+i\sqrt{2}=2\sqrt{2}e^{i\pi/6}$
$z_2=2+2i=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
$z_1z_2=(2\sqrt{2}e^{i\pi/6})(2\sqrt{2}e^{i\pi/4})$
$=8e^{i5\pi/12}=8\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

ខ. ទម្រង់ពីជគណិត៖
$z_1z_2=(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(2+2i)$
$=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})+2i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$\implies \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់ ១២៖ តម្លៃពិត $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

$z_1=\sqrt{3}-i=2e^{-i\pi/6}\implies z_1^4=16e^{-i2\pi/3}=-8-8i\sqrt{3}$
$z_2=2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\implies z_2^3=16\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}=-16-16i$
$A=\frac{z_1^4}{z_2^3}=\frac{16e^{-i2\pi/3}}{16\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/12}$
$\implies \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់ ១៣៖ លក្ខណ: $z=1+\cos\varphi+i\sin\varphi$

ក. $\varphi=\frac{\pi}{3}\implies z=1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}e^{i\pi/6}$
$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

ខ. $z-1=\cos\varphi+i\sin\varphi\implies|z-1|=1$
ដូចនេះ ចំណុច $M(z)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់ផ្ចិត $I(1,0)$ កាំ $R=1$។

គ. $\frac{1}{z}=\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}e^{i\varphi/2}}=\frac{e^{-i\varphi/2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$
$=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2}\implies \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$ (ថេរគ្រប់ φ)

លំហាត់ ១៤៖ $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$

ក. $z^2=[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)]^2=4\sqrt{3}+4i=8e^{i\pi/6}$
$\implies |z|^2=8\implies|z|=2\sqrt{2}$
$2\arg(z)=\frac{\pi}{6}\implies\arg(z)=\frac{\pi}{12}$

ខ. ទម្រង់ពីជគណិត៖ $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
$\implies \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\implies \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

គ. សមីការ $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$៖
ចែកនឹង $2\sqrt{2}$៖
$\cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x=\frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$
$\implies x-\frac{\pi}{12}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$
$x_1=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

៥ ដំណោះស្រាយ លម្អិត លំហាត់ស្រាវជ្រាវ និង កម្រិតខ្ពស់

លំហាត់ ១៖ ទម្រង់ពីជគណិត $x+iy$

ក. $(9-3i)+(-4+5i)=(9-4)+(-3+5)i=5+2i$

ខ. $(5-i)-(6-2i)=(5-6)+(-1+2)i=-1+i$

គ. $(4-i)(3+2i)=12+8i-3i-2i^2=14+5i$

ឃ. $(3+2i)^3=27+54i-36-8i=-9+46i$

ង. $\frac{1+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}=\frac{(1+i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{4}=\frac{2\sqrt{2}i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}i$

ច. $\frac{1+i}{1+3i}=\frac{(1+i)(1-3i)}{10}=\frac{4-2i}{10}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

ឆ. $\frac{(1+i)(1-2i)}{2-4i}=\frac{3-i}{2(1-2i)}=\frac{(3-i)(1+2i)}{20}=\frac{5+5i}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

លំហាត់ ២៖ សមីការលីនេអ៊ែរក្នុង $\mathbb{C}$

ក. $(1+i)z=3+i \implies z=\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{2}=\frac{4-2i}{2}=2-i$

ខ. $(3-4i)(z-1)=10-5i$
$\implies z-1=\frac{10-5i}{3-4i}=\frac{(10-5i)(3+4i)}{25}=\frac{50+25i}{25}=2+i$
$\implies z=3+i$

គ. $(2+i)(z-7+3i)=15-10i$
$z-7+3i=\frac{15-10i}{2+i}=\frac{(15-10i)(2-i)}{5}=\frac{20-35i}{5}=4-7i$
$\implies z=4-7i+7-3i=11-10i$

ឃ. $(3+5i)(z+2-5i)=6+3i$
$z+2-5i=\frac{(6+3i)(3-5i)}{34}=\frac{33-21i}{34}$
$\implies z=\frac{33-21i}{34}-2+5i=-\frac{35}{34}+\frac{149}{34}i$

លំហាត់ ៣៖ កំណត់ចំនួនពិត a,b

ក. $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$
$\iff \frac{a(3-i)}{10}+\frac{b(1-2i)}{5}=1-i$
$\iff (3a+2b)-(a+4b)i=10-10i$
$\implies \begin{cases}3a+2b=10\\ a+4b=10\end{cases} \implies a=2,\ b=2$

ខ. $\frac{2-3i}{2a+bi}=3+2i \iff 2a+bi=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{13}=-i$
$\implies 2a=0,\ b=-1 \implies a=0,\ b=-1$

គ. $(a+bi)^2=8+6i \iff a^2-b^2=8,\ 2ab=6,\ a^2+b^2=10$
$\implies 2a^2=18 \implies a=\pm3 \implies b=\pm1$
ដូចនេះ $(a,b)=(3,1)$ ឬ $(-3,-1)$

លំហាត់ ៤៖ សមីការដឺក្រេទីពីរមេគុណពិត

ក. $z^2+2z+2=0 \iff (z+1)^2=-1=i^2 \implies z=-1\pm i$

ខ. $4z^2-4z+17=0 \iff (2z-1)^2=-16 \implies 2z-1=\pm4i \implies z=\frac{1}{2}\pm2i$

គ. $z^2+6z+34=0 \iff (z+3)^2=-25 \implies z=-3\pm5i$

ឃ. $z^2-2\sqrt{3}z+4=0 \iff (z-\sqrt{3})^2=-1 \implies z=\sqrt{3}\pm i$

លំហាត់ ៥៖ សមីការមេគុណកុំផ្លិច

ក. $z^2-4iz-4=0 \iff (z-2i)^2=0 \implies z=2i$ (ឫសឌុប)

ខ. $z^2+iz+6=0$៖ $\Delta=i^2-24=-25=(5i)^2$
$\implies z=\frac{-i\pm5i}{2} \implies z_1=2i,\ z_2=-3i$

គ. $z^2+8iz-17=0$៖ $\Delta'=(4i)^2-(-17)=-16+17=1$
$\implies z=-4i\pm1 \implies z=1-4i$ ឬ $-1-4i$

ឃ. $z^2-(3+2i)z+5+i=0$៖
$\Delta=(3+2i)^2-4(5+i)=5+12i-20-4i=-15+8i$
$\sqrt{\Delta}=\pm(1+4i) \implies z=\frac{3+2i\pm(1+4i)}{2}$
$\implies z_1=2+3i,\ z_2=1-i$

លំហាត់ ៦៖ ឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច

ក. $Z_1=3+4i=4+4i-1=(2+i)^2 \implies \pm(2+i)$

ខ. $Z_2=-8-6i=1-6i-9=(1-3i)^2 \implies \pm(1-3i)$

គ. $Z_3=-15+8i=1+8i-16=(1+4i)^2 \implies \pm(1+4i)$

ឃ. $Z_4=5-12i=9-12i-4=(3-2i)^2 \implies \pm(3-2i)$

លំហាត់ ៧៖ ប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases}z_1+z_2=3+i & (1)\\ 2z_1-iz_2=5 & (2)\end{cases}$
គុណ (1) នឹង i រួចបូកនឹង (2)៖
$(2+i)z_1=5+i(3+i)=4+3i \implies z_1=\frac{4+3i}{2+i}=\frac{11+2i}{5}$
$z_2=(3+i)-z_1=\frac{4+3i}{5}$

ខ. $\begin{cases}(1+i)z_1+z_2=2\\ z_1-iz_2=1+i\end{cases} \implies z_1=1,\ z_2=1-i$

លំហាត់ ៨៖ ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ

ក. $\overline{A}=\overline{z^2-\overline{z}^2}=\overline{z}^2-z^2=-A \implies A$ ជានិម្មិតសុទ្ធ។

ខ. $\overline{B}=\overline{z^n+\overline{z}^n}=\overline{z}^n+z^n=B \implies B\in\mathbb{R}$ (ចំនួនពិត)។

គ. $\overline{C}=\overline{\left(\frac{z-\overline{z}}{1+|z|^2}\right)}=\frac{\overline{z}-z}{1+|z|^2}=-C \implies C$ ជានិម្មិតសុទ្ធ។

លំហាត់ ៩៖ ភាពពិត និងនិម្មិតនៃ X,Y

តាង $w=2-\sqrt{5}i \implies \overline{w}=2+\sqrt{5}i$។
$X=w^n+\overline{w}^n \implies \overline{X}=\overline{w}^n+w^n=X \implies X\in\mathbb{R}$។
$Y=w^n-\overline{w}^n \implies \overline{Y}=\overline{w}^n-w^n=-Y \implies Y$ ជានិម្មិតសុទ្ធ។

លំហាត់ ១០៖ គណនាម៉ូឌុល

ក. $|z_1| = \frac{|2+i||1-3i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10}}{5} = \sqrt{2}$

ខ. $|z_2| = \frac{|1+i\sqrt{3}|^4}{|1-i|^6} = \frac{2^4}{(\sqrt{2})^6} = \frac{16}{8} = 2$

គ. $|z_3| = |1+\cos\alpha + i\sin\alpha| = \left|2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\alpha/2}\right| = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

លំហាត់ ១១៖ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $4 = 4(\cos 0 + i\sin 0),\ -6 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$

ខ. $2i = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ -3i = 3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

គ. $1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right),\ 2-2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ឃ. $-\sqrt{3}+i = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ 2\sqrt{3}+2i = 4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

លំហាត់ ១២៖ ទម្រង់ពីជគណិត

ក. $2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

ខ. $8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}+4i\sqrt{2}$

គ. $4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}+2i$

ឃ. $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-i$

ង. $\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

ច. $5\operatorname{cis}\pi = -5$

លំហាត់ ១៣៖ គណនាតម្លៃពិត $\frac{\pi}{12}$

$z_1 = 2e^{i\pi/3},\ z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\pi/12} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ម៉្យាងទៀត $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់ ១៤៖ រូបមន្តដឺម័រ

ក. $(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{5})^{10} = (\sqrt{2})^{10}\operatorname{cis}(2\pi) = 32$

ខ. $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{12})^{36} = \operatorname{cis}(3\pi) = -1$

គ. $(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{8})^{12} = 64\operatorname{cis}(\frac{3\pi}{2}) = -64i$

ឃ. $(2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6})^{6} = 64\operatorname{cis}(5\pi) = -64$

លំហាត់ ១៥៖ គណនាជាទម្រង់ $x+iy$

ក. $(1+i)^{16} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{16} = 2^8e^{i4\pi} = 256$

ខ. $(1-i\sqrt{3})^{11} = (2e^{-i\pi/3})^{11} = 2048e^{-i11\pi/3} = 2048e^{i\pi/3} = 1024+1024i\sqrt{3}$

គ. $(\sqrt{3}+i)^{10} = (2e^{i\pi/6})^{10} = 1024e^{i5\pi/3} = 512-512i\sqrt{3}$

ឃ. $(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i})^{12} = (\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}})^{12} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{12}e^{i5\pi} = -\frac{1}{64}$

លំហាត់ ១៦៖ លក្ខខណ្ឌលើ n នៃ z^n

$z = 2-2\sqrt{3}i = 4e^{-i\pi/3} \Longrightarrow z^n = 4^ne^{-i\frac{n\pi}{3}}$

ក. $z^n \in \mathbb{R} \iff \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \iff \frac{n\pi}{3} = k\pi \iff n = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$

ខ. $z^n \in i\mathbb{R} \iff \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \iff \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+k\pi \iff 2n = 3(2k+1)$ (មិនអាចកើតមានព្រោះ $2n$ គូ ឯ $3(2k+1)$ សេស)។ គ្មានតម្លៃ n ទេ។

លំហាត់ ១៧៖ $Z = \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$

ក. $Z = \frac{(-1+i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{4}$

$\Longrightarrow \operatorname{Re}(Z) = \frac{\sqrt{3}-1}{4},\ \operatorname{Im}(Z) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

ខ. $Z = \frac{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i5\pi/12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

គ. $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់ ១៨៖ $Z = (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$

$Z^2 = 4\sqrt{3}+4i = 8e^{i\pi/6} \Longrightarrow |Z| = 2\sqrt{2},\ \arg(Z) = \frac{\pi}{12}$។

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$។

សមីការត្រីកោណមាត្រ៖ $x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi$ ឬ $x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$។

លំហាត់ ១៩៖ គណនាតម្លៃពិត $\frac{\pi}{8}$

$z = \sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$

$z^2 = (1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)+2i\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2+2i$

$Z = z^4 = (z^2)^2 = (2+2i)^2 = 8i = 8e^{i\pi/2}$

$\Longrightarrow |z|^4 = 8 \Longrightarrow |z| = \sqrt[4]{8} = 2^{3/4}$

$4\arg(z) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{8}$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{|z|} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

លំហាត់ ២០៖ $z_3 = z_1\bar{z}_2$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4},\ z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/6} \Longrightarrow \bar{z}_2 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/6}$

$z_3 = z_1\bar{z}_2 = 4e^{i11\pi/12} \Longrightarrow |z_3| = 4,\ \arg(z_3) = \frac{11\pi}{12}$

$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$z_3^{18} = 4^{18}e^{i\frac{33\pi}{2}} = 4^{18}e^{i\frac{\pi}{2}} = 4^{18}i$

លំហាត់ ២១៖ ឬសការេនៃ $4\sqrt{3}+4i$

$u = 8e^{i\pi/6} \Longrightarrow \pm\sqrt{8}e^{i\pi/12} = \pm 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

តាមពីជគណិត៖ $(x+iy)^2 = 4\sqrt{3}+4i \Longrightarrow x = \sqrt{3}+1,\ y = \sqrt{3}-1$

$\Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់ ២២៖ ឬសគូបក្នុង $\mathbb{C}$

ក. $-27 = 27e^{i\pi} \Longrightarrow w_k = 3e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})},\ k \in \{0,1,2\}$

$w_0 = \frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2},\ w_1 = -3,\ w_2 = \frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

ខ. $8i = 8e^{i\pi/2} \Longrightarrow w_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}$

$w_0 = \sqrt{3}+i,\ w_1 = -\sqrt{3}+i,\ w_2 = -2i$

គ. $-1+i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} \Longrightarrow w_k = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})}$

លំហាត់ ២៣៖ សមីការ $z^5-1=0$

$\omega=e^{i2\pi/5}$។ ផលបូក $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\frac{\omega^5-1}{\omega-1}=0$។

យកផ្នែកពិត៖ $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0 \implies \cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$។

ម្យ៉ាងទៀត $2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

$\implies X=\cos\frac{2\pi}{5}$ ជាឫសវិជ្ជមាននៃ $4X^2+2X-1=0$

ដូចនេះ $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

លំហាត់ ២៤៖ ឫសគូបមិនពិត j

ក. $j=e^{i2\pi/3} \implies j^2=e^{i4\pi/3}=e^{-i2\pi/3}=\bar{j}$

$1+j+j^2=\frac{j^3-1}{j-1}=0$

ខ. $A=(1-j+j^2)(1+j-j^2)=(-2j)(-2j^2)=4j^3=4$

គ. ពិចារណាពហុធា $P(x)=x^3+b^3+c^3-3bcx$

បំបែកជាកត្តា៖ $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)=a^3+b^3+c^3-3abc$

លំហាត់ ២៥៖ ពន្លាតដឺម័រដឺក្រេ ៣

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$

$=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$

ផ្ទឹមជាមួយ $\cos3\theta+i\sin3\theta$៖

$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\sin3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

លំហាត់ ២៦៖ ពន្លាតដឺម័រដឺក្រេ ៤

$(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos4\theta+i\sin4\theta$

$\cos4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$\sin4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$

$\tan4\theta=\frac{\sin4\theta}{\cos4\theta}=\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$

លំហាត់ ២៧៖ កន្សោម $z^n\pm1/z^n$

ក. $z=e^{i\theta} \implies z^n+z^{-n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta$

$z^n-z^{-n}=2i\sin n\theta$

ខ. $(z+z^{-1})^3=(2\cos\theta)^3=8\cos^3\theta$

ម្យ៉ាងទៀត $(z+z^{-1})^3=(z^3+z^{-3})+3(z+z^{-1})=2\cos3\theta+6\cos\theta$

$\implies \cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$

គ. $\cos^3\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{16}$

លំហាត់ ២៨៖ រូបមន្តអយល័រ និងអាំងតេក្រាល

ក. $\cos^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4=\frac{1}{8}\cos4\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{3}{8}$

ខ. $\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4=\frac{1}{8}\cos4\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{3}{8}$

គ. $I=\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{8}\cos4\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{3}{8}\right)d\theta$

$=\left[\frac{\sin4\theta}{32}-\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{3\theta}{8}\right]_0^{\pi/2}=\frac{3\pi}{16}$

លំហាត់ ២៩៖ សមីការ និងធាតុអញ្ញាត u

$z^2-6z+13=0 \implies z=3\pm2i$

$\frac{u-3i}{u+2}=3\pm2i \implies u_1=-\frac{13}{4}+\frac{1}{4}i,\ u_2=-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}i$

លំហាត់ ៣០៖ សមីការ $(z+1)^4=(z-1)^4$

ក. យកម៉ូឌុល៖ $|z+1|^4=|z-1|^4 \implies \left|\frac{z+1}{z-1}\right|=1$

ខ. $|z-(-1)|=|z-1| \implies M(z)$ ស្មើចម្ងាយពី -1 និង 1

$\implies M$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សនិម្មិត $\implies z=iy\ (y\in\mathbb{R})$

គ. $\frac{z+1}{z-1}=e^{i\frac{2k\pi}{4}}=e^{i\frac{k\pi}{2}}\in\{i,-1,-i\}$ (ដោយសារ $\neq1$)

$\frac{z+1}{z-1}=i \implies z=-i$; $\frac{z+1}{z-1}=-1 \implies z=0$; $\frac{z+1}{z-1}=-i \implies z=i$

ដូចនេះ $z\in\{0,\ i,\ -i\}$

លំហាត់ ៣១៖ សមីការផលបូកធរណីមាត្រ

តាង $u=\frac{z+i}{z-i}$ នោះសមីការក្លាយជា៖

$u^3+u^2+u+1=0 \iff \frac{u^4-1}{u-1}=0 \implies u^4=1\ (u\neq1)$

$\implies u\in\{i,-1,-i\}$

- $u=-1 \implies \frac{z+i}{z-i}=-1 \implies z+i=-z+i \implies z=0$
- $u=i \implies z+i=iz+1 \implies z(1-i)=1-i \implies z=1$
- $u=-i \implies z=-1$

ដូចនេះ $z\in\{-1,\ 0,\ 1\}$

លំហាត់ ៣២៖ ផលបូក Lagrange

ក. $C_n=\sum_{k=0}^n e^{ikx}=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}}-e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)}$

$=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2i\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)$

ខ. ផ្ទឹមផ្នែកពិត និងនិម្មិត៖

$S_n=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $T_n=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

លំហាត់ ៣៣៖ $2\bar{B}-A^2=0$

$A^2=4\sqrt{3}+4i$

$B=\frac{x+iy}{1+i}=\frac{(x+y)+i(y-x)}{2} \implies \bar{B}=\frac{(x+y)-i(y-x)}{2}$

$2\bar{B}=A^2 \iff (x+y)+i(x-y)=4\sqrt{3}+4i$

$$\implies \begin{cases} x+y=4\sqrt{3} \\ x-y=4 \end{cases} \implies x=2\sqrt{3}+2,\ y=2\sqrt{3}-2$$

លំហាត់ ៣៤៖ $|z|=|w|$

ក. $|w|=1 \implies |z|=\sqrt{x^2+y^2}=1 \iff x^2+y^2=1$

ខ. $|z|=1 \implies z\bar{z}=1 \implies \frac{1}{z}=\bar{z}$

គ. $z=1 \implies x=1, y=0$; $w=1 \implies \alpha=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

លំហាត់ ៣៥៖ សំណុំចំណុច

ក. $|z-(2-3i)|=4$៖ រង្វង់ផ្ចិត $I(2,-3)$ កាំ $R=4$។

ខ. $|z-3i|=|z-(-2+i)|$៖ បន្ទាត់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ភ្ជាប់ចំណុច $(0,3)$ និង $(-2,1)$។

គ. $|z-(1-2i)|\leq3$៖ ថាសបិទ (ផ្ទៃក្នុង និងបរិមណ្ឌលរង្វង់) ផ្ចិត $(1,-2)$ កាំ $R=3$។

លំហាត់ ៣៦៖ សមីការដេកាត

ក. $\arg(z-i)=\frac{\pi}{2} \iff x=0$ និង $y-1>0 \iff y>1$ (កន្លះបន្ទាត់ឈរលើអ័ក្សអរដោនេខាងលើចំណុច $(0,1)$)។

ខ. $|z+2|=2|z-2| \iff (x+2)^2+y^2=4[(x-2)^2+y^2]$
$\iff 3x^2+3y^2-20x+12=0 \iff \left(x-\frac{10}{3}\right)^2+y^2=\frac{64}{9}$
ជារង្វង់ Apollonius ផ្ចិត $\left(\frac{10}{3},0\right)$ កាំ $R=\frac{8}{3}$។

លំហាត់ ៣៧៖ ត្រីកោណសម័ង្ស

$|z|=|1/z| \implies |z|=1$ និង $|1-z|=1 \implies z=e^{\pm i\pi/3}$។
ចំណុច $A(z),B(1-z),C(1/z)$៖
$|z-(1-z)|=|2z-1|=|2e^{i\pi/3}-1|=|i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$
$|z-1/z|=|e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}|=|2i\sin\frac{\pi}{3}|=\sqrt{3}$
$|(1-z)-1/z|=|1-(z+1/z)|=|1-1|=\dots$
ប្រវែងជ្រុងទាំងបីស្មើគ្នា $\implies \triangle ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ ៣៨៖ $z=1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

ក. $z=2\cos^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta=2\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$
ដោយ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \implies \cos\theta>0 \implies |z|=2\cos\theta$

ខ. $\frac{1}{z}=\frac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}-i\frac{\tan\theta}{2}$
$\implies \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$ (ជាចំនួនថេរមិនអាស្រ័យនឹង θ)

លំហាត់ ៣៩៖ $z=2\cos\theta+i(1-2\sin\theta)$

ក. $z-i=2\cos\theta-2i\sin\theta=2e^{-i\theta} \implies |z-i|=2$

ខ. $z+2-i=2(1+\cos\theta)-2i\sin\theta=4\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\theta/2}$
$\frac{1}{z+2-i}=\frac{e^{i\theta/2}}{4\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{4}+i\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{4} \implies \operatorname{Re}=\frac{1}{4}$ (ថេរ)

លំហាត់ ៤០៖ ធរណីមាត្រចិចផ៌

ក. $\vec{AB}\parallel\vec{AC} \iff \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv 0 \pmod{\pi} \iff \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

ខ. $AB\perp AC \iff \arg\equiv\pm\frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$

គ. អនុវត្ត៖ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(4+5i)-(1+2i)}{(-2-i)-(1+2i)}=\frac{3+3i}{-3-3i}=-1\in\mathbb{R}$
ដូចនេះ A,B,C រត់ត្រង់ជួរគ្នា!

លំហាត់ ៤១៖ លក្ខខណ្ឌត្រីកោណសម័ង្ស

$\triangle ABC$ សម័ង្ស $\iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=e^{\pm i\pi/3} \iff \left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)^2-\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}+1=0$
$\iff (z_3-z_1)^2-(z_3-z_1)(z_2-z_1)+(z_2-z_1)^2=0$
ពន្លាតនិងបង្រួមគេបាន៖
$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$ (ពិត)

លំហាត់ ៤២៖ សំណុំចំណុចនៃ $Z=\frac{z-2i}{z+1}$

$Z=\frac{(x+iy-2i)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}=\frac{(x^2+x+y^2-2y)+i(y-2x-2)}{(x+1)^2+y^2}$

ក. $Z\in\mathbb{R} \iff y-2x-2=0 \iff y=2x+2$ (បន្ទាត់ ដកចំណុច $(-1,0)$)

ខ. $Z\in i\mathbb{R} \iff x^2+x+y^2-2y=0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$ (រង្វង់ផ្ចិត $(-\frac{1}{2},1)$ កាំ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ដក $(-1,0)$)

លំហាត់ ៤៣៖ ពហុធា $P(z)$

$P(i)=i^4-2i^3+3i^2-2i+2=1+2i-3-2i+2=0$
ដោយមេគុណជាចំនួនពិត នោះ $-i$ ក៏ជាឫស $\implies z^2+1$ ជាកត្តា។
ចែកពហុធា៖ $P(z)=(z^2+1)(z^2-2z+2)$
$z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2=-1 \implies z=1\pm i$
ដូចនេះ $z\in\{i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i\}$

លំហាត់ ៤៤៖ សមីការ $(z+i)^n=(z-i)^n$

ក. $|z+i|=|z-i| \implies z$ ស្មើចម្ងាយពី $-i$ និង $i \implies z\in\mathbb{R}$

ខ. $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{2k\pi}{n}} \implies z+i=e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-i)$
$\implies z=i\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}=i\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}}=\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
ចំពោះ $k=1,2,\dots,n-1$

គ. ករណី $n=5$៖ ឫសទាំង ៤ គឺ $\cot\frac{\pi}{5},\cot\frac{2\pi}{5},-\cot\frac{2\pi}{5},-\cot\frac{\pi}{5}$
$\cot\frac{\pi}{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $\cot\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

លំហាត់ ៤៥៖ ផលគុណស៊ីនុស

$z^{2n+1}-1=(z-1)\prod_{k=1}^{2n}(z-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}})$
ចែកនឹង $z-1$ រួចផ្គុំគូកត្តាឆ្លាស់ k និង $2n+1-k$៖
$\prod_{k=1}^{n}\left|1-e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right|^2=2n+1$
ដោយ $|1-e^{i2\theta}|=2\sin\theta \implies \prod_{k=1}^{n}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2=2n+1$
$\implies \prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ (រូបមន្តអយល័រដ៏ល្បី)

លំហាត់ ៤៦៖ វិសមភាពត្រីកោណ និងបរមា

$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\le(|z_1|+|z_2|)^2$
$\implies \left||z|-|3/z|\right|\le|z-3/z|=2$
$\implies -2\le|z|-\frac{3}{|z|}\le 2$
- $|z|-\frac{3}{|z|}\le 2 \implies |z|^2-2|z|-3\le 0 \implies |z|\le 3$
- $|z|-\frac{3}{|z|}\ge -2 \implies |z|^2+2|z|-3\ge 0 \implies |z|\ge 1$

ដូចនេះ $1\le|z|\le 3 \implies |z|_{\min}=1,\ |z|_{\max}=3$

លំហាត់ ៤៧៖ $u+v+w=0$ លើរង្វង់ឯកតា

ក. $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}=\overline{u+v+w}=0$

ខ. $uv+vw+wu=uvw\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)=0$

គ. $(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu) \implies u^2+v^2+w^2=0$
u,v,w ជាឫសនៃ $Z^3-0Z^2+0Z-uvw=0 \iff Z^3=uvw$
$\implies u^3=v^3=w^3=uvw$
មុំរវាងពួកវាគឺ $\frac{2\pi}{3} \implies$ បង្កើតបានជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ ៤៨៖ ប្រព័ន្ធសមីការ

$\sum z_k=1,\ \prod z_k=1,\ |z_k|=1$
$\sum z_1z_2=z_1z_2z_3\sum\frac{1}{z_k}=1\cdot\overline{\sum z_k}=1$
z_1,z_2,z_3 ជាឫសនៃពហុធា៖
$Z^3-Z^2+Z-1=0 \iff (Z-1)(Z^2+1)=0$

$\Longrightarrow Z \in \{1,\ i,\ -i\}$

ដូចនេះ $\{z_1, z_2, z_3\} = \{1,\ i,\ -i\}$ (៦ ចម្លើយតាមបម្លាស់ប្តូរ)

លំហាត់ ៤៩៖ ទ្រឹស្តីបទណាប៉ូឡេអុង

$\triangle BCD$ សម័ង្សក្រៅ $\Longrightarrow z_D - z_B = e^{i\pi/3}(z_C - z_B)$

ផ្ចិត $P = \frac{z_B+z_C+z_D}{3}$, Q,R សង់ដូចគ្នាលើជ្រុង CA, AB។

ពិនិត្យផលធៀប $\frac{R-P}{Q-P}$ ដោយប្រើ $e^{i\pi/3} = -j^2$៖

បង្ហាញបានថា $\frac{R-P}{Q-P} = e^{i\pi/3} \Longrightarrow \triangle PQR$ ជាត្រីកោណសម័ង្សជានិច្ច!

លំហាត់ ៥០៖ ផលបូកមេគុណទ្វេធា

ក. $Z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = (1+e^{ix})^n$

ខ. $1 + e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{ix/2}$

គ. $Z_n = \left[2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{ix/2}\right]^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}$

$\Longrightarrow C_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$

$\Longrightarrow S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$

ឃ. អនុវត្ត $x = \frac{\pi}{3}$៖

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

$= 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 3^{n/2} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

មេរៀនទី ៥ ផ្នែកចម្លើយ

ឯកសារយោង

1. ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា, «សៀវភៅពុម្ពគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កម្រិតមូលដ្ឋាននិងកម្រិតខ្ពស់)»។

2. ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា, «វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ មុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា ចាប់ពីឆ្នាំ២០០២ ដល់បច្ចុប្បន្ន»។

3. ឯកសារស្រាវជ្រាវនិងលំហាត់បន្ថែមទាក់ទងនឹងប្រធានបទ «ចំនួនកុំផ្លិច» សម្រាប់កម្រិតវិទ្យាល័យ។