គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

KP012

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

DERIVATIVES OF FUNCTIONS

ថ្នាក់ទី ១២ • GRADE 12

ទ្រឹស្តីសង្ខេប • វិធីសាស្ត្រគណនា • លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងប្រឡងសិស្សពូកែ

អ្នករៀបរៀង ៖ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០២៦

គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យ

គណៈកម្មការរៀបរៀង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
ត្រួតពិនិត្យខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
រៀបចំខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រចនាគម្រប និងទំព័រ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រូបភាព និងតារាង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
កែសម្រួលអក្ខរាវិរុទ្ធ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
គណៈកម្មការពិនិត្យចុងក្រោយ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ក្នុងការស្វ័យសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

ព័ត៌មានសៀវភៅ

កំណែសាកល្បង © ២០២៦

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ថ្នាក់ទី១២

DERIVATIVES OF FUNCTIONS GRADE 12

រៀបរៀងដោយ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

សម្រាប់បោះពុម្ពផ្សាយ៖ **បណ្ណាគារអក្ខរ**

សេចក្ដីឧទ្ទិស

សៀវភៅ «**ដើរទៅនៃអនុគមន៍**» នេះ
សូមឧទ្ទិសជូនចំពោះ៖

ភរិយាជាទីស្រឡាញ់

ថៃ៉ត សុគន្ធា

និង

កូនស្រីជាទីស្រឡាញ់

ខែម សោភា

ដែលជាកម្លាំងចិត្ត និងជាប្រភពនៃសុភមង្គលដ៏កក់ក្ដៅ
ក្នុងដំណើរជីវិត និងការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្ញុំបាទជានិច្ចនិរន្តរ៍។

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យា គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដ៏មានសារៈសំខាន់បំផុត ក្នុងការអភិវឌ្ឍការគិតបែបសមហេតុផល វិភាគស៊ីជម្រៅ និងការដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ បច្ចេកវិទ្យា និងជីវភាពរស់នៅជាក់ស្ដែង។ ក្នុងចំណោមប្រធានបទគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ មេរៀន «**ដេរីវេនៃអនុគមន៍**» គឺជាស្នូលដ៏រឹងមាំនៃគណិតវិភាគ (Calculus) ដែលសិស្សានុសិស្សគ្រប់រូបត្រូវតែក្ដាប់ឱ្យបានច្បាស់លាស់ ទាំងទ្រឹស្ដី ទាំងវិធីសាស្ត្រគណនា និងការអនុវត្តជាក់ស្ដែង សម្រាប់ត្រៀមខ្លួនប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

សៀវភៅ «**ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងហ្មត់ចត់ និងសម្បូរបែប ដោយបែងចែកខ្លឹមសារជា ៣ ជំពូកចម្បងៗ៖

- **មេរៀនទី១ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍** — ផ្ដោតលើនិយមន័យដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ ន័យធរណីមាត្រជាមួយក្រាហ្វិកបញ្ជាក់យ៉ាងច្បាស់លាស់ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (ដេក ស្រប កែង) ភាពមានដេរីវេនិងភាពជាប់ រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ ដេរីវេអនុគមន៍បណ្ដាក់ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនិងអនុគមន៍ច្រាស់ ព្រមទាំងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់និងដេរីវេអាំភ្លីស៊ីត។
- **មេរៀនទី២ ៖ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ** — ពន្យល់ពីទិសដៅអថេរភាព (អនុគមន៍កើននិងចុះ) ភាពប៉ោង ភាពផត និងចំណុចរបត់ តេស្តដេរីវេទីមួយនិងទីពីរសម្រាប់រកតម្លៃបរមា ចំណោទបរមាជាក់ស្ដែងក្នុងធរណីមាត្រនិងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ អត្រាបម្រែបម្រួល និងការគណនាល្បឿន-សំទុះនៃចលនា។
- **មេរៀនទី៣ ៖ អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀតនៃដេរីវេ** — ពិភាក្សាលើឌីផេរ៉ង់ស្យែលនិងការគណនាតម្លៃប្រហែល វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ចនិងពាណិជ្ជកម្ម (ថ្លៃដើម ប្រាក់ចំណូល ប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណាល) ព្រមទាំងធនាគារវិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (MCQ) សរុប ១៥០ លំហាត់ ដែលជាជំនួយស្មារតីយ៉ាងប្រសើរក្នុងការវាស់ស្ទង់សមត្ថភាព។

សៀវភៅនេះត្រូវបានរចនាឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ មានក្រឡាសៀវភៅសរសេរ (Seyes Grid) សម្រាប់សិស្សអនុវត្តដោះស្រាយដោយផ្ទាល់ដៃ និងមានរូបភាពគំនូសក្រាហ្វិកគណិតវិទ្យា TikZ យ៉ាងច្បាស់លាស់។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមគ្គុទេសក៍ និងជាកម្រងឯកសារជំនួយស្មារតីដ៏មានតម្លៃបំផុតសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្អូនៗសិស្សានុសិស្សក្នុងការបង្រៀននិងរៀន។ ទោះបីជាមានការខិតខំប្រឹងប្រែងយ៉ាងណាក្ដីក៏សៀវភៅនេះប្រាកដជាមិនអាចជៀសផុតពីកំហុសអចេតនាណាមួយឡើយ។ ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិរិះគន់ស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកអានដោយក្ដីរីករាយជានិច្ច។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

សេចក្តីដឹងគុណ

ជាបឋម ខ្ញុំបាទ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី** សូមលំឱនកាយវាចាចិត្ត ថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុត ជូនចំពោះលោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ គឺមាតា និងបិតារបស់ខ្ញុំ ដែលលោកទាំងពីរបានពលិកម្មគ្រប់បែបយ៉ាង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ និងអប់រំទូន្មានប្រៀនប្រដៅខ្ញុំបាទតាំងពីកុមារភាព រហូតធ្វើឱ្យខ្ញុំអាចឈរយ៉ាងរឹងមាំនៅលើវិថីជីវិតមួយនេះ។ បើគ្មានការលះបង់ និងសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏មហាសាលពីលោកទាំងពីរទេ នោះខ្ញុំបាទក៏ប្រហែលជាគ្មានថ្ងៃនេះឡើយ។

ជាបន្តបន្ទាប់ ខ្ញុំបាទសូមសម្តែងនូវសេចក្តីគោរពដឹងគុណយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រ ជូនចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ តាំងពីកម្រិតបឋមសិក្សា រហូតដល់ថ្នាក់សាកលវិទ្យាល័យ ដែលបានខិតខំចំណាយកម្លាំងកាយចិត្តក្នុងការផ្ទេរនូវចំណេះដឹង និងបណ្តុះបណ្តាលរូបខ្ញុំឱ្យក្លាយជាធនធានមនុស្សមួយរូបប្រកបដោយសមត្ថភាព។ រាល់ដំបូន្មានដែលទទួលបានពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ គឺជាប្រទីបបំភ្លឺផ្លូវដែលតែងតែចង្អុលបង្ហាញឱ្យខ្ញុំបាទដើរលើកន្លងដ៏ត្រឹមត្រូវ។

ជាពិសេសលើសពីនេះទៅទៀត ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងផ្ញើជូននូវសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏ធំធេងមិនអាចកាត់ថ្លៃបាន ជូនចំពោះភរិយាជាទីស្រឡាញ់របស់ខ្ញុំ គឺលោកស្រី **ខែត សុគន្ធា** ព្រមទាំងកូនស្រីជាទីស្រឡាញ់ **ខែម សោភា** ដែលតែងតែនៅក្បែរ ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ មើលថែទាំ លើកទឹកចិត្ត និងលះបង់គ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យខ្ញុំបាទមានពេលវេលាពេញលេញក្នុងការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងសៀវភៅមួយក្បាលនេះឡើងរហូតទទួលបានជោគជ័យ។

សៀវភៅ «**ដេរីវេនៃអនុគមន៍**» មួយក្បាលនេះ មិនអាចលេចចេញជារូបរាងឡើងបានឡើយ ប្រសិនបើគ្មានការលើកទឹកចិត្តពីមនុស្សជាច្រើនជុំវិញខ្លួនខ្ញុំ។ ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់មិត្តភក្តិ បងប្អូន និងសហការីទាំងអស់ ដែលតែងតែផ្តល់មតិយោបល់ ជួយកែសម្រួល និងជួយជំរុញទឹកចិត្តខ្ញុំនៅក្នុងដំណើរការនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះជាភាសា LaTeX។ ជាចុងបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមប្រសិទ្ធពរជ័យ សិរីសួស្តី ជ័យមង្គល ជូនដល់លោកអ្នកមានគុណ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ភរិយា កូនស្រី ព្រមទាំងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមប្រកបដោយសុខភាពល្អបរិបូរណ៍ ប្រាជ្ញាភ្លឺថ្លា ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និងសម្រេចបាននូវរាល់បំណងប្រាថ្នាក្នុងជីវិតជានិរន្តរ៍។

ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

តារាងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ	អានថា / ការប្រើប្រាស់
$f(x), y$	អនុគមន៍នៃ x	អនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ I
$\Delta x, \Delta y$	កំណើននៃ x និងកំណើននៃ y	$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x) - f(x_0)$
$f'(x_0)$	ចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ x_0	f ព្រីមនៃ x_0 ឬ ដេរីវេត្រង់ x_0
$f'(x), y'$	អនុគមន៍ដេរីវេទីមួយនៃ $f(x)$	ដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍
$\frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$	និមិត្តសញ្ញាឡាយប្នីស (Leibniz)	ដេរីវេនៃ y ធៀបនឹង x
$f''(x), y''$	អនុគមន៍ដេរីវេទីពីរ	f ព្រីមពីរដងនៃ x
$\frac{d^2y}{dx^2}$	និមិត្តសញ្ញាឡាយប្នីសដេរីវេទីពីរ	ដេរីវេទីពីរនៃ y ធៀបនឹង x
$f^{(n)}(x)$	ដេរីវេលំដាប់ n នៃ $f(x)$	ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $(n \geq 1)$
dy	ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ y	$dy = f'(x)dx$
m	មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ	$m = f'(x_0) = \tan\alpha$
$\approx$	តម្លៃប្រហែល	ស្មើប្រហែល (Approximation)
$v(t), a(t)$	ល្បឿន និងសំទុះនៃចលនា	$v(t) = s'(t),\ a(t) = v'(t) = s''(t)$
$C(x), R(x), P(x)$	ថ្លៃដើម ចំណូល និងចំណេញ	អនុគមន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច
$C'(x), R'(x), P'(x)$	ម៉ាជីណាលនៃថ្លៃដើម ចំណូល ចំណេញ	អត្រាបម្រែបម្រួលមួយឯកតា
$\overline{C}(x)$	ថ្លៃដើមមធ្យម	$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$
$\mathbb{R}, \mathbb{N}^*$	សំណុំចំនួនពិត និងគត់វិជ្ជមាន	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$
$\in, \notin$	ជាធាតុនៃ, មិនមែនជាធាតុនៃ	សញ្ញាជាសមាជិកក្នុងសំណុំ
$[a,b],]a,b[$	ចន្លោះបិទ និងចន្លោះបើក	$a \leq x \leq b,\ a < x < b$

មាតិកា

មេរៀនទី ១ : ដេរីវេនៃអនុគមន៍ . . . **9**
១ ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ . . . 9
២ ន័យធរណីមាត្រនៃដេរីវេ និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ . . . 11
៣ ភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់ . . . 14
៤ អនុគមន៍ដេរីវេ និងរូបមន្តគណនា . . . 15
៥ បច្ចេកទេសគណនាដេរីវេពិសេស . . . 16
វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (៥០ លំហាត់) . . . 18
លំហាត់អនុវត្តស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប (៥០ លំហាត់) . . . 24
មេរៀនទី ២ : អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ . . . **45**
១ អនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ . . . 45
២ ភាពប៉ោង ភាពផត និងចំណុចរបត់ . . . 47
៣ ចំណុចអតិបរមា និង អប្បបរមា (Extrema) . . . 49
៤ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល និងទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម . . . 50
៥ វិធានឡូពីតាល់ (L'Hôpital's Rule) . . . 53
៦ អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា (Applied Optimization) . . . 55
៧ ចលនាក្នុងរូបវិទ្យា និងអត្រាបម្រែបម្រួលប្រទាក់ក្រឡា . . . 56
វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (៥០ លំហាត់) . . . 57
លំហាត់អនុវត្តស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប (៥០ លំហាត់) . . . 62
មេរៀនទី ៣ : អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀត និងការសិក្សាអនុគមន៍ . . . **87**
១ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងការគណនាតម្លៃប្រហែល . . . 87
២ វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ (Finite Increment Inequality) . . . 89
៣ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច និងពាណិជ្ជកម្ម . . . 91
៤ អាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង និងចំណុចឆ្លុះ . . . 95
៥ វិធីសាស្ត្រទូទៅនៃការសិក្សា និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ . . . 96
វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស (៥០ លំហាត់) . . . 98
លំហាត់អនុវត្តស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប (៥០ លំហាត់) . . . 103
មេរៀនទី ៤ ៖ ផ្នែកដំណោះស្រាយ . . . **127**
ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ១ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ . . . 127
ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ២ ៖ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ . . . 133
ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ៣ ៖ អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀត និងការសិក្សាអនុគមន៍ . . . 140
ឧបសម្ព័ន្ធ ៖ តារាងរូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រគន្លឹះ . . . **147**
ក ៖ តារាងរូបមន្តដេរីវេ និងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ (Derivatives) . . . 147
ខ ៖ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ បន្ទាត់ប្រក្រតី និងធរណីមាត្រវិភាគ (Tangents & Geometry) . . . 150
គ ៖ ក្បួនវិភាគអថេរភាព តម្លៃបរមា និងភាពកោង (Analysis & Extrema) . . . 151
ឃ ៖ អនុវត្តន៍ជាក់ស្តែង ៖ អត្រាបម្រែបម្រួល និងរូបវិទ្យា (Related Rates & Kinematics) . . . 152
ង ៖ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច និងឌីផេរ៉ង់ស្យែល (Economics & Differentials) . . . 153
ច ៖ វិធានឡូពីតាល់ និងលីមីតគន្លឹះ (L'Hôpital's Rule & Limits) . . . 154
ឆ ៖ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ និងតារាងតម្លៃមុំពិសេស (Trigonometry Reference) . . . 155
ឯកសារយោង . . . **156**

មេរៀនទី ១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១ ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

១.១ អត្រាកំណើនមធ្យម និងអត្រាកំណើនខណៈ

ឧបមាថា $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះបើក I ហើយ $x_0, x_0+\Delta x \in I$។

- កំណើននៃអថេរ x គឺ $\Delta x = x - x_0$ (ឬតាងដោយ h)។
- កំណើននៃអនុគមន៍ y គឺ $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$។
- ផលធៀប $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ហៅថា **អត្រាកំណើនមធ្យម** នៃអនុគមន៍ f ចន្លោះ x_0 និង $x_0+\Delta x$។
- លីមីតនៃអត្រាកំណើនមធ្យមនេះ កាលណា $\Delta x \to 0$ (បើមាន) ហៅថា **អត្រាកំណើនខណៈ** ឬ **ចំនួនដេរីវេ** នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច x_0។

១.២ និយមន័យដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

និយមន័យ ១ : ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ x_0

បើ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ I ហើយ $x_0 \in I$។ ចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ x_0 (បើមាន) គឺតាងដោយ $f'(x_0)$ ហើយកំណត់ដោយ៖

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

លំហាត់គំរូ ១

ដោយប្រើនិយមន័យ ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមត្រង់ចំណុច x_0 ដែលបានកំណត់៖

ក. $f(x)=2x^2+3x$ ត្រង់ $x_0=2$

ខ. $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$ ត្រង់ $x_0=1$

គ. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ត្រង់ $x_0=4$

ចម្លើយ:

ក. ចំពោះ $f(x)=2x^2+3x$ ត្រង់ $x_0=2$៖ គេមាន $f(2)=2(2)^2+3(2)=8+6=14$។ តាមនិយមន័យ៖

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-14}{x-2}$$

ដោយ $2x^2+3x-14=(x-2)(2x+7)$ នោះ៖

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+7)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+7)=2(2)+7=11$$

ខ. ចំពោះ $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$ ត្រង់ $x_0=1$៖ គេមាន $f(1)=\dfrac{1+1}{2(1)-1}=2$។

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)+1}{2(1+h)-1}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h+2}{2h+1}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h+2-2(2h+1)}{h(2h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(2h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{2h+1}=-3$$

គ. ចំពោះ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ត្រង់ $x_0=4$៖ គេមាន $f(4)=\sqrt{2(4)+1}=\sqrt{9}=3$។

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

២ ន័យធរណីមាត្រនៃដេរីវេ និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ

២.១ ន័យធរណីមាត្រនៃដេរីវេ

ជាទូទៅ ១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច x_0 គឺ $f'(x_0)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិស (ជម្រាល) នៃបន្ទាត់ប៉ះ (T) នឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0, f(x_0))$៖

$$m = f'(x_0) = \tan\alpha$$

ដែល α ជាមុំរវាងបន្ទាត់ប៉ះ និងទិសដៅវិជ្ជមាននៃអ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$។

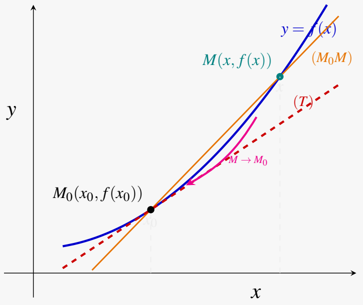
សម្រាយបញ្ជាក់៖ យកចំណុច $M_0(x_0, f(x_0))$ និងចំណុច $M(x, f(x))$ នៅលើក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f $(x \neq x_0)$។ បន្ទាត់កាត់ (M_0M) មានមេគុណប្រាប់ទិស៖

$$m_{\text{កាត់}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan\alpha_{\text{កាត់}}$$

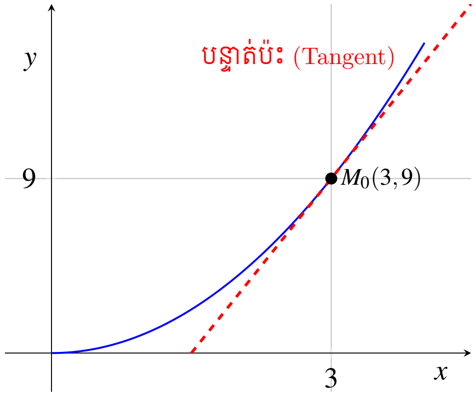
នៅពេលចំណុច M រំកិលខិតជិតចំណុច M_0 តាមបណ្តោយខ្សែកោង (C) (ពេលគឺ $x \to x_0$) នោះបន្ទាត់កាត់ (M_0M) នឹងប្រែក្លាយទៅជាបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ចំណុច M_0។ ហេតុនេះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ៖

$$m = \lim_{x \to x_0} m_{\text{កាត់}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \tan\alpha \quad \blacksquare$$

រូបភាពបកស្រាយ៖ បន្ទាត់កាត់ (M_0M) រំកិលទៅជាបន្ទាត់ប៉ះ (T)



ក្រាបបង្ហាញពីបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $x_0 = 3$ ចំពោះ $f(x) = x^2$



២.២ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ណរម៉ាល់

ជាទូទៅ ២

គេឱ្យខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ និងចំណុច $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ ដែល $y_0 = f(x_0)$៖

- **សមីការបន្ទាត់ប៉ះ** (T) **ត្រង់** M_0 **គឺ៖**

$$(T): y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \iff y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- **សមីការបន្ទាត់ណរម៉ាល់** (N) **(បន្ទាត់កែងនឹងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចប៉ះ) គឺ៖**

$$(N): y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (\text{ចំពោះ } f'(x_0) \neq 0)$$

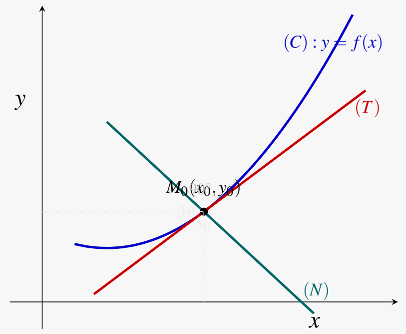
សម្រាយបញ្ជាក់៖

- **សមីការបន្ទាត់ប៉ះ** (T)៖ បន្ទាត់ប៉ះ (T) កាត់តាមចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស $m = f'(x_0)$។ តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុចដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y - y_0 = m(x - x_0)$ គេបាន $(T): y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$។
- **សមីការបន្ទាត់ណរម៉ាល់** (N)៖ បន្ទាត់ណរម៉ាល់ (N) កាត់តាមចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ប៉ះ (T)។ តាមលក្ខខណ្ឌបន្ទាត់កែងគ្នា ផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -1៖

$$m_N \cdot m_T = -1 \iff m_N \cdot f'(x_0) = -1 \implies m_N = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ណរម៉ាល់គឺ $(N): y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$។ ■

រូបភាពបកស្រាយ៖ បន្ទាត់ប៉ះ $(T) \perp$ បន្ទាត់ណរម៉ាល់ (N) ត្រង់ M_0



២.៣ ករណីពិសេសនៃសមីការបន្ទាត់ប៉ះ

- **បន្ទាត់ប៉ះដេក (Horizontal Tangent)៖** កាលណា $f'(x_0) = 0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$ ហើយមានសមីការ $y = y_0$។
- **បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់** $(d) : y = ax + b$៖ បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $a \implies f'(x_0) = a$។ គេដោះស្រាយសមីការនេះដើម្បីរក x_0 រួចទាញរក $y_0 = f(x_0)$។
- **បន្ទាត់ប៉ះកែងនឹងបន្ទាត់** $(d) : y = ax + b$ $(a \neq 0)$៖ ផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-1 \implies f'(x_0) \cdot a = -1 \iff f'(x_0) = -\frac{1}{a}$។
- **បន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពីចំណុចក្រៅក្រាប** $A(x_A, y_A)$៖ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចប៉ះ $(x_0, f(x_0))$ មានសមីការ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$។ ដោយបន្ទាត់ប៉ះកាត់តាម $A(x_A, y_A)$ គេបានសមីការ៖

  $$y_A - f(x_0) = f'(x_0)(x_A - x_0)$$

  ដោះស្រាយសមីការនេះទាញរកអាប់ស៊ីសចំណុចប៉ះ x_0 រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ។

លំហាត់គំរូ ២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ មានក្រាប (C)។

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) និងបន្ទាត់ណរម៉ាល់ (N) ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុច $x_0 = 2$។

ខ. រកចំណុចនៅលើក្រាប (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ $(d) : y = 9x - 5$។

ចម្លើយ:

ក. គេមាន $f(x)=x^3-3x+1 \implies f'(x)=3x^2-3$។ ត្រង់ $x_0=2$ គេបាន $y_0=f(2)=2^3-3(2)+1=3$។ មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះគឺ $f'(2)=3(2)^2-3=9$។ - សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T)៖ $y-3=9(x-2) \iff y=9x-15$។ - សមីការបន្ទាត់ណរម៉ាល់ (N)៖ $y-3=-\frac{1}{9}(x-2) \iff y=-\frac{1}{9}x+\frac{29}{9}$។

ខ. បន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក លុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 0៖ $f'(x)=0 \iff 3x^2-3=0 \iff x^2=1 \iff x=1$ ឬ $x=-1$។ - ចំពោះ $x=1 \implies y=1^3-3(1)+1=-1 \implies A(1,-1)$។ - ចំពោះ $x=-1 \implies y=(-1)^3-3(-1)+1=3 \implies B(-1,3)$។ ដូចនេះ ចំណុចដែលមានបន្ទាត់ប៉ះដេកគឺ $A(1,-1)$ និង $B(-1,3)$។

គ. បន្ទាត់ (d) មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=9$។ បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹង $(d) \iff f'(x_0)=9 \iff 3x_0^2-3=9 \iff 3x_0^2=12 \iff x_0^2=4 \implies x_0=\pm 2$។ - ចំពោះ $x_0=2 \implies y_0=3 \implies (T_1): y=9(x-2)+3=9x-15$។ - ចំពោះ $x_0=-2 \implies y_0=(-2)^3-3(-2)+1=-1 \implies (T_2): y=9(x+2)-1=9x+17$។

៣ ភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់

៣.១ ទ្រឹស្តីបទទំនាក់ទំនងភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់

ជាទូទៅ ៣

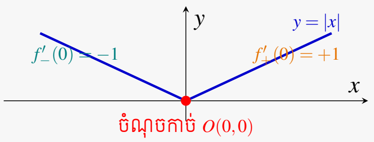
បើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 នោះ f ជាប់ត្រង់ x_0។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ចំពោះ $x \neq x_0$ គេអាចសរសេរ $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$។ យកលីមីតនៃអង្គទាំងពីរកាលណា $x \to x_0$៖

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$។ តាមនិយមន័យភាពជាប់ នាំឱ្យ f ជាប់ត្រង់ x_0។ ■

ក្រាបរលូន (មានដេរីវេ $\implies$ ជាប់) ធៀបនឹងចំណុចកាច់ (ជាប់ តែគ្មានដេរីវេ)



ជាទូទៅ ៤ : សម្គាល់

ចំណាំសំខាន់៖ ប្រាសមកវិញ អនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុចមួយ មិនប្រាកដថាមានដេរីវេត្រង់ចំណុចនោះឡើយ។

៣.២ ដេរីវេខាងឆ្វេង ដេរីវេខាងស្តាំ និងករណីគ្មានដេរីវេ

- **ដេរីវេខាងឆ្វេង៖** $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- **ដេរីវេខាងស្តាំ៖** $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

លក្ខខណ្ឌ៖ អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 លុះត្រាតែ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$ ជាចំនួនពិតកំណត់។

ករណីដែលអនុគមន៍គ្មានដេរីវេត្រង់ x_0៖

១. **ចំណុចស្រួច** (Corner / Cusp)៖ ដេរីវេខាងឆ្វេង និងដេរីវេខាងស្តាំមានតម្លៃខុសគ្នា $(f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0))$ ដូចជា $f(x)=|x|$ ត្រង់ $x=0$ ដែល $f'_-(0)=-1\neq f'_+(0)=1$។

២. **បន្ទាត់ប៉ះឈរ** (Vertical Tangent)៖ លីមីតអត្រាកំណើនខិតទៅរក $\pm\infty$ ដូចជា $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ត្រង់ $x=0$។

៣. **អនុគមន៍ដាច់** (Discontinuity)៖ បើ f មិនជាប់ត្រង់ x_0 នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ x_0 ឡើយ។

៤ អនុគមន៍ដេរីវេ និងរូបមន្តគណនា

៤.១ តារាងរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍គ្រឹះ និងអនុគមន៍បណ្តាក់

តារាងខាងក្រោមសង្ខេបនូវរូបមន្តដេរីវេគ្រឹះ និងរូបមន្តអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u=u(x)$៖

អនុគមន៍គ្រឹះ $y=f(x)$		អនុគមន៍បណ្ណាក់ $y=f(u)$	
$y=c$ (ចំនួនថេរ)	$y'=0$		
$y=ax+b$	$y'=a$		
$y=x^n$ $(n\in\mathbb{R})$	$y'=nx^{n-1}$	$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$
$y=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y'=-\frac{u'}{u^2}$
$y=\sqrt{x}$ $(x>0)$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$ $(u>0)$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)=\frac{u'}{\cos^2 u}$
$y=\cot x$	$y'=-(1+\cot^2 x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^u$	$y'=u'e^u$
$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$	$y=a^u$	$y'=u'a^u\ln a$
$y=\ln x$ $(x>0)$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=\ln\lvert u\rvert$	$y'=\frac{u'}{u}$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	$y=\log_a\lvert u\rvert$	$y'=\frac{u'}{u\ln a}$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arcsin u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos u$	$y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$y=\arctan u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$

៤.២ ប្រមាណវិធីលើដេរីវេ

បើ u និង v ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើចន្លោះ I ហើយ k ជាចំនួនថេរពិត៖

១. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

២. $(k\cdot u)'=k\cdot u'$

៣. $(u\cdot v)'=u'v+v'u$

៤. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v\neq 0)$

៥ បច្ចេកទេសគណនាដេរីវេពិសេស

៥.១ វិធីសាស្ត្រដេរីវេលោការីត (Logarithmic Differentiation)

ចំពោះអនុគមន៍ដែលមានអថេរទាំងនៅគោល និងស្វ័យគុណ $y=[u(x)]^{v(x)}$ ឬផលគុណ/ផលចែកស្មុគស្មាញ៖

១. បំពាក់លោការីតនេពៃលើអង្គទាំងពីរ៖ $\ln y = \ln[u(x)]^{v(x)} = v(x)\cdot\ln u(x)$។

២. ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x៖

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}$$

៣. ទាញរក y' ដោយគុណនឹង y៖

$$y' = [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$$

៥.២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំភ្លីស៊ីត (Implicit Differentiation)

កាលណាទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ត្រូវបានកំណត់ដោយសមីការ $F(x,y)=0$ ដែលមិនអាចទាញ y ជាកន្សោមនៃ x ដោយងាយ៖

១. ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការធៀបនឹង x ដោយចាត់ទុក y ជាអនុគមន៍នៃ x (ប្រើរូបមន្តបណ្ដាក់ $(y^n)' = ny^{n-1}y'$ និង $(f(y))' = f'(y)\cdot y'$)។

២. ប្រមូលផ្ដុំតួដែលមាន y' ទៅអង្គម្ខាង ហើយតួដែលគ្មាន y' ទៅអង្គម្ខាងទៀត។

៣. ដាក់ y' ជាកត្តារួមទាញរកកន្សោមនៃ y'។

៥.៣ ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ និងរូបមន្តឡៃបនីស

- ដេរីវេទីមួយ៖ $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$
- ដេរីវេទីពីរ៖ $f''(x) = (f'(x))' = \dfrac{d^2f}{dx^2}$
- ដេរីវេទី n៖ $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \dfrac{d^nf}{dx^n}$
- **រូបមន្តឡៃបនីស (Leibniz Formula) សម្រាប់ដេរីវេទី n នៃផលគុណ uv៖**

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{n}uv^{(n)}$$

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ (៥០ លំហាត់)

១. លីមីត $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ តាងឱ្យ៖

ក. ដេរីវេនៃ f ត្រង់ x_0
ខ. អាំងតេក្រាលនៃ f
គ. ភាពជាប់នៃ f ត្រង់ x_0
ឃ. តម្លៃអតិបរមានៃ f

២. បើ $f(x)=5x^3-2x+7$ នោះ $f'(x)$ ស្មើ៖

ក. $15x^2-2x$ ខ. $15x^2-2$ គ. $5x^2-2$ ឃ. $15x^3-2$

៣. បើ $f(x)=x^2$ នោះ $f'(3)$ ស្មើ៖

ក. 3 ខ. 9 គ. 6 ឃ. 12

៤. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=f(x)$ ត្រង់ x_0 គឺ៖

ក. $m=f(x_0)$
ខ. $m=f'(x_0)$
គ. $m=-f'(x_0)$
ឃ. $m=\frac{1}{f'(x_0)}$

៥. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=x^2$ ត្រង់ចំណុច $(1,1)$ គឺ៖

ក. $y=2x-1$ ខ. $y=2x+1$ គ. $y=x$ ឃ. $y=2x-2$

៦. ដេរីវេនៃ $f(x)=\sqrt{x}$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{\sqrt{x}}$
ខ. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
គ. $2\sqrt{x}$
ឃ. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

៧. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{1}{x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x^2}$
ខ. $\ln x$
គ. $-\frac{1}{x^2}$
ឃ. $-\frac{1}{x}$

៨. ដេរីវេនៃ $f(x)=\sin(2x)$ គឺ៖

ក. $\cos(2x)$ ខ. $2\cos(2x)$ គ. $-2\cos(2x)$ ឃ. $-2\sin(2x)$

៩. ដេរីវេនៃ $f(x)=\cos(3x)$ គឺ៖

ក. $-3\sin(3x)$ ខ. $3\sin(3x)$ គ. $-\sin(3x)$ ឃ. $3\cos(3x)$

១០. ដេរីវេនៃ $f(x)=\tan x$ គឺ៖

ក. $\cot x$
ខ. $\frac{1}{\sin^2 x}$
គ. $1+\tan^2 x$
ឃ. $\sec x$

១១. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{3x}$ គឺ៖

ក. e^{3x} ខ. $3e^{3x}$

គ. $3xe^{3x-1}$ ឃ. $\frac{1}{3}e^{3x}$

១២. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(2x+1)$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{2x+1}$ ខ. $\frac{2}{2x+1}$

គ. $\frac{2x}{2x+1}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

១៣. ដេរីវេនៃ $f(x)=(2x-1)^4$ គឺ៖

ក. $4(2x-1)^3$ ខ. $8(2x-1)^3$ គ. $2(2x-1)^3$ ឃ. $8(2x-1)^4$

១៤. ដេរីវេនៃ $f(x)=xe^x$ គឺ៖

ក. e^x ខ. xe^x គ. $(x+1)e^x$ ឃ. $(x-1)e^x$

១៥. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{x}{x+1}$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{(x+1)^2}$ ខ. $-\frac{1}{(x+1)^2}$

គ. $\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ ឃ. 1

១៦. បើ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 នោះ៖

ក. f ជាប់ត្រង់ x_0 ខ. f ដាច់ត្រង់ x_0

គ. $f(x_0)=0$ ឃ. $f'(x_0)=0$

១៧. អនុគមន៍ $f(x)=|x|$ ត្រង់ $x=0$៖

ក. គ្មានដេរីវេ និងមិនជាប់ ខ. មានដេរីវេ តែមិនជាប់

គ. ជាប់ តែគ្មានដេរីវេ ឃ. មានដេរីវេ និងជាប់

១៨. ដេរីវេខាងឆ្វេង $f'_-(0)$ នៃ $f(x)=|x|$ ស្មើ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. 0 ឃ. មិនមាន

១៩. ដេរីវេខាងស្ដាំ $f'_+(0)$ នៃ $f(x)=|x|$ ស្មើ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. 0 ឃ. មិនមាន

២០. បើបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបជាបន្ទាត់ដេក នោះមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ៖

ក. 1 ខ. -1 គ. 0 ឃ. $+\infty$

២១. សមីការបន្ទាត់ណរម៉ាល់ទៅនឹងក្រាប $y=f(x)$ ត្រង់ (x_0,y_0) ដែល $f'(x_0)\neq 0$ គឺ៖

ក. $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ ខ. $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

គ. $y-y_0=-f'(x_0)(x-x_0)$ ឃ. $y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

២២. ដេរីវេនៃ $y=\arcsin x$ លើ $(-1,1)$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ខ. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

គ. $\frac{1}{1+x^2}$ ឃ. $\frac{1}{1-x^2}$

២៣. ដេរីវេនៃ $y=\arctan x$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ខ. $\frac{1}{1-x^2}$

គ. $\frac{1}{1+x^2}$ ឃ. $-\frac{1}{1+x^2}$

២៤. ដេរីវេនៃ $y=\arccos x$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ខ. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

គ. $-\frac{1}{1+x^2}$ ឃ. $-\arcsin x$

២៥. ដេរីវេនៃ $y=2^x$ គឺ៖

ក. $x2^{x-1}$ ខ. 2^x

គ. $2^x\ln 2$ ឃ. $\frac{2^x}{\ln 2}$

២៦. ដេរីវេនៃ $y=\log_2 x$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x}$ ខ. $\frac{1}{x\ln 2}$

គ. $\frac{\ln 2}{x}$ ឃ. $\frac{1}{2x}$

២៧. ដេរីវេនៃ $y=\sqrt{x^2+1}$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ ខ. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

គ. $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ឃ. $\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

២៨. ដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ នៃ $f(x)=x^4-2x^3+5$ គឺ៖

ក. $12x^2-12x$ ខ. $4x^3-6x^2$ គ. $24x-12$ ឃ. $12x^2-6x$

២៩. ដេរីវេទីបី $f'''(x)$ នៃ $f(x)=\sin x$ គឺ៖

ក. $\cos x$ ខ. $-\cos x$ គ. $\sin x$ ឃ. $-\sin x$

៣០. ដេរីវេទី n នៃ $f(x)=e^{2x}$ គឺ៖

ក. e^{2x} ខ. $2e^{2x}$ គ. $2^n e^{2x}$ ឃ. $n2^{n-1}e^{2x}$

៣១. ដេរីវេទី n នៃ $f(x)=\frac{1}{x}$ គឺ៖

ក. $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ខ. $\frac{n!}{x^{n+1}}$

គ. $\frac{(-1)^n}{x^n}$ ឃ. $-\frac{n}{x^{n+1}}$

៣២. ដេរីវេទីពីរ y'' នៃ $y=\cos(2x)$ គឺ៖

ក. $-2\sin(2x)$ ខ. $-4\cos(2x)$ គ. $4\cos(2x)$ ឃ. $-4\sin(2x)$

៣៣. បើ $x^2+y^2=25$ នោះដេរីវេអាំភ្លីស៊ីត $\frac{dy}{dx}$ ស្មើ៖

ក. $-\frac{x}{y}$ ខ. $\frac{x}{y}$

គ. $-\frac{y}{x}$ ឃ. $\frac{y}{x}$

៣៤. ត្រង់ចំណុច $(3,4)$ នៃរង្វង់ $x^2+y^2=25$ មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះគឺ៖

ក. $\frac{3}{4}$ ខ. $-\frac{3}{4}$

គ. $\frac{4}{3}$ ឃ. $-\frac{4}{3}$

៣៥. បើ $xy=1$ នោះ $\frac{dy}{dx}$ ស្មើ៖

ក. $-\frac{1}{x^2}$ ខ. $\frac{1}{x^2}$

គ. $-\frac{1}{y^2}$ ឃ. 1

៣៦. ដេរីវេនៃ $x^3+y^3=3xy$ នាំឱ្យ $y'=\frac{dy}{dx}$ ស្មើ៖

ក. $\frac{y-x^2}{y^2-x}$ ខ. $\frac{x^2-y}{y^2-x}$

គ. $\frac{y^2-x}{x^2-y}$ ឃ. $\frac{x^2+y}{y^2+x}$

៣៧. ដេរីវេនៃ $y=x^x\ (x>0)$ គឺ៖

ក. $x\cdot x^{x-1}$ ខ. $x^x\ln x$ គ. $x^x(1+\ln x)$ ឃ. $x^x(1-\ln x)$

៣៨. ដេរីវេនៃ $y=x^{\sin x}$ គឺ៖

ក. $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$ ខ. $\sin x\cdot x^{\sin x-1}$

គ. $x^{\sin x}\cos x\ln x$ ឃ. $x^{\sin x}\left(\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$

៣៩. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln|\cos x|$ គឺ៖

ក. $\tan x$ ខ. $-\tan x$ គ. $\cot x$ ឃ. $-\cot x$

៤០. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln|\sin x|$ គឺ៖

ក. $\tan x$ ខ. $-\tan x$ គ. $\cot x$ ឃ. $-\cot x$

៤១. បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=x^3-3x$ ដែលស្របនឹងអ័ក្ស Ox កើតមានត្រង់ចំណុច៖

ក. $x=0$ ខ. $x=\pm 1$ គ. $x=\pm\sqrt{3}$ ឃ. $x=\pm 3$

៤២. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=e^x$ ត្រង់ចំណុច $(0,1)$ គឺ៖

ក. $y=x+1$ ខ. $y=x$ គ. $y=2x+1$ ឃ. $y=ex+1$

៤៣. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\ln x$ ត្រង់ចំណុច $(1,0)$ គឺ៖

ក. $y=x$ ខ. $y=x-1$ គ. $y=x+1$ ឃ. $y=2x-2$

៤៤. ដេរីវេនៃ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ គឺ៖

ក. $\dfrac{\cos x}{1}$ ខ. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

គ. $\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$ ឃ. $\dfrac{x\cos x+\sin x}{x^2}$

៤៥. ពីសមីការ $x^2+y^2=r^2$ ដេរីវេទីពីរ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ស្មើ៖

ក. $-\dfrac{r^2}{y^3}$ ខ. $\dfrac{r^2}{y^3}$

គ. $-\dfrac{r^2}{y^2}$ ឃ. $-\dfrac{x^2}{y^3}$

៤៦. រូបមន្តឡែបនីសសម្រាប់ដេរីវេទី n នៃផលគុណ uv គឺ៖

ក. $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(n)}$ ខ. $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$

គ. $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+v^{(n)}u$ ឃ. $(uv)^{(n)}=nu^{(n-1)}v'$

៤៧. ដេរីវេទីពីរនៃ $f(x)=xe^x$ គឺ៖

ក. e^x ខ. $(x+1)e^x$ គ. $(x+2)e^x$ ឃ. $(x+3)e^x$

៤៨. បើ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ នោះ $f'(x)$ ស្មើ៖

ក. $\dfrac{ad+bc}{(cx+d)^2}$ ខ. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

គ. $\dfrac{bc-ad}{(cx+d)^2}$ ឃ. $\dfrac{a}{c}$

៤៩. អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ត្រង់ $x=0$ មាន៖

ក. បន្ទាត់ប៉ះដេក ខ. បន្ទាត់ប៉ះឈរ គ. ចំណុចស្រួច ឃ. ភាពដាច់

៥០. បើ $f'(x_0)=0$ និង $f''(x_0)>0$ នោះ f មាន៖

ក. ចំណុចអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0

ខ. ចំណុចអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0

គ. ចំណុចរបត់ត្រង់ x_0

ឃ. គ្មានបរមាត្រង់ x_0 ឡើយ

លំហាត់អនុវត្តស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប (៥០ លំហាត់)

១. ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ ត្រង់ចំណុច $x_0 = 1$។

២. ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 2x$ ត្រង់ចំណុច $x_0 = -1$។

៣. ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ ត្រង់ចំណុច $x_0 = 2$។

④. ដោយប្រើនិយមន័យ គណនាដេរីវេនៃ $f(x)=\sqrt{3x+4}$ ត្រង់ចំណុច $x_0=4$។

⑤. ដោយប្រើនិយមន័យ គណនាដេរីវេនៃ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ត្រង់ចំណុច $x_0=1$។

⑥. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x-3|$ ត្រង់ចំណុច $x_0=3$។

៧. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{បើ } x\geq 1 \\ 2x & \text{បើ } x<1 \end{cases}$។ សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃ f ត្រង់ $x_0=1$។

៨. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{បើ } x\leq 2 \\ x^2-3 & \text{បើ } x>2 \end{cases}$។ កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x=2$។

៩. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=x|x|$ មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ រួចគណនា $f'(0)$។

១០. ពិនិត្យភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ត្រង់ចំណុច $x=0$។

១១. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=4x^5-7x^3+2x-9$

ខ. $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2$

១២. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=(3x^2-2x+1)(4x^3-5x)$។

១៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2+4}$។

១៤. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$។

១៥. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ស្វ័យគុណ $f(x) = (5x^3 - 2x + 1)^6$។

១៦. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍អសនិទាន $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 7}$។

១៧. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x) = \sqrt[3]{(2x^2-1)^2}$។

១៨. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^2\sqrt{2x+3}$។

១៩. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $f(x) = \sin(4x) - \cos(3x) + \tan(2x)$។

២០. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$។

២១. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រសនិទាន $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$។

២២. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=e^{3x^2-4x+1}$

ខ. $g(x)=x^3e^{-2x}$

២៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\ln(x^2+5x+6)$

ខ. $g(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

២៤. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍គោល a និងលោការីតគោល a៖

ក. $f(x)=2^{\sin x}$

ខ. $g(x)=\log_3(x^2+1)$

២៥. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាសនៃត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\arcsin(2x)$

ខ. $g(x)=\arctan(x^2)$

២៦. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ណរម៉ាល់ទៅនឹងក្រាប $y=x^3-3x^2+4$ ត្រង់ចំណុច $x_0=1$។

២៧. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ ត្រង់ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

២៨. រកចំណុចនៅលើក្រាប $y = x^3 - 3x + 5$ ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះស្របនឹងបន្ទាត់ $(d): 9x - y + 2 = 0$។

២៩. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y = \frac{x+2}{x-1}$ ដែលកែងនឹងបន្ទាត់ $(d): 3x - y + 1 = 0$។

៣០. រកចំណុចទាំងអស់នៅលើខ្សែកោង $y=x^4-2x^2+3$ ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះដេក។

៣១. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=x^2-4x+3$ គូសចេញពីចំណុចក្រៅក្រាប $A(1,-2)$។

៣២. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $y = ax^2 + bx + 1$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = 3x - 2$ ត្រង់ចំណុច $(1,1)$។

៣៣. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃប៉ារ៉ាបូលទាំងពីរ $(P_1) : y = x^2$ និង $(P_2) : y = -x^2 + 4x - 8$។

៣៤. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\dfrac{1}{x}$ ត្រង់ចំណុចណាក៏ដោយ បង្កើតបានជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេនូវត្រីកោណកែងមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡាថេរ។

៣៥. រកមុំដែលបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\sin x$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ បង្កើតឡើងជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស Ox។

៣៦. គណនាដេរីវេអាំភ្លីស៊ីត $y' = \dfrac{dy}{dx}$ នៃសមីការ $x^2 + xy + y^2 = 7$។

៣៧. គណនា y' បើ $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ (ខ្សែកោងដេកាត)។

៣៨. គណនា y' បើ $\sin(xy) = x + y$។

៣៩. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=25$ ត្រង់ចំណុច $M(3,-4)$។

៤០. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអេលីប $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=2$ ក្នុងកាដ្រង់ទីមួយ។

៤១. ដោយប្រើដេរីវេលោការីត គណនាដេរីវេនៃ $y = x^x$ ចំពោះ $x > 0$។

៤២. ដោយប្រើដេរីវេលោការីត គណនាដេរីវេនៃ $y = (\sin x)^x$ ចំពោះ $x \in (0, \pi)$។

៤៣. គណនាដេរីវេនៃ $y = x^{\ln x}$ ចំពោះ $x > 0$។

៤៤. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ស្មុគស្មាញ $y=\dfrac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{(x+3)^4}$ ដោយប្រើវិធីដេរីវេលោការីត។

៤៥. គណនាដេរីវេទីពីរ y'' នៃសមីការអាំភ្លីស៊ីត $x^2+y^2=16$ ជាកន្សោមនៃ y។

៤៦. គណនាដេរីវេទីមួយ ទីពីរ និងទីបី នៃអនុគមន៍ $f(x) = (x^2+1)e^x$។

៤៧. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$។

៤៨. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x) = \sin x$ និងទាញរកដេរីវេទី n នៃ $g(x) = \sin(ax+b)$។

៤៩. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(1+x)$ ចំពោះ $x>-1$។

៥០. ដោយប្រើរូបមន្តឡៃបនីស ចូរគណនាដេរីវេទី 10 នៃអនុគមន៍ $f(x)=(x^2-3)e^{2x}$។

មេរៀនទី ២

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

១ អនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ

ការសិក្សាលើទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ គឺជាការកំណត់ចន្លោះដែលអនុគមន៍កើន ឬចុះ ដោយផ្អែកលើសញ្ញានៃដេរីវេទីមួយ $f'(x)$។

១.១ និយមន័យ និងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ

ជាទូទៅ ១

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b)៖

- បើគ្រប់ $x \in (a,b), f'(x) > 0$ នោះអនុគមន៍ f ជា**អនុគមន៍កើនដាច់ខាត** លើចន្លោះ $[a,b]$។
- បើគ្រប់ $x \in (a,b), f'(x) < 0$ នោះអនុគមន៍ f ជា**អនុគមន៍ចុះដាច់ខាត** លើចន្លោះ $[a,b]$។
- បើគ្រប់ $x \in (a,b), f'(x) = 0$ នោះអនុគមន៍ f ជា**អនុគមន៍ថេរ** លើចន្លោះ $[a,b]$។

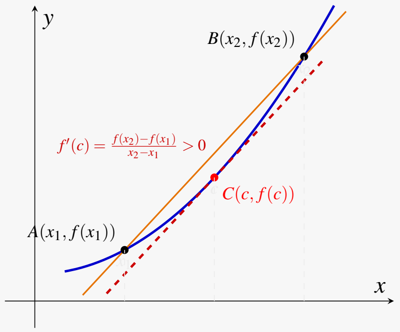
សម្រាយបញ្ជាក់៖ យកពីរតម្លៃ $x_1, x_2 \in [a,b]$ តាមចិត្តដែល $x_1 < x_2$។ ដោយសារអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[x_1,x_2]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះបើក (x_1,x_2) តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (MVT) មានចំនួនពិត $c \in (x_1,x_2)$ មួយយ៉ាងតិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \iff f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$$

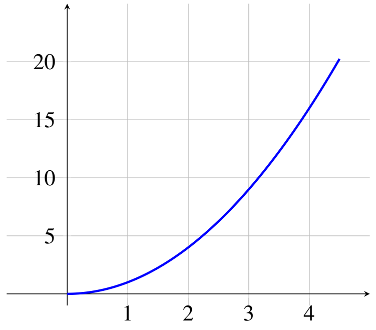
ដោយ $x_1 < x_2 \implies x_2 - x_1 > 0$៖

- បើគ្រប់ $x \in (a,b), f'(x) > 0$ នោះ $f'(c) > 0$ នាំឱ្យ $f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_1) < f(x_2)$។ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $[a,b]$។
- បើគ្រប់ $x \in (a,b), f'(x) < 0$ នោះ $f'(c) < 0$ នាំឱ្យ $f(x_2) - f(x_1) < 0 \implies f(x_1) > f(x_2)$។ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $[a,b]$។
- បើគ្រប់ $x \in (a,b), f'(x) = 0$ នោះ $f'(c) = 0$ នាំឱ្យ $f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$។ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $[a,b]$។ ■

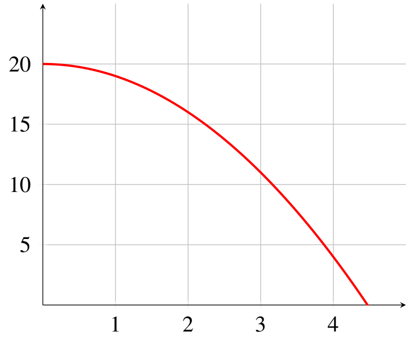
រូបភាពបកស្រាយ MVT លើអនុគមន៍កើន ($f'(c) > 0$ **ស្របនឹងខ្សែធ្នូ** AB)



ក្រាបអនុគមន៍កើន ($f'(x) > 0$)



ក្រាបអនុគមន៍ចុះ ($f'(x) < 0$)



១.២ ចំណុចប្រសព្វសំខាន់ (Critical Numbers)

និយមន័យ ១ : ចំនួនប្រសព្វសំខាន់

ចំនួន c ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ហៅថាជា **ចំនួនប្រសព្វសំខាន់** (Critical Number) កាលណា $f'(c) = 0$ ឬ $f'(c)$ មិនមាន។ ចំណុច $P(c, f(c))$ ហៅថា **ចំណុចប្រសព្វសំខាន់** (Critical Point)។

មេរៀនទី ២ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

លំហាត់គំរូ ១

សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងរកចន្លោះកើន ចុះ នៃអនុគមន៍ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$។

ចម្លើយ: - ដែនកំណត់៖ $D = \mathbb{R}$។ - ដេរីវេទីមួយ៖ $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$។ - ឱ្យ $f'(x) = 0 \iff 6(x+1)(x-2) = 0 \implies x = -1$ ឬ $x = 2$។ - តារាងសញ្ញា $f'(x)$៖

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

សន្និដ្ឋាន៖ - អនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $(-\infty, -1]$ និង $[2, +\infty)$ ពីព្រោះ $f'(x) > 0$។ - អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ $[-1, 2]$ ពីព្រោះ $f'(x) < 0$។

២ ភាពប៉ោង ភាពផត និងចំណុចរបត់

២.១ ភាពប៉ោង និងភាពផត (Concavity)

ជាទូទៅ ២

គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ លើចន្លោះ I៖

- បើគ្រប់ $x \in I, f''(x) > 0$ នោះក្រាបនៃ f **ផត (ប៉ោងឡើងលើ / Concave Up)** លើ I (ខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ប៉ះ)។
- បើគ្រប់ $x \in I, f''(x) < 0$ នោះក្រាបនៃ f **ប៉ោង (ប៉ោងចុះក្រោម / Concave Down)** លើ I (ខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ប៉ះ)។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ តាង (T) ជាបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y = f(x)$ ត្រង់ $x_0 \in I$ មានសមីការ $y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$។ ពិនិត្យគម្លាតបញ្ឈររវាងខ្សែកោង និងបន្ទាត់ប៉ះ៖ $g(x) = f(x) - y_T = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$។ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម អនុវត្តលើ $f(x) - f(x_0)$ មាន c_1 នៅចន្លោះ x_0 និង x ដែល $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$។ គេបាន៖

$$g(x) = [f'(c_1) - f'(x_0)](x - x_0)$$

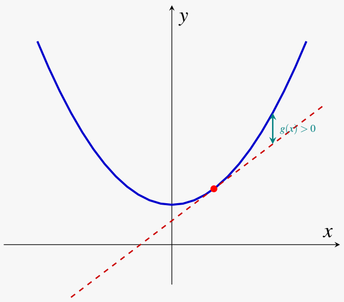
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមម្តងទៀតលើអនុគមន៍ f' ចន្លោះ x_0 និង c_1 មាន c នៅចន្លោះ x_0 និង c_1 ដែល៖

$$f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c)(c_1 - x_0)$$

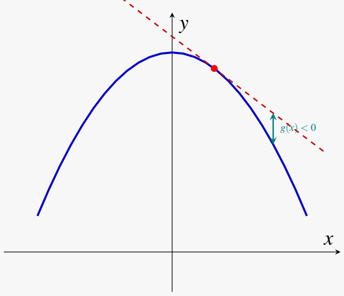
ដោយ c_1 ស្ថិតនៅចន្លោះ x_0 និង x នាំឱ្យ $(c_1 - x_0)$ និង $(x - x_0)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ហេតុនេះ $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq x_0$។ នាំឱ្យ $g(x) = f''(c)(c_1 - x_0)(x - x_0)$ មានសញ្ញាដូចគ្នានឹង $f''(c)$៖

- បើ $f''(x)>0$ នោះ $g(x)>0 \iff f(x)>y_T$ (ខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ប៉ះ $\implies$ ក្រាបផតឡើងលើ)។
- បើ $f''(x)<0$ នោះ $g(x)<0 \iff f(x)<y_T$ (ខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ប៉ះ $\implies$ ក្រាបប៉ោងចុះក្រោម)។ ■

ផត ($f''>0$ ៖ $f(x)>y_T$)



ប៉ោង ($f''<0$ ៖ $f(x)<y_T$)



២.២ ចំណុចរបត់ (Inflection Point)

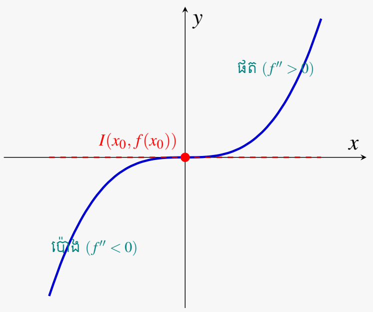
ជាទូទៅ ៣

ចំណុច $I(x_0, f(x_0))$ ហៅថា **ចំណុចរបត់** នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f កាលណាដេរីវេទីពីរ $f''(x_0)=0$ (ឬ គ្មានដេរីវេទីពីរ) ហើយ $f''(x)$ ផ្លាស់ប្តូរសញ្ញានៅពេលឆ្លងកាត់ចំណុច x_0។

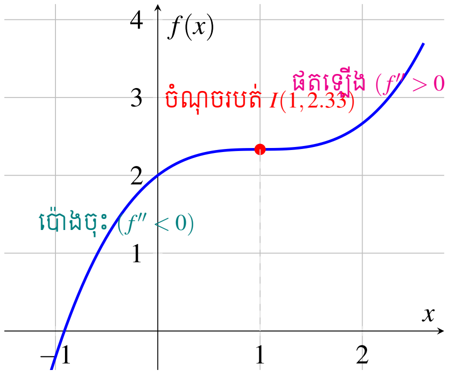
ការបកស្រាយ និងសម្រាយបញ្ជាក់៖ តាមនិយមន័យធរណីមាត្រ ចំណុចរបត់គឺជាចំណុចដែលខ្សែកោងផ្លាស់ប្តូរភាពកោងពីផតទៅប៉ោង (ឬពីប៉ោងទៅផត)៖

- នៅពេល $x<x_0$ ប្រសិនបើ $f''(x)>0$ (ក្រាបផតឡើងលើ) ហើយនៅពេល $x>x_0$ នាំឱ្យ $f''(x)<0$ (ក្រាបប៉ោងចុះក្រោម) ឬច្រាសមកវិញ។
- បើ f'' ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ x_0 នោះការផ្លាស់ប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាន (ឬច្រាសមកវិញ) តម្រូវឱ្យ f'' កាត់តម្លៃ 0 តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ពោលគឺ $f''(x_0)=0$។
- ត្រង់ចំណុចរបត់នេះ បន្ទាត់ប៉ះផ្លាស់ប្តូរទីតាំងពីស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងទៅនៅខាងលើខ្សែកោង (ឬច្រាសមកវិញ) ពោលគឺ **បន្ទាត់ប៉ះកាត់ខ្សែកោង** ត្រង់ចំណុចរបត់ I នោះ។ ■

រូបភាពបកស្រាយ៖ បន្ទាត់ប៉ះកាត់ខ្សែកោងត្រង់ចំណុចរបត់ I



ក្រាបបង្ហាញពីភាពប៉ោង ភាពផត និងចំណុចរបត់



លំហាត់គំរូ ២

រកចន្លោះប៉ោង ចន្លោះផត និងកូអរដោនេចំណុចរបត់នៃក្រាប $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$។

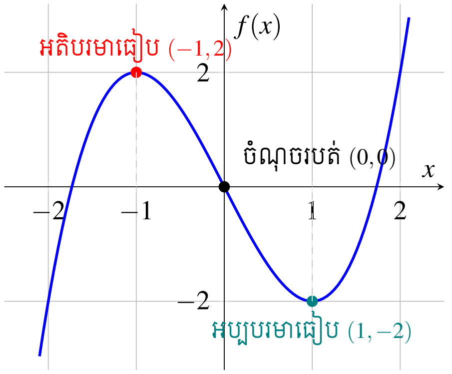
ចម្លើយ: - ដេរីវេទីមួយ៖ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ - ដេរីវេទីពីរ៖ $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$ - ឱ្យ $f''(x) = 0 \iff 6(x-2) = 0 \implies x = 2$ - ចំពោះ $x < 2 \implies f''(x) < 0 \implies$ ក្រាបប៉ោងចុះក្រោម (Concave Down) លើ $(-\infty, 2)$ - ចំពោះ $x > 2 \implies f''(x) > 0 \implies$ ក្រាបផតឡើងលើ (Concave Up) លើ $(2, +\infty)$ - ដោយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាឆ្លងកាត់ $x = 2$ នោះក្រាបមានចំណុចរបត់ត្រង់ $x = 2$៖ $y = f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 1 = 8 - 24 + 18 + 1 = 3 \implies I(2, 3)$។

៣ ចំណុចអតិបរមា និង អប្បបរមា (Extrema)

៣.១ តេស្តដេរីវេទី ១ និង តេស្តដេរីវេទី ២

វិធីសាស្ត្រ	តេស្តដេរីវេទី ១ ($f'(x)$)	តេស្តដេរីវេទី ២ ($f''(x)$)	ប្រភេទបរមា
អតិបរមាធៀប	$f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ឆ្លងកាត់ x_0	$f'(x_0)=0$ និង $f''(x_0)<0$	$M(x_0, f(x_0))$
អប្បបរមាធៀប	$f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ឆ្លងកាត់ x_0	$f'(x_0)=0$ និង $f''(x_0)>0$	$m(x_0, f(x_0))$
គ្មានបរមា	$f'(x)$ មិនប្តូរសញ្ញា	$f'(x_0)=0$ និង $f''(x_0)=0$ (មិនអាចសន្និដ្ឋាន)	គ្មានបរមា

ក្រាបបង្ហាញពីចំណុចអតិបរមា អប្បបរមា និងចំណុចរបត់ ($f(x)=x^3-3x$)



៣.២ បរមាដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a,b]$

ដើម្បីរកតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត និងអប្បបរមាដាច់ខាតនៃអនុគមន៍ជាប់ f លើចន្លោះបិទ $[a,b]$៖

១. រកតម្លៃ $f(c)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនប្រសព្វសំខាន់ $c\in(a,b)$ ដែល $f'(c)=0$ ឬ $f'(c)$ គ្មាន។

២. គណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងចន្លោះ៖ $f(a)$ និង $f(b)$។

៣. តម្លៃធំបំផុតក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងនេះ ជា **អតិបរមាដាច់ខាត** ហើយតម្លៃតូចបំផុតជា **អប្បបរមាដាច់ខាត**។

៤ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល និងទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

៤.១ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle's Theorem)

ជាទូទៅ ៤

បើអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំង ៣៖

① f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$

② f មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b)

③ $f(a)=f(b)$

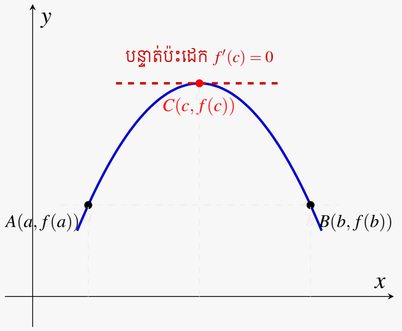
នោះមានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួនមួយ $c\in(a,b)$ ដែល $f'(c)=0$ (មានបន្ទាត់ប៉ះដេក)។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដោយសារអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (Extreme Value Theorem) អនុគមន៍ f ត្រូវតែមានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត M និងតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត m លើ $[a,b]$៖

- **ករណីទី ១៖** បើ $M=m$ នោះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $[a,b]$ ពោលគឺ $f(x)=M$ គ្រប់ $x\in[a,b]$។ ហេតុនេះ $f'(c)=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួន $c\in(a,b)$។
- **ករណីទី ២៖** បើ $M>m$ ដោយសារលក្ខខណ្ឌ $f(a)=f(b)$ តម្លៃបរមាទាំងពីរ M និង m មិនអាចកើតឡើងដំណាលគ្នានៅចុងចន្លោះ a និង b បានឡើយ។ ដូច្នេះយ៉ាងហោចណាស់មានបរមាមួយ (M ឬ m) ត្រូវតែកើតឡើងត្រង់ចំណុច $c\in(a,b)$ ខាងក្នុងចន្លោះ។ ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ c នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Fermat ចំពោះតម្លៃបរមាធៀប នាំឱ្យ $f'(c)=0$។

ដូចនេះ ជានិច្ចកាលមានយ៉ាងហោចណាស់ $c\in(a,b)$ មួយដែល $f'(c)=0$។ ■

រូបភាពបកស្រាយទ្រឹស្តីបទរ៉ូល $(f(a)=f(b)\implies f'(c)=0)$



៤.២ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (Mean Value Theorem - MVT)

ជាទូទៅ ៥

បើអនុគមន៍ f ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើ (a,b) នោះមានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួនមួយ $c \in (a,b)$ ដែល៖

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

ន័យធរណីមាត្រ៖ មានចំណុចយ៉ាងហោចណាស់មួយលើខ្សែកោង ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះស្របនឹងខ្សែធ្នូតភ្ជាប់ចំណុចចុង $(a, f(a))$ និង $(b, f(b))$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ បន្ទាត់ធ្នូតកាត់តាមចំណុច $A(a, f(a))$ និង $B(b, f(b))$ មានសមីការ $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$។ ពិចារណាលើអនុគមន៍ជំនួយ $g(x)$ តាងឱ្យគម្លាតបញ្ឈររវាងខ្សែកោង និងបន្ទាត់ធ្នូត៖

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

១. g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ (ផលដកនៃអនុគមន៍ជាប់)។

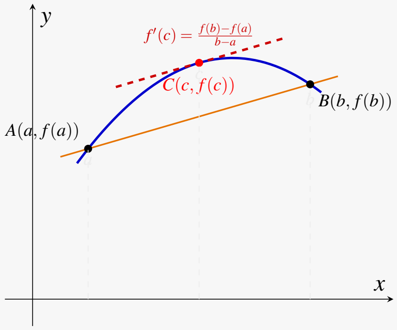
២. g មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b) ដោយ $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$។

៣. គណនាតម្លៃត្រង់ចុងចន្លោះ៖ $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ $g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0 \implies g(a) = g(b) = 0$។

អនុគមន៍ g ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំង ៣ នៃទ្រឹស្តីបទរ៉ូល ដូច្នេះមាន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $g'(c) = 0$៖

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \blacksquare$$

រូបភាពបកស្រាយទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងខ្សែធ្នូត AB)



មេរៀនទី ២ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

៥ វិធានឡូពីតាល់ (L'Hôpital's Rule)

៥.១ ទម្រង់មិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ និង $\frac{\infty}{\infty}$

ជាទូទៅ ៦

ឧបមាថា f និង g មានដេរីវេលើចន្លោះបើកដែលមានចំណុច a (លើកលែងត្រង់ a) ហើយ $g'(x) \neq 0$។ បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ និង $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ នោះ៖

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(លុះត្រាតែលីមីតខាងស្តាំមាន ឬស្មើ $\pm\infty$)។

សម្រាយបញ្ជាក់ (ចំពោះទម្រង់មិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)៖ ឧបមាថា $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ និង $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$។ យើងកំណត់បន្ថែមតម្លៃ $f(a) = 0$ និង $g(a) = 0$ ដើម្បីឱ្យ f និង g ក្លាយជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ a។ ចំពោះ $x > a$ (ករណី $x < a$ ស្រាយដូចគ្នា) អនុគមន៍ f និង g ជាប់លើ $[a,x]$ និងមានដេរីវេលើ (a,x)។ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមកូស៊ី (Cauchy's Extended MVT) មាន $c \in (a,x)$ មួយដែល៖

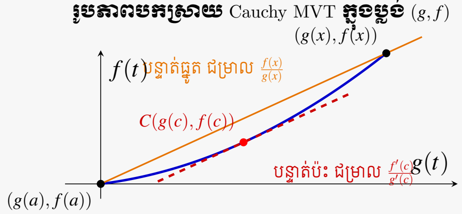
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \iff \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\text{ព្រោះ } f(a) = g(a) = 0)$$

នៅពេល $x \to a^+$ ដោយសារ $a < c < x$ តាមទ្រឹស្តីបទគៀប នាំឱ្យ $c \to a^+$ ដែរ។ យកលីមីតនៃអង្គទាំងពីរកាលណា $x \to a^+$ គេទាញបាន៖

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះលីមីតខាងឆ្វេង $(x \to a^-)$ នាំឱ្យបានរូបមន្តទូទៅ៖ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$។ ■

រូបភាពបកស្រាយ Cauchy MVT ក្នុងប្លង់ (g,f)



៥.២ ទម្រង់មិនកំណត់ដទៃទៀត

- **ទម្រង់** $0\cdot\infty$៖ សរសេរ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ ដើម្បីបម្លែងជា $\dfrac{0}{0}$ ឬ $\dfrac{\infty}{\infty}$។
- **ទម្រង់** $\infty-\infty$៖ តម្រូវភាគបែងរួម ឬបំបែកជាផលគុណដើម្បីបម្លែងជាផលធៀប។
- **ទម្រង់ស្វ័យគុណ** $1^\infty, 0^0, \infty^0$៖ តាង $y=[f(x)]^{g(x)} \Longrightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$ រួចគណនាលីមីតនៃ $\ln y$ តាមទម្រង់ $0\cdot\infty$ រួចទាញរក $\lim y = e^L$។

លំហាត់គំរូ ៣

គណនាលីមីតខាងក្រោមតាមវិធានឡូពីតាល់៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$

ចម្លើយ:

ក. រាង $\dfrac{0}{0}$៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{3\cos(3x)}=\frac{2(1)}{3(1)}=\frac{2}{3}$$

ខ. រាង $\dfrac{0}{0}$៖ តាមវិធានឡូពីតាល់លើកទីមួយ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\quad\left(\text{រាង } \frac{0}{0}\right)$$

អនុវត្តវិធានឡូពីតាល់លើកទីពីរ៖

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

គ. រាង $\infty\cdot 0$៖ សរសេរជាផលធៀប

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}\quad\left(\text{រាង } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

អនុវត្តវិធានឡូពីតាល់៖

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

៦ អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា (Applied Optimization)

៦.១ វិធីសាស្ត្រ ៥ ជំហានក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបរមា

① . អានប្រធានឱ្យយល់ច្បាស់ គូររូបតាង (បើមាន) និងកំណត់អថេរព្រមទាំងលក្ខខណ្ឌរបស់វា។

② . កំណត់កន្សោមអនុគមន៍ដែលត្រូវរកបរមា (អតិបរមា ឬអប្បបរមា)។

③ . បង្កើតសមីការទំនាក់ទំនង (សម្មតិកម្ម) ដើម្បីបំប្លែងអនុគមន៍នោះឱ្យមានតែមួយអថេរ។

④ . គណនាដេរីវេទីមួយ $f'(x)$ រកចំនួនប្រសព្វសំខាន់ $f'(x) = 0$ ក្នុងដែនកំណត់។

⑤ . ប្រើតេស្តដេរីវេទីមួយ ឬទីពីរ ដើម្បីបញ្ជាក់ថាតម្លៃនោះជាអតិបរមា ឬអប្បបរមាពិតប្រាកដ រួចឆ្លើយសំនួរ។

លំហាត់គំរូ ៤

[ចំណោទហ៊ុមព័ទ្ធដីចតុកោណកែងជាប់ជញ្ជាំង] កសិករម្នាក់មានសំណាញ់លួសប្រវែង 120 m សម្រាប់ធ្វើរបងព័ទ្ធដីចតុកោណកែងមួយកន្លែង ដោយមានជញ្ជាំងថ្មត្រង់មួយជ្រុងស្រាប់ (មិនបាច់ធ្វើរបងលើជ្រុងនោះទេ)។ ចូរកំណត់វិមាត្រនៃដីដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាទទួលបានធំបំផុត។

ចម្លើយ: តាង x ជាប្រវែងជ្រុងទាំងពីរដែលកែងនឹងជញ្ជាំង $(x > 0)$។ ជ្រុងស្របនឹងជញ្ជាំងមានប្រវែង $y = 120 - 2x$ (ដោយ $120 - 2x > 0 \implies 0 < x < 60$)។ ផ្ទៃក្រឡាដីចតុកោណកែងគឺ៖

$$A(x) = x \cdot y = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$$

ដេរីវេទីមួយ៖ $A'(x) = 120 - 4x$ ឱ្យ $A'(x) = 0 \iff 120 - 4x = 0 \implies x = 30$ m។ ដេរីវេទីពីរ៖ $A''(x) = -4 < 0 \implies$ ផ្ទៃក្រឡាមានតម្លៃអតិបរមាពិតប្រាកដត្រង់ $x = 30$ m។ វិមាត្រដីគឺ៖ ទទឹង $x = 30$ m និងបណ្ដោយ $y = 120 - 2(30) = 60$ m។ ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាគឺ $A_{\max} = 30 \times 60 = 1800$ m^2។

៧ ចលនាក្នុងរូបវិទ្យា និងអត្រាបម្រែបម្រួលប្រទាក់ក្រឡា

៧.១ អនុវត្តន៍លើចលនាត្រង់ (Kinematics)

បើវត្ថុមួយផ្លាស់ទីលើបន្ទាត់ត្រង់មួយ មានសមីការទីតាំង $s(t)$ នៅខណៈពេល t $(t \geq 0)$៖

- **ល្បឿនខណៈ (Velocity)**៖ $v(t) = s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$
- **ល្បឿនស្កាលែរ (Speed)**៖ $|v(t)|$
- **សំទុះខណៈ (Acceleration)**៖ $a(t) = v'(t) = s''(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2}$
- វត្ថុឈប់ស្ងៀម (ឬប្តូរទិសដៅ) នៅពេល $v(t) = 0$។
- វត្ថុផ្លាស់ទីស្ទុះលឿន (Speeding Up) កាលណា $v(t) \cdot a(t) > 0$។
- វត្ថុផ្លាស់ទីយឺត (Slowing Down) កាលណា $v(t) \cdot a(t) < 0$។

លំហាត់គំរូ ៥

ចលនានៃភាគល្អិតមួយលើបន្ទាត់ត្រង់ កំណត់ដោយសមីការទីតាំង $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ $(t \geq 0$ គិតជាវិនាទី s គិតជាម៉ែត្រ)។

ក. រកល្បឿន $v(t)$ និងសំទុះ $a(t)$ នៃភាគល្អិតនៅខណៈពេល t។

ខ. តើភាគល្អិតឈប់ស្ងៀមនៅខណៈពេលណា?

ចម្លើយ:

ក. ល្បឿន $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ (m/s) និងសំទុះ $a(t) = v'(t) = 6t - 12$ $(\mathrm{m/s^2})$។

ខ. ភាគល្អិតឈប់ស្ងៀមពេល $v(t) = 0 \iff 3t^2 - 12t + 9 = 0 \iff 3(t-1)(t-3) = 0 \implies t = 1$ s ឬ $t = 3$ s។

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ (៥០ លំហាត់)

១. អនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ (a,b) លុះត្រាតែ៖

ក. $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$
ខ. $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$
គ. $f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$
ឃ. $f''(x)>0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$

២. អនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើ (a,b) លុះត្រាតែ៖

ក. $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$
ខ. $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$
គ. $f''(x)<0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$
ឃ. $f(x)<0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$

៣. ចំនួន c ក្នុងដែនកំណត់នៃ f ហៅថាចំនួនប្រសព្វសំខាន់ កាលណា៖

ក. $f(c)=0$
ខ. $f'(c)=0$ ឬ $f'(c)$ មិនមាន
គ. $f''(c)=0$
ឃ. $f'(c)>0$

៤. អនុគមន៍ $f(x)=x^2-4x+3$ កើនលើចន្លោះ៖

ក. $(-\infty,2)$
ខ. $(2,+\infty)$
គ. $(-\infty,+\infty)$
ឃ. $(1,3)$

៥. អនុគមន៍ $f(x)=-x^3+3x$ ចុះលើចន្លោះ៖

ក. $(-1,1)$
ខ. $(-\infty,-1)$ និង $(1,+\infty)$
គ. $(0,+\infty)$
ឃ. $(-\infty,0)$

៦. អនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x^2$ មានចំណុចអតិបរមាធៀបត្រង់៖

ក. $x=0$
ខ. $x=2$
គ. $x=-2$
ឃ. $x=3$

៧. អនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x^2$ មានចំណុចអប្បបរមាធៀបត្រង់៖

ក. $x=0$
ខ. $x=2$
គ. $x=1$
ឃ. $x=-1$

៨. តម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. 1
ខ. 2
គ. 0
ឃ. $\dfrac{1}{2}$

៩. ក្រាបនៃ f ផតឡើងលើ (Concave Up) លើចន្លោះ I លុះត្រាតែ៖

ក. $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$
ខ. $f''(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$
គ. $f''(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$
ឃ. $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$

១០. ក្រាបនៃ f ប៉ោងចុះក្រោម (Concave Down) លើចន្លោះ I លុះត្រាតែ៖

ក. $f''(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$
ខ. $f''(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$
គ. $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$
ឃ. $f(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$

១១. ចំណុចរបត់នៃក្រាបកើតមានត្រង់ចំណុចដែល៖

ក. $f'(x)=0$ ខ. $f''(x)$ ផ្លាស់ប្តូរសញ្ញា
គ. $f(x)=0$ ឃ. $f'(x)$ មិនមាន

១២. អាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់នៃក្រាប $f(x)=x^3-3x^2+2$ គឺ៖
ក. $x=0$ ខ. $x=1$ គ. $x=2$ ឃ. $x=-1$

១៣. កូអរដោនេចំណុចរបត់នៃក្រាប $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ គឺ៖
ក. $(1,5)$ ខ. $(2,3)$ គ. $(3,1)$ ឃ. $(0,1)$

១៤. តាមតេស្តដេរីវេទីពីរ បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)<0$ នោះ f មាន៖
ក. អតិបរមាធៀបត្រង់ c ខ. អប្បបរមាធៀបត្រង់ c
គ. ចំណុចរបត់ត្រង់ c ឃ. គ្មានបរមាត្រង់ c

១៥. តាមតេស្តដេរីវេទីពីរ បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)>0$ នោះ f មាន៖
ក. អតិបរមាធៀបត្រង់ c ខ. អប្បបរមាធៀបត្រង់ c
គ. ចំណុចរបត់ត្រង់ c ឃ. មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន

១៦. បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)=0$ នោះ៖
ក. c ជាចំណុចអតិបរមា ខ. c ជាចំណុចអប្បបរមា
គ. តេស្តដេរីវេទីពីរមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ឃ. c ប្រាកដជាចំណុចរបត់

១៧. លក្ខខណ្ឌនៃទ្រឹស្តីបទរ៉ូលលើ $[a,b]$ គឺ៖
ក. f ជាប់លើ $[a,b]$, មានដេរីវេលើ (a,b), $f(a)=f(b)$ ខ. f ជាប់លើ (a,b), $f(a)\neq f(b)$
គ. $f'(a)=f'(b)$ ឃ. $f''(x)=0$

១៨. តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (MVT) មាន $c\in(a,b)$ ដែល $f'(c)$ ស្មើ៖
ក. 0 ខ. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
គ. $\dfrac{f(b)+f(a)}{2}$ ឃ. $\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$

១៩. លីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ ស្មើ៖
ក. 0 ខ. 1 គ. $+\infty$ ឃ. មិនមាន

២០. លីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ ស្មើ៖
ក. 0 ខ. 1 គ. e ឃ. -1

២១. លីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ស្មើ៖

ក. 0　　ខ. 1

គ. $\frac{1}{2}$　　ឃ. $-\frac{1}{2}$

២២. លីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ ស្មើ៖

ក. 0　　ខ. 1　　គ. $+\infty$　　ឃ. e

២៣. លីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ ស្មើ៖

ក. $+\infty$　　ខ. 1　　គ. 0　　ឃ. 2

២៤. លីមីត $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$ ស្មើ៖

ក. $-\infty$　　ខ. 0　　គ. 1　　ឃ. -1

២៥. លីមីត $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}$ ស្មើ៖

ក. 1　　ខ. 0　　គ. e　　ឃ. $+\infty$

២៦. ចតុកោណកែងដែលមានបរិមាត្រ $P = 40$ m ថេរ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតកាលណាវាជា៖

ក. ការ៉េជ្រុង 10 m　　ខ. ចតុកោណកែងវិមាត្រ 5 m × 15 m

គ. ការ៉េជ្រុង 20 m　　ឃ. ចតុកោណកែងវិមាត្រ 8 m × 12 m

២៧. ផលបូកពីរចំនួនវិជ្ជមានស្មើ 20។ ផលគុណធំបំផុតនៃចំនួនទាំងពីរគឺ៖

ក. 96　　ខ. 100　　គ. 99　　ឃ. 105

២៨. របងប្រវែង 100 m ព័ទ្ធដីចតុកោណកែងជាប់ជញ្ជាំងម្ខាង។ ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាគឺ៖

ក. 625 m^2　　ខ. 1250 m^2

គ. 2500 m^2　　ឃ. 1000 m^2

២៩. ប្រអប់ចតុកោណកែងបាតការ៉េគ្មានគម្របមានមាឌ $V = 4000\ \text{cm}^3$។ ដើម្បីឱ្យផ្ទៃសរុបអប្បបរមា ជ្រុងបាតត្រូវស្មើ៖

ក. 10 cm　　ខ. 20 cm　　គ. 15 cm　　ឃ. 30 cm

៣០. ចតុកោណកែងមួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R។ ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមានៃចតុកោណកែងគឺ៖

ក. R^2　　ខ. $2R^2$　　គ. $4R^2$　　ឃ. πR^2

៣១. ស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងស្វ៊ែរកាំ R មានមាឌអតិបរមាកាលណាកម្ពស់ h ស្មើ៖

ក. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$　　ខ. $\frac{R}{\sqrt{3}}$

គ. $R\sqrt{2}$　　ឃ. $\frac{R}{2}$

៣២. ចម្ងាយខ្លីបំផុតពីគល់តម្រុយ $(0,0)$ ទៅបន្ទាត់ $y = 2x+5$ គឺ៖

ក. 5 ខ. $\sqrt{5}$

គ. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ឃ. 2

៣៣. សមីការចលនារបស់ភាគល្អិតមួយគឺ $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ $(t \geq 0)$។ ល្បឿន $v(t)$ គឺ៖

ក. $3t^2 - 12t + 9$ ខ. $6t - 12$ គ. $3t^2 - 6t + 9$ ឃ. $t^2 - 12t$

៣៤. ភាគល្អិតខាងលើឈប់ស្ងៀម $(v(t) = 0)$ នៅខណៈពេល៖

ក. $t = 1$ និង $t = 3$ ខ. $t = 0$ និង $t = 2$

គ. $t = 2$ តែមួយគត់ ឃ. $t = 3$ តែមួយគត់

៣៥. សំទុះនៃភាគល្អិតខាងលើនៅខណៈ $t = 2$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 6 គ. -6 ឃ. 12

៣៦. ភាគល្អិតផ្លាស់ទីស្ទុះលឿន (Speeding Up) កាលណា៖

ក. $v(t) \cdot a(t) > 0$ ខ. $v(t) \cdot a(t) < 0$

គ. $v(t) = 0$ ឃ. $a(t) > 0$

៣៧. ភាគល្អិតផ្លាស់ទីយឺត (Slowing Down) កាលណា៖

ក. $v(t) \cdot a(t) > 0$ ខ. $v(t) \cdot a(t) < 0$

គ. $a(t) = 0$ ឃ. $v(t) < 0$

៣៨. ប៉េងប៉ោងស្វ៊ែរមួយមានមាឌកើនក្នុងអត្រា 100π cm^3/s។ អត្រាកំណើនកាំនៅពេល $r = 5$ cm គឺ៖

ក. 1 cm/s ខ. 2 cm/s គ. 0.5 cm/s ឃ. 4 cm/s

៣៩. ជណ្ដើរប្រវែង 5 m ផ្អែកជញ្ជាំង។ ជើងជណ្ដើររអិលចេញក្នុងល្បឿន 1 m/s។ នៅពេលជើងជណ្ដើរនៅចម្ងាយ 3 m ពីជញ្ជាំង ចុងខាងលើរអិលចុះក្នុងល្បឿន៖

ក. $\frac{3}{4}$ m/s ខ. $\frac{4}{3}$ m/s

គ. 1 m/s ឃ. $\frac{1}{2}$ m/s

៤០. តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតនៃ $f(x) = x^3 - 3x$ លើ $[0, 2]$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 2 គ. -2 ឃ. 4

៤១. តម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃ $f(x) = x^3 - 3x$ លើ $[0, 2]$ គឺ៖

ក. 0 ខ. -2 គ. 2 ឃ. -1

៤២. អនុគមន៍ $f(x) = x^4$ ត្រង់ចំណុច $(0, 0)$ ជា៖

ក. ចំណុចរបត់ ខ. ចំណុចអប្បបរមាធៀប គ. ចំណុចអតិបរមាធៀប ឃ. គ្មានបរមា

៤៣. អនុគមន៍ $f(x) = x^3$ ត្រង់ចំណុច $(0, 0)$ ជា៖

ក. ចំណុចរបត់ ខ. ចំណុចអប្បបរមាធៀប គ. ចំណុចអតិបរមាធៀប ឃ. កំពូល

៤៤. ចំនួនតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី ៣ អាចជា៖

ក. 0 ឬ 2 ខ. 1 ឬ 3 គ. 2 ជានិច្ច ឃ. 1 ជានិច្ច

៤៥. បើ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះសមីការ $f(x) = 0$ អាចមានឫសពិតយ៉ាងច្រើន៖

ក. 1 ឫស ខ. 2 ឫស គ. 3 ឫស ឃ. គ្មានឫស

៤៦. បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់នៃក្រាបមួយ៖

ក. កាត់ខ្សែកោង ខ. នៅខាងក្រោមខ្សែកោងជានិច្ច

គ. នៅខាងលើខ្សែកោងជានិច្ច ឃ. មិនប៉ះខ្សែកោង

៤៧. លីមីត $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$ ស្មើ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 4 ឃ. 0

៤៨. បើ $f''(x) < 0$ គ្រប់ x នោះបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y = f(x)$ ស្ថិតនៅ៖

ក. ខាងលើក្រាបជានិច្ច ខ. ខាងក្រោមក្រាបជានិច្ច

គ. កាត់ក្រាបជានិច្ច ឃ. ស្របនឹងក្រាប

៤៩. អនុគមន៍ចំណេញ $P(x) = -2x^2 + 80x - 300$ ទទួលបានចំណេញអតិបរមាពេល x ស្មើ៖

ក. 10 ខ. 20 គ. 40 ឃ. 30

៥០. តម្លៃប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះគឺ៖

ក. 300 ខ. 500 គ. 800 ឃ. 600

លំហាត់អនុវត្តស្ដង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប (៥០ លំហាត់)

១. កំណត់ចន្លោះកើន ចុះ និងរកចំណុចបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x^2+1$។

២. រកចំណុចបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$។

មេរៀនទី ២ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

៣. សិក្សាអថេរភាព និងបរមានៃអនុគមន៍សនិទាន $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$។

៤. រកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ លើចន្លោះ $(0, +\infty)$។

៥. រកចន្លោះកើន ចុះ នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x) = xe^{-x}$។

៦. រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍លោការីត $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ចំពោះ $x > 0$។

៧. កំណត់តម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $f(x) = \sin x + \cos x$ លើចន្លោះ $[0, 2\pi]$។

៨. រកតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត និងអប្បបរមាដាច់ខាតនៃ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ លើចន្លោះ $[-2, 3]$។

៩. រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាដាច់ខាតនៃ $f(x) = x - 2\sin x$ លើចន្លោះ $[0, \pi]$។

១០. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ មានបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ និង $x = 3$។

១១. រកចន្លោះប៉ោង ចន្លោះផត និងចំណុចរបត់នៃក្រាប $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$។

១២. រកចំណុចរបត់នៃក្រាបអនុគមន៍ដឺក្រេទីបួន $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 10$។

១៣. រកចន្លោះប៉ោង ផត នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$។

១៤. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=e^{-x^2}$ (ខ្សែកោងហ្គោស) មានចំណុចរបត់ចំនួនពីរ រួចរកកូអរដោនេចំណុចទាំងពីរនោះ។

១៥. រកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង $f(x) = x^2 \ln x$ ចំពោះ $x > 0$។

១៦. រកចន្លោះប៉ោង ចន្លោះផត នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $f(x) = \sin x$ លើ $[0, 2\pi]$។

១៧. បង្ហាញថាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ដឺក្រេទីបី $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ តែងតែមានចំណុចរបត់មួយជានិច្ច។

១៨. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យក្រាប $f(x)=x^4+mx^3+\frac{3}{2}x^2+1$ ផតឡើងលើគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$។

១៩. រកចំណុចរបត់នៃក្រាប $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$។

២០. បង្ហាញថាក្រាប $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ គ្មានចំណុចរបត់ឡើយ។

២១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទរ៉ូលចំពោះ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ លើចន្លោះ $[1, 3]$ រួចរកតម្លៃ c។

២២. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (MVT) ចំពោះ $f(x) = x^3 - x$ លើ $[0, 2]$ រួចរកតម្លៃ c។

២៣. គណនាលីមីតខាងក្រោមតាមវិធានឡូពីតាល់៖

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

២៤. គណនាលីមីតរាង $\frac{0}{0}$ ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

២៥. គណនាលីមីតរាង $\frac{\infty}{\infty}$ និងរាង $0\cdot\infty$៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}$

ខ. $\lim_{x\to0^+} x^2\ln x$

២៦. គណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$៖ $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$។

២៧. គណនាលីមីតរាងស្វ័យគុណមិនកំណត់ 1^{∞} និង 1^{∞}៖

ក. $\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{1/x}$

ខ. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

២៨. គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0^+} x^x$ ដោយបំប្លែងជារាងលោការីត។

២៩. គណនាលីមីត $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ តាមវិធានឡូពីតាល់។

៣០. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+ax+bx^3}{x^3}=0$។

៣១. រកចំនួនវិជ្ជមានពីរដែលមានផលបូកស្មើ 30 ហើយផលគុណរបស់ពួកវាមានតម្លៃធំបំផុត។

៣២. រកចំនួនវិជ្ជមានពីរដែលមានផលគុណស្មើ 64 ហើយផលបូករបស់ពួកវាមានតម្លៃតូចបំផុត។

៣៣. បន្ទះដែកការ៉េមួយមានជ្រុងប្រវែង 24 cm។ គេកាត់ការ៉េតូចៗប៉ុនគ្នាពីជ្រុងទាំងបួន រួចបត់គែមឡើងលើដើម្បីធ្វើជាប្រអប់គ្មានគម្របមួយ។ ចូរកំណត់ប្រវែងជ្រុងការ៉េតូចដែលត្រូវកាត់ ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត។

៣៤. កសិករម្នាក់ចង់ហ៊ុមព័ទ្ធដីចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា 600 m^2 ហើយចែកដីជាពីរប្លង់ស្មើគ្នាដោយរបងខណ្ឌកណ្ដាលមួយស្របនឹងទទឹង។ រកវិមាត្រដីដើម្បីឱ្យប្រវែងរបងសរុបមានកម្រិតអប្បបរមា។

៣៥. រកវិមាត្រនៃចតុកោណកែងដែលមានបរិមាត្រ $P = 80\ \mathrm{cm}$ ហើយមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត។

៣៦. គេចង់ធ្វើកំប៉ុងស៊ីឡាំងបិទជិតមួយមានមាឌ $V = 1000\pi\ \mathrm{cm}^3$។ ចូរកំណត់កាំបាត R និងកម្ពស់ h ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាសរុបនៃកំប៉ុងមានកម្រិតអប្បបរមា (សន្សំសំណៃដែកបំផុត)។

៣៧. រកផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតនៃត្រីកោណកែងដែលមានអ៊ីប៉ូតេនុសប្រវែង a ថេរ។

៣៨. ចតុកោណកែងមួយមានបាតស្ថិតលើអ័ក្ស Ox ហើយកំពូលពីរទៀតស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y=12-x^2$។ រកផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតនៃចតុកោណកែងនោះ។

៣៩. រកចំណុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ដែលនៅជិតបំផុតទៅនឹងចំណុច $A(0,3)$។

៤០. ស៊ីឡាំងបរិវត្តមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែរកាំ R។ រកមាឌធំបំផុតនៃស៊ីឡាំងជាកន្សោមនៃ R។

៤១. កោនបរិវត្តមួយចារឹកក្រៅស្វ៊ែរកាំ R។ រកកម្ពស់នៃកោនដើម្បីឱ្យមាឌកោនមានកម្រិតអប្បបរមា។

៤២. ក្រុមហ៊ុនមួយលក់ទំនិញ x គ្រឿងក្នុងមួយថ្ងៃដោយមានថ្លៃដើម $C(x) = 2000 + 10x + 0.1x^2$ និងតម្លៃលក់ $p(x) = 50 - 0.1x$។ កំណត់បរិមាណលក់ x ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា។

៤៣. ភាគល្អិតមួយផ្លាស់ទីលើបន្ទាត់ត្រង់តាមសមីការចលនា $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (គិតជា m, s)។

ក. គណនាល្បឿន $v(t)$ និងសំទុះ $a(t)$ នៅខណៈ $t = 2$ s

ខ. កំណត់ខណៈពេលណាខ្លះដែលភាគល្អិតឈប់ស្ងៀមមួយរំពេច

៤៤. ចំពោះភាគល្អិតខាងលើ ចូរកំណត់ចន្លោះពេលដែលភាគល្អិតផ្លាស់ទីស្ទុះលឿន និងចន្លោះពេលដែលផ្លាស់ទីយឺត។

៤៥. គ្រាប់កាំភ្លើងមួយបាញ់ឡើងលើតាមទិសឈរមានសមីការកម្ពស់ $h(t)=80t-5t^2$ (គិតជា $\mathrm{m,s}$)។ រកកម្ពស់ខ្ពស់បំផុតដែលគ្រាប់ទៅដល់ និងល្បឿនពេលធ្លាក់មកដល់ដីវិញ។

៤៦. បាឡុងស្វ៊ែរមួយកំពុងបូមខ្យល់ចូលដោយអត្រាកំណើនមាឌ $\dfrac{dV}{dt}=400\pi\ \mathrm{cm^3/s}$។ គណនាអត្រាកំណើននៃកាំ $\dfrac{dr}{dt}$ នៅពេលកាំ $r=10\ \mathrm{cm}$។

៤៧. ថ្មមួយដុំធ្លាក់ចូលក្នុងទឹកស្ងប់ បង្កើតជារង្វង់រលកដែលរីកធំឡើងដោយកាំកើនក្នុងអត្រា 30 cm/s។ រកអត្រាកំណើននៃផ្ទៃក្រឡារង្វង់រលកនៅពេលកាំ $r = 2$ m។

៤៨. ធុងទឹកមួយមានរាងកោនផ្កាប់ចុះក្រោម កម្ពស់ 4 m និងកាំមាត់ខាងលើ 2 m។ គេបង្ហូរទឹកចូលធុងក្នុងអត្រា 2 m^3/min។ រកអត្រាកំណើននៃកម្ពស់ទឹកនៅពេលជម្រៅទឹកស្មើ 3 m។

៤៩. ជណ្ដើរប្រវែង 10 m ផ្អែកលើជញ្ជាំងឈរត្រង់។ ជើងជណ្ដើរត្រូវបានទាញចេញពីជញ្ជាំងក្នុងល្បឿន 2 m/s។ រកល្បឿនដែលចុងខាងលើនៃជណ្ដើររអិលចុះក្រោម នៅពេលជើងជណ្ដើរនៅចម្ងាយ 6 m ពីជញ្ជាំង។

៥០. កប៉ាល់ A ធ្វើដំណើរទៅទិសខាងលិចក្នុងល្បឿន 20 km/h ហើយកប៉ាល់ B ធ្វើដំណើរទៅទិសខាងជើងក្នុងល្បឿន 15 km/h។ កប៉ាល់ទាំងពីរចេញដំណើរពីចំណុចតែមួយ។ រកអត្រាបម្រែបម្រួលនៃចម្ងាយរវាងកប៉ាល់ទាំងពីរក្រោយពេលចេញដំណើរបាន 2 h។

១ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងការគណនាតម្លៃប្រហែល

១.១ និយមន័យឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ឧបមាថា $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើចន្លោះ I ហើយ $x\in I$។

និយមន័យ ១ : ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

- **ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអថេរឯករាជ្យ** x៖ គឺ $dx=\Delta x$។
- **ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍** y **ត្រង់** x៖ គឺតាងដោយ dy ឬ $df(x)$ ហើយកំណត់ដោយ៖

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x=f'(x)dx$$

១.២ ការគណនាតម្លៃប្រហែលលីនេអ៊ែរ (Linear Approximation)

កាលណា Δx មានតម្លៃកៀកនឹងសូន្យ $(\Delta x\to 0)$ នោះកំណើននៃអនុគមន៍ Δy មានតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលនឹងឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy៖

$$\Delta y\approx dy \iff f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

ជាទូទៅ ១

រូបមន្តតម្លៃប្រហែល៖

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ តាមនិយមន័យដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច x_0 គេមាន៖

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

តាមនិយមន័យលីមីត កាលណា $\Delta x \to 0$ ផលធៀប $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ខុសគ្នាពី $f'(x_0)$ ដោយបរិមាណអនន្តតូច $\alpha(\Delta x)$ មួយពេលគឺ៖

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \quad \text{ដែល} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$$

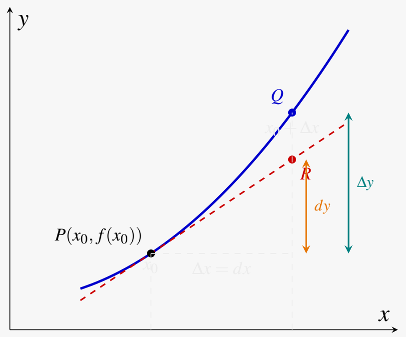
គុណអង្គទាំងពីរនឹង Δx គេបានកំណើននៃអនុគមន៍៖

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

ដោយសារឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $dy = f'(x_0)\Delta x$ នោះ $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$។ នៅពេល Δx មានតម្លៃតូចបំផុតកៀកនឹងសូន្យ $(\Delta x \to 0)$ នោះផលគុណ $\alpha(\Delta x)\Delta x$ ជាអនន្តតូចលំដាប់ខ្ពស់ធៀបនឹង Δx ដែលមានតម្លៃតូចស្ទើរតែស្មើសូន្យ អាចចោលបាន។ នាំឱ្យគេបានតម្លៃប្រហែល $\Delta y \approx dy$៖

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \iff f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad \blacksquare$$

រូបភាពបកស្រាយ៖ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy និងកំណើនពិត Δy



១.៣ កំហុសលម្អៀងធៀប និងភាគរយ (Relative & Percentage Errors)

បើ x ត្រូវបានវាស់វែងដោយមានកំហុសអតិបរមា dx (ឬ Δx) នោះ៖

- **កំហុសដាច់ខាត** (Absolute Error)៖ $|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)dx|$

- **កំហុសធៀប** (Relative Error)៖ $\dfrac{|\Delta y|}{|y|} \approx \dfrac{|dy|}{|y|} = \dfrac{|f'(x)dx|}{|f(x)|}$
- **កំហុសជាភាគរយ** (Percentage Error)៖ $\dfrac{|dy|}{|y|} \times 100\%$

លំហាត់គំរូ ១

ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{26}$ និង $\sqrt[3]{28}$។

ចម្លើយ:

ក. ចំពោះ $\sqrt{26}$៖ តាង $f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$។ ជ្រើសរើស $x_0 = 25$ និង $\Delta x = 1$ $(26 = 25+1)$។ គេបាន $f(25) = \sqrt{25} = 5$ និង $f'(25) = \dfrac{1}{2\sqrt{25}} = \dfrac{1}{10} = 0.1$។ តាមរូបមន្ត៖

$$\sqrt{26} = f(25+1) \approx f(25) + f'(25)\cdot(1) = 5 + 0.1(1) = 5.1$$

ខ. ចំពោះ $\sqrt[3]{28}$៖ តាង $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \implies f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$។ ជ្រើសរើស $x_0 = 27$ និង $\Delta x = 1$ $(28 = 27+1)$។ គេបាន $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$ និង $f'(27) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \dfrac{1}{3\times 9} = \dfrac{1}{27} \approx 0.037$។ តាមរូបមន្ត៖

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27} \approx 3.037$$

២ វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ (Finite Increment Inequality)

ជាទូទៅ ២

បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b) ហើយមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែល $m \le f'(x) \le M$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ នោះ៖

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

ជាពិសេស បើគ្រប់ $x \in (a,b), |f'(x)| \le M$ នោះ $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដោយសារអនុគមន៍ f ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើ (a,b) តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (MVT) មានចំនួនពិត $c \in (a,b)$ មួយដែល៖

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \iff f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

តាមបម្រាប់ $m \le f'(x) \le M$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ ហេតុនេះវិសមភាពនេះក៏ពិតចំពោះ $x = c \in (a,b)$ ដែរ ពេល

គឺៈ

$$m \le f'(c) \le M$$

ដោយសារ $a < b \implies b - a > 0$ គុណអង្គទាំងបីនៃវិសមភាពនឹង $(b-a)$ (សញ្ញាវិសមភាពមិនប្រែប្រួល) គេបានៈ

$$m(b-a) \le f'(c)(b-a) \le M(b-a)$$

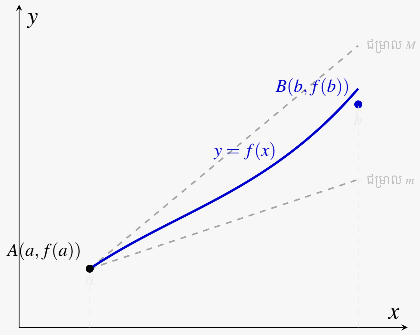
ជំនួស $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$ ចូល គេទាញបានវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ៈ

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

ចំពោះករណីពិសេសៈ បើ $|f'(x)| \le M \iff -M \le f'(x) \le M$ នោះតាមលទ្ធផលខាងលើៈ

$$-M(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a) \iff |f(b) - f(a)| \le M|b-a| \quad \blacksquare$$

រូបភាពបកស្រាយៈ វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ក្នុងតំបន់ព្រំដែនជម្រាល



លំហាត់គំរូ ២

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ គេបាន $\sin x \le x$ និង $\dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$។

ចម្លើយ:

ក. ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t) = \sin t$ លើ $[0,x]$ $(x>0)$។ អនុគមន៍ f ជាប់លើ $[0,x]$ និងមានដេរីវេ $f'(t) = \cos t$។ ដោយ $\cos t \le 1$ គ្រប់ t នោះតាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ៈ

$$f(x) - f(0) \le 1 \cdot (x-0) \iff \sin x - 0 \le x \iff \sin x \le x$$

ខ. ពិនិត្យ $g(t) = \ln(1+t)$ លើ $[0,x]$ $(x>0)$។ ដេរីវេគឺ $g'(t) = \dfrac{1}{1+t}$។ ចំពោះគ្រប់ $t \in [0,x]$ គេបាន $0 \le t \le x \iff 1 \le 1+t \le 1+x \iff \dfrac{1}{1+x} \le g'(t) \le 1$។ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ៈ

$$\frac{1}{1+x}(x-0) \le g(x) - g(0) \le 1(x-0) \iff \frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$$

៣ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច និងពាណិជ្ជកម្ម

ក្នុងការវិភាគសេដ្ឋកិច្ច ដេរីវេត្រូវបានប្រើប្រាស់យ៉ាងទូលំទូលាយដើម្បីគណនាតម្លៃ «ម៉ាជីណាល (Marginal)» ដែលតំណាងឱ្យអត្រាបម្រែបម្រួលនៃថ្លៃដើម ចំណូល ឬប្រាក់ចំណេញ ធៀបនឹងបរិមាណផលិតផល x។

៣.១ ទស្សនទានគ្រឹះនៃពាក្យ «ម៉ាជីណាល (Marginal)»

ក្នុងសេដ្ឋកិច្ចវិទ្យា ពាក្យថា «**ម៉ាជីណាល** (Marginal)» សំដៅលើ «**ការបន្ថែម ១ ឯកតាទៀត**»៖

- ក្នុងជីវិតជាក់ស្តែង បរិមាណផលិតផល x ត្រូវបានផលិតជាចំនួនគត់ ($x \in \mathbb{N}$ ដូចជា $1, 2, 3, \ldots$ គ្រឿង)។
- ប្រសិនបើក្រុមហ៊ុនផលិតបាន x គ្រឿងរួចហើយ ហើយចង់ផលិតបន្ថែម **១ គ្រឿងទៀត (គឺគ្រឿងទី** $x+1$) នោះការប្រែប្រួលថ្លៃដើមពិតប្រាកដគឺ៖

$$\Delta C = C(x+1) - C(x)$$

- តាមរូបមន្តតម្លៃប្រហែលនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែល កាលណា $\Delta x = 1$ (តូចធៀបនឹងផលិតផលសរុបរាប់រយរាប់ពាន់គ្រឿង) គេបាន៖

$$\Delta C \approx dC = C'(x)\Delta x = C'(x) \cdot 1 = C'(x)$$

សេចក្តីសន្និដ្ឋានសំខាន់

តម្លៃដេរីវេ $C'(x_0)$ គឺជាការប៉ាន់ស្មានដ៏ល្អបំផុត និងរហ័សបំផុតនៃថ្លៃដើមក្នុងការផលិតទំនិញ ១ ឯកតាបន្ថែមទៀត (គឺឯកតាទី x_0+1)។ ដូចគ្នាដែរ ចំពោះចំណូលម៉ាជីណាល $R'(x_0)$ និងប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណាល $P'(x_0)$។

៣.២ និយមន័យអនុគមន៍សេដ្ឋកិច្ចគ្រឹះ

- **អនុគមន៍ថ្លៃដើមសរុប** $C(x)$ **(Total Cost)**៖ ជាប្រាក់ចំណាយសរុបដើម្បីផលិតទំនិញចំនួន x ឯកតា។ ជាទូទៅ វាផ្សំឡើងពីពីរផ្នែក៖

$$C(x) = FC + VC(x)$$

ដែល $FC = C(0)$ ជាថ្លៃដើមថេរ (Fixed Cost ដូចជា ថ្លៃជួលទីតាំង ថ្លៃម៉ាស៊ីន) និង $VC(x)$ ជាថ្លៃដើមប្រែប្រួល (Variable Cost ដូចជា ថ្លៃវត្ថុធាតុដើម ពលកម្ម)។

- **អនុគមន៍ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល** $C'(x)$ (Marginal Cost)៖ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃថ្លៃដើមធៀបនឹងបរិមាណផលិតផល x។ តម្លៃ $C'(x_0)$ ជាការប៉ាន់ស្មាននៃថ្លៃដើមផលិតទំនិញឯកតាទី (x_0+1)។

- **អនុគមន៍ថ្លៃដើមមធ្យម** $\overline{C}(x)$ (Average Cost)៖ ជាថ្លៃដើមជាមធ្យមក្នុងមួយឯកតា៖

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

ថ្លៃដើមមធ្យមមានកម្រិតអប្បបរមាត្រង់ចំណុចដែល $C'(x) = \overline{C}(x)$ (ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល ស្មើ ថ្លៃដើមមធ្យម)។

- **អនុគមន៍ចំណូលសរុប** $R(x)$ (Total Revenue)៖ ជាប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់ទំនិញ x ឯកតា៖

$$R(x) = x \cdot p(x)$$

ដែល $p(x)$ ជាថ្លៃលក់ក្នុងមួយឯកតា (ហៅថា អនុគមន៍តម្រូវការ Demand Function)។

- **អនុគមន៍ចំណូលម៉ាជីណាល** $R'(x)$ (Marginal Revenue)៖ ជាការប៉ាន់ស្មានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមដែលទទួលបានពីការលក់ទំនិញឯកតាទី (x_0+1)៖

$$R(x_0+1) - R(x_0) \approx R'(x_0)$$

- **អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ** $P(x)$ (Profit)៖

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

ប្រាក់ចំណេញទទួលបានអតិបរមាកាលណា $P'(x) = 0 \iff R'(x) = C'(x)$ (ចំណូលម៉ាជីណាល ស្មើ ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល) និង $P''(x) < 0$។

៣.៣ ការបកស្រាយលម្អិតលើទ្រឹស្តីសំខាន់ៗ

១. ហេតុអ្វីថ្លៃដើមមធ្យម $\overline{C}(x)$ អប្បបរមាត្រង់ $C'(x) = \overline{C}(x)$?

- **សម្រាយបញ្ជាក់តាមគណិតវិទ្យា៖** តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក គេបាន៖

$$\overline{C}'(x) = \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{C'(x) - \frac{C(x)}{x}}{x} = \frac{C'(x) - \overline{C}(x)}{x}$$

ដើម្បីឱ្យ $\overline{C}(x)$ មានបរមា (អប្បបរមា) គេត្រូវឱ្យ $\overline{C}'(x) = 0$ នាំឱ្យ៖

$$C'(x) - \overline{C}(x) = 0 \iff C'(x) = \overline{C}(x)$$

- **ន័យវិចារណញ្ញាណសេដ្ឋកិច្ច** (Economic Intuition)៖
  - ប្រសិនបើ $C'(x) < \overline{C}(x)$ (ផលិតផលថ្មីចំណាយតិចជាងមធ្យម) $\implies$ ថ្លៃដើមមធ្យមនឹងធ្លាក់ចុះ ($\overline{C}(x)$ ចុះ)។

– ប្រសិនបើ $C'(x) > \overline{C}(x)$ (ផលិតផលថ្មីចំណាយច្រើនជាងមធ្យម) $\Longrightarrow$ ថ្លៃដើមមធ្យមនឹងកើនឡើង ($\overline{C}(x)$ កើន)។
– ដូចនេះ ថ្លៃដើមមធ្យមធ្លាក់ដល់កម្រិតទាបបំផុត (អប្បបរមា) ចំពេលដែល $C'(x) = \overline{C}(x)$។

២. ន័យសេដ្ឋកិច្ចនៃលក្ខខណ្ឌចំណេញអតិបរមា $R'(x) = C'(x)$

- ប្រសិនបើ $R'(x) > C'(x)$ ៖ ការលក់ ១ គ្រឿងទៀតបានចំណូលច្រើនជាងថ្លៃដើមផលិត $\Longrightarrow$ ក្រុមហ៊ុនគួរតែបន្តផលិតបន្ថែមដើម្បីបង្កើនប្រាក់ចំណេញ។
- ប្រសិនបើ $R'(x) < C'(x)$ ៖ ការផលិត ១ គ្រឿងទៀតចំណាយថ្លៃដើមលើសប្រាក់ចំណូល $\Longrightarrow$ គ្រឿងនោះនាំឱ្យខាត ក្រុមហ៊ុនត្រូវកាត់បន្ថយការផលិត។
- ដូចនេះ ប្រាក់ចំណេញកើនឡើងដល់កម្រិតខ្ពស់បំផុត (អតិបរមា) នៅត្រង់ចំណុចតុល្យភាព $R'(x) = C'(x)$។

លំហាត់គំរូ ៣

[ប្រៀបធៀបថ្លៃដើមពិត និងថ្លៃដើមម៉ាជីណាល] ក្រុមហ៊ុនមួយមានអនុគមន៍ថ្លៃដើមសរុប $C(x) = 500 + 10x + 0.05x^2$ (គិតជាដុល្លារ)។

ក. រកអនុគមន៍ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល $C'(x)$។

ខ. បើបច្ចុប្បន្នផលិតបាន $x = 100$ គ្រឿង ចូរប្រើថ្លៃដើមម៉ាជីណាលដើម្បីប៉ាន់ស្មានថ្លៃដើមក្នុងការផលិតគ្រឿងទី 101។

គ. គណនាថ្លៃដើមពិតប្រាកដក្នុងការផលិតគ្រឿងទី 101 រួចប្រៀបធៀបលទ្ធផលទាំងពីរ។

ចម្លើយ:

ក. អនុគមន៍ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល៖ $C'(x) = (500 + 10x + 0.05x^2)' = 10 + 0.1x$។

ខ. ការប៉ាន់ស្មានថ្លៃដើមនៃគ្រឿងទី 101 តាមដេរីវេ (ត្រង់ $x = 100$)៖

$$C'(100) = 10 + 0.1(100) = 10 + 10 = \$20$$

ដូច្នេះ ការផលិតគ្រឿងទី 101 ចំណាយប្រហែល \$20។

គ. ថ្លៃដើមពិតប្រាកដក្នុងការផលិតគ្រឿងទី 101៖

- ថ្លៃដើមផលិត 100 គ្រឿង៖ $C(100) = 500 + 10(100) + 0.05(100)^2 = 500 + 1000 + 500 = \$2000$។
- ថ្លៃដើមផលិត 101 គ្រឿង៖ $C(101) = 500 + 10(101) + 0.05(101)^2 = 500 + 1010 + 510.05 = \$2020.05$។
- ថ្លៃដើមពិតនៃគ្រឿងទី 101 គឺ៖

$$\Delta C = C(101) - C(100) = 2020.05 - 2000 = \$20.05$$

ការប្រៀបធៀប៖ តម្លៃពិតប្រាកដគឺ \$20.05 រីឯតម្លៃប៉ាន់ស្មានតាមដេរីវេគឺ \$20.00 ដោយមានកំហុសខុសគ្នាត្រឹមតែ \$0.05 (០.២៥%) ប៉ុណ្ណោះ។ នេះបង្ហាញថា ថ្លៃដើមម៉ាជីណលផ្តល់នូវការប៉ាន់ស្មានយ៉ាងរហ័ស និងសុក្រឹតខ្ពស់។

លំហាត់គំរូ ៤

[ការរកប្រាក់ចំណេញអតិបរមា] រោងចក្រមួយចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតទំនិញ x គ្រឿងតាមសមីការ $C(x) = 1000 + 20x + 0.1x^2$ (ពាន់រៀល) ហើយលក់ចេញវិញក្នុងតម្លៃមួយគ្រឿង $p(x) = 80 - 0.1x$ (ពាន់រៀល)។

ក. កំណត់អនុគមន៍ចំណូល $R(x)$ និងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$។

ខ. កំណត់បរិមាណទំនិញ x ដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណេញទទួលបានអតិបរមា។

ចម្លើយ:

ក. ចំណូលសរុប៖ $R(x) = x \cdot p(x) = x(80 - 0.1x) = 80x - 0.1x^2$។ ប្រាក់ចំណេញ៖ $P(x) = R(x) - C(x) = (80x - 0.1x^2) - (1000 + 20x + 0.1x^2) = -0.2x^2 + 60x - 1000$។

ខ. ដេរីវេទីមួយនៃប្រាក់ចំណេញ៖ $P'(x) = -0.4x + 60$។ ឱ្យ $P'(x) = 0 \iff -0.4x + 60 = 0 \implies x = \frac{60}{0.4} = 150$ គ្រឿង។ ដេរីវេទីពីរ៖ $P''(x) = -0.4 < 0 \implies$ ប្រាក់ចំណេញទទួលបានអតិបរមាត្រង់ $x = 150$ គ្រឿង។ ប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះគឺ $P(150) = -0.2(150)^2 + 60(150) - 1000 = -4500 + 9000 - 1000 = 3500$ ពាន់រៀល (៣.៥ លានរៀល)។

៤ អាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង និងចំណុចឆ្លុះ

៤.១ អាស៊ីមតូតឈរ អាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

- **អាស៊ីមតូតឈរ** (Vertical Asymptote)៖ បន្ទាត់ $x = x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $y = f(x)$ កាលណា $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ឬ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$។
- **អាស៊ីមតូតដេក** (Horizontal Asymptote)៖ បន្ទាត់ $y = y_0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y = f(x)$ កាលណា $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$។
- **អាស៊ីមតូតទ្រេត** (Oblique / Slant Asymptote)៖ បន្ទាត់ $(d): y = ax+b$ $(a \neq 0)$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $y = f(x)$ កាលណា $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$។

៤.២ ផ្ចិតឆ្លុះ និងអ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង

ជាទូទៅ ៣

- **ផ្ចិតឆ្លុះ**៖ ចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប $(C): y = f(x)$ លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $2a-x \in D$ និង៖

$$f(2a-x)+f(x) = 2b$$

(ចំពោះអនុគមន៍សនិទាន $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ផ្ចិតឆ្លុះជាចំណុចប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $I\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$)។

- **អ័ក្សឆ្លុះ**៖ បន្ទាត់ $\Delta: x = a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប $(C): y = f(x)$ លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $2a-x \in D$ និង៖

$$f(2a-x) = f(x)$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

- **១. ចំពោះផ្ចិតឆ្លុះ** $I(a,b)$៖ យកចំណុច $M(x,y) \in (C) \iff y = f(x)$។ តាង $M'(x',y')$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃ M ធៀបនឹងផ្ចិត $I(a,b)$។ នោះ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[MM']$៖

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = a \\ \dfrac{y+y'}{2} = b \end{cases} \iff \begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = 2b-y \end{cases}$$

ចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) លុះត្រាតែគ្រប់ $M(x,y)\in(C)$ នាំឱ្យចំណុចឆ្លុះ $M'(x',y')\in(C)$ ដែរ៖

$$y'=f(x') \iff 2b-y=f(2a-x) \iff 2b-f(x)=f(2a-x)$$

$$\iff f(2a-x)+f(x)=2b \quad \text{គ្រប់ } x\in D$$

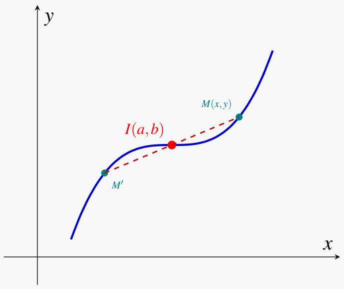
- **២. ចំពោះអ័ក្សឆ្លុះ** $\Delta: x=a$៖ យកចំណុច $M(x,y)\in(C) \iff y=f(x)$។ តាង $M'(x',y')$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃ M ធៀបនឹងបន្ទាត់ឈរ $x=a$។ ដោយបន្ទាត់ឆ្លុះឈរ កូអរដោនេ y មិនប្រែប្រួល $(y'=y)$ ហើយអាប់ស៊ីស a ជាចំណុចកណ្ដាលរវាង x និង x'៖

$$\frac{x+x'}{2}=a \implies x'=2a-x \quad \text{និង} \quad y'=y$$

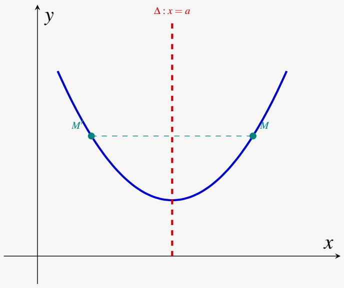
បន្ទាត់ $x=a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃ (C) លុះត្រាតែគ្រប់ $M(x,y)\in(C)$ នាំឱ្យ $M'(x',y')\in(C)$ ដែរ៖

$$y'=f(x') \iff y=f(2a-x) \iff f(2a-x)=f(x) \quad \text{គ្រប់ } x\in D \quad \blacksquare$$

ផ្ចិតឆ្លុះ $I(a,b)$ $(IM=IM')$



អ័ក្សឆ្លុះ $x=a$



៥ វិធីសាស្ត្រទូទៅនៃការសិក្សា និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ដើម្បីសិក្សា និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍មួយ គេអនុវត្តតាម ៤ ជំហានជាប្រព័ន្ធ៖

១. **ដែនកំណត់៖** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍។

២. **ទិសដៅអថេរភាព៖** - គណនាដេរីវេទីមួយ $f'(x)$ រួចរកឫស $f'(x)=0$។ - សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចសន្និដ្ឋានពីចន្លោះកើន ចុះ និងចំណុចបរមាធៀប។ - គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត (ឈរ, ដេក, ទ្រេត)។ - រៀបចំ **តារាងអថេរភាព** ឱ្យបានច្បាស់លាស់។

៣. **ចំណុចពិសេស និងចំណុចរបត់៖** - រកចំណុចប្រសព្វជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ $(Ox: y=0,\ Oy: x=0)$។ - រកដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ រកចំណុចរបត់ និងផ្ចិតឆ្លុះ (បើមាន)។

៤. **សង់ក្រាប៖** គូសប្រព័ន្ធអ័ក្សកូអរដោនេ ដៅចំណុចបរមា ចំណុចរបត់ គូសបន្ទាត់អាស៊ីមតូត រួចគូសខ្សែកោងឱ្យរលូន។

លំហាត់គំរូ ៥

[ការសិក្សាអនុគមន៍សនិទាន] សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$។

ចម្លើយ:

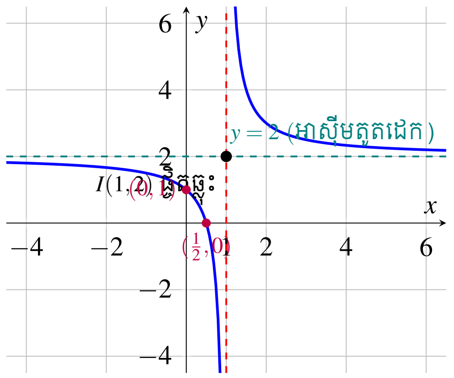
① **ដែនកំណត់៖** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$។

② **ទិសដៅអថេរភាព៖** - ដេរីវេ៖ $f'(x)=\dfrac{2(x-1)-1(2x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0$ គ្រប់ $x\neq 1$។ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $(-\infty,1)$ និង $(1,+\infty)$។ អនុគមន៍គ្មានបរមាធៀបឡើយ។ - លីមីត និងអាស៊ីមតូត៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x}=2 \implies y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \implies x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។ - តារាងអថេរភាព៖

x	$-\infty$ $\quad$ 1	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$

③ **ចំណុចប្រសព្វ និងផ្ចិតឆ្លុះ៖** - ប្រសព្វអ័ក្ស Oy $(x=0)$៖ $y=f(0)=\dfrac{-1}{-1}=1 \implies (0,1)$។ - ប្រសព្វអ័ក្ស Ox $(y=0)$៖ $2x-1=0 \implies x=\dfrac{1}{2} \implies \left(\dfrac{1}{2},0\right)$។ - ផ្ចិតឆ្លុះ៖ ជាចំណុចប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $I(1,2)$។

ក្រាបអនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ និងអាស៊ីមតូត



វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀត និងការសិក្សាអនុគមន៍ (៥០ លំហាត់)

១. រូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ៖

ក. $dy = f'(x)dx$ ខ. $dy = f(x)dx$
គ. $dy = f'(x)\Delta y$ ឃ. $dy = \Delta x$

២. បើ $y = x^3$ នោះ dy ស្មើ៖

ក. $3x^2$ ខ. $3x^2dx$ គ. x^3dx ឃ. dx

៣. ក្នុងឌីផេរ៉ង់ស្យែល កំណើន Δx ស្មើនឹង៖

ក. Δy ខ. dy គ. dx ឃ. 0

៤. រូបមន្តតម្លៃប្រហែលលីនេអ៊ែរ $f(x_0 + \Delta x) \approx$ ៖

ក. $f(x_0) \cdot f'(x_0)$ ខ. $f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$
គ. $f'(x_0)\Delta x$ ឃ. $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

៥. តម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{26}$ (យក $x_0 = 25, \Delta x = 1$) គឺ៖

ក. 5.1 ខ. 5.01 គ. 5.05 ឃ. 5.2

៦. តម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{28}$ (យក $x_0 = 27, \Delta x = 1$) គឺ៖

ក. 3.1 ខ. 3.037 គ. 3.01 ឃ. 3.05

៧. កំហុសលម្អៀងធៀប (Relative error) នៃ y គឺ៖

ក. dy ខ. $dy \cdot y$
គ. $\dfrac{dy}{y}$ ឃ. $\dfrac{y}{dy}$

៨. កំហុសលម្អៀងជាភាគរយនៃ y គឺ៖

ក. $dy \times 100\%$ ខ. dy
គ. $\dfrac{y}{dy} \times 100\%$ ឃ. $\dfrac{dy}{y} \times 100\%$

៩. បើ $y = \sin x$ នោះ dy ស្មើ៖

ក. $\cos x dx$ ខ. $-\cos x dx$ គ. $\sin x dx$ ឃ. dx

១០. បើ $y = \cos x$ នោះ dy ស្មើ៖

ក. $\sin x dx$ ខ. $-\sin x dx$ គ. $-\cos x dx$ ឃ. $\cos x dx$

១១. បើ $y = e^{2x}$ នោះ dy ស្មើ៖

ក. $e^{2x}dx$ ខ. $2xe^{2x}dx$ គ. $2e^{2x}dx$ ឃ. $4e^{2x}dx$

១២. បើ $y = \ln x$ នោះ dy ស្មើ៖

ក. xdx　　ខ. $\frac{1}{x^2}dx$

គ. $e^x dx$　　ឃ. $\frac{1}{x}dx$

១៣. បើ $m \le f'(x) \le M$ គ្រប់ $x \in [a,b]$ នោះ៖

ក. $m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$　　ខ. $m \le f(b)-f(a) \le M$

គ. $f(b)-f(a) = M-m$　　ឃ. $f(b) \le f(a)$

១៤. ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ គេបានវិសមភាព៖

ក. $\sin x \ge x$　　ខ. $\sin x \le x$　　គ. $\cos x \ge 1$　　ឃ. $\tan x \le x$

១៥. វិសមភាព $|\sin x| \le |x|$ ពិតចំពោះ៖

ក. $x \ge 0$ ប៉ុណ្ណោះ　　ខ. $x \le 0$ ប៉ុណ្ណោះ

គ. គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$　　ឃ. $x = 0$ មួយគត់

១៦. វិសមភាព $e^x \ge 1+x$ ពិតចំពោះ៖

ក. $x > 0$ ប៉ុណ្ណោះ　　ខ. $x < 0$ ប៉ុណ្ណោះ

គ. គ្មាន x ណាពិត　　ឃ. គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

១៧. អនុគមន៍ថ្លៃដើមម៉ាជីណលគឺ៖

ក. $C'(x)$　　ខ. $C(x)$

គ. $\frac{C(x)}{x}$　　ឃ. $C''(x)$

១៨. អនុគមន៍ថ្លៃដើមមធ្យម $\overline{C}(x)$ កំណត់ដោយ៖

ក. $C'(x)$　　ខ. $\frac{C(x)}{x}$

គ. $C(x)\cdot x$　　ឃ. $\frac{x}{C(x)}$

១៩. ថ្លៃដើមមធ្យមអប្បបរមាកើតឡើងត្រង់ចំណុចដែល៖

ក. $C'(x) = 0$　　ខ. $C(x) = 0$

គ. $C'(x) = \overline{C}(x)$　　ឃ. $\overline{C}(x) = 0$

២០. អនុគមន៍ចំណូលម៉ាជីណលគឺ៖

ក. $R(x)$　　ខ. $\frac{R(x)}{x}$

គ. $P'(x)$　　ឃ. $R'(x)$

២១. អនុគមន៍ចំណូលសរុប $R(x)$ ស្មើ៖

ក. $x \cdot p(x)$　　ខ. $\frac{p(x)}{x}$

គ. $p'(x)$　　ឃ. $C(x)+P(x)$

២២. អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$ ស្មើ៖

ក. $C(x)-R(x)$ ខ. $R(x)-C(x)$ គ. $R(x)+C(x)$ ឃ. $R'(x)-C'(x)$

២៣. ប្រាក់ចំណេញទទួលបានអតិបរមាកាលណា៖

ក. $R(x)=C(x)$ ខ. $R'(x)=0$ គ. $R'(x)=C'(x)$ ឃ. $C'(x)=0$

២៤. ចំណុចរួចខ្លួន (Break-even Point) កើតឡើងពេល៖

ក. $R'(x)=C'(x)$ ខ. $P(x)>0$ គ. $C(x)=0$ ឃ. $R(x)=C(x)$

២៥. ថ្លៃដើមនៃការផលិតទំនិញគ្រឿងទី $(n+1)$ ប៉ាន់ស្មានដោយ៖

ក. $C'(n)$ ខ. $C(n+1)$ គ. $C(n)$ ឃ. $\overline{C}(n)$

២៦. បន្ទាត់ $x=x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $y=f(x)$ កាលណា៖

ក. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=x_0$ ខ. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

គ. $f(x_0)=0$ ឃ. $f'(x_0)=0$

២៧. ក្រាបនៃ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ មានអាស៊ីមតូតឈរគឺ៖

ក. $x=-3$ ខ. $y=2$ គ. $x=3$ ឃ. $y=3$

២៨. បន្ទាត់ $y=y_0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y=f(x)$ កាលណា៖

ក. $\lim_{x\to y_0} f(x)=\pm\infty$ ខ. $f(0)=y_0$

គ. $f'(y_0)=0$ ឃ. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=y_0$

២៩. ក្រាបនៃ $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ មានអាស៊ីមតូតដេកគឺ៖

ក. $y=\dfrac{3}{2}$ ខ. $y=3$

គ. $x=-\dfrac{1}{2}$ ឃ. $y=-5$

៣០. បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $y=f(x)$ កាលណា៖

ក. $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{ax+b}=0$ ខ. $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

គ. $f(x)=ax+b$ ឃ. $f'(x)=a$

៣១. ក្រាបនៃ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}=x+3+\dfrac{2}{x-1}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ៖

ក. $y=x-1$ ខ. $y=2x$ គ. $y=x+3$ ឃ. $y=x$

៣២. អនុគមន៍សនិទាន $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា៖

ក. ដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ ខ. ដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ ចំនួន ១

គ. ដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ ឃ. ដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ ចំនួន ២

៣៣. ចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប $y=f(x)$ លុះត្រាតែ៖

ក. $f(2a-x)+f(x)=2b$ ខ. $f(2a-x)=f(x)$
គ. $f(a-x)=f(a+x)$ ឃ. $f(x)=-f(-x)$

៣៤. ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ជាចំណុចប្រសព្វនៃ៖

ក. អ័ក្សកូអរដោនេ ខ. អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេក
គ. បន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ណរម៉ាល់ ឃ. ចំណុចបរមាទាំងពីរ

៣៥. បន្ទាត់ $x=a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប $y=f(x)$ លុះត្រាតែ៖

ក. $f(2a-x)+f(x)=0$ ខ. $f(a)=0$ គ. $f'(a)=1$ ឃ. $f(2a-x)=f(x)$

៣៦. អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ គឺ៖

ក. $x=-\dfrac{b}{2a}$ ខ. $x=\dfrac{b}{2a}$
គ. $y=-\dfrac{\Delta}{4a}$ ឃ. $x=-\dfrac{b}{a}$

៣៧. ក្រាបនៃ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស Ox ត្រង់ចំណុច៖

ក. $(0,-1)$ ខ. $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$
គ. $(-1,0)$ ឃ. $(2,0)$

៣៨. ក្រាបនៃ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ កាត់អ័ក្សអរដោនេ Oy ត្រង់ចំណុច៖

ក. $(0,-1)$ ខ. $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$
គ. $(0,1)$ ឃ. $(0,2)$

៣៩. ដេរីវេនៃ $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ គឺ $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0$ នាំឱ្យ៖

ក. អនុគមន៍ចុះលើគ្រប់ចន្លោះ ខ. អនុគមន៍មានបរមា
គ. អនុគមន៍កើនលើ $(-\infty,-2)$ និង $(-2,+\infty)$ ឃ. អនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$

៤០. ដេរីវេនៃ $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ គឺ $y'=\dfrac{-5}{(x-1)^2}<0$ នាំឱ្យ៖

ក. អនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,1)$ និង $(1,+\infty)$ ខ. អនុគមន៍កើនលើគ្រប់ចន្លោះ
គ. អនុគមន៍មានអតិបរមា ឃ. អនុគមន៍ថេរ

៤១. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$៖

ក. គ្មានចំណុចបរមាធៀបឡើយ ខ. មានអតិបរមាមួយ គ. មានអប្បបរមាមួយ ឃ. មានបរមាពីរ

៤២. ចំពោះ $C(x)=100+5x+0.1x^2$ ថ្លៃដើមម៉ាជីណលត្រង់ $x=50$ គឺ៖

ក. 10 ខ. 15 គ. 20 ឃ. 5

៤៣. បើកាំរង្វង់ r មានកំហុស 1% នោះកំហុសនៃផ្ទៃក្រឡារង្វង់គឺប្រហែល៖

ក. 1% ខ. 2% គ. 3% ឃ. 4%

៤៤. បើកាំស្វ៊ែរ r មានកំហុស 1% នោះកំហុសនៃមាឌស្វ៊ែរគឺប្រហែល៖

ក. 3% ខ. 1% គ. 2% ឃ. 4%

៤៥. អាស៊ីមតូតដេកនៃ $y=\dfrac{5}{x^2+1}$ គឺ៖

ក. $y=0$ ខ. $y=5$ គ. $x=0$ ឃ. គ្មានអាស៊ីមតូត

៤៦. អាស៊ីមតូតឈរនៃ $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ គឺ៖

ក. $x=1$ និង $x=-1$ ខ. $x=2$ និង $x=-2$ គ. $y=1$ ឃ. $x=4$

៤៧. ក្រាបនៃ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ត្រង់ $x=2$៖

ក. មានប្រហោងដាច់ (Removable Discontinuity) ខ. មានអាស៊ីមតូតឈរ

គ. មានអតិបរមា ឃ. មានចំណុចរបត់

៤៨. ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ គឺចំណុច៖

ក. $I(-1,2)$ ខ. $I(1,2)$ គ. $I(2,1)$ ឃ. $I(1,-3)$

៤៩. អនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ មានចំណុចបរមាធៀបគឺ៖

ក. អតិបរមា $(-1,-2)$ និងអប្បបរមា $(1,2)$ ខ. អតិបរមា $(1,2)$ និងអប្បបរមា $(-1,-2)$

គ. គ្មានបរមា ឃ. មានតែអប្បបរមា $(0,0)$

៥០. អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ គឺ៖

ក. $y=x+1$ ខ. $y=2x$ គ. $y=x$ ឃ. $y=1$

លំហាត់អនុវត្តស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប (៥០ លំហាត់)

១. រកឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy នៃអនុគមន៍ $y = 3x^3 - 5x^2 + 2$។

២. រកឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy នៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{4x^2 + 9}$។

៣. រកឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy នៃអនុគមន៍ $y = x^2 \sin(3x)$។

៤. រក $dy, \Delta y$ និងកំហុសប្រហែល $|dy - \Delta y|$ ចំពោះ $y = x^2 + 2x$ នៅពេល $x = 2$ និង $\Delta x = 0.1$។

៥. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{37}$។

៦. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{65}$។

៧. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{26}$។

៨. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{126}$។

៩. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{48.8}$។

១០. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sin(31°)$ ដោយដឹងថា $1° \approx 0.0175$ rad។

១១. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\tan(44°)$។

១២. ជ្រុងនៃការ៉េមួយត្រូវបានវាស់ឃើញប្រវែង 10 cm ដោយមានកំហុសអតិបរមា 0.05 cm។ គណនាកំហុសដាច់ខាត និងកំហុសជាភាគរយក្នុងការគណនាផ្ទៃក្រឡាការ៉េនោះ។

១៣. កាំនៃស្វ៊ែរមួយត្រូវបានវាស់ឃើញ $r = 6$ cm ដោយមានកំហុសរង្វាស់អតិបរមា 0.02 cm។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានកំហុសជាភាគរយក្នុងការគណនាមាឌស្វ៊ែរ។

១៤. បាឡុងស្វ៊ែរមួយរីកមាឌពេលត្រូវកម្ដៅថ្ងៃ ដែលកាំរបស់វាប្រែប្រួលពី 2 m ទៅ 2.1 m។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលគណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាឡុង។

១៥. បន្ទះដែកស្តើងរាងជារង្វង់កាំ $r = 20\ \text{cm}$។ ពេលត្រូវកម្តៅ កាំរីករវែងថែម $0.08\ \text{cm}$។ គណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនផ្ទៃក្រឡាបន្ទះដែក។

១៦. អនុវត្តវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ចំពោះ $f(x) = \sqrt{x+2}$ លើចន្លោះ $[-1,2]$ ដើម្បីរកតម្លៃអមនៃ $f(2) - f(-1)$។

១៧. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $a,b \in \mathbb{R}$ គេបាន $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$ ។

១៨. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $a,b \in \mathbb{R}$ គេបាន $|\cos b - \cos a| \leq |b-a|$ ។

១៩. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x>0$ គេបាន $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$។

២០. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x>0$ គេបាន $e^x \ge 1+x$។

២១. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \tan x$ លើ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{4}$ គេបាន $b - a \leq \tan b - \tan a \leq 2(b-a)$។

២២. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ គេបាន $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$។

២៣. គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $[1,4]$ ដោយ $2 \leq f'(x) \leq 5$ និង $f(1) = 3$។ រកតម្លៃអមនៃ $f(4)$។

២៤. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x > 0$ គេបាន $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$។

២៥. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ចូររកតម្លៃអមនៃ $\sqrt{101}$។

២៦. ក្រុមហ៊ុនមួយមានអនុគមន៍ថ្លៃដើមសរុប $C(x) = 500 + 15x + 0.05x^2$ (ពាន់រៀល)។ រកថ្លៃដើមម៉ាជីណាលនៅពេលផលិតផល $x = 100$ គ្រឿង និងប៉ាន់ស្មានថ្លៃដើមនៃផលិតផលគ្រឿងទី 101។

២៧. រោងចក្រមួយមានអនុគមន៍ថ្លៃដើម $C(x) = 2400 + 28x + 0.02x^2$។ គណនាថ្លៃដើមមធ្យម $\overline{C}(x)$ និងរកបរិមាណផលិតផល x ដែលធ្វើឱ្យថ្លៃដើមមធ្យមមានកម្រិតអប្បបរមា។

២៨. សហគ្រាសមួយផលិតទំនិញ x គ្រឿងដោយមានចំណាយ $C(x) = 1080 + 42x + 0.3x^2$។ កំណត់បរិមាណ x ដើម្បីឱ្យថ្លៃដើមមធ្យមអប្បបរមា។

២៩. ក្រុមហ៊ុនមួយមានអនុគមន៍ចំណូលសរុប $R(x)=20x-\frac{x^2}{30}$ ម៉ឺនរៀល $(0\le x\le 600)$។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានកំណើនចំណូលកាលណា x កើនពី 150 ទៅ 160 គ្រឿង។

៣០. ក្រុមហ៊ុនមួយមានថ្លៃដើម $C(x)=x^2+20x+1050$ និងចំណូល $R(x)=140x-0.5x^2$ (ពាន់រៀល)។ កំណត់បរិមាណ x ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា។

៣១. អនុគមន៍តម្រូវការនៃផលិតផលមួយគឺ $p = 100 - 0.2x$។ សរសេរអនុគមន៍ចំណូល $R(x)$ និងចំណូលម៉ាជីណាល $R'(x)$។ រកបរិមាណ x ដែលធ្វើឱ្យចំណូលសរុបអតិបរមា។

៣២. ក្រុមហ៊ុនបោះពុម្ពសៀវភៅមួយមានថ្លៃដើម $C(x) = 0.0001x^2 + x + 465$ និងថ្លៃលក់ក្នុងមួយក្បាល $p = 4 - 0.0002x$ (ពាន់រៀល)។ គណនាប្រាក់ចំណេញអតិបរមា និងបរិមាណសៀវភៅដែលត្រូវបោះពុម្ព។

៣៣. សហគ្រាសមួយផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដោយមានថ្លៃដើម $C(x)=480+26x-0.1x^2$។ រកថ្លៃដើមម៉ាជីណលកាលណា $x=30,50,70$។

៣៤. រោងចក្រមួយមានអនុគមន៍ចំណេញ $P(x)=-0.5x^2+40x-300$។ កំណត់ចំណុចរួចខ្លួន (Break-even points) នៃរោងចក្រនោះ។

៣៥. ក្រុមហ៊ុនផលិតទឹកផ្លែឈើមានថ្លៃដើមថេរ (Fixed cost) ស្មើ 5000 ដុល្លារ និងថ្លៃដើមប្រែប្រួល 3 ដុល្លារក្នុងមួយដប។ តម្លៃលក់ក្នុងមួយដបគឺ $p = 8 - 0.001x$។ រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមា។

៣៦. អនុគមន៍តម្រូវការគឺ $x = 1000 - 50p$។ កំណត់អនុគមន៍ចំណូលជាកន្សោមនៃ p រួចរកថ្លៃលក់ p ដែលធ្វើឱ្យចំណូលអតិបរមា។

មេរៀនទី ៣ អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀត និងការសិក្សាអនុគមន៍

៣៧. កំណត់បរិមាណផលិតផល x ដែលធ្វើឱ្យប្រាក់ចំណូលម៉ាជីណាលស្មើនឹងសូន្យ ចំពោះ $R(x) = 500x - 2x^2$។

៣៨. ចំពោះ $C(x) = 200 + 4x + 0.01x^2$ រកថ្លៃដើមពិតប្រាកដនៃការផលិតគ្រឿងទី 51 ហើយប្រៀបធៀបជាមួយតម្លៃប៉ាន់ស្មានតាមដេរីវេ $C'(50)$។

៣៩. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x+4}$។

៤០. រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$។

៤១. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x + 1}$ ។

៤២. រកកូអរដោនេផ្ចិតឆ្លុះ I នៃក្រាប $y = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$ ។

៤៣. បង្ហាញថាចំណុច $I(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$។

៤៤. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $x=2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប $f(x)=x^2-4x+5$។

៤៥. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ (ស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប)។

៤៦. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (ស្តង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប)។

៤៧. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ (ស្គង់ជាប្រឡងបាក់ឌុប)។

៤៨. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$ (ស្គង់ជាប្រឡងបាក់ឌុប)។

៤៩. កំណត់តម្លៃ a,b,c ដើម្បីឱ្យក្រាប $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$ មានអាសីមតូតទ្រេត $y=2x+1$ និងកាត់អ័ក្ស Oy ត្រង់ $(0,-3)$។

៥០. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-1}{x-1}$ (ស្ដង់ដាប្រឡងបាក់ឌុប)។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ១ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. ចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ក	ខ	គ	ខ	ក	ខ	គ	ខ	ក	គ
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ខ	ខ	ខ	គ	ក	ក	គ	ខ	ក	គ
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ខ	ក	គ	ខ	គ	ខ	ខ	ក	ខ	គ
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ក	ខ	ក	ខ	ក	ក	គ	ក	ខ	គ
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ខ	ក	ខ	ខ	ក	ខ	គ	ខ	ខ	ខ

ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១ ៖

គេមាន $f(1)=0$។ តាមនិយមន័យដេរីវេត្រង់ $x_0=1$ ៖

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

ដូចនេះ $f'(1)=1$។

លំហាត់ទី ២ ៖

គេមាន $f(-1)=1$។ តាមនិយមន័យដេរីវេត្រង់ $x_0=-1$ ៖

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x-1)=1$$

ដូចនេះ $f'(-1)=1$។

លំហាត់ទី ៣ ៖ គេមាន $f(2)=\dfrac{2(2)-3}{2+1}=\dfrac{1}{3}$។
តាមនិយមន័យដេរីវេត្រង់ $x_0=2$ ៖

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x-3}{x+1}-\frac{1}{3}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{3(2x-3)-(x+1)}{3(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{3(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{5}{3(x+1)}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(2)=\dfrac{5}{9}$។

លំហាត់ទី ៤ ៖ គេមាន $f(4)=\sqrt{3(4)+4}=4$។
តាមនិយមន័យដេរីវេត្រង់ $x_0=4$ ៖

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4} \\ &= \lim_{x\to 4}\frac{3x+4-16}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+4)} \\ &= \lim_{x\to 4}\frac{3(x-4)}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+4)} \\ &= \frac{3}{4+4}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(4)=\dfrac{3}{8}$។

លំហាត់ទី ៥ ៖ គេមាន $f(1)=1$។
តាមនិយមន័យដេរីវេត្រង់ $x_0=1$ ៖

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{\sqrt{x}(x-1)(1+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$។

លំហាត់ទី ៦ ៖ គេមាន $f(3)=0$។ គណនាដេរីវេឆ្វេង និង ដេរីវេស្តាំ ៖

- $f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=1$
- $f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$

ដោយ $f'_+(3)\neq f'_-(3)$ នាំឱ្យ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x_0=3$។

លំហាត់ទី ៧ ៖ គេមាន $f(1)=1^2+1=2$។

- $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x^2+1)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$
- $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}2=2$

ដោយ $f'_+(1)=f'_-(1)=2$ នោះ f មានដេរីវេត្រង់ $x_0=1$ ហើយ $f'(1)=2$។

លំហាត់ទី ៨ ៖ ដើម្បីឱ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x=2$ ៖
- ភាពជាប់ត្រង់ $x=2$ ៖ $2a+b=2^2-3=1 \implies 2a+b=1$
- ភាពមានដេរីវេត្រង់ $x=2$ ៖ $f'_-(2)=a$ និង $f'_+(2)=2(2)=4 \implies a=4$
នាំឱ្យ $b=1-2(4)=-7$។
ដូចនេះ $a=4,\ b=-7$។

លំហាត់ទី ៩ ៖ គេមាន $f(0)=0$។ ពិនិត្យផលធៀបកំណើន ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}|x|=0\end{aligned}$$

ដោយលីមីតកំណត់ស្មើ 0 នាំឱ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ និង $f'(0)=0$។

លំហាត់ទី ១០ ៖ គេមាន $f(0)=0$។ ពិនិត្យផលធៀបកំណើន ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^{2/3}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{1/3}}=\infty\end{aligned}$$

ដោយលីមីតអនន្ត នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ (ក្រាបមានបន្ទាត់ប៉ះឈរ)។

លំហាត់ទី ១១ ៖ គណនាដេរីវេ ៖
a) $f'(x)=4(5x^4)-7(3x^2)+2=20x^4-21x^2+2$
b) $g'(x)=\dfrac{4x^3}{4}-\dfrac{2(3x^2)}{3}+2x=x^3-2x^2+2x$

លំហាត់ទី ១២ ៖ អនុវត្តរូបមន្ត $(uv)' = u'v + uv'$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x-2)(4x^3-5x) \\ &\quad + (3x^2-2x+1)(12x^2-5) \\ &= 24x^4 - 30x^2 - 8x^3 + 10x \\ &\quad + 36x^4 - 15x^2 - 24x^3 \\ &\quad + 10x + 12x^2 - 5 \\ &= 60x^4 - 32x^3 - 33x^2 + 20x - 5 \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១៣ ៖ អនុវត្តរូបមន្តផលចែក ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-3)(x^2+4)-(2x^2-3x+1)(2x)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{4x^3+16x-3x^2-12}{(x^2+4)^2} \\ &\quad - \frac{4x^3-6x^2+2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{3x^2+14x-12}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១៤ ៖ អនុវត្តរូបមន្តផលចែក ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)-(x^3+1)(1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3-3x^2-x^3-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3-3x^2-1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១៥ ៖ អនុវត្ត $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6(5x^3-2x+1)^5 \cdot (15x^2-2) \\ &= 6(15x^2-2)(5x^3-2x+1)^5 \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១៦ ៖ អនុវត្ត $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ៖

$$f'(x) = \frac{4x^3+6x}{2\sqrt{x^4+3x^2+7}} = \frac{2x^3+3x}{\sqrt{x^4+3x^2+7}}$$

លំហាត់ទី ១៧ ៖ គេមាន $f(x) = (2x^2-1)^{2/3}$។

$$f'(x) = \frac{2}{3}(2x^2-1)^{-1/3}(4x) = \frac{8x}{3\sqrt[3]{2x^2-1}}$$

លំហាត់ទី ១៨ ៖ អនុវត្តរូបមន្តផលគុណ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{2x+3} + x^2\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{2x(2x+3)+x^2}{\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{5x^2+6x}{\sqrt{2x+3}} \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១៩ ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos(4x) - (-3\sin(3x)) \\ &\quad + 2(1+\tan^2(2x)) \\ &= 4\cos(4x) + 3\sin(3x) + \frac{2}{\cos^2(2x)} \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២០ ៖ គណនាដេរីវេនៃផលគុណ និងផលបូក ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x\sin x + x^2\cos x) \\ &\quad + (2\cos x - 2x\sin x) - 2\cos x \\ &= x^2\cos x \end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២១ ៖ អនុវត្តរូបមន្តផលចែក ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x+\sin x)^2-(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{(1+2\sin x\cos x)+(1-2\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{2}{(\sin x+\cos x)^2} \end{aligned}$$

លំហាត់ ទី ២២ ៖ គណនា ដេរីវេ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖

a) $f'(x) = (3x^2-4x+1)'e^{3x^2-4x+1} = (6x-4)e^{3x^2-4x+1}$

b) $g'(x) = 3x^2e^{-2x} + x^3(-2e^{-2x}) = x^2(3-2x)e^{-2x}$

លំហាត់ទី ២៣ ៖ គណនាដេរីវេអនុគមន៍លោការីត ៖

a) $f'(x)=\dfrac{(x^2+5x+6)'}{x^2+5x+6}=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$ នាំឱ្យ ៖

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right]=\frac{-1}{1-x^2}=\frac{1}{x^2-1}$$

លំហាត់ទី ២៤ ៖ គណនាដេរីវេ ៖

a) $f'(x)=(\sin x)'2^{\sin x}\ln 2=\cos x\cdot 2^{\sin x}\ln 2$

b) $g'(x)=\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 3}=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

លំហាត់ទី ២៥ ៖ គណនាដេរីវេអនុគមន៍ច្រាស ៖

a) $f'(x)=\dfrac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $g'(x)=\dfrac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}=\dfrac{2x}{1+x^4}$

លំហាត់ទី ២៦ ៖ គេមាន $y=x^3-3x^2+4$។
ត្រង់ $x_0=1\implies y_0=1-3+4=2$។
$y'=3x^2-6x\implies y'(1)=3(1)^2-6(1)=-3$។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T):y-2=-3(x-1)\implies y=-3x+5$
- សមីការបន្ទាត់ណរម៉ាល់ $(N):y-2=\frac{1}{3}(x-1)\implies y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

លំហាត់ទី ២៧ ៖ ក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសពេល $y=0$ ៖
$\dfrac{2x-1}{x+2}=0\implies 2x-1=0\iff x=\dfrac{1}{2}$។
ចំណុចប៉ះគឺ $M\left(\dfrac{1}{2},0\right)$។
គណនាដេរីវេ ៖ $y'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$។
មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $y'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{(5/2)^2}=\dfrac{4}{5}$។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$y-0=\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\implies y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}$$

លំហាត់ទី ២៨ ៖ បន្ទាត់ $(d):9x-y+2=0\iff y=9x+2$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=9$។
បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹង (d) លុះត្រាតែ $y'=9$ ៖
$3x^2-3=9\iff 3x^2=12\iff x=\pm 2$។

- បើ $x=2\implies y=2^3-3(2)+5=7\implies A(2,7)$
- បើ $x=-2\implies y=(-2)^3-3(-2)+5=3\implies B(-2,3)$

ដូចនេះចំណុចទាំងពីរគឺ $(2,7)$ និង $(-2,3)$។

លំហាត់ទី ២៩ ៖ បន្ទាត់ $(d):3x-y+1=0\iff y=3x+1$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m_d=3$។
បន្ទាត់ប៉ះកែងនឹង (d) នាំឱ្យមានមេគុណប្រាប់ទិស $m=-\dfrac{1}{3}$ ៖
$y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}=-\frac{1}{3}\iff (x-1)^2=9\iff x-1=\pm 3$។

- $x=4\implies y=2$ ៖ $y-2=-\frac{1}{3}(x-4)\implies y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$
- $x=-2\implies y=0$ ៖ $y-0=-\frac{1}{3}(x+2)\implies y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

លំហាត់ទី ៣០ ៖ បន្ទាត់ប៉ះដេកកាលណា $y'=0$ ៖
$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0\iff x=0,\ x=1,\ x=-1$។

- $x=0\implies y=3\implies A(0,3)$
- $x=1\implies y=1-2+3=2\implies B(1,2)$
- $x=-1\implies y=1-2+3=2\implies C(-1,2)$

ដូចនេះចំណុចទាំងនោះគឺ $(0,3)$, $(1,2)$, $(-1,2)$។

លំហាត់ទី ៣១ ៖ តាង $M(x_0,x_0^2-4x_0+3)$ ជាចំណុចប៉ះ។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះកាត់តាម $A(1,-2)$ ៖

$$-2-y_0=(2x_0-4)(1-x_0)$$
$$x_0^2-2x_0-1=0\iff x_0=1\pm\sqrt{2}$$

- $x_0=1+\sqrt{2}\implies y=(-2+2\sqrt{2})x-2\sqrt{2}$
- $x_0=1-\sqrt{2}\implies y=(-2-2\sqrt{2})x+2\sqrt{2}$

លំហាត់ទី ៣២ ៖ ខ្សែកោងប៉ះបន្ទាត់ $y=3x-2$ ត្រង់ $(1,1)$ ៖

- កាត់តាម $(1,1)$ ៖ $a(1)^2+b(1)+1=1 \iff a+b=0$
- មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $x=1$ ស្មើ 3 ៖ $y'=2ax+b \implies 2a(1)+b=3 \iff 2a+b=3$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ ៖ ដកសមីការទាំងពីរបាន $a=3 \implies b=-3$។
ដូចនេះ $a=3,\ b=-3$។

លំហាត់ទី ៣៣ ៖ តាងបន្ទាត់ប៉ះរួម $y=mx+c$ ៖
- ប៉ះ $(P_1) \implies c=-\frac{m^2}{4}$
- ប៉ះ $(P_2) \implies (m-4)^2-4(c+8)=0$
ជំនួស $c=-\frac{m^2}{4}$ បាន $m^2-4m-8=0$

$$\iff m=2\pm 2\sqrt{3}$$

ដូចនេះបន្ទាត់ប៉ះរួមទាំងពីរគឺ ៖

$$y=(2\pm 2\sqrt{3})x-(4\pm 2\sqrt{3})$$

លំហាត់ទី ៣៤ ៖ តាង $M\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ លើក្រាប $y=\frac{1}{x}$។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}$$

- កាត់ Ox ត្រង់ $x=2x_0$
- កាត់ Oy ត្រង់ $y=\frac{2}{x_0}$
ផ្ទៃក្រឡា ៖ $S=\frac{1}{2}(2x_0)\left(\frac{2}{x_0}\right)=2$ (ថេរ)។

លំហាត់ទី ៣៥ ៖ គេមាន $y=\sin x \implies y'=\cos x$។
ត្រង់ $x=0$ មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះគឺ ៖

$$m=y'(0)=\cos 0=1$$

ដោយ $m=\tan\alpha=1$ នោះមុំ α ដែលបន្ទាត់ប៉ះបង្កើតជាមួយអ័ក្ស Ox គឺ ៖

$$\alpha=45^\circ=\frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

លំហាត់ទី ៣៦ ៖ ដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x ៖

$$2x+(1\cdot y+xy')+2yy'=0$$

$$y'(x+2y)=-(2x+y) \implies y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$$

លំហាត់ទី ៣៧ ៖ ដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x ៖

$$3x^2+3y^2y'-6(y+xy')=0$$

$$3(y^2-2x)y'=6y-3x^2 \implies y'=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$$

លំហាត់ទី ៣៨ ៖ ដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x ៖

$$\cos(xy)(y+xy')=1+y'$$
$$y'[x\cos(xy)-1]=1-y\cos(xy)$$
$$\implies y'=\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)-1}$$

លំហាត់ទី ៣៩ ៖ ដេរីវេអាំភ្លីស៊ីត ៖ $2x+2yy'=0 \implies y'=-\frac{x}{y}$។
ត្រង់ $M(3,-4)$ ៖ $y'=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$y-(-4)=\frac{3}{4}(x-3) \iff 3x-4y-25=0$$

លំហាត់ទី ៤០ ៖ ចំពោះ $x=2$ ក្នុងកាជ្រង់ទីមួយ ៖

$$\frac{4}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \implies y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ដេរីវេអាំភ្លីស៊ីត ៖ $y'=-\frac{9x}{16y}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$$
$$\iff \sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$$

លំហាត់ទី ៤១ ៖ ចំពោះ $x>0$, បំពាក់លោការីតនេពែលើអង្គទាំងពីរ ៖

$$\ln y=\ln(x^x)=x\ln x$$

ដេរីវេធៀបនឹង x ៖

$$\frac{y'}{y}=(x)'\ln x+x(\ln x)'$$

$$= \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln x$$
$$\Longrightarrow y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$$

លំហាត់ទី ៤២ ៖ ចំពោះ $x \in (0,\pi) \Longrightarrow \sin x > 0$ ៖

$$\ln y = \ln((\sin x)^x) = x\ln(\sin x)$$

ដេរីវេធៀបនឹង x ៖

$$\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x\cot x$$
$$\Longrightarrow y' = (\sin x)^x[\ln(\sin x) + x\cot x]$$

លំហាត់ទី ៤៣ ៖ ចំពោះ $x > 0$ ៖

$$\ln y = \ln(x^{\ln x}) = (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2$$

ដេរីវេធៀបនឹង x ៖

$$\frac{y'}{y} = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$\Longrightarrow y' = \frac{2\ln x}{x}\cdot x^{\ln x} = 2(\ln x)x^{\ln x - 1}$$

លំហាត់ទី ៤៤ ៖ បំពាក់លោការីតនេពែ ៖

$$\ln y = 3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - 4\ln(x+3)$$

ដេរីវេធៀបនឹង x ៖

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{x+3}$$
$$\Longrightarrow y' = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{(x+3)^4} \times \left[\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{x+3}\right]$$

លំហាត់ទី ៤៥ ៖ ដេរីវេ $x^2 + y^2 = 16 \Longrightarrow y' = -\frac{x}{y}$។

ដេរីវេទីពីរ ៖

$$y'' = -\frac{1\cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$
$$= -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{16}{y^3}$$

លំហាត់ទី ៤៦ ៖ គេមាន $f(x) = (x^2+1)e^x$ ៖

- $f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2e^x$
- $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x$
- $f'''(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+3)e^x = (x^2+6x+7)e^x$

លំហាត់ទី ៤៧ ៖ គេមាន $f(x) = (x+2)^{-1}$ ៖

- $f'(x) = -1(x+2)^{-2}$
- $f''(x) = (-1)(-2)(x+2)^{-3} = (-1)^2 2!(x+2)^{-3}$
- $f'''(x) = (-1)^3 3!(x+2)^{-4}$

តាមវិចារកាត់តាមលំនាំ គេបានរូបមន្តដេរីវេទី n ៖

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

លំហាត់ទី ៤៨ ៖ គេមាន $f(x) = \sin x$ ៖
$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$
ជាទូទៅ ៖ $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$។
ទាញរកដេរីវេទី n នៃ $g(x) = \sin(ax+b)$ ៖

$$g^{(n)}(x) = a^n\sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$$

លំហាត់ទី ៤៩ ៖ គេមាន $f(x) = \ln(1+x)$ ចំពោះ $x > -1$ ៖
$f'(x) = (1+x)^{-1}$
$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = (-1)^1 1!(1+x)^{-2}$
$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3}$
ជាទូទៅចំពោះ $n \geq 1$ ៖

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

លំហាត់ទី ៥០ ៖ តាមរូបមន្តឡៃបនីស ៖

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= uv^{(10)} + 10u'v^{(9)} + 45u''v^{(8)} \\ &= (x^2-3)(2^{10}e^{2x}) \\ &\quad + 10(2x)(2^9e^{2x}) + 45(2)(2^8e^{2x}) \\ &= 2^8e^{2x}[4(x^2-3) + 40x + 90] \\ &= 2^9(2x^2+20x+39)e^{2x} \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ២ ៖ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

ក. ចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ក	ខ	ខ	ខ	ខ	ក	ខ	ខ	ខ	ក
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ខ	ខ	ខ	ក	ខ	គ	ក	ខ	ខ	ខ
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
គ	ក	គ	ខ	គ	ក	ខ	ខ	ខ	ខ
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ក	ខ	ក	ក	ក	ក	ខ	ក	ក	ខ
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ខ	ខ	ក	ក	ក	ក	ខ	ក	ខ	ខ

ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១ ៖
គេមាន $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ឬ $x = 2$។

- f កើនលើ $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, ចុះលើ $(0, 2)$
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $f(0) = 1$
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = -3$

លំហាត់ទី ២ ៖
$f'(x) = 12x(x-2)(x+1) = 0 \iff x = -1, 0, 2$។

- អប្បបរមាធៀប $f(-1) = 0$ និង $f(2) = -27$
- អតិបរមាធៀប $f(0) = 5$

លំហាត់ទី ៣ ៖ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$។

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+4)(1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$ ឬ $x=2$។

- f កើនលើ $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
- f ចុះលើ $(0,1)\cup(1,2)$
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=-4$
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ $f(2)=0$

លំហាត់ទី ៤ ៖ ចំពោះ $x>0$ ៖ $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$។
$f'(x)=0 \iff x^2=4 \implies x=2$ (ព្រោះ $x>0$)។
ដោយ $f''(x)=\frac{8}{x^3}>0$ គ្រប់ $x>0$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ ៖

$$f(2)=2+\frac{4}{2}=4$$

លំហាត់ទី ៥ ៖ គេមាន $f'(x)=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$។
ដោយ $e^{-x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ អាស្រ័យនឹង $(1-x)$ ៖

- $f'(x)>0 \iff x<1 \implies f$ កើនលើ $(-\infty,1)$
- $f'(x)<0 \iff x>1 \implies f$ ចុះលើ $(1,+\infty)$

លំហាត់ទី ៦ ៖ ចំពោះ $x>0$ ៖ $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$។
$f'(x)=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$។
ពេល x ឆ្លងកាត់ e, $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាន នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ ៖

$$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

លំហាត់ទី ៧ ៖ គេមាន $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ លើ $[0,2\pi]$។
$f'(x)=\cos x-\sin x=0 \iff \tan x=1 \iff x=\frac{\pi}{4}$ ឬ $x=\frac{5\pi}{4}$។

- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{\pi}{4}$ គឺ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{5\pi}{4}$ គឺ $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

លំហាត់ទី ៨ ៖ $f'(x)=6(x-2)(x+1)=0 \iff x=-1,2$។
គណនាតម្លៃ ៖

- $f(-2)=-3,\quad f(-1)=8$
- $f(2)=-19,\quad f(3)=-8$

ដូចនេះ អតិបរមាដាច់ខាតស្មើ 8 $(x=-1)$ និងអប្បបរមាដាច់ខាតស្មើ -19 $(x=2)$។

លំហាត់ទី ៩ ៖ $f'(x)=1-2\cos x=0 \iff \cos x=\frac{1}{2} \iff x=\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$។
គណនាតម្លៃ ៖

- $f(0)=0-2\sin 0=0$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\approx-0.68$
- $f(\pi)=\pi-2\sin\pi=\pi\approx 3.14$

ដូចនេះ អតិបរមាដាច់ខាតគឺ π (ត្រង់ $x=\pi$) និងអប្បបរមាដាច់ខាតគឺ $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ (ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$)។

លំហាត់ទី ១០ ៖ $f'(x)=3x^2+2ax+b$។
ដើម្បីឱ្យ f មានបរមាត្រង់ $x=1$ និង $x=3$ លុះត្រាតែ $x=1,3$ ជាឫសនៃសមីការ $f'(x)=0$ ៖

$$\begin{aligned}3x^2+2ax+b&=3(x-1)(x-3)\\&=3(x^2-4x+3)\\&=3x^2-12x+9\end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណ ៖ $2a=-12 \implies a=-6$ និង $b=9$។
ដូចនេះ $a=-6,\ b=9$។

លំហាត់ទី ១១ ៖ $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$។
$f''(x)=6(x-2)=0 \iff x=2$។

- ចំពោះ $x<2 \implies f''(x)<0 \implies$ ក្រាបប៉ោង (Concave down)
- ចំពោះ $x>2 \implies f''(x)>0 \implies$ ក្រាបផត (Concave up)
- ត្រង់ $x=2$, $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញា $\implies$ ចំណុចរបត់ $I(2,f(2))=I(2,3)$

លំហាត់ទី ១២ ៖ $f'(x)=4x^3-12x+8$។
$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)=0 \iff x=\pm 1$។
$f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=-1$ និង $x=1$ ៖

- ត្រង់ $x=-1 \implies f(-1)=1-6-8+10=-3 \implies I_1(-1,-3)$
- ត្រង់ $x=1 \implies f(1)=1-6+8+10=13 \implies I_2(1,13)$

ដូចនេះចំណុចរបត់ទាំងពីរគឺ $I_1(-1,-3)$ និង $I_2(1,13)$។

លំហាត់ទី ១៣ ៖ $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$។

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+3)^2-(-2x)2(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4}=\frac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}$$

- ផតលើ $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ - ប៉ោងលើ $(-1,1)$ - ចំណុចរបត់ $I_1(-1,1/4)$ និង $I_2(1,1/4)$

លំហាត់ទី ១៤ ៖ $f'(x)=-2xe^{-x^2}$។

$$f''(x)=-2e^{-x^2}+(-2x)(-2xe^{-x^2})=(4x^2-2)e^{-x^2}$$

$f''(x)=0 \iff 4x^2-2=0 \iff x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$។
ដោយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពេលឆ្លងកាត់តម្លៃទាំងពីរនេះ នោះក្រាបមានចំណុចរបត់ពីរគឺ ៖

$$I_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ និង } I_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

លំហាត់ទី ១៥ ៖ ចំពោះ $x>0$ ៖ $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$។

$$f''(x)=(2\ln x+1)+x\left(\frac{2}{x}\right)=2\ln x+3$$

$f''(x)=0 \iff \ln x=-\frac{3}{2} \iff x=e^{-3/2}$។
កូអរដោនេ $y=(e^{-3/2})^2\ln(e^{-3/2})=e^{-3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}e^{-3}$។
ដូចនេះចំណុចរបត់គឺ $I\left(e^{-3/2},-\frac{3}{2}e^{-3}\right)$។

លំហាត់ទី ១៦ ៖ $f(x)=\sin x$ លើ $[0,2\pi]$ ៖
$f'(x)=\cos x \implies f''(x)=-\sin x$។

- លើ $(0,\pi)$, $\sin x>0 \implies f''(x)<0 \implies$ ក្រាបប៉ោង
- លើ $(\pi,2\pi)$, $\sin x<0 \implies f''(x)>0 \implies$ ក្រាបផត
- ចំណុចរបត់គឺ $(\pi,0)$

លំហាត់ទី ១៧ ៖ គេមាន $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ ៖
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f''(x)=6ax+2b=0 \iff x=-\dfrac{b}{3a}$។
ដោយ $f''(x)$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ វាតែងតែប្តូរសញ្ញាពេលឆ្លងកាត់ $x_0=-\dfrac{b}{3a}$ ជានិច្ច នាំឱ្យខ្សែកោងដឺក្រេទីបីតែងតែមានចំណុចរបត់មួយជានិច្ចគឺ $I\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$។

លំហាត់ទី ១៨ ៖ $f'(x)=4x^3+3mx^2+3x$។
$f''(x)=12x^2+6mx+3$។
ដើម្បីឱ្យក្រាបផតឡើងលើគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $f''(x)\geq 0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៖
$\iff \Delta'=(3m)^2-12(3)\leq 0 \iff 9m^2-36\leq 0 \iff m^2\leq 4 \iff -2\leq m\leq 2$។

លំហាត់ទី ១៩ ៖ $f(x)=(x-1)^{1/3}$ ៖
$f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$
$f''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$។
$f''(x)$ មិនកំណត់ត្រង់ $x=1$ ប៉ុន្តែវាប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមាន (ចំពោះ $x<1$) មកអវិជ្ជមាន (ចំពោះ $x>1$)។
ដូចនេះក្រាបមានចំណុចរបត់មួយគឺ $I(1,0)$។

លំហាត់ទី ២០ ៖ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$។
គេអាចសរសេរ $f(x)=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$។
$f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2} \implies f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$។
ដោយ $f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}\neq 0$ គ្រប់ $x\neq 1$ នោះសមីការ $f''(x)=0$ គ្មានឫសឡើយ។
ដូចនេះ ក្រាបអនុគមន៍ f គ្មានចំណុចរបត់ឡើយ។

លំហាត់ទី ២១ ៖ អនុគមន៍ $f(x)=x^2-4x+3$ ៖

- ជាប់លើ $[1,3]$ និងមានដេរីវេលើ $(1,3)$
- $f(1)=1-4+3=0$ និង $f(3)=9-12+3=0 \implies f(1)=f(3)$

តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូល មាន $c\in(1,3)$ ដែល $f'(c)=0$ ៖
$f'(c)=2c-4=0 \iff c=2\in(1,3)$។

លំហាត់ទី ២២ ៖ អនុគមន៍ $f(x)=x^3-x$ ជាប់លើ $[0,2]$ និងមានដេរីវេលើ $(0,2)$។
តាម MVT មាន $c\in(0,2)$ ដែល ៖

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(8-2)-0}{2}=3$$

$$3c^2-1=3 \iff 3c^2=4 \iff c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\in(0,2)\text{។}$$

លំហាត់ទី ២៣ ៖ អនុវត្តវិធានឡូពីតាល់ ៖

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{5x^4}{3x^2}=\frac{5}{3}$

b) រាង $\frac{0}{0}$ ៖

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២៤ ៖ អនុវត្តវិធានឡូពីតាល់រាង $\frac{0}{0}$ ៖

a) តាមឡូពីតាល់ ៖

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

b) តាមឡូពីតាល់ ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{2\sin^2(x/2)}=2\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២៥ ៖ គណនាលីមីត ៖
a) រាង $\frac{\infty}{\infty}$ ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0\end{aligned}$$

b) រាង $0\cdot\infty$ ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}x^2\ln x&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-2x^{-3}}\\&=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២៦ ៖ រាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

អនុវត្តវិធានឡូពីតាល់ពីរដង ៖

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ២៧ ៖ គណនាលីមីតរាង 1^∞ ៖
a) តាង $y=(1+3x)^{1/x} \implies \ln y=\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$។

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3}{1+3x}}{1}=3$$

$$\implies \lim_{x\to0^+}(1+3x)^{1/x}=e^3$$

b) តាង $y=(\cos x)^{1/x^2} \implies \ln y=\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$។

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

លំហាត់ទី ២៨ ៖ រាងមិនកំណត់ 0^0 ៖
តាង $y = x^x \Longrightarrow \ln y = x\ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-1}}$។

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

នាំឱ្យ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

លំហាត់ទី ២៩ ៖ តាង $y = (1+\frac{2}{x})^x \Longrightarrow \ln y = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \dfrac{\ln(1+2/x)}{1/x}$។
អនុវត្តវិធានឡូពីតាល់ ៖

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2/x^2}{1+2/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+2/x} = 2$$

ដូចនេះ ៖

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

លំហាត់ទី ៣០ ៖ ពន្លាតម៉ាក់ឡូរាំង ៖
$\sin(2x) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(2+a)x + (b-\frac{4}{3})x^3}{x^3} = 0$$

លុះត្រាតែ ៖
- $2+a=0 \Longrightarrow a=-2$
- $b-\dfrac{4}{3}=0 \Longrightarrow b=\dfrac{4}{3}$។

លំហាត់ទី ៣១ ៖ តាងចំនួនទាំងពីរដោយ x និង $y = 30-x$ $(0<x<30)$។
អនុគមន៍ផលគុណ ៖ $P(x) = x(30-x) = 30x - x^2$។
$P'(x) = 30-2x = 0 \iff x = 15$។
$P''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow P$ មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ $x=15$។
នាំឱ្យ $y = 30-15 = 15$។
ដូចនេះចំនួនទាំងពីរនោះគឺ 15 និង 15។

លំហាត់ទី ៣២ ៖ តាងចំនួនទាំងពីរដោយ x និង $y = \dfrac{64}{x}$ $(x>0)$។
អនុគមន៍ផលបូក ៖ $S(x) = x + \dfrac{64}{x}$។
$S'(x) = 1 - \dfrac{64}{x^2} = 0 \iff x^2 = 64 \Longrightarrow x = 8$ (ព្រោះ $x>0$)។
$S''(x) = \dfrac{128}{x^3} > 0 \Longrightarrow S$ មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ $x=8$។
នាំឱ្យ $y = \dfrac{64}{8} = 8$។ ដូចនេះចំនួនទាំងពីរគឺ 8 និង 8។

លំហាត់ទី ៣៣ ៖ តាង x ជាប្រវែងជ្រុងការេដែលត្រូវកាត់ $(0<x<12)$។
វិមាត្របាតប្រអប់គឺ $24-2x$ និងកម្ពស់ x។
មាឌប្រអប់ ៖ $V(x) = x(24-2x)^2 = 4x(12-x)^2$។

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4[(12-x)^2 - 2x(12-x)] \\ &= 4(12-x)(12-3x) \\ &= 12(12-x)(4-x) = 0 \\ &\iff x = 4\text{ cm} \quad (\text{ព្រោះ } x<12) \end{aligned}$$

ដូចនេះ ជ្រុងការេតូចដែលត្រូវកាត់គឺ $x = 4$ cm។

លំហាត់ទី ៣៤ ៖ តាង x ជាបណ្ដោយ និង y ជាទទឹងដី $(xy = 600 \Longrightarrow y = \frac{600}{x})$។
ប្រវែងរបងសរុប (មានរបងកណ្ដាល ១ ស្របទទឹង) ៖

$$L(x) = 2x + 3y = 2x + \frac{1800}{x}$$

$L'(x) = 2 - \dfrac{1800}{x^2} = 0 \iff x^2 = 900 \Longrightarrow x = 30$ m។
នាំឱ្យ $y = \dfrac{600}{30} = 20$ m។
ដូចនេះវិមាត្រដីគឺ បណ្ដោយ 30 m និងទទឹង 20 m។

លំហាត់ទី ៣៥ ៖ តាង x, y ជាវិមាត្រចតុកោណកែង ៖
$2(x+y) = 80 \Longrightarrow y = 40-x$។
ផ្ទៃក្រឡា ៖ $S(x) = x(40-x) = 40x - x^2$ $(0<x<40)$។
$S'(x) = 40-2x = 0 \iff x = 20$ cm។
នាំឱ្យ $y = 40-20 = 20$ cm។
ដូចនេះចតុកោណកែងនោះជារាងការេមានជ្រុង 20 cm × 20 cm។

លំហាត់ទី ៣៦ ៖ មាឌស៊ីឡាំង ៖ $V = \pi R^2 h = 1000\pi \Longrightarrow h = \dfrac{1000}{R^2}$។

ផ្ទៃក្រឡាសរុប ៖

$$A(R) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{2000\pi}{R}$$

$A'(R) = 4\pi R - \frac{2000\pi}{R^2} = 0 \iff R^3 = 500 \implies R = 5\sqrt[3]{4}$ cm។
កម្ពស់ ៖ $h = \frac{1000}{(5\sqrt[3]{4})^2} = 10\sqrt[3]{4}$ cm $(h = 2R)$។

លំហាត់ទី ៣៧ ៖ តាង x, y ជាប្រវែងជ្រុងជាប់មុំកែង ៖ $x^2 + y^2 = a^2$។
ផ្ទៃក្រឡា ៖ $S = \frac{1}{2}xy$។
តាមវិសមភាពកូស៊ី ៖ $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{a^2}{2}$។
នាំឱ្យ ៖

$$S \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

សមភាពកើតមានពេល $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$។
ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតគឺ $S_{\max} = \frac{a^2}{4}$។

លំហាត់ទី ៣៨ ៖ កំពូលទាំងពីរនៅលើប៉ារ៉ាបូលគឺ $(\pm x, 12 - x^2)$ ជាមួយ $0 < x < \sqrt{12}$។
ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង ៖

$$S(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$S'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \implies x = 2$។
ផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតគឺ ៖

$$S_{\max} = S(2) = 24(2) - 2(8) = 48 - 16 = 32$$

លំហាត់ទី ៣៩ ៖ ចម្ងាយពីចំណុច $M(x, x^2)$ លើប៉ារ៉ាបូលទៅ $A(0, 3)$ ៖

$$\begin{aligned} d^2 &= (x-0)^2 + (x^2-3)^2 \\ &= x^2 + x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 - 5x^2 + 9 \end{aligned}$$

តាង $u = x^2 \ge 0 \implies f(u) = u^2 - 5u + 9$។
$f'(u) = 2u - 5 = 0 \iff u = \frac{5}{2} \implies x^2 = \frac{5}{2} \iff x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$។
អរដោនេ $y = x^2 = \frac{5}{2}$។
ដូចនេះចំណុចទាំងពីរគឺ $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ និង $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right)$។

លំហាត់ទី ៤០ ៖ តាង r ជាកាំបាត និង h ជាកម្ពស់ស៊ីឡាំង ៖ $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \implies r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$។
មាឌស៊ីឡាំង ៖ $V(h) = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$។
$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \iff h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$។
កាំ $r = \sqrt{R^2 - R^2/3} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$។
មាឌអតិបរមា ៖ $V_{\max} = \pi\left(\frac{2R^2}{3}\right)\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$។

លំហាត់ទី ៤១ ៖ តាង r ជាកាំបាតកោន និង h ជាកម្ពស់កោន $(h > 2R)$។
តាមលក្ខណៈត្រីកោណដូចគ្នា គេបានទំនាក់ទំនង ៖ $r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R}$។
មាឌកោន ៖ $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 2R}$។
ដេរីវេធៀបនឹង h ស្មើ 0 នាំឱ្យ $h = 4R$។
ដូចនេះ កម្ពស់កោនដែលធ្វើឱ្យមាឌអប្បបរមាគឺ $h = 4R$។

លំហាត់ទី ៤២ ៖ $R(x) = 50x - 0.1x^2$។
ប្រាក់ចំណេញ ៖

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0.2x^2 + 40x - 2000 \end{aligned}$$

$P'(x) = -0.4x + 40 = 0 \iff x = 100$ គ្រឿង។
ដូចនេះ ត្រូវលក់បាន 100 គ្រឿងក្នុងមួយថ្ងៃ។

លំហាត់ទី ៤៣ ៖ គេមានសមីការចលនា $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ ៖
a) ល្បឿន $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 24$។
នៅខណៈ $t = 2$ s $\implies v(2) = 3(4) - 18(2) + 24 = 0$ m/s។
សំទុះ $a(t) = v'(t) = 6t - 18$។
នៅខណៈ $t = 2$ s $\implies a(2) = 6(2) - 18 = -6$ m/s^2។
b) ភាគល្អិតឈប់ស្ងៀមមួយរំពេចពេល $v(t) = 0$ ៖
$3(t^2 - 6t + 8) = 0 \iff 3(t-2)(t-4) = 0 \iff t = 2$ s ឬ $t = 4$ s។

លំហាត់ទី ៤៤ ៖ ចលនាស្ទុះលឿនកាលណា $v(t)\cdot a(t) > 0$ និងយឺតកាលណា $v(t)\cdot a(t) < 0$ ៖
- $v(t) = 3(t-2)(t-4)$
- $a(t) = 6(t-3)$

សញ្ញានៃផលគុណ $v(t)a(t)$ ៖

- $v(t)a(t) > 0 \iff t \in (2,3)\cup(4,+\infty)$ ៖ ចលនាស្ទុះលឿន
- $v(t)a(t) < 0 \iff t \in (0,2)\cup(3,4)$ ៖ ចលនាយឺត

លំហាត់ទី ៤៥ ៖ គេមាន $h(t) = 80t - 5t^2$ ៖
- ល្បឿន $v(t) = 80 - 10t = 0 \iff t = 8$ s ៖

$$h_{\max} = 80(8) - 5(64) = 320 \text{ m}$$

- ធ្លាក់ដល់ដីពេល $t = 16$ s ៖

$$v(16) = 80 - 10(16) = -80 \text{ m/s}$$

ល្បឿនពេលប៉ះដីគឺ 80 m/s។

លំហាត់ទី ៤៦ ៖ មាឌស្វ៊ែរ ៖ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$។
ដេរីវេធៀបនឹងពេល t ៖ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$។
ជំនួស $\frac{dV}{dt} = 400\pi$ និង $r = 10$ cm ៖

$$400\pi = 4\pi(10^2)\frac{dr}{dt} \iff 400\pi = 400\pi\frac{dr}{dt}$$
$$\implies \frac{dr}{dt} = 1 \text{ cm/s}$$

លំហាត់ទី ៤៧ ៖ ផ្ទៃក្រឡារង្វង់ ៖ $A = \pi r^2$។
ដេរីវេធៀបនឹង t ៖ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$។
នៅពេល $r = 2 \text{ m} = 200$ cm និង $\frac{dr}{dt} = 30$ cm/s ៖

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(200)(30)$$
$$= 12000\pi \text{ cm}^2/\text{s} = 1.2\pi \text{ m}^2/\text{s}$$

លំហាត់ទី ៤៨ ៖ ធុងកោនកម្ពស់ 4 m កាំ 2 m នាំឱ្យ $\frac{r}{h} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \implies r = \frac{h}{2}$។
មាឌទឹកក្នុងធុង ៖ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$។
ដេរីវេធៀបនឹង t ៖ $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$។
នៅពេល $h = 3$ m និង $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{min}$ ៖

$$2 = \frac{\pi}{4}(3^2)\frac{dh}{dt}$$
$$\implies \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi} \text{ m/min}$$

លំហាត់ទី ៤៩ ៖ តាង x ជាចម្ងាយជើងជណ្ដើរ និង y ជាកម្ពស់ចុងលើ ៖ $x^2 + y^2 = 10^2 = 100$។
ដេរីវេធៀបនឹង t ៖ $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \implies x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$។
នៅពេល $x = 6 \text{ m} \implies y = \sqrt{100-36} = 8$ m។
ជំនួស $\frac{dx}{dt} = 2$ m/s ចូល ៖

$$6(2) + 8\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\implies \frac{dy}{dt} = -\frac{12}{8} = -1.5 \text{ m/s}$$

ដូចនេះ ចុងលើនៃជណ្ដើររអិលចុះក្នុងល្បឿន 1.5 m/s។

លំហាត់ទី ៥០ ៖ ក្រោយ $t = 2$ h ៖ $x = 40 \text{ km}, y = 30$ km។
$z = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ km។
ដេរីវេ $z^2 = x^2 + y^2$ ៖

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$
$$50\frac{dz}{dt} = 40(20) + 30(15) = 1250$$
$$\implies \frac{dz}{dt} = 25 \text{ km/h}$$

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ៣ ៖ អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀត និងការសិក្សាអនុគមន៍

ក. ចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ក	ខ	គ	ឃ	ក	ខ	គ	ឃ	ក	ខ
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
គ	ឃ	ក	ខ	គ	ឃ	ក	ខ	គ	ឃ
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ក	ខ	គ	ឃ	ក	ខ	គ	ឃ	ក	ខ
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
គ	ខ	ក	ខ	ឃ	ក	ខ	ក	គ	ក
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ក	ខ	ខ	ក	ក	ខ	ក	ខ	ក	គ

ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១ ៖
តាមរូបមន្ត $dy = y'dx$ ៖

$$y' = 9x^2 - 10x$$

ដូចនេះ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $dy = (9x^2 - 10x)dx$។

លំហាត់ទី ២ ៖
ដេរីវេនៃ $y = \sqrt{4x^2+9}$ គឺ ៖

$$y' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+9}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+9}}$$

ដូចនេះ $dy = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+9}}dx$។

លំហាត់ទី ៣ ៖ ដេរីវេនៃផលគុណ ៖

$$y' = 2x\sin(3x) + x^2[3\cos(3x)]$$
$$= 2x\sin(3x) + 3x^2\cos(3x)$$

ដូចនេះ $dy = [2x\sin(3x) + 3x^2\cos(3x)]dx$។

លំហាត់ទី ៤ ៖ គេមាន $y = x^2 + 2x$ ៖

- $dy = (2x+2)dx = 6(0.1) = 0.6$
- $\Delta y = f(2.1) - f(2)$

  $= 8.61 - 8 = 0.61$
- កំហុស ៖ $|0.61 - 0.60| = 0.01$

លំហាត់ទី ៥ ៖ តាង $f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$។
ជ្រើសរើស $x_0 = 36 \implies \Delta x = 1$។
តាមរូបមន្ត $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ ៖

$$\sqrt{37} \approx \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}(1)$$
$$= 6 + \frac{1}{12} \approx 6.0833$$

លំហាត់ទី ៦ ៖ តាង $f(x)=\sqrt{x} \implies f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$។
ជ្រើសរើស $x_0=64,\ \Delta x=1$ ៖

$$\sqrt{65}\approx\sqrt{64}+\frac{1}{2\sqrt{64}}(1) = 8+\frac{1}{16}=8.0625$$

លំហាត់ទី ៧ ៖ តាង $f(x)=\sqrt[3]{x} \implies f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$។
ជ្រើសរើស $x_0=27,\ \Delta x=-1$ ៖

$$\sqrt[3]{26}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(-1) = 3-\frac{1}{27}\approx 2.9630$$

លំហាត់ទី ៨ ៖ តាង $f(x)=\sqrt[3]{x} \implies f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$។
ជ្រើសរើស $x_0=125,\ \Delta x=1$ ៖

$$\sqrt[3]{126}\approx\sqrt[3]{125}+\frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}}(1) = 5+\frac{1}{75}\approx 5.0133$$

លំហាត់ទី ៩ ៖ តាង $f(x)=\sqrt{x}$។ ជ្រើសរើស $x_0=49,\ \Delta x=-0.2$ ៖

$$\sqrt{48.8}\approx\sqrt{49}+\frac{1}{2\sqrt{49}}(-0.2) = 7-\frac{1}{70}\approx 6.9857$$

លំហាត់ទី ១០ ៖ តាង $f(x)=\sin x \implies f'(x)=\cos x$។
ជ្រើសរើស $x_0=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$ rad, $\Delta x=1^\circ\approx 0.0175$ rad ៖

$$\begin{aligned}\sin(31^\circ)&\approx\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)(0.0175)\\ &=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}(0.0175)\\ &\approx 0.5+0.0152=0.5152\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១១ ៖ តាង $f(x)=\tan x \implies f'(x)=1+\tan^2 x$។
ជ្រើសរើស $x_0=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$ rad, $\Delta x=-1^\circ\approx -0.0175$ rad ៖

$$\begin{aligned}\tan(44^\circ)&\approx\tan(45^\circ)\\ &\quad+(1+\tan^2 45^\circ)(-0.0175)\\ &=1+2(-0.0175)\\ &=1-0.035=0.965\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ១២ ៖ ផ្ទៃក្រឡាការ៉េ ៖ $S=x^2 \implies dS=2xdx$។
ជាមួយ $x=10$ cm និង $|dx|\le 0.05$ cm ៖

- កំហុសដាច់ខាត ៖ $|dS|=2(10)(0.05)=1\text{ cm}^2$
- កំហុសជាភាគរយ ៖
$$\frac{|dS|}{S}=\frac{2|dx|}{x}=\frac{2(0.05)}{10}=1\%$$

លំហាត់ទី ១៣ ៖ មាឌស្វ៊ែរ ៖ $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3 \implies dV=4\pi r^2 dr$។
កំហុសជាភាគរយក្នុងការគណនាមាឌ ៖

$$\frac{|dV|}{V}=\frac{4\pi r^2|dr|}{\frac{4}{3}\pi r^3}=3\frac{|dr|}{r} = 3\left(\frac{0.02}{6}\right)=0.01=1\%$$

លំហាត់ទី ១៤ ៖ មាឌបាឡុង ៖ $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3 \implies dV=4\pi r^2 dr$។
កាលណា $r=2$ m និង $\Delta r=dr=2.1-2=0.1$ m ៖

$$\Delta V\approx dV=4\pi(2^2)(0.1) = 1.6\pi\approx 5.03\text{ m}^3$$

លំហាត់ទី ១៥ ៖ ផ្ទៃក្រឡារង្វង់ ៖ $S=\pi r^2 \implies dS=2\pi r dr$។
ជាមួយ $r=20$ cm និង $dr=0.08$ cm ៖

$$\Delta S\approx dS=2\pi(20)(0.08) = 3.2\pi\approx 10.05\text{ cm}^2$$

លំហាត់ទី ១៦ ៖ $f(x)=\sqrt{x+2}$ លើ $[-1,2]$ ៖ $\frac{1}{4}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$។
តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖

$$\frac{1}{4}(3)\le f(2)-f(-1)\le\frac{1}{2}(3)$$
$$\iff \frac{3}{4}\le f(2)-f(-1)\le\frac{3}{2}$$

លំហាត់ទី ១៧ ៖ ចំពោះ $a=b$ វិសមភាពផ្ទៀងផ្ទាត់។
ចំពោះ $a\ne b$, អនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ជាប់ និងមានដេរីវេ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយ $|f'(x)|=|\cos x|\le 1$។
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមលើចន្លោះរវាង a និង b ៖

$$\left|\frac{\sin b-\sin a}{b-a}\right|=|\cos c|\le 1$$
$$\implies |\sin b-\sin a|\le|b-a|$$

លំហាត់ទី ១៨ ៖ អនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ មានដេរីវេ $f'(x)=-\sin x$ ដោយ $|f'(x)|=|-\sin x|\le 1$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$។
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម ៖

$$\left|\frac{\cos b-\cos a}{b-a}\right|=|-\sin c|\le 1$$
$$\implies |\cos b-\cos a|\le|b-a|$$

លំហាត់ទី ១៩ ៖ $f(t)=\ln(1+t)$ លើ $[0,x]$ ៖ $f'(t)=\frac{1}{1+t}$។
ដោយ $\frac{1}{1+x}\le f'(t)\le 1$ លើ $[0,x]$ ៖

$$\frac{1}{1+x}(x)\le\ln(1+x)\le 1(x)$$
$$\implies \frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$$

លំហាត់ទី ២០ ៖ ពិនិត្យ $f(t)=e^t$ លើ $[0,x]$ $(x>0)$ ៖ $f'(t)=e^t$។
ចំពោះ $t\ge 0\implies f'(t)=e^t\ge e^0=1$។
តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖

$$f(x)-f(0)\ge 1(x-0)$$
$$\iff e^x-1\ge x\implies e^x\ge 1+x$$

លំហាត់ទី ២១ ៖ $f(x)=\tan x$ លើ $[a,b]\subset[0,\pi/4]$ ៖ $1\le f'(x)\le 2$។ តាមវិសមភាព ៖

$$1(b-a)\le\tan b-\tan a\le 2(b-a)$$

លំហាត់ទី ២២ ៖ ពិនិត្យ $f(t)=\sqrt{1+t}$ លើ $[0,x]$ $(x\ge 0)$ ៖ $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\le\frac{1}{2}$។ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖

$$f(x)-f(0)\le\frac{1}{2}(x-0)$$
$$\iff \sqrt{1+x}-1\le\frac{x}{2}\implies\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$$

លំហាត់ទី ២៣ ៖ អនុវត្តវិសមភាពកំណើនមានកំណត់លើ $[1,4]$ ៖

$$2(4-1)\le f(4)-f(1)\le 5(4-1)$$
$$6\le f(4)-3\le 15$$
$$\iff 9\le f(4)\le 18$$

ដូចនេះ តម្លៃអមនៃ $f(4)$ គឺ $9\le f(4)\le 18$។

លំហាត់ទី ២៤ ៖ ពិនិត្យ $f(t)=\arctan t$ លើ $[0,x]$ $(x>0)$ ៖ $f'(t)=\frac{1}{1+t^2}$។
ចំពោះ $t\in(0,x)\implies\frac{1}{1+x^2}<f'(t)<1$។ តាម MVT ៖

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\arctan x}{x}<1$$
$$\implies\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$$

លំហាត់ទី ២៥ ៖ ពិនិត្យ $f(x)=\sqrt{x}$ លើ $[100,101]$ ៖ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$។
ចំពោះ $x\in[100,101]\implies\frac{1}{2\sqrt{101}}\le f'(x)\le\frac{1}{20}$។
តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖

$$\frac{1}{2\sqrt{101}}\le\sqrt{101}-10\le\frac{1}{20}$$
$$\implies 10<\sqrt{101}<10.05$$

លំហាត់ទី ២៦ ៖ អនុគមន៍ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល ៖ $C'(x) = 15 + 0.1x$។
នៅពេល $x = 100$ គ្រឿង ៖

$$C'(100) = 15 + 0.1(100) = 25 \text{ ពាន់រៀល}$$

តម្លៃ ប៉ាន់ស្មាន ថ្លៃដើម នៃ ផលិតផល គ្រឿង ទី 101 គឺ $C'(100) = 25$ ពាន់រៀល (25 000 រៀល)។

លំហាត់ទី ២៧ ៖ ថ្លៃដើមមធ្យម ៖

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2400}{x} + 28 + 0.02x$$

ដេរីវេធៀបនឹង x ៖ $\overline{C}'(x) = -\dfrac{2400}{x^2} + 0.02 = 0$

$$\iff x^2 = \frac{2400}{0.02} = 120000$$
$$\implies x = \sqrt{120000} \approx 346 \text{ គ្រឿង}$$

លំហាត់ទី ២៨ ៖ ថ្លៃដើមមធ្យម ៖ $\overline{C}(x) = \dfrac{1080}{x} + 42 + 0.3x$។
$\overline{C}'(x) = -\dfrac{1080}{x^2} + 0.3 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1080}{0.3} = 3600$
$\implies x = 60$ គ្រឿង។
ដូចនេះ ថ្លៃដើមមធ្យមអប្បបរមាកាលណាផលិតផលស្មើ 60 គ្រឿង។

លំហាត់ទី ២៩ ៖ ចំណូលម៉ាជីណាល ៖ $R'(x) = 20 - \dfrac{2x}{30} = 20 - \dfrac{x}{15}$។
កាលណា $x = 150$ និង $\Delta x = 160 - 150 = 10$ គ្រឿង ៖

$$\begin{aligned}\Delta R &\approx R'(150)\Delta x \\ &= \left(20 - \frac{150}{15}\right)(10) \\ &= 10(10) = 100 \text{ ម៉ឺនរៀល}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំណូល កើនឡើង ប្រហែល 100 ម៉ឺន រៀល (1 000 000 រៀល)។

លំហាត់ទី ៣០ ៖ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ ៖

$$\begin{aligned}P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (140x - 0.5x^2) - (x^2 + 20x + 1050) \\ &= -1.5x^2 + 120x - 1050\end{aligned}$$

$P'(x) = -3x + 120 = 0 \iff x = 40$ គ្រឿង។
ដោយ $P''(x) = -3 < 0 \implies$ ចំណេញអតិបរមាពេល $x = 40$ គ្រឿង។

លំហាត់ទី ៣១ ៖ អនុគមន៍ចំណូល ៖ $R(x) = x \cdot p = x(100 - 0.2x) = 100x - 0.2x^2$។
ចំណូលម៉ាជីណាល ៖ $R'(x) = 100 - 0.4x$។
ចំណូលអតិបរមាពេល $R'(x) = 0 \iff 100 - 0.4x = 0 \implies x = 250$ គ្រឿង។

លំហាត់ទី ៣២ ៖ អនុគមន៍ចំណេញ ៖

$$\begin{aligned}P(x) &= (4x - 0.0002x^2) \\ &\quad - (0.0001x^2 + x + 465) \\ &= -0.0003x^2 + 3x - 465\end{aligned}$$

$P'(x) = 0 \iff x = 5000$ ក្បាល។
$P(5000) = 7035$ ពាន់រៀល។

លំហាត់ទី ៣៣ ៖ ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល ៖ $C'(x) = 26 - 0.2x$ ៖

- ត្រង់ $x = 30$ ៖ $C'(30) = 26 - 0.2(30) = 20$
- ត្រង់ $x = 50$ ៖ $C'(50) = 26 - 0.2(50) = 16$
- ត្រង់ $x = 70$ ៖ $C'(70) = 26 - 0.2(70) = 12$

លំហាត់ ទី ៣៤ ៖ ចំណុច រួចខ្លួន កើតមាន ពេល ប្រាក់ចំណេញ $P(x) = 0$ ៖

$$\begin{aligned}&-0.5x^2 + 40x - 300 = 0 \\ \iff &x^2 - 80x + 600 = 0 \\ \iff &(x - 10)(x - 70) = 0 \\ \iff &x = 10 \text{ ឬ } x = 70\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំណុចរួចខ្លួនគឺ $x = 10$ គ្រឿង និង $x = 70$ គ្រឿង។

លំហាត់ទី ៣៥ ៖ ថ្លៃដើម ៖ $C(x)=5000+3x$។
ចំណូល ៖ $R(x)=x(8-0.001x)=8x-0.001x^2$។
ចំណេញ ៖ $P(x)=-0.001x^2+5x-5000$។
$P'(x)=-0.002x+5=0 \iff x=2500$ ដប។
ប្រាក់ចំណេញអតិបរមា ៖

$$\begin{aligned}P(2500)&=-0.001(2500^2)+5(2500)-5000\\&=1250 \text{ ដុល្លារ}\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ៣៦ ៖ អនុគមន៍ចំណូល ៖

$$\begin{aligned}R(p)&=p\cdot x=p(1000-50p)\\&=1000p-50p^2\end{aligned}$$

$R'(p)=1000-100p=0 \iff p=10$ ដុល្លារ។
ដូចនេះ ថ្លៃលក់ដែលធ្វើឱ្យចំណូលអតិបរមាគឺ $p=10$។

លំហាត់ទី ៣៧ ៖ ចំណូលម៉ាជីណល ៖ $R'(x)=500-4x$។
ចំណូលម៉ាជីណលស្មើនឹងសូន្យ ៖

$$\begin{aligned}500-4x=0 &\iff 4x=500\\&\implies x=125 \text{ គ្រឿង}\end{aligned}$$

លំហាត់ទី ៣៨ ៖ គេមាន $C(x)=200+4x+0.01x^2$ ៖
- ថ្លៃដើមពិតគ្រឿងទី 51 ៖

$$\begin{aligned}\Delta C&=C(51)-C(50)\\&=430.01-425=5.01\end{aligned}$$

- តាមដេរីវេ ៖ $C'(50)=4+1=5.00$។
ភាពខុសគ្នាគឺ 0.01។

លំហាត់ទី ៣៩ ៖ គេមាន $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x+4}$ $(x\neq -2)$ ៖

- $\lim\limits_{x\to -2}(2x+4)=0 \implies x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}\implies y=\dfrac{3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

លំហាត់ទី ៤០ ៖ គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}=x+\dfrac{2}{x-3}$ $(x\neq 3)$ ៖

- $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\infty \implies x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-3}=0\implies y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

លំហាត់ ទី ៤១ ៖ ដោយ ចែក ពហុធា ៖ $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x+1}=2x+3-\dfrac{4}{x+1}$។
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+3)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4}{x+1}=0$ នោះ បន្ទាត់ $y=2x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។

លំហាត់ទី ៤២ ៖ អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $2x+3=0 \iff x=-\dfrac{3}{2}$។
អាស៊ីមតូតដេក ៖ $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x-1}{2x+3}=2$។
ផ្ចិតឆ្លុះ I ជាប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតទាំងពីរ ៖ $I\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$។

លំហាត់ទី ៤៣ ៖ គេមាន $f(x)=2+\dfrac{5}{x-1}$។
ចំពោះ $I(1,2)$ យើងពិនិត្យ ៖

$$\begin{aligned}f(1-h)+f(1+h)&=\left(2-\frac{5}{h}\right)+\left(2+\frac{5}{h}\right)\\&=4=2(2)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $I(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប។

លំហាត់ទី ៤៤ ៖ ពិនិត្យ $x=2$ ៖

$$\begin{aligned}f(2-h)&=(2-h)^2-4(2-h)+5\\&=h^2+1\\f(2+h)&=(2+h)^2-4(2+h)+5\\&=h^2+1\end{aligned}$$

ដោយ $f(2-h)=f(2+h)$ នាំឱ្យ $x=2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី ៤៥ ៖ $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$ គ្រប់ $x\neq -1$ (f កើនជានិច្ចលើចន្លោះនីមួយៗ)
- អាស៊ីមតូត ៖ ឈរ $x=-1$, ដេក $y=1$
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-1,1)$
- ប្រសព្វអ័ក្ស ៖ $Ox:(2,0)$ និង $Oy:(0,-2)$

លំហាត់ទី ៤៦ ៖ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0$ គ្រប់ $x\neq 1$ (f ចុះជានិច្ចលើចន្លោះនីមួយៗ)
- អាស៊ីមតូត ៖ ឈរ $x=1$, ដេក $y=2$
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,2)$
- ប្រសព្វអ័ក្ស ៖ $Ox:(-1/2,0)$ និង $Oy:(0,-1)$

លំហាត់ទី ៤៧ ៖ $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0\iff x=0,\ x=2$
- អតិបរមាធៀប $f(0)=-1$, អប្បបរមាធៀប $f(2)=3$
- អាស៊ីមតូត ៖ ឈរ $x=1$, ទ្រេត $y=x$
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,1)$

លំហាត់ទី ៤៨ ៖ $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}=x-2-\dfrac{1}{x-2}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
- $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x-2)^2}>0$ គ្រប់ $x\neq 2$ (f កើនលើចន្លោះនីមួយៗ)
- អាស៊ីមតូត ៖ ឈរ $x=2$, ទ្រេត $y=x-2$
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(2,0)$
- ប្រសព្វអ័ក្ស ៖ $Ox:(1,0)$, $(3,0)$ និង $Oy:(0,-3/2)$

លំហាត់ទី ៤៩ ៖ គេមាន $y=ax+(b+a)+\dfrac{b+a+c}{x-1}$។

- អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=ax+(a+b)\equiv 2x+1$
  $\implies a=2$ និង $2+b=1\implies b=-1$
- ក្រាបកាត់ Oy ត្រង់ $(0,-3)$
  $\implies \dfrac{c}{-1}=-3\implies c=3$

ដូចនេះ $a=2,\ b=-1,\ c=3$។

លំហាត់ទី ៥០ ៖ $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-1}{x-1}=-x+2+\dfrac{1}{x-1}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- $f'(x)=-1-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ គ្រប់ $x\neq 1$ (f ចុះលើចន្លោះនីមួយៗ)
- អាស៊ីមតូត ៖ ឈរ $x=1$, ទ្រេត $y=-x+2$
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,1)$
- ប្រសព្វអ័ក្ស ៖ $Oy:(0,1)$

ឧបសម្ព័ន្ធ

ក ៖ តារាងរូបមន្តដេរីវេ និងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ (Derivatives)

១. រូបមន្តប្រមាណវិធីលើដេរីវេ (Derivative Operations)

ចំពោះអនុគមន៍ $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ ដែលមានដេរីវេ និងចំនួនថេរ $k,c\in\mathbb{R}$ ៖

- $(c)'=0$
- $(u\pm v)'=u'\pm v'$
- $(k\cdot u)'=k\cdot u'$
- $(u\cdot v)'=u'v+uv'$
- $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$
- $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}\quad(v\neq 0)$
- $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$
- $(u^n)'=nu'u^{n-1}\quad(n\in\mathbb{R}^*)$
- ដេរីវេបណ្ដាក់ ៖ $(f(u))'=u'\cdot f'(u)$
- អនុគមន៍ច្រាស់ ៖ $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

២. និយមន័យ និងអត្ថន័យសំខាន់ៗនៃដេរីវេ (Fundamental Concepts)

1. **និយមន័យចំនួនដេរីវេត្រង់ x_0 ៖** $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
2. **ដេរីវេឆ្វេង និងដេរីវេស្ដាំត្រង់ x_0 ៖** $f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

   f មានដេរីវេត្រង់ $x_0 \iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$។
3. **ទំនាក់ទំនងភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់ ៖** f មានដេរីវេត្រង់ $x_0 \implies f$ ជាប់ត្រង់ x_0 (ច្រាសមកវិញ មិនប្រាកដជាពិត)។
4. **អត្ថន័យធរណីមាត្រ ៖** មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ x_0 គឺ $m=f'(x_0)=\tan\alpha$។
5. **អត្ថន័យរូបវិទ្យា ៖** ល្បឿនខណៈ $v(t)=s'(t)$ និង សំទុះខណៈ $a(t)=v'(t)=s''(t)$។
6. **អត្ថន័យសេដ្ឋកិច្ច ៖** ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល $C'(x)$, ចំណូលម៉ាជីណាល $R'(x)$, ចំណេញម៉ាជីណាល $P'(x)$។

៣. តារាងរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បឋម និងអនុគមន៍បណ្ដាក់

អនុគមន៍បឋម $y=f(x)$	ដេរីវេ $y'=f'(x)$	ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u=u(x)$
$y=c$ (c ជាចំនួនថេរ)	$y'=0$	---
$y=x$	$y'=1$	$y=u \Longrightarrow y'=u'$
$y=x^n\ (n\in\mathbb{R}^*)$	$y'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$
$y=\sqrt{x}\ (x>0)$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\quad (u>0)$
$y=\sqrt[n]{x}\ (n\geq 2)$	$y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{u})'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}\quad (u\neq 0)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$(e^u)'=u'e^u$
$y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$	$(a^u)'=u'a^u\ln a$
$y=\ln x\ (x>0)$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}\quad (u>0)$
$y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}\quad (u>0)$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$(\sin u)'=u'\cos u$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'\sin u$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)'=u'(1+\tan^2 u)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y=\cot x$	$y'=-(1+\cot^2 x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)'=-u'(1+\cot^2 u)=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$

៤. រូបមន្តកាត់ដេរីវេសម្រាប់អនុគមន៍សនិទាន (Shortcuts for Rational Functions)

1. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Longrightarrow y'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

2. $y=ax+b+\dfrac{c}{px+q} \Longrightarrow y'=a-\dfrac{cp}{(px+q)^2}$

3. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q} \Longrightarrow y'=\dfrac{apx^2+2aqx+(bq-cp)}{(px+q)^2}$

4. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} \Longrightarrow y'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}}{(px^2+qx+r)^2}=\dfrac{(aq-bp)x^2+2(ar-cp)x+(br-cq)}{(px^2+qx+r)^2}$

ឧបសម្ព័ន្ធ តារាងរូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រគន្លឹះ

៥. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ពិសេស (Higher-Order Derivatives)

រូបមន្តដេរីវេលំដាប់ទី n ($n \in \mathbb{N}^*$) នៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ ៖

a. **អនុគមន៍ស្វ័យគុណ ៖** $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} = \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \quad (n \le m)$

ករណី $n > m \implies (x^m)^{(n)} = 0$ និង $(x^n)^{(n)} = n!$។

b. **អនុគមន៍ប្រភាគ ៖** $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \implies \left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

c. **អនុគមន៍ លោការីត ៖** $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \implies (\ln(ax+b))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

d. **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖** $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ និង $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$

e. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ៖**

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{និង} \quad (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

៦. រូបមន្តឡៃបនីសសម្រាប់ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ (Leibniz Formula)

បើ $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលំដាប់ n នោះដេរីវេលំដាប់ទី n នៃផលគុណ $u \cdot v$ គឺ ៖

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \binom{n}{n}uv^{(n)}$$

ដែល $\binom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ជាមេគុណទ្វេធា។

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនា $(x^2e^{2x})^{(n)}$ ដោយជ្រើស $u = e^{2x} \implies u^{(n-k)} = 2^{n-k}e^{2x}$ និង $v = x^2$ ៖

$$\begin{aligned}(x^2e^{2x})^{(n)} &= \binom{n}{0}(2^n e^{2x})(x^2) + \binom{n}{1}(2^{n-1}e^{2x})(2x) + \binom{n}{2}(2^{n-2}e^{2x})(2)\\ &= 2^{n-2}e^{2x}\left[4x^2 + 4nx + n(n-1)\right]\end{aligned}$$

ខ ៖ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ បន្ទាត់ប្រក្រតី និងធរណីមាត្រវិភាគ (Tangents & Geometry)

១. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ប្រក្រតីនៃខ្សែកោង $(C): y = f(x)$

1. **សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់** $M_0(x_0, y_0)$ ៖ $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (ដោយ $y_0 = f(x_0)$)
   មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ x_0 គឺ $m = f'(x_0) = \tan\alpha$។
2. **សមីការ បន្ទាត់ ប្រក្រតី (កែង នឹង បន្ទាត់ប៉ះ ត្រង់** M_0**)** ៖ $(N): y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$ $(f'(x_0) \neq 0)$
3. **បន្ទាត់ប៉ះដេក (ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស)** ៖ កើតមានកាលណា $f'(x_0) = 0 \implies (T): y = y_0$។
4. **បន្ទាត់ប៉ះឈរ** ៖ បើ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \implies (T): x = x_0$។
5. **បន្ទាត់ប៉ះចេញពីចំណុចក្រៅ** $A(x_A, y_A)$ ៖ ដោះស្រាយសមីការ $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$ ទាញរក x_0។
6. **បន្ទាត់ប៉ះស្រប ឬកែងនឹងបន្ទាត់** $(d): y = ax + b$ ៖
   - បើ $(T) \parallel (d) \implies f'(x_0) = a$
   - បើ $(T) \perp (d) \implies f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$

២. មុំប្រសព្វរវាងខ្សែកោងពីរ $(C_1): y = f(x)$ និង $(C_2): y = g(x)$

តាង x_0 ជាអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (C_1) និង (C_2) ហើយ $m_1 = f'(x_0)$, $m_2 = g'(x_0)$ ៖

- **មុំប្រសព្វ** θ ៖ $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ $(m_1 m_2 \neq -1)$
- **ខ្សែកោងប៉ះគ្នាត្រង់** x_0 ៖ $f(x_0) = g(x_0)$ និង $f'(x_0) = g'(x_0)$
- **ខ្សែកោងកែងគ្នា (Orthogonal) ត្រង់** x_0 ៖ $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$

៣. រូបមន្តធរណីមាត្រវិភាគជំនួយក្នុងប្លង់កូអរដោនេ

a. **ចម្ងាយរវាង** A **និង** B ៖
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

b. **ចំណុចកណ្តាល** I **នៃ** $[AB]$ ៖
$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

c. **ចម្ងាយពី** M_0 **ទៅ** $(\Delta): Ax + By + C = 0$ ៖
$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

d. **មេគុណប្រាប់ទិស** (AB) ៖
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (x_A \neq x_B)$$

គ ៖ ក្បួនវិភាគអថេរភាព តម្លៃបរមា និងភាពកោង (Analysis & Extrema)

១. ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតវិភាគ (Fundamental Theorems)

a. **ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle's Theorem)** ៖ បើ f ជាប់លើ $[a,b]$, មានដេរីវេលើ (a,b) និង $f(a)=f(b)$ នោះ មានយ៉ាងហោចណាស់មួយ $c \in (a,b)$ ដែល $f'(c)=0$។

b. **ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (Mean Value Theorem)** ៖ បើ f ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើ (a,b) នោះ មាន $c \in (a,b)$ ដែល ៖

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

c. **វិសមភាពកំណើនមានកំណត់** ៖ បើ $m \le f'(x) \le M$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ នោះ ៖

$$m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$$

២. ក្បួនរកតម្លៃបរមាធៀប និងបរមាដាច់ខាត (Extrema Rules)

1. តេស្តដេរីវេទីមួយ ៖

- បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x_0 \implies f(x_0)$ ជាតម្លៃ**អតិបរមាធៀប**។
- បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x_0 \implies f(x_0)$ ជាតម្លៃ**អប្បបរមាធៀប**។

2. តេស្តដេរីវេទីពីរ (ត្រង់ចំណុចស្ថានីយ $f'(x_0)=0$) ៖

- បើ $f''(x_0)<0 \implies f(x_0)$ ជាតម្លៃ**អតិបរមាធៀប**។
- បើ $f''(x_0)>0 \implies f(x_0)$ ជាតម្លៃ**អប្បបរមាធៀប**។
- បើ $f''(x_0)=0 \implies$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន (ត្រូវត្រឡប់ទៅប្រើតេស្តដេរីវេទីមួយ)។

3. តម្លៃបរមាដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ៖

- គណនាតម្លៃត្រង់ចុងដែន $f(a)$ និង $f(b)$។
- គណនាតម្លៃត្រង់គ្រប់ចំណុចវិបត្តិ $c_i \in (a,b)$ ដែល $f'(c_i)=0$ ឬគ្មានដេរីវេ។
- តម្លៃធំបំផុតក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងនោះជា **អតិបរមាដាច់ខាត** និងតូចបំផុតជា **អប្បបរមាដាច់ខាត**។

៣. ភាពប៉ោង ភាពផត និងចំណុចរបត់ (Concavity & Inflection)

- បើ $f''(x)>0$ លើចន្លោះ $I \implies$ ក្រាបមានភាព**ផត** (កោងងើបឡើងលើ $\cup$)។
- បើ $f''(x)<0$ លើចន្លោះ $I \implies$ ក្រាបមានភាព**ប៉ោង** (កោងសង្កត់ចុះក្រោម $\cap$)។
- $I(x_0,f(x_0))$ ជា**ចំណុចរបត់** លុះត្រាតែ $f''(x_0)=0$ (ឬគ្មានដេរីវេទីពីរ) ហើយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពេលឆ្លងកាត់ x_0។

ឃ ៖ អនុវត្តន៍ជាក់ស្តែង ៖ អត្រាបម្រែបម្រួល និងរូបវិទ្យា (Related Rates & Kinematics)

១. ជំហានដោះស្រាយចំណោទអត្រាបម្រែបម្រួលធៀប (Related Rates Steps)

ជំហានទី 1 ៖ គូសរូបតាង (បើចាំបាច់) កំណត់អថេរតាមពេលវេលា t និងទិន្នន័យដែលស្គាល់អត្រាបម្រែបម្រួល ($\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dV}{dt}, \ldots$)។

ជំហានទី 2 ៖ បង្កើតសមីការទំនាក់ទំនងធរណីមាត្រ ឬរូបវិទ្យារវាងអថេរទាំងនោះ (ទ្រឹស្តីបទពីតាករ, មាឌ, ផ្ទៃក្រឡា, សមាមាត្រត្រីកោណ)។

ជំហានទី 3 ៖ ធ្វើដេរីវេអាំភ្លីស៊ីតនៃសមីការទាំងសងខាងធៀបនឹងពេលវេលា t (ប្រើ Chain Rule)។

ជំហានទី 4 ៖ ជំនួសតម្លៃលេខដែលស្គាល់នៅខណៈពេលជាក់លាក់ រួចដោះស្រាយសមីការទាញរកអត្រាបម្រែបម្រួលដែលចង់បាន។

២. រូបមន្តធរណីមាត្រសំខាន់ៗដែលប្រើញឹកញាប់ក្នុងចំណោទអត្រា

a. **រង្វង់ ៖** បរិមាត្រ $C = 2\pi r$, ផ្ទៃ $A = \pi r^2$
$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

b. **ស្វ៊ែរ ៖** ផ្ទៃ $S = 4\pi r^2$, មាឌ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = S\frac{dr}{dt}$

c. **ស៊ីឡាំង ៖** មាឌ $V = \pi r^2 h$, ផ្ទៃខាង $S_{lat} = 2\pi rh$

d. **កោន ៖** មាឌ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(ប្រើសមាមាត្រកាំនិងកម្ពស់ $\frac{r}{h} = \frac{R}{H}$ ដើម្បីបង្រួមអថេរ)

e. **ជញ្ជាំង និងជណ្តើរ (ពីតាករ) ៖**
$x^2 + y^2 = L^2 \implies x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$

f. **ត្រីកោណមាត្រ ៖** $\tan\theta = \frac{y}{x} \implies \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$

៣. ចលនាក្នុងរូបវិទ្យា (Kinematics & Rates of Change)

ចំពោះចលនាត្រង់ដែលមានសមីការចលនា $s = s(t)$ ៖

- **ល្បឿនខណៈ ៖** $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$ **ល្បឿនស្តង់ (Speed) ៖** $|v(t)| = |s'(t)|$
- **សំទុះខណៈ ៖** $a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$
- **លក្ខណៈចលនា ៖**
  - បើ $v(t)\cdot a(t) > 0 \implies$ ចលនា**ស្ទុះ** (Speeding up)។
  - បើ $v(t)\cdot a(t) < 0 \implies$ ចលនា**យឺត** (Slowing down)។
  - វត្ថុឈប់ ឬប្តូរទិសដៅចលនាកាលណា $v(t) = 0$។

ខ ៖ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច និងឌីផេរ៉ង់ស្យែល (Economics & Differentials)

១. វិភាគម៉ាជីណាលក្នុងសេដ្ឋកិច្ច និងធុរកិច្ច (Marginal Analysis)

តាង x ជាចំនួនបរិមាណផលិតផល ឬទំនិញដែលបានផលិត និងលក់ ៖

1. **ថ្លៃដើមសរុប $C(x)$ និងថ្លៃដើមម៉ាជីណាល ៖** $C'(x)$ បង្ហាញពីថ្លៃដើមប៉ាន់ស្មានដើម្បីផលិតទំនិញគ្រឿងទី $(x+1)$ ៖

$$C(x+1)-C(x)\approx C'(x)$$

2. **ថ្លៃដើមមធ្យម ៖** $\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ និង ថ្លៃដើមមធ្យមម៉ាជីណាល ៖ $\bar{C}'(x)=\dfrac{xC'(x)-C(x)}{x^2}$
ថ្លៃដើមមធ្យមអប្បបរមាកើតមានកាលណា $\bar{C}'(x)=0 \iff C'(x)=\bar{C}(x)$ (ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល $=$ ថ្លៃដើមមធ្យម)។
3. **អនុគមន៍ចំណូលសរុប ៖** $R(x)=x\cdot p(x)$ (ដែល $p(x)$ ជាអនុគមន៍តម្លៃលក់ក្នុងមួយឯកតា)
ចំណូលម៉ាជីណាល ៖ $R'(x)$ ជាចំណូលប៉ាន់ស្មានពីការលក់ទំនិញគ្រឿងទី $(x+1)$។
4. **អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប ៖** $P(x)=R(x)-C(x)$
ប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណាល ៖ $P'(x)=R'(x)-C'(x)$។
5. **ចំណុចរួចខ្លួន (Break-even Point) ៖** $R(x)=C(x) \iff P(x)=0$។
6. **ប្រាក់ចំណេញអតិបរមា ៖** $P'(x)=0 \iff R'(x)=C'(x)$ (ចំណូលម៉ាជីណាល $=$ ថ្លៃដើមម៉ាជីណាល) និង $P''(x)<0$។

២. ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងការគណនាតម្លៃប្រហែល (Differentials & Linear Approximations)

1. **និយមន័យឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖** បើ $y=f(x)$ នោះ $dy=f'(x)dx=f'(x_0)\Delta x$ (ដោយ $dx=\Delta x$)។
2. **រូបមន្តតម្លៃប្រហែលលីនេអ៊ែរ ៖**

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

3. **រូបមន្តតម្លៃប្រហែលពិសេសពេល $\Delta x\approx 0$ ៖**
   - $(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x$
   - $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\dfrac{1}{2}\Delta x$
   - $\dfrac{1}{1+\Delta x}\approx 1-\Delta x$
   - $e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x$
   - $\ln(1+\Delta x)\approx \Delta x$
   - $\sin(\Delta x)\approx \Delta x$
4. **កំហុសក្នុងការវាស់វែង ៖**
   - កំហុសដាច់ខាត ៖ $|\Delta y|\approx |dy|=|f'(x_0)\Delta x|$
   - កំហុសធៀប ៖ $\dfrac{|\Delta y|}{|y|}\approx\dfrac{|dy|}{|y|}=\left|\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right||\Delta x|$
   - កំហុសជាភាគរយ ៖ $\dfrac{|\Delta y|}{|y|}\times 100\%$

ច ៖ វិធានឡូពីតាល់ និងលីមីតគន្លឹះ (L'Hôpital's Rule & Limits)

១. វិធានឡូពីតាល់ (L'Hôpital's Rule)

បើ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\left[\frac{0}{0}\right]$ ឬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ហើយ f និង g មានដេរីវេលើចន្លោះបើកផ្ទុក x_0 ដោយ $g'(x)\neq 0$ នោះ ៖

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

សម្គាល់ ៖ វិធាននេះក៏នៅតែពិតចំពោះ $x\to\pm\infty$ ផងដែរ។ បើក្រោយពេលធ្វើដេរីវេលើកទីមួយ នៅតែជាប់រាងមិនកំណត់ គេអាចបន្តធ្វើដេរីវេលើកទីពីរ $\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}$ បាន។

២. វិធីសាស្ត្របំប្លែងរាងមិនកំណត់ទាំង ៧ ទៅរាងឡូពីតាល់

a. **រាង** $[0\times\infty]$ ៖ សរសេរ $f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ (រាង $\left[\frac{0}{0}\right]$) ឬ $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ (រាង $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)។

b. **រាង** $[+\infty-\infty]$ ៖ តម្រូវភាគបែងរួម ឬគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ដើម្បីបំប្លែងទៅរាង $\left[\frac{0}{0}\right]$ ឬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$។

c. **រាងស្វ័យគុណ** $[1^\infty],[0^0],[\infty^0]$ ៖ តាង $y=[f(x)]^{g(x)}\implies \ln y=g(x)\ln f(x)$ (រាង $[0\times\infty]$) រួចគណនា $L=\lim\ln y\implies \lim y=e^L$។

៣. លីមីតគ្រឹះដែលទាក់ទងនឹងដេរីវេ (Fundamental Limits)

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad(a>0)$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
7. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
8. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
9. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty\quad(n>0)$
10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0\quad(n>0)$

ឆ ៖ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ និងតារាងតម្លៃមុំពិសេស (Trigonometry Reference)

១. រូបមន្តត្រីកោណមាត្រគ្រឹះ

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi)$
- $\tan x \cdot \cot x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

២. រូបមន្តផលបូក ផលដក មុំឌុប កន្លះមុំ និងបំប្លែងផលគុណ/ផលបូក

a. **ផលបូក-ផលដក ៖** $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a, \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

b. **មុំឌុប ៖** $\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

c. **កន្លះមុំ (បញ្ចុះដឺក្រេ) ៖** $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}, \quad \tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

d. **បំប្លែង ផលបូក ទៅ ផលគុណ ៖** $\sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2}, \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

៣. តារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

មុំជាដឺក្រេ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
មុំជារ៉ាដ្យង់ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

៤. សញ្ញាតាមការដ្ឋាន ៤ (Signs by Quadrants) ៖ **I** $(\sin, \cos, \tan, \cot > 0)$; **II** $(\sin > 0$, ផ្សេងទៀត $< 0)$; **III** $(\tan, \cot > 0$, ផ្សេងទៀត $< 0)$; **IV** $(\cos > 0$, ផ្សេងទៀត $< 0)$

ឯកសារយោង

1. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

2. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

3. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** ៖ សៀវភៅគ្រូ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

4. **នាយកដ្ឋានធានាគុណភាពអប់រំ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) គណិតវិទ្យា (២០១៤-២០២៥), ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា។

5. **នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹតការ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, រាជធានីភ្នំពេញ។

6. **Stewart, James** (2016) ៖ *Calculus: Early Transcendentals* (8th Edition), Cengage Learning, Boston, USA.

7. **Thomas, George B., Weir, Maurice D., & Hass, Joel** (2018) ៖ *Thomas' Calculus* (14th Edition), Pearson Education, New York, USA.

8. **Larson, Ron, & Edwards, Bruce** (2018) ៖ *Calculus* (11th Edition), Cengage Learning, USA.

9. **Spivak, Michael** (2008) ៖ *Calculus* (4th Edition), Publish or Perish, Houston, Texas.