សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

STUDY OF FUNCTIONS AND GRAPH SKETCHING

ថ្នាក់ទី ១២ • GRADE 12

ទ្រឹស្តីសង្ខេប • វិធីសាស្ត្រគណនា • លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងប្រឡងសិស្សពូកែ

អ្នករៀបរៀង ៖ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០២៦

គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យ

គណៈកម្មការរៀបរៀង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
ត្រួតពិនិត្យខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
រៀបចំខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រចនាគម្រប និងទំព័រ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រូបភាព និងតារាង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
កែសម្រួលអក្ខរាវិរុទ្ធ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
គណៈកម្មការពិនិត្យចុងក្រោយ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ក្នុងការស្វ័យសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

ព័ត៌មានសៀវភៅ

កំណែសាកល្បង © ២០២៦

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ថ្នាក់ទី១២

STUDY OF FUNCTIONS - GRADE 12

រៀបរៀងដោយ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

សម្រាប់បោះពុម្ពផ្សាយ៖ **បណ្ណាគារអង្គរ**

សេចក្តីឧទ្ទិស

សៀវភៅ «**សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍**» នេះ
សូមឧទ្ទិសជូនចំពោះ៖

ភរិយាជាទីស្រឡាញ់

ថៃ៉ត សុគន្ធា

និង

កូនស្រីជាទីស្រឡាញ់

ខែម សោភា

ដែលជាកម្លាំងចិត្ត និងជាប្រភពនៃសុភមង្គលដ៏កក់ក្តៅ
ក្នុងដំណើរជីវិត និងការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្ញុំបាទជានិច្ចនិរន្តរ៍។

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យា គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដ៏មានសារៈសំខាន់បំផុត ក្នុងការអភិវឌ្ឍការគិតបែបសមហេតុផល វិភាគស៊ីជម្រៅ និងការដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ បច្ចេកវិទ្យា និងជីវភាពរស់នៅជាក់ស្តែង។ ក្នុងចំណោមប្រធានបទគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ «**ការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍**» គឺជាស្នូលដ៏សំខាន់បំផុតនៃគណិតវិភាគ (Calculus) ដែលសិស្សានុសិស្សគ្រប់រូបត្រូវតែក្តាប់ឱ្យបានច្បាស់លាស់ ទាំងទ្រឹស្តី ទាំងវិធីសាស្ត្រគណនា និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង សម្រាប់ត្រៀមខ្លួនប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

សៀវភៅ «**សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងហ្មត់ចត់ និងសម្បូរបែប ដោយបែងចែកខ្លឹមសារជា ៣ មេរៀនចម្បងៗ៖

- **មេរៀនទី១ ៖ អនុគមន៍សនិទាន** — ផ្តោតលើដែនកំណត់ សញ្ញាទ្វេធានិងត្រីធា ទិសដៅអថេរភាព អតិបរមាធៀបនិងអប្បបរមាធៀប ចំណុចរបត់ សិក្សាទីតាំងធៀប អនុគមន៍គូ-សេស អ័ក្សឆ្លុះ-ផ្ចិតឆ្លុះ បន្ទាត់ប៉ះ អាស៊ីមតូតឈរ-ដេក-ទ្រេត ព្រមទាំងប្លង់សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទានគ្រប់ទម្រង់ ព្រមជាមួយលំហាត់អនុវត្តន៍យ៉ាងក្បោះក្បាយ។
- **មេរៀនទី២ ៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** — ពន្យល់ពីនិយមន័យ លក្ខណៈគ្រឹះ សមីការនិងវិសមីការអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល រូបមន្តដេរីវេ លីមីតសំខាន់ៗ វិធីសាស្ត្រសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ព្រមទាំងកម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍កម្រិតខ្ពស់។
- **មេរៀនទី៣ ៖ អនុគមន៍លោការីត** — ពិភាក្សាលម្អិតលើនិយមន័យ លក្ខណៈនៃលោការីតនេពែ ដេរីវេ លីមីត សមីការ វិសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការលោការីត ដំណើរការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ព្រមទាំងកម្រងលំហាត់សរុបជំពូកទី៤ សម្រាប់វាស់ស្ទង់សមត្ថភាពសិស្ស។

សៀវភៅនេះត្រូវបានរចនាឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ មានក្រឡាសៀវភៅសរសេរ (Seyes Grid) សម្រាប់សិស្សអនុវត្តដោះស្រាយដោយផ្ទាល់ដៃ និងមានរូបភាពគំនូសក្រាហ្វិកគណិតវិទ្យា TikZ យ៉ាងច្បាស់លាស់។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមគ្គុទេសក៍ និងជាកម្រងឯកសារជំនួយស្មារតីដ៏មានតម្លៃបំផុតសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្អូនៗសិស្សានុសិស្សក្នុងការបង្រៀននិងរៀន។ ទោះបីជាមានការខិតខំប្រឹងប្រែងយ៉ាងណាក្តី ក៏សៀវភៅនេះប្រាកដជាមិនអាចជៀសផុតពីកំហុសអចេតនាណាមួយឡើយ។ ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិរិះគន់ស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកអានដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

សេចក្ដីដឹងគុណ

ជាបឋម ខ្ញុំបាទ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី** សូមលំឱនកាយវាចាចិត្ត ថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុត ជូនចំពោះលោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ គឺមាតា និងបិតារបស់ខ្ញុំ ដែលលោកទាំងពីរបានពលិកម្មគ្រប់បែបយ៉ាង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា ផ្ដល់ភាពកក់ក្ដៅ និងអប់រំទូន្មានប្រៀនប្រដៅខ្ញុំបាទតាំងពីកុមារភាព រហូតធ្វើឱ្យខ្ញុំអាចឈរយ៉ាងរឹងមាំនៅលើវិថីជីវិតមួយនេះ។ បើគ្មានការលះបង់ និងសេចក្ដីស្រឡាញ់ដ៏មហាសាលពីលោកទាំងពីរទេ នោះខ្ញុំបាទក៏ប្រហែលជាគ្មានថ្ងៃនេះឡើយ។

ជាបន្តបន្ទាប់ ខ្ញុំបាទសូមសម្ដែងនូវសេចក្ដីគោរពដឹងគុណយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រ ជូនចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ តាំងពីកម្រិតបឋមសិក្សា រហូតដល់ថ្នាក់សាកលវិទ្យាល័យ ដែលបានខិតខំចំណាយកម្លាំងកាយចិត្តក្នុងការផ្ទេរនូវចំណេះដឹង និងបណ្ដុះបណ្ដាលរូបខ្ញុំឱ្យក្លាយជាធនធានមនុស្សមួយរូបប្រកបដោយសមត្ថភាព។ រាល់ដំបូន្មានដែលទទួលបានពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ គឺជាប្រទីបបំភ្លឺផ្លូវដែលតែងតែចង្អុលបង្ហាញឱ្យខ្ញុំបាទដើរលើកន្លងដ៏ត្រឹមត្រូវ។

ជាពិសេសលើសពីនេះទៅទៀត ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងផ្ញើជូននូវសេចក្ដីស្រឡាញ់ដ៏ធំធេងមិនអាចកាត់ថ្លៃបាន ជូនចំពោះភរិយាជាទីស្រឡាញ់របស់ខ្ញុំ គឺលោកស្រី **ង៉ែត សុគន្ធា** ព្រមទាំងកូនស្រីជាទីស្រឡាញ់ **ខែម សោភា** ដែលតែងតែនៅក្បែរ ផ្ដល់ភាពកក់ក្ដៅ មើលថែទាំ លើកទឹកចិត្ត និងលះបង់គ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យខ្ញុំបាទមានពេលវេលាពេញលេញក្នុងការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងសៀវភៅមួយក្បាលនេះឡើងរហូតទទួលបានជោគជ័យ។

សៀវភៅ «**សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍**» មួយក្បាលនេះ មិនអាចលេចចេញជារូបរាងឡើងបានឡើយ ប្រសិនបើគ្មានការលើកទឹកចិត្តពីមនុស្សជាច្រើនជុំវិញខ្លួនខ្ញុំ។ ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់មិត្តភក្តិ បងប្អូន និងសហការីទាំងអស់ ដែលតែងតែផ្ដល់មតិយោបល់ ជួយកែសម្រួល និងជួយជំរុញទឹកចិត្តខ្ញុំនៅក្នុងដំណើរការនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះជាភាសា LaTeX។ ជាចុងបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមប្រសិទ្ធពរជ័យ សិរីសួស្ដី ជ័យមង្គល ជូនដល់លោកអ្នកមានគុណ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ភរិយា កូនស្រី ព្រមទាំងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមប្រកបដោយសុខភាពល្អបរិបូរណ៍ ប្រាជ្ញាភ្លឺថ្លា ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និងសម្រេចបាននូវរាល់បំណងប្រាថ្នាក្នុងជីវិតជានិរន្តរ៍។

ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

តារាងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ	អានថា / ការប្រើប្រាស់
$f(x), y$	អនុគមន៍នៃ x	អនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ I
$\Delta x, \Delta y$	កំណើននៃ x និងកំណើននៃ y	$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x) - f(x_0)$
$f'(x_0)$	ចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ x_0	f ព្រីមនៃ x_0 ឬ ដេរីវេត្រង់ x_0
$f'(x), y'$	អនុគមន៍ដេរីវេទីមួយនៃ $f(x)$	ដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍
$\dfrac{df}{dx}, \dfrac{dy}{dx}$	និមិត្តសញ្ញាឡាយប្និស (Leibniz)	ដេរីវេនៃ y ធៀបនឹង x
$f''(x), y''$	អនុគមន៍ដេរីវេទីពីរ	f ព្រីមពីរដងនៃ x
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	និមិត្តសញ្ញាឡាយប្និសដេរីវេទីពីរ	ដេរីវេទីពីរនៃ y ធៀបនឹង x
$f^{(n)}(x)$	ដេរីវេលំដាប់ n នៃ $f(x)$	ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $(n \geq 1)$
dy	ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ y	$dy = f'(x)dx$
m	មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ	$m = f'(x_0) = \tan\alpha$
$\approx$	តម្លៃប្រហែល	ស្មើប្រហែល (Approximation)
$v(t), a(t)$	ល្បឿន និងសំទុះនៃចលនា	$v(t) = s'(t),\ a(t) = v'(t) = s''(t)$
$C(x), R(x), P(x)$	ថ្លៃដើម ចំណូល និងចំណេញ	អនុគមន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច
$C'(x), R'(x), P'(x)$	ម៉ាជីណាលនៃថ្លៃដើម ចំណូល ចំណេញ	អត្រាបម្រែបម្រួលមួយឯកតា
$\overline{C}(x)$	ថ្លៃដើមមធ្យម	$\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$
$\mathbb{R}, \mathbb{N}^*$	សំណុំចំនួនពិត និងគត់វិជ្ជមាន	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$
$\in, \notin$	ជាធាតុនៃ, មិនមែនជាធាតុនៃ	សញ្ញាជាសមាជិកក្នុងសំណុំ
$[a,b],]a,b[$	ចន្លោះបិទ និងចន្លោះបើក	$a \leq x \leq b,\ a < x < b$

មាតិកា

មេរៀនទី ១ : អនុគមន៍សនិទាន **9**

១ ដែនកំណត់ 9

២ សញ្ញាទ្វេធា 10

៣ ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ 11

៤ អតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ 12

៥ សិក្សាទីតាំងធៀប 14

៦ អនុគមន៍គូ និងអនុគមន៍សេស 14

៧ អ័ក្សឆ្លុះ និងផ្ចិតឆ្លុះ 15

៨ បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ 16

៩ អាស៊ីមតូត 16

១០ ប្លង់សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង $C: y=f(x)$ 21

១១ អនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ 22

១២ អនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ 23

មេរៀនទី ២ : អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល **179**

១ និយមន័យ 179

២ លក្ខណៈ 179

៣ សមីការនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 179

៤ ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 180

៥ លីមីតនៃអនុគមន៍ 182

៦ សិក្សាអនុគមន៍ 183

មេរៀនទី ៣ : អនុគមន៍លោការីត **237**

១ និយមន័យ 237

២ លក្ខណៈ 237

៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 238

៤ លីមីតនៃអនុគមន៍ 242

៥ សមីការ និងវិសមីការ 242

៦ សិក្សាអនុគមន៍ 246

មេរៀនទី ៤ ៖ ផ្នែកដំណោះស្រាយ **415**

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ១ ៖ អនុគមន៍សនិទាន 415

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ២ ៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 520

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ៣ ៖ អនុគមន៍លោការីត 571

លំហាត់កិច្ចការផ្ទះ សិក្សាអនុគមន៍ថ្នាក់ទី១២ 718

ឧបសម្ព័ន្ធ ៖ តារាងរូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រគន្លឹះ **723**

ក ៖ តារាងរូបមន្តដេរីវេ (Table of Derivatives) 723

ខ ៖ តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលគ្រឹះ (Primitives & Integrals) 725

គ ៖ លីមីតនៃអនុគមន៍ និងវិធីសាស្ត្រគណនារាងមិនកំណត់ 727

ឃ ៖ ជំហានទាំងស្រុងនៃការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (ភាគ ១) 729

ឃ ៖ ជំហានទាំងស្រុងនៃការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (ភាគ ២) 730

ង ៖ ធរណីមាត្រវិភាគ និងបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (Tangents & Analytic Geometry) 731

ច ៖ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ និងតារាងតម្លៃមុំពិសេស 732

ឯកសារយោង **733**

មេរៀនទី ១

អនុគមន៍សនិទាន

១ ដែនកំណត់

និយមន័យ ១

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ជាសំណុំអថេរ x ដែលបណ្ដាលឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃ។

ជាទូទៅ ១

រំលឹកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

- ចំពោះអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ មានន័យចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$
- អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=e^{U(x)}$ មានន័យចំពោះគ្រប់ $U(x)$ ជារបស់ $\mathbb{R}$
- លោការីតនេពែរ $f(x)=\ln[g(x)]$ មានន័យកាលណា $g(x)>0$
- អនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ មានន័យកាលណា $Q(x)\neq 0$
- អសនិទាន $f(x)=\sqrt{g(x)}$ មានន័យកាលណា $Q(x)\geq 0$

លំហាត់គំរូ ១

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\sqrt{x+5}$

ខ. $f(x)=\sqrt{7x-14}$

គ. $f(x)=\sqrt{2x^2-8x+6}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{16-4x^2}$

ង. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$

ច. $f(x)=\sqrt{4-(x+1)^2}$

ចម្លើយ:

២ សញ្ញាទ្វេធា

២.១ សញ្ញាទ្វេធា $f(x) = ax + b$

បើ $ax + b = 0$ គេបាន $x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a	

២.២ សញ្ញាត្រីធា $f(x) = ax^2 + bx + c$

បើ $ax^2 + bx + c = 0$ ប្រើ ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = b^2 - 4ac$

- បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
  ដោយ x_1, x_2 ជាឫស (សន្មត $x_1 < x_2$) គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a	

- បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឬសឌុប $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
  ដោយ $x_1 = x_2 = \alpha$ ជាឬស គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	α		$+\infty$
ax^2+bx+c	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាដូច a	

- បើ $\Delta < 0$ សមីការគ្មានឬស(ដោយសារតែយើងសិក្សាក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$)
  គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	

ចំពោះពហុធាដឺក្រេទី២ $f(x) = ax^2+bx+c = 0$ បើ b ជាចំនួនគត់គូ គេអាចប្រើប្រាស់ Δ' ជំនួសឱ្យ Δ បានដែល $\Delta' = (b')^2 - ac$ ដែល $b' = \frac{b}{2}$

- បើ $\Delta' > 0$ សមីការមានឬសពីរផ្សេងគ្នា $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$
- បើ $\Delta' = 0$ សមីការមានឬសឌុប $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$
- បើ $\Delta' < 0$ សមីការគ្មានឬស(ដោយសារតែយើងសិក្សាក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$)

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌឬសទាំងបីខាងលើ យើងនឹងសិក្សាតារាងសញ្ញាដូចគ្នាទៅនឹង តារាងសញ្ញារបស់ Δ តាមលក្ខខណ្ឌនីមួយៗផងដែរ។

៣ ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

៣.១ អនុគមន៍កើន-អនុគមន៍ចុះ

ជាទូទៅ ២

- f ជាអនុគមន៍កើននៅចន្លោះ I មួយកាលណា $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ នាំឱ្យ $f(x_1) < f(x_2)$ ។
- f ជាអនុគមន៍ចុះនៅចន្លោះ I មួយកាលណា $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ នាំឱ្យ $f(x_1) > f(x_2)$ ។

៣.២ ដេរីវេនិងទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

ជាទូទៅ ៣

- f ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ $x \in (a,b)$ លុះត្រាតែ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in (a,b)$
- f ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះ $x \in (a,b)$ លុះត្រាតែ $f'(x) < 0$ គ្រប់ $x \in (a,b)$
- f ជាអនុគមន៍ថេរ លើចន្លោះ $x \in (a,b)$ លុះត្រាតែ $f'(x) = 0$ គ្រប់ $x \in (a,b)$

៤ អតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

៤.១ អតិបរមាធៀប អប្បបរមាធៀប និងដេរីវេទី 1

ជាទូទៅ ៤

- f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ} \quad x < x_0 \\ f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ} \quad x = x_0 \\ f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ} \quad x > x_0 \end{cases}$
- f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ} \quad x < x_0 \\ f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ} \quad x = x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ} \quad x > x_0 \end{cases}$

៤.២ អតិបរមាធៀប អប្បបរមាធៀប និងដេរីវេទី 2

ជាទូទៅ ៥

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេពីរដង លើចន្លោះមួយដែលមាន x_0

- f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$
- f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

ជាទូទៅ ៦ : សម្គាល់

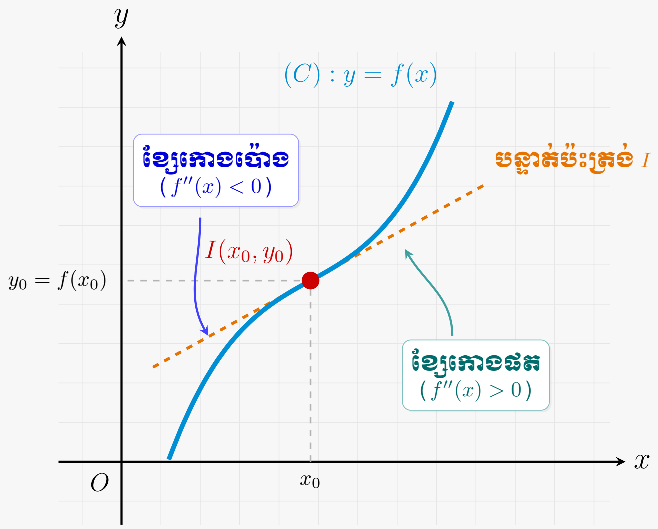
បើ $f''(x_0) = 0$ នោះគេត្រូវត្រឡប់ទៅសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី 1 វិញ ដើម្បីឈានទៅរកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀប។

៤.៣ ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

ជាទូទៅ ៧

ចំណុច $I(x_0, y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង។ តាងអនុគមន៍ កាលណាខ្សែកោងប៉ោង ឬផតនៅលើ $[a, x_0]$ ហើយផត ឬប៉ោងនៅលើ $[x_0, b]$ ។ របៀបរកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f :

- ជំហានទី១៖ រក $f''(x)$
- ជំហានទី២ ៖ ដោះស្រាយសមីការ $f''(x) = 0$
- ជំហានទី ៣៖ សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។
  - បើ $f''(x)$ ដូរសញ្ញានៅសងខាង x_0 នោះខ្សែកោងមានចំណុចរបត់ $I(x_0, f(x_0))$
  - បើ $f''(x)$ មិនដូរសញ្ញា នោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចរបត់ទេ។



៥ សិក្សាទីតាំងធៀប

ជាទូទៅ ៨

បើគេមានក្រាប $(C): f(x) = \cdots$ និងបន្ទាត់ $(D): y = \cdots$ យើងត្រូវៈ

- យក $f(x) - y$
- សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x) - y$
  - បើ $f(x) - y > 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (D)
  - បើ $f(x) - y = 0$ នោះក្រាប (C) កាត់បន្ទាត់ (D) នៅត្រង់ចំណុច មួយគឺ (x, y) ដែល $y = f(x)$
  - បើ $f(x) - y < 0$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅក្រោមន្ទាត់ (D)

៦ អនុគមន៍គូ និងអនុគមន៍សេស

ជាទូទៅ ៩

- ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{D}, \exists -x \in \mathbb{D}$ បើ $f(-x) = f(x)$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍គូ
- ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{D}, \exists -x \in \mathbb{D}$ បើ $f(-x) = -f(x)$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍សេស

៧ អ័ក្សឆ្លុះ និងផ្ចិតឆ្លុះ

ជាទូទៅ ១០

- បើបន្ទាត់ $x=a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប C លុះត្រាតែ $f(2a-x)=f(x)$
- បើចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$
- បើ f ជាអនុគមន៍ គូ នោះគេបាន $x=0$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C)
- បើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះគេបានចំណុច $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)។

ជាទូទៅ ១១

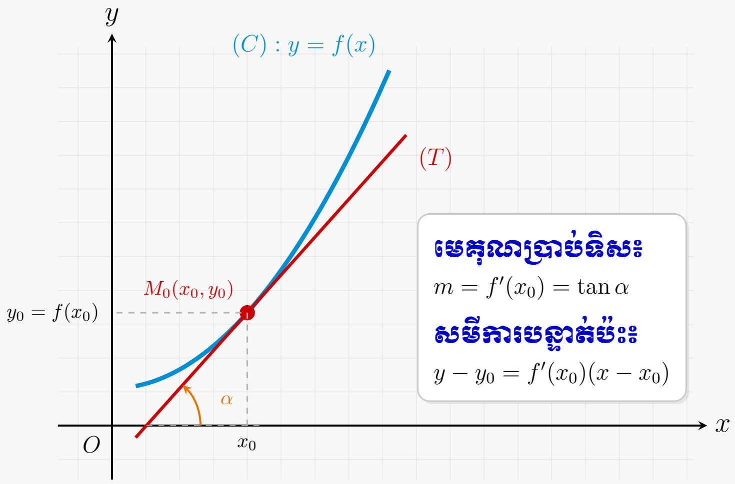
ការរកផ្ចិតឆ្លុះ ឬអ័ក្សឆ្លុះតាមរូបមន្តប្តូរអ័ក្ស

- បើបន្ទាត់ $x=a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ គេកំណត់សរសេរ $\begin{cases} x=a+X \\ y=Y \end{cases}$
  យក x,y ទៅជួសអនុគមន៍ដើមហើយទាញរក Y រួចស្រាយថា $Y=F(X)$ ជាអនុគមន៍គូ
- បើបន្ទាត់ $I(a,b)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ គេកំណត់សរសេរ $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$
  យក x,y ទៅជួសអនុគមន៍ដើមហើយទាញរក Y រួចស្រាយថា $Y=F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស

៨ បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍

ជាទូទៅ ១២

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ f នៅត្រង់ x_0 ជាដេរីវេ f នៅត្រង់ x_0 គឺ $m = f'(x_0)$ ។



ជាទូទៅ ១៣

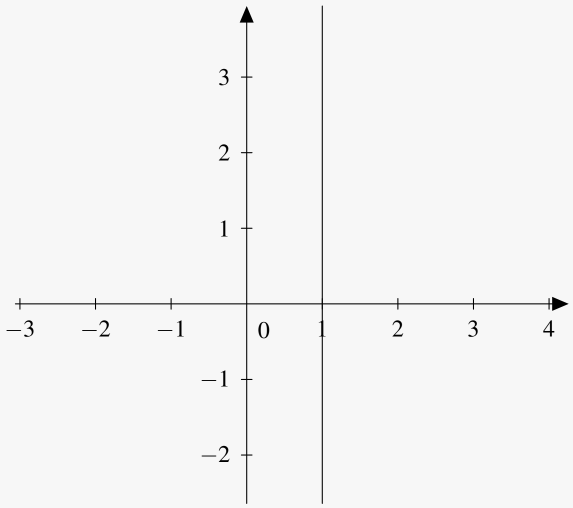
សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច (x_0, y_0) កំណត់ដោយ៖
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ដែល $f'(x_0)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះ និង (x_0, y_0) កូអរដោនេចំណុចប៉ះ។

៩ អាស៊ីមតូត

៩.១ អាស៊ីមតូតឈរ

ជាទូទៅ ១៤

បន្ទាត់ $x = a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាលណា $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$



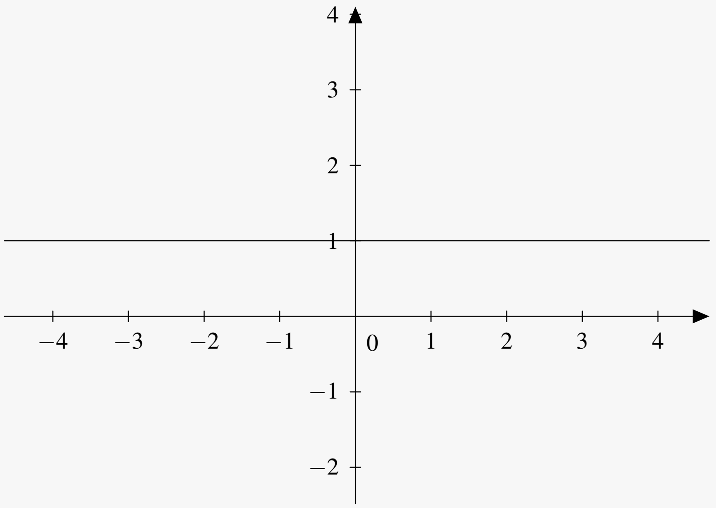
ជាទូទៅ ១៥ : សម្គាល់

ចំពោះអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន អាស៊ីមតូតឈរមានក្នុងករណីភាគបែងមានឫស

៩.២ អាស៊ីមតូតដេក

ជាទូទៅ ១៦

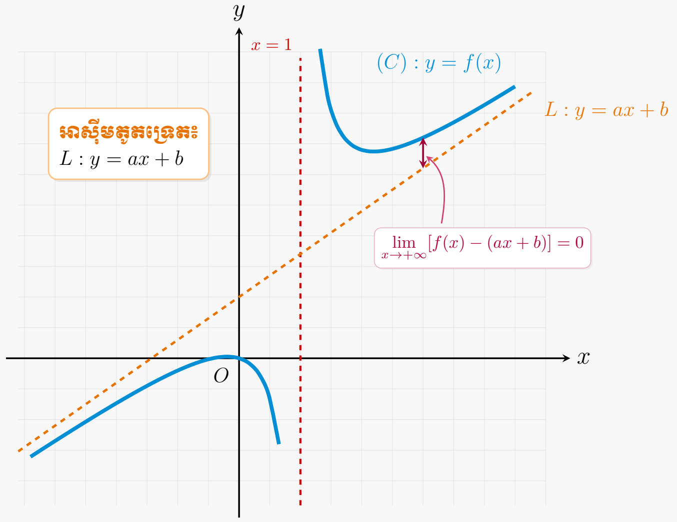
បន្ទាត់ $y=b$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C កាលណា $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ ដែល $b\in\mathbb{R}$



៩.៣ អាស៊ីមតូតទ្រេត

ជាទូទៅ ១៧

បើអនុគមន៍ $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $L: y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។



ជាទូទៅ ១៨

បង្ហាញថា $L: y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C បន្ទាត់ $L: y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C តាង $y=f(x)$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

ជាទូទៅ ១៩ : សម្គាល់

នៅក្នុងអនុគមន៍ដែលយើងសិក្សានៅកម្រិតវិទ្យាល័យនេះ បើសិនណាជាមានអាស៊ីមតូតដេក នោះមិនមានអាស៊ីមតូតទ្រេតទេ។ មានន័យថា បើមាន៖

- អាស៊ីមតូតឈរ $x=a$ និង អាស៊ីមតូតដេក $y=b$
- អាស៊ីមតូតឈរ $x=a$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=ax+b$

លំហាត់គំរូ ២

រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=-x+3+\frac{3}{x-1}$

គ. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-3}$

ង. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

ខ. $f(x)=\frac{2x^2+3x+4}{x-1}$

ឃ. $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x+2}$

ច. $f(x)=\frac{x-1}{(x-1)^2}$

ចម្លើយ:

ប្រតិបត្តិ ១

រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

ខ. $f(x)=\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

គ. $f(x)=\frac{4x^2+4x-9}{4x^2-4}$

ចម្លើយ:

ប្រតិបត្តិ ២

រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = x + 1 + \frac{2}{x-1}$ ខ. $y = \frac{x^2+4x+1}{x+2}$ គ. $y = \frac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

ចម្លើយ:

១០ ប្លង់សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង $C: y = f(x)$

ជាទូទៅ ២០

ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍មួយគេត្រូវ៖

- ដែនកំណត់
- ទិសដៅអថេរភាព
  - រកដេរីវេទី 1: $f'(x)$
  - រកឫសរបស់ដេរីវេទី 1 : $f'(x) = 0$ (បើមាន)
  - សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$
  - ចំណុចបរមា (បើមាន)
  - លីមីតចុងដែន និងអាស៊ីមតូត
  - អាស៊ីមតូត
  - តារាងអថេរភាព
- ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $x'x$ (ឱ្យ $y = 0$) បើមាន
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $y'y$ (ឱ្យ $x = 0$) បើមាន
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេក បើមាន

១១ អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$

ជាទូទៅ ២១ : សម្គាល់

$f(x)$ មានន័យកាលណា $px+q \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{q}{p}$

គេបាន $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{q}{p}\right\}$ ឬ $\mathbb{D}_f = \left(-\infty, -\frac{q}{p}\right) \cup \left(-\frac{q}{p}, +\infty\right)$

លំហាត់គំរូ ៣

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$

គ. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$

ខ. $f(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x-1}$

ឃ. $f(x) = -x+3+\frac{3}{x-1}$

ចម្លើយ:

១២ អនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

១២.១ ដែនកំណត់

ជាទូទៅ ២២ : សម្គាល់

អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា $px^2+qx+r\neq 0$ ឱ្យ $px^2+qx+r=0$
ប្រើឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$

- $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរ $x_1=\alpha, x_2=\beta$ នោះ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}-\{\alpha,\beta\}$
- $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\alpha$ នោះ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}-\{\alpha\}$
- $\Delta<0$ សមីការគ្មានឫស នោះ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

លំហាត់គំរូ ៤

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$។

ចម្លើយ:

លំហាត់គំរូ ៥

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ ការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (១០០ លំហាត់)

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប និងពង្រឹងសមត្ថភាព

១. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ គ. $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ឃ. $(-2,+\infty)$

២. អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{2x-6}$ មានន័យកាលណា៖

ក. $x\geq 3$ ខ. $x>3$ គ. $x\leq 3$ ឃ. $x\neq 3$

៣. ដែនកំណត់នៃ $f(x)=\ln(x-4)$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $x>4$ គ. $x\geq 4$ ឃ. $x\neq 4$

៤. បើ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ មានន័យកាលណា៖

ក. $P(x)\neq 0$ គ. $Q(x)\neq 0$
ខ. $Q(x)>0$ ឃ. $P(x)=Q(x)$

៥. សញ្ញានៃ $f(x)=-3x+6$ វិជ្ជមានលើចន្លោះ៖

ក. $(2,+\infty)$ ខ. $(-\infty,2)$ គ. $\{2\}$ ឃ. $\mathbb{R}$

៦. ត្រីធា x^2-5x+6 មានសញ្ញាផ្ទុយពី a ក្នុងចន្លោះ៖

ក. $(2,3)$ ខ. $(-\infty,2)$ គ. $(3,+\infty)$ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៧. ដែនកំណត់នៃ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ខ. $\mathbb{R}$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $x\neq -1$

៨. បើ $\Delta<0$ នោះត្រីធាដឺក្រេទី ២ មានសញ្ញា៖

ក. ដូរសញ្ញា ២ ដង គ. អវិជ្ជមានជានិច្ច
ខ. ដូច a ជានិច្ច ឃ. សូន្យ

៩. ដែនកំណត់នៃ $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ គឺ៖

ក. $[-2,2]$ គ. $\mathbb{R}$
ខ. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ឃ. $x>2$

១០. អនុគមន៍ $f(x)=e^{2x+1}$ មានដែនកំណត់៖

ក. $x>-1/2$ ខ. $x\neq 0$ គ. $\mathbb{R}$ ឃ. $(0,+\infty)$

១១. បើ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ នោះដែនកំណត់គឺ៖

ក. $x \geq 0$ ខ. $x \neq 0$ គ. $x > 0$ ឃ. $\mathbb{R}$

១២. សញ្ញានៃ $f(x) = x^2 + 1$ គឺ៖

ក. វិជ្ជមានជានិច្ច
គ. វិជ្ជមានកាលណា $x > 1$
ខ. អវិជ្ជមានជានិច្ច
ឃ. សូន្យ

១៣. ដែនកំណត់នៃ $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ គឺ៖

ក. $x \neq 3$
គ. $x \neq \pm 3$
ខ. $x \neq -3$
ឃ. $\mathbb{R}$

១៤. បើ $f(x) = \ln(-x)$ មានន័យកាលណា៖

ក. $x > 0$ ខ. $x < 0$ គ. $x = 0$ ឃ. $x \neq 0$

១៥. ឫសនៃទ្វេធា $2x + 8 = 0$ គឺ៖

ក. 4 ខ. -4 គ. 2 ឃ. -8

១៦. ដែនកំណត់នៃ $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $\emptyset$ គ. $x > 0$ ឃ. $x \geq -1$

១៧. ចំពោះ $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ តម្លៃដែលមិនស្ថិតក្នុងដែនកំណត់គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 0 និង 1 ឃ. -1

១៨. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ មានដែនកំណត់៖

ក. $x \in [-2, 2]$ ខ. $x > 2$ គ. $x < -2$ ឃ. $\mathbb{R}$

១៩. ឫសឌុបនៃ $x^2 - 4x + 4 = 0$ គឺ៖

ក. $x = 2$ ខ. $x = -2$ គ. $x = 0$ ឃ. $x = 4$

២០. បើ $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ នោះដែនកំណត់គឺ៖

ក. $x \neq 2$
គ. $x \neq 2$ និង $x \neq 3$
ខ. $x \neq 3$
ឃ. $x \neq 1$

២១. ដែនកំណត់នៃ $f(x) = \tan x$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$
គ. $x \neq k\pi$
ខ. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
ឃ. $x > 0$

២២. សញ្ញានៃ $x - 5$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់៖

ក. $x=0$ ខ. $x=5$ គ. $x=-5$ ឃ. មិនប្តូរសញ្ញា

២៣. ដែនកំណត់ $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ គឺ៖

ក. $[0,1]$ ខ. $\mathbb{R}$ គ. $x\geq 0$ ឃ. $x\leq 1$

២៤. ត្រីធា x^2+x-6 មានឫស៖

ក. $2,3$ ខ. $-2,3$ គ. $2,-3$ ឃ. $-2,-3$

២៥. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$ មិនមានន័យត្រង់៖

ក. $x=1$ ខ. $x=e$ គ. $x=0$ ឃ. $x=-1$

២៦. បើ $f'(x)=0$ លើចន្លោះ I នោះ f ជាអនុគមន៍៖

ក. កើន ខ. ចុះ គ. ថេរ ឃ. គ្មានចម្លើយ

២៧. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ គឺ $f'(x)=$ ៖

ក. $\frac{2}{(x+1)^2}$ ខ. $\frac{-2}{(x+1)^2}$ គ. 1 ឃ. 0

២៨. បើ $f'(x)<0$ លើ (a,b) នោះ f ជាអនុគមន៍៖

ក. កើន ខ. ចុះ គ. មិនប្រែប្រួល ឃ. អវិជ្ជមាន

២៩. តម្លៃបរមាធៀបកើតមានកាលណា $f'(x)$ ៖

ក. វិជ្ជមានជានិច្ច គ. ស្មើ 0 ជានិច្ច

ខ. ប្តូរសញ្ញាឆ្លងកាត់ឫស ឃ. មិនមានឫស

៣០. $f(x)=x^2-6x+8$ មានចំណុចអប្បបរមាត្រង់៖

ក. $x=3$ ខ. $x=6$ គ. $x=0$ ឃ. $x=-3$

៣១. បើ $f''(x_0)>0$ និង $f'(x_0)=0$ នាំឱ្យ f មាន៖

ក. អតិបរមាធៀប គ. ចំណុចរបត់

ខ. អប្បបរមាធៀប ឃ. អាស៊ីមតូត

៣២. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{1}{x}$ គឺ៖

ក. $\ln x$ ខ. $1/x^2$ គ. $-1/x^2$ ឃ. 1

៣៣. អនុគមន៍ $f(x)=x^3$ ជាអនុគមន៍៖

ក. កើនជានិច្ច ខ. ចុះជានិច្ច គ. ថេរ ឃ. មានអតិបរមា

៣៤. ចំណុចរបត់នៃ $f(x)=x^3-3x$ គឺ៖

ក. $(1,-2)$ ខ. $(-1,2)$ គ. $(0,0)$ ឃ. $(0,-3)$

៣៥. បើ $f'(x)=x^2-4$ នោះ f កើនលើ៖

ក. $(-2,2)$ គ. $\mathbb{R}$
ខ. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ ឃ. $\{2,-2\}$

៣៦. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y=x^2$ ត្រង់ $x=1$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 0 ឃ. -2

៣៧. សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប f ត្រង់ x_0 គឺ $y=$ ៖

ក. $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ គ. $f'(x_0)x$
ខ. $f(x_0)(x-x_0)+f'(x_0)$ ឃ. $f(x_0)$

៣៨. បើ $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ នោះ $f'(x)=$ ៖

ក. $\frac{5}{(x-1)^2}$ ខ. $\frac{-5}{(x-1)^2}$ គ. $\frac{-1}{(x-1)^2}$ ឃ. 2

៣៩. អនុគមន៍ $f(x)=-x^2+4x$ មានតម្លៃអតិបរមាគឺ៖

ក. 2 ខ. 4 គ. 0 ឃ. -4

៤០. បើ $f''(x)$ ប្ដូរសញ្ញាឆ្លងកាត់ x_0 នោះក្រាបមាន៖

ក. អាស៊ីមតូត គ. បន្ទាត់ប៉ះដេក
ខ. ចំណុចរបត់ ឃ. ចំណុចដាច់

៤១. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ មានដេរីវេ $f'(x)=$ ៖

ក. $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ខ. $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ គ. ទាំង a និង b ត្រូវ ឃ. 1

៤២. បើ $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ នោះ f ជាអនុគមន៍៖

ក. កើន ខ. ចុះ គ. ថេរ ឃ. កើនផងចុះផង

៤៣. អនុគមន៍ $f(x)=|x|$ គ្មានដេរីវេត្រង់៖

ក. $x=1$ ខ. $x=-1$ គ. $x=0$ ឃ. គ្រប់ x

៤៤. $f(x)=\frac{x+1}{x}$ ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ ព្រោះ $f'(x)=$ ៖

ក. $1/x^2$ ខ. $-1/x^2$ គ. 1 ឃ. -1

៤៥. តម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 2 ឃ. 4

៤៦. បើ $f(x)=x^4$ នោះ $f''(x)=0$ ត្រង់ $x=0$ តើ $(0,0)$ ជាចំណុចរបត់ឬទេ?

ក. បាទ/ចាស ខ. ទេ គ. មិនដឹង ឃ. អាស្រ័យលើ y

៤៧. អនុគមន៍ $f(x)=ax+b$ ជាអនុគមន៍ចុះកាលណា៖

ក. $a>0$ ខ. $a<0$ គ. $a=0$ ឃ. $b<0$

៤៨. ដេរីវេទី ២ នៃ $f(x)=\sin x$ គឺ៖

ក. $\cos x$ ខ. $-\sin x$ គ. $-\cos x$ ឃ. $\sin x$

៤៩. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ មានចំណុចបរមាធៀបចំនួន៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 2 ឃ. 3

៥០. ដើម្បីសិក្សាអថេរភាព ជំហានដំបូងគេត្រូវរក៖

ក. ដេរីវេ ខ. ដែនកំណត់ គ. លីមីត ឃ. ក្រាប

៥១. បន្ទាត់ $x=a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរកាលណា៖

ក. $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ គ. $f(a)=0$

ខ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ ឃ. $f'(a)=\infty$

៥២. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{x-3}$ មានអាស៊ីមតូតឈរគឺ៖

ក. $x=0$ ខ. $x=3$ គ. $y=1$ ឃ. $y=3$

៥៣. បន្ទាត់ $y=b$ ជាអាស៊ីមតូតដេកកាលណា៖

ក. $\lim_{x\to b} f(x)=\infty$ គ. $f(b)=\infty$

ខ. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ ឃ. $f(0)=b$

៥៤. អាស៊ីមតូតដេកនៃ $y=\frac{3x+1}{x-2}$ គឺ៖

ក. $y=2$ ខ. $y=3$ គ. $x=2$ ឃ. $x=3$

៥៥. បើ $f(x)=ax+b+\frac{k}{Q(x)}$ នោះអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ៖

ក. $y=ax$ ខ. $y=ax+b$ គ. $y=b$ ឃ. $x=-q/p$

៥៦. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ មានអាស៊ីមតូតឈរដែរឬទេ?

ក. មាន $x=1$ គ. មាន $x=-1$

ខ. គ្មានទេ (ព្រោះសម្រួលដាច់) ឃ. គ្មានព្រោះ $x\neq 1$

៥៧. អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ គឺ៖

ក. $y=x$ ខ. $y=x+1$ គ. $y=1$ ឃ. $x=0$

៥៨. បើដឺក្រេភាគយក ស្មើដឺក្រេភាគបែង នោះអនុគមន៍សនិទានមាន៖

ក. អាស៊ីមតូតដេក
ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត
គ. គ្មានអាស៊ីមតូត
ឃ. អាស៊ីមតូតប៉ារ៉ាបូល

៥៩. បើដឺក្រេភាគយក ធំជាងដឺក្រេភាគបែង ១ ដឺក្រេ នោះមាន៖

ក. អាស៊ីមតូតដេក
ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត
គ. អាស៊ីមតូតឈរតែមួយគត់
ឃ. គ្មានទេ

៦០. អាស៊ីមតូតឈរនៃ $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ គឺ៖

ក. $x=2$ ខ. $x=-2$ គ. $x=2$ និង $x=-2$ ឃ. $x=4$

៦១. អាស៊ីមតូតដេកនៃ $f(x)=\frac{5}{x+1}$ គឺ៖

ក. $y=5$ ខ. $y=0$ គ. $y=1$ ឃ. គ្មានទេ

៦២. ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេអាចប្រើវិធី៖

ក. ចែកពហុធា
ខ. រកលីមីត
គ. ទាំង a និង b ត្រូវ
ឃ. ដេរីវេ

៦៣. បើ $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(2x-3)]=0$ នោះអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ៖

ក. $y=2x$ ខ. $y=2x-3$ គ. $y=-3$ ឃ. $y=0$

៦៤. $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=ax+b$ ដែល a ស្មើ៖

ក. 1 ខ. -2 គ. 0 ឃ. 2

៦៥. ក្នុងសំណួរ ៦៤ តម្លៃ b ស្មើ៖

ក. 1 ខ. -2 គ. 2 ឃ. 0

៦៦. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x}$ មានអាស៊ីមតូតចំនួន៖

ក. ១ ខ. ២ គ. ៣ ឃ. ០

៦៧. អាស៊ីមតូតដេកនៃ $y=\frac{x^2+1}{2x^2-3}$ គឺ៖

ក. $y=1/2$ ខ. $y=2$ គ. $y=1$ ឃ. $y=-1/3$

៦៨. តើអាស៊ីមតូតដេក អាចកាត់ជាមួយក្រាបបានដែរឬទេ ?

ក. មិនអាចដាច់ខាត
គ. អាចជានិច្ច
ខ. អាចក្នុងករណីខ្លះ
ឃ. គ្មានចម្លើយ

៦៩. តើអាស៊ីមតូតឈរ អាចកាត់ជាមួយក្រាបបានដែរឬទេ ?

ក. អាច ខ. មិនអាច គ. អាចត្រង់ 0 ឃ. មិនដឹង

៧០. $f(x)=e^{-x}$ មានអាស៊ីមតូតដេក $y=0$ ក្នុងករណី $x\to$ ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. $-\infty$ ឃ. 1

៧១. អាស៊ីមតូតឈរនៃ $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ គឺ៖

ក. $x=1$ ខ. $x=0$ គ. គ្មានទេ ឃ. $x=e$

៧២. បើ $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$ នោះក្រាបជា៖

ក. ខ្សែកោងមានអាស៊ីមតូត
គ. ប៉ារ៉ាបូល
ខ. បន្ទាត់ត្រង់ដែលមានចំណុចដាច់
ឃ. រង្វង់

៧៣. អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃ $y=\frac{2x}{x+1}$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់៖

ក. $(-1,2)$ ខ. $(1,2)$ គ. $(2,-1)$ ឃ. $(0,0)$

៧៤. ចំណុចប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ជា៖

ក. ចំណុចរបត់ ខ. ផ្ចិតឆ្លុះ គ. គល់តម្រុយ ឃ. ចំណុចអតិបរមា

៧៥. បើ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ តើមានអាស៊ីមតូតដេកទេ ?

ក. មាន ខ. គ្មាន គ. មានតែ $x\to 0$ ឃ. មិនដឹង

៧៦. បើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ f ឆ្លុះធៀបនឹង៖

ក. អ័ក្សអាប់ស៊ីស ខ. អ័ក្សអរដោនេ គ. គល់ O ឃ. បន្ទាត់ $y=x$

៧៧. បើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះ f ឆ្លុះធៀបនឹង៖

ក. អ័ក្សអរដោនេ ខ. គល់តម្រុយ O គ. អ័ក្សអាប់ស៊ីស ឃ. បន្ទាត់ $y=1$

៧៨. លក្ខខណ្ឌអនុគមន៍សេសគឺ $f(-x)=$ ៖

ក. $f(x)$ ខ. $-f(x)$ គ. $1/f(x)$ ឃ. 0

៧៩. បន្ទាត់ $x=a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះកាលណា $f(2a-x)=$ ៖

ក. b ខ. $f(x)$ គ. $-f(x)$ ឃ. $2b-f(x)$

៨០. ចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះកាលណា $f(2a-x)+f(x)=$ ៖

ក. b ខ. $2b$ គ. 0 ឃ. a

៨១. ផ្ចិតឆ្លុះនៃ $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$ គឺ៖

ក. $(1,1)$ ខ. $(-1,1)$ គ. $(1,3)$ ឃ. $(3,-1)$

៨២. អនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍៖

ក. សេស ខ. គូ គ. មិនគូមិនសេស ឃ. ថេរ

៨៣. ផ្ចិតឆ្លុះនៃ $f(x)=x^3-3x^2+4$ គឺ៖

ក. $(0,4)$ ខ. $(1,2)$ គ. $(2,0)$ ឃ. $(1,0)$

៨៤. បើ $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ នោះផ្ចិតឆ្លុះស្ថិតនៅលើអាស៊ីមតូតឈរ៖

ក. $x=1$ ខ. $x=2$ គ. $x=0$ ឃ. $x=-1$

៨៥. ការរកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ត្រូវឱ្យ៖

ក. $x=0$ ខ. $y=0$ គ. $x=1$ ឃ. $y=1$

៨៦. ការរកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអ័ក្សអរដោនេ ត្រូវឱ្យ៖

ក. $x=0$ ខ. $y=0$ គ. $x=1$ ឃ. $y=1$

៨៧. បើ $f(x)-y_{asym}>0$ នោះក្រាបស្ថិតនៅ៖

ក. ខាងក្រោមអាស៊ីមតូត គ. លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ខ. ខាងលើអាស៊ីមតូត ឃ. គ្មានចម្លើយ

៨៨. អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2-4x+5$ គឺ៖

ក. $x=4$ ខ. $x=2$ គ. $x=0$ ឃ. $x=-2$

៨៩. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ ជាអនុគមន៍៖

ក. គូ ខ. សេស គ. មិនគូមិនសេស ឃ. ថេរ

៩០. ចំណុចប្រសព្វនៃ $y=\frac{x-1}{x+1}$ ជាមួយអ័ក្សអរដោនេគឺ៖

ក. $(1,0)$ ខ. $(0,-1)$ គ. $(0,1)$ ឃ. $(-1,0)$

៩១. ក្នុងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ បើ $f'(x)$ គ្មានឫស នោះក្រាប៖

ក. គ្មានចំណុចបរមា
គ. កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស
ខ. មានអតិបរមាតែមួយ
ឃ. គ្មានអាស៊ីមតូត

៩២. បើ $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ នោះ $f(x)=b+F(x-a)$ ដែល F ជា៖

ក. អនុគមន៍គូ ខ. អនុគមន៍សេស គ. អនុគមន៍ថេរ ឃ. គ្មានចម្លើយ

៩៣. ក្រាបនៃ $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ឆ្លុះធៀបនឹង៖

ក. គល់ O ខ. អ័ក្ស $y'y$ គ. អ័ក្ស $x'x$ ឃ. បន្ទាត់ $y=x$

៩៤. ដើម្បីសង់ក្រាបបានត្រឹមត្រូវ គេត្រូវដឹងពី៖

ក. តារាងអថេរភាព
គ. ចំណុចពិសេស
ខ. អាស៊ីមតូត
ឃ. គ្រប់ចំណុចខាងលើ

៩៥. បើ $x\to\pm\infty$ ហើយ $f(x)\to 2$ នោះក្រាបខិតជិតបន្ទាត់៖

ក. $x=2$ ខ. $y=2$ គ. $y=2x$ ឃ. $y=0$

៩៦. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ជាអនុគមន៍៖

ក. គូ ខ. សេស គ. កើន ឃ. ចុះ

៩៧. ចំណុច $I(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ f មានន័យថា $f(2-x)+f(x)=$ ៖

ក. 2 ខ. 4 គ. 1 ឃ. 0

៩៨. បើ $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$ តម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ៖

ក. 2 ខ. 4 គ. -4 ឃ. 0

៩៩. ក្នុងតារាងអថេរភាព បើសញ្ញា $f'(x)$ គឺ $+|+$ មានន័យថា៖

ក. មានបរមាធៀប
គ. មានចំណុចរបត់
ខ. អនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់
ឃ. អនុគមន៍ចុះ

១០០. ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ហៅថា៖

ក. ប៉ារ៉ាបូល ខ. អ៊ីពែបូល គ. រង្វង់ ឃ. អេលីប

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = 2x + 3$

ខ. $f(x) = \sqrt{x+1}$

គ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3}$

ច. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

ចម្លើយ:

២. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

ង. $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

ចម្លើយ:

៣. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = e^x$

ខ. $f(x) = e^x - 1$

គ. $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

ឃ. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$

ង. $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

ច. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

ចម្លើយ:

៤. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$ ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$ ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3x+2}$

ចម្លើយ:

៥. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{1-x}{2x-1}$

គ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-1}$

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3x-4}$

ខ. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{2-x+x^2}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3x+2}$

ចម្លើយ:

៦. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{3-x}{(2x-1)^2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-5x+6}$

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$

ខ. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{2-x+x^2}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-3x-4}$

ចម្លើយ:

៧. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

គ. $f(x) = \frac{2-3x}{x+1}$

ង. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

ខ. $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$

ឃ. $f(x) = \frac{2+3x}{1-x}$

ច. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$

ចម្លើយ:

៨. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$

ចម្លើយ:

៩. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$

ចម្លើយ:

១០. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ គ. $f(x)=\dfrac{2-3x+x^2}{x+1}$ ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x-x^2}{x-2}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x-2x^2}{1-x}$ ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$

ចម្លើយ:

១១. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$

ចម្លើយ:

១២. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{2+5x}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

១៣. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{-3x+2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+3}{x+1}$

គ. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}$

ង. $f(x)=\sqrt{9x^2+x+2}$

ច. $f(x)=\sqrt{8x^2+x-5}$

ឆ. $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$

ចម្លើយ:

១៤. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

១៥. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$

ចម្លើយ:

១៦. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$

ចម្លើយ:

១៧. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ គ. $f(x)=\dfrac{2-3x+x^2}{x+1}$ ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x-x^2}{x-2}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x-2x^2}{1-x}$ ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$

ចម្លើយ:

១៨. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}$ គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}$ ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$ ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

១៩. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{2+5x}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$

ចម្លើយ:

២០. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=2x-3$

ខ. $f(x)=3x+2$

គ. $f(x)=-x+1$

ឃ. $f(x)=-2x+1$

ង. $f(x)=4-3x$

ច. $f(x)=-5x+10$

ចម្លើយ:

២១. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
គ. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
ង. $f(x) = 4 - 3x + x^2$
ខ. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
ឃ. $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$
ច. $f(x) = x^2 - 5x + 10$

ចម្លើយ:

២២. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$

ចម្លើយ:

២៣. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x) = \dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$

ចម្លើយ:

២៤. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$

ចម្លើយ:

២៥. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ 　 គ. $f(x)=\dfrac{2-3x+x^2}{x+1}$ 　 ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x-x^2}{x-2}$ 　 ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x-2x^2}{1-x}$ 　 ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$

ចម្លើយ:

២៦. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}$

គ. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$

ច. $f(x) = \dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$

ចម្លើយ:

២៧. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$ គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$ ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{2+5x}$ ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$

ចម្លើយ:

២៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=f(x)$ ខាងក្រោមជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វានីមួយៗ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$

ចម្លើយ:

២៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=f(x)$ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វានីមួយៗ៖

ក. $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$ គ. $f(x)=\dfrac{-x^2+x+3}{x+1}$

ចម្លើយ:

៣០. រកតម្លៃmដើម្បីឲ្យអនុគមន៍$f(x)=(2m-1)x^2+m+1$ ចំពោះ $x>0$ជាអនុគមន៍កើន។

ចម្លើយ:

៣១. កំណត់តម្លៃkដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(k+3)x^2-k+2$ចំពោះ $x<0$ជា៖

ក. ជាអនុគមន៍ចុះ
ខ. ជាអនុគមន៍ថេរ

ចម្លើយ:

៣២. រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=-x^2+4x-1$

គ. $f(x)=-x^2+9x-3$

ង. $f(x)=x^2+4x+3$

ខ. $f(x)=-2x^2+3x+6$

ឃ. $f(x)=-3x^2-9x+8$

ច. $f(x)=-x^2+3x-2$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

៣៣. រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=-x^2+4x+4$

ខ. $f(x)=-x^2+3x+2$

គ. $f(x)=-x^2+4x-3$

ឃ. $f(x)=x^2-4x+8$

ង. $f(x)=x^2-x+3$

ច. $f(x)=x^2+3x+2$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

៣៤. គេឲ្យអនុគមន៍$h(x)=mx^2+nx+1$ ក្រាបH។ ចូររកចំនួនពិតm និង nដើម្បីឲ្យhមានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់$x=1$ ហើយមាន$h(3)=2$។

ចម្លើយ:

៣៩. កំណត់តម្លៃaដើម្បីឲ្យអនុគមន៍$f(x)=x^2+\frac{a}{x}$។

ក. អប្បបរមាត្រង់$x=2$ ខ. អប្បបរមាត្រង់$x=-3$ គ. មានចំណុចរបត់ត្រង់$x=1$

ឃ. បង្ហាញថាគ្មានតម្លៃaដែលធ្វើឲ្យfមានអតិបរិមាទេ?

ចម្លើយ:

៣៦. អនុគមន៍ $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+2$ចំពោះ$x\in\mathbb{R}$។

ក. រកតម្លៃa និង bដើម្បីឲ្យ fមានអតិបរិមាធៀបត្រង់$x=1$ និង មានអប្បបរមាធៀបត្រង់$x=2$។

ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមាធៀបនៃf។

ចម្លើយ:

៣៧. រកតម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ មាន៖

ក. អតិបរមាត្រង់ $x=-1$ និង អប្បបរមាត្រង់ $x=3$។

ខ. អប្បបរមាត្រង់ $x=4$ និងចំណុចរបត់ $x=-1$។

ចម្លើយ:

៣៨. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=2x^2-8x+5$ ខ. $f(x)=x^3-3x+3x+2$ គ. $f(x)=x^4-2x^2+2$

ចម្លើយ:

៣៩. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+3x}$

ខ. $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

ឆ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

ជ. $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+5}{x^2-2x-3}$

ឈ. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{1-x^2}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

៤០. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq 2$ ដោយ $y = \frac{2x^2+x-1}{x-2}$ និងមានក្រាប C។

ក. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$ គេបាន $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

ខ. រកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។

គ. សិក្សាទីតាំងនៃ C ធៀបទៅនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់វា។

ចម្លើយ:

៤១. គេឱ្យ f កំណត់លើ $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2-4x+8}{x-2}$ ហើយ C ជាខ្សែកោងតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីបាន $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}\quad,\quad x\neq 2$

ខ. កំណត់អាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប C

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f និងសង់ក្រាប C

ចម្លើយ:

៤២. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{x^2-x-3}{x+1}$ និងគេតាងដោយ C ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\frac{1}{x+1}$

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

ចម្លើយ:

៤៣. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x\neq 1$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ ។

ខ. គណនាលីមីតត្រង់គោលនៃដែនកំណត់ រួចកំណត់អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ។

គ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. បង្ហាញថា $I(1,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ C ។ សង់ខ្សែកោង C ក្នុងអរតូណរម៉ាល់

ង. សិក្សាតាមក្រាភិច ចំនួនឬសនៃសមីការ $x^2+(1-m)x+m-1=0$

ចម្លើយ:

៤៤. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$ ។
យើងតាង C ជាក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. ⓐ. រកចំនួនពិត a,b,c ដែលគ្រប់ $x\neq 2;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ។

ⓑ. គេតាង d ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ។ បង្ហាញថា d ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

ⓒ. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d ។

ចម្លើយ:

៤៥. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{x^2-x-3}{x+1}$ និង គេតាងដោយ (C) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\frac{1}{x+1}$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

ចម្លើយ:

៤៦. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=-x-1+\frac{3}{x-1}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ចម្លើយ:

៤៧. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ចម្លើយ:

៤៨. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2$ និងមានខ្សែកោង C។

ក. គណនា $f'(x)$។ រកតម្លៃបរមានៃ f។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C។ គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$, $-\infty$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0=1$។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C។

គ. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។
គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1$, $x=2$។

ចម្លើយ:

៤៩. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f។

ខ. គណនាលីមីត៖ $\lim_{x\to 2} f(x)$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។

គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a ; b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ។

ឃ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ង. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៥០. គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់គ្រប់តម្លៃ $x \neq 2$ ដែល $y = f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 2 និង $\pm\infty$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ត្រង់ $\pm\infty$។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

ង. បង្ហាញថាចំណុច $I(2, 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) រួចសង់ក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៥១. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

គ. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\frac{3}{x-1}$ ។ រួចបង្ហាញថា $(d): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ ។ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សទាំងពីរ ហើយ រកផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប រួចសង់ក្រាប(C)។

ចម្លើយ:

៥២. គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ $y=f(x)=\frac{x^2-x+9}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; $+\infty$

ខ. ចូរសរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)។

គ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ និង អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$ ព្រមទាំងរកតម្លៃបរមាធៀបទាំងនេះ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត $a;b$ និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$។ រួចបង្ហាញថា $(d):y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

៥៣. គេមានអនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2+3x-3}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ រួចរកតម្លៃបរមាធៀប បើមាន។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ច. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត រួចសង់ក្រាប(C) ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

៥៤. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{x^2-4x+8}{x-2}$

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2-(m+4)x+2m+8=0$ ដោយប្រើក្រាបតាង y ។

ចម្លើយ:

៥៥. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\frac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំណុចនឹងមួយចំពោះគ្រប់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដែល ត្រូវកំណត់កូអរដោនេ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=m$ ប៉ះនឹងក្រាប។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m=-1$ ។

ចម្លើយ:

៥៦. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ មានក្រាប(C)។ ហើយមានបន្ទាត់ពីរ$(L_1): y=2x+1$ និង $(L_2): y=x+3$។

ក. រកដែនកំណត់នៃ $f(x)$។ រកលីមីតនៃfត្រង់ចុងដែនកំណត់។

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ(C)?

គ. បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C) ធៀបនិងអាស៊ីមតូតទ្រេតនោះ។

ឃ. គណនា $f'(x)$។ សិក្សាសញ្ញានៃ$f'(x)$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃf។

ង. សង់ក្រាប(C)ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេមួយ។

ចម្លើយ:

៥៧. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$ មានក្រាប (C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ បើ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

គ. បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C) ធៀបនិងអាស៊ីមតូតទ្រេតនោះ។

ឃ. គណនា $f'(x)$។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

ង. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេមួយ។

ចម្លើយ:

៥៨. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+3}$ មានក្រាប (C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ចំពោះគ្រប់ $x\neq-1$ បើ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

គ. បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C) ធៀបនិងអាស៊ីមតូតទ្រេតនោះ។

ឃ. គណនា $f'(x)$។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

ង. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេមួយ។

ចម្លើយ:

៥៩. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ មានក្រាប (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f។ រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់។

ខ. កំណត់ a,b និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C)។ ចូរបញ្ជាក់ថាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និង អាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. គណនា $f'(x)$។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$។ រួចរកតម្លៃបរិមានៃ f។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។ សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។

ចម្លើយ:

៦០. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C)។

ក. កំណត់ a,b និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

គ. គណនា $f'(x)$។ ហើយទាញថា $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\neq 1$។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច $I(1,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C)។

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ។

ច. ដោយប្រើតាមក្រាហ្វិក សិក្សាអថេរភាព និងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $x^2-(2+m)x+m=0$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍សនិទាន

៦១. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

គ. បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. បញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនុច $I(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C)។

ច. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ។

ឆ. ដោយប្រើតាមក្រាប ចូរពិភាក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $-x^2+(4-m)x+m=0$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m។

ចម្លើយ:

៦២. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ ចំពោះ$x\neq -2$ មានក្រាប(C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិតa,b និង cដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប(C)។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់$(L):y=x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C)។ បញ្ជាក់ទីតាំងរវាងក្រាប(C)ធៀបនឹងបន្ទាត់(L)។

ឃ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាfជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ$f$។

ង. ស្រាយថា$I(-2,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប់(C)។

ច. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប(C)នៅក្នុងតម្រុយ$(O,\vec{i},\vec{j})$តែមួយ។

ឆ. ដោយប្រើតាមក្រាប ចូរពិភាក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឬសនៃសមីការ $x^2+(4-m)x-(2m-1)=0$ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែតm។

ចម្លើយ:

៦៣. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-2x+6}{x+1}$ ចំពោះ$x\neq-1$ មានក្រាប(C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិតa,b និង cដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប(C)។

គ. គណនា$f'(x)$ និង រកតម្លៃបរមានៃf។ សង់តារាងអថេរភាពនៃf។

ឃ. ស្រាយថា$I(-1,-4)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប់(C)។

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប(C)នៅក្នុងតម្រុយ$(O,\vec{i},\vec{j})$តែមួយ។

ច. ដោយប្រើតាមក្រាប ចូរពិភាក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $x^2-(2+m)x-(m-6)=0$ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែតm។

ចម្លើយ:

៦៤. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2+2x+5}{x+1}$ ចំពោះ$x\neq -1$ មានក្រាប(C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិតm,n និង pដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=mx+n+\frac{p}{x+1}$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to-1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប(C)។

គ. បង្ហាញថាfមានតម្លៃអតិបរមាមួយ និង អប្បបរមាធៀបមួយ។រួចរកតម្លៃរបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃf។

ឃ. គណនា$f(-3), f(-2), f\left(-\frac{3}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), f(1)$ និង $f(2)$។

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប(C)នៅក្នុងតម្រុយ$(O,\vec{i},\vec{j})$តែមួយ។

ច. ដោយប្រើតាមក្រាប ចូរពិភាក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $x^2+(2-k)x+3-k=0$ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែតk។

ចម្លើយ:

៦៥. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C)។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច $I(1,3)$។ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)។

គ. គណនា និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និង អប្បបរមាមួយ។ រួចគណនាតម្លៃបរមានេះ។ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ (C)។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ។

ង. រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $f(x)=a$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ x_1 និង x_2 ដែល $1<x_1<x_2$ ដោយប្រើក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៦៦. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=x+\dfrac{4}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C)។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

ខ. គណនា $f(0)$ និង $f'(0)$។ បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ និង អប្បបរមាមួយរួចរកតម្លៃរបស់វា។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ។

ឃ. រកចំនួនពិត m ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^2-(m+1)x+m+4=0$ គ្មានឫសដោយប្រើក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៦៧. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ ចំពោះ $x\neq -1$ មានក្រាប (C)។

ក. រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យក្រាប (C) កាត់តាមចំណុច $A(0,1)$ ហើយ f មានបរិមាធៀបត្រង់ចំណុច $B(1,0)$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

គ. ចូរសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប f។

ឃ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^2-(2+m)x+1-m=0$ មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ដោយប្រើក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៦៨. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ ចំពោះ $x\neq -2$ មានក្រាប (C)។

ក. រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យក្រាប (C) កាត់តាមចំណុច $A\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ហើយ f មានបរិមាធៀបត្រង់ចំណុច $B(-1,0)$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C)។

គ. ចូរសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប f។

ឃ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ $f(x)=m$ មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាដោយប្រើក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៦៩. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ ចំពោះ $x\neq -2$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យក្រាប (C) កាត់តាមចំណុច $A\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ហើយ f មានបរិមាធៀបត្រង់ចំណុច $B(-1,1)$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប (C) ។

គ. ចូរសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប f ។

ឃ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $f(x)=m$ មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា x_1,x_2 ដែល $x_1<x_2<-2$ ដោយប្រើក្រាប (C) ។

ចម្លើយ:

៧០. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ ចំពោះ$x\neq 1$ មានក្រាប(C)។

ក. កំណត់ចំនួនពិតa និងbដើម្បីឲ្យfមានតម្លៃអតិបរមាត្រង់$x=0$ស្មើនឹង1។

ខ. ចំពោះតម្លៃa និងbដែលរកឃើញក្នុងសំណួរទី១៖

ⓐ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប(C)។

ⓑ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃf។

ⓒ. សង់ក្រាប(C)នៅក្នុងតម្រុយ$(O,\vec{i},\vec{j})$។

ⓓ. ប្រើតាមក្រាហ្វិក ចូរសិក្សានូវអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែតm ចំពោះ$x^2+(a-m)x+(b+m)=0$។

ចម្លើយ:

៧១. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-6x}{x^2-6x+5}$ ហើយ C ជាក្រាបនៃ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$។

ក. គណនាលីមីតត្រង់គោលនៃដែនកំណត់ រួចទាញឱ្យបានថា C មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ និងអាស៊ីមតូតដេកមួយដែលត្រូវកំណត់។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ ទាញថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃអប្បបរមាធៀបនោះ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

គ. សង់ខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូតរបស់វា។

ចម្លើយ:

៧២. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq 2$ ដោយ $y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{(x-2)^2}$ ហើយ C ជាក្រាបនៃ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$។

ក. រក a,b,c ដោយដឹងថាក្រាប C កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 1$ និង $x = -3$ ហើយមានអាស៊ីមតូតដេកជាបន្ទាត់ $y = 1$។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ដែលកំណត់បានក្នុងសំណួរទី 1។

គ. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ចម្លើយ:

៧៣. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$, -2, 2 និង $+\infty$ ។
ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ក្រាបតាង f ។

ចម្លើយ:

៧៤. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -2,\ \ x \neq 2$ ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ និងមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x \to -2} f(x),\ \lim_{x \to 2} f(x)$ និង $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ ។
ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ចម្លើយ:

៧៥. អនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y=f(x)=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. ចូរគណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។

គ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ។

ឃ. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប(C) ។

ចម្លើយ:

៧៦. គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y=f(x)=\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ $\pm\infty$; 2 និង 4 ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក។

គ. ចូរបង្ហាញថា $f'(x)=\frac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{2,4\}$។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ$f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f។

ង. សង់ក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៧៧. គេឲ្យអនុគមន៍ fមួយ កំណត់ដោយ $y=f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+4}$ មានក្រាបតំណាង(C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)។

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$។

ចម្លើយ:

៧៨. គេមានអនុគមន៍ f មួយ កំណត់ដោយលើ $\mathbb{R}-\{-2\}$ ដែល $y=f(x)=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$។ តាង (C) ជាក្រាបតំណាងនៃអនុគមន៍ f។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $-\frac{1}{3}$ ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$។

គ. សង់តារាងអថេរភាព រួចសង់ក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៧៩. អនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y=f(x)=\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-1,\ -2$ និង $\pm\infty$។ ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. ចូរសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

ចម្លើយ:

៨០. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f។ រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ និង ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វាព្រមទាំងកំណត់តម្លៃបរិមាធៀបផង។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។ គណនា $f(-1), f(0), f(1)$ និង $f(5)$។សង់ក្រាប (C)។

ង. ប្រើក្រាហ្វិកចូរសិក្សាអថេរភាព និងសញ្ញាឫសនៃសមីការ
$(3-m)x^2-(18-6m)x+25-8m=0$ តាមប៉ារ៉ាម៉ែត m។

ចម្លើយ:

៨១. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$ កំណត់ដោយ $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ និង ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

គ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃបរិមាធៀបមួយត្រង់ $x=2$។ រួចរកតម្លៃវា។

ឃ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

ង. សង់ក្រាប (C)។ ដោយប្រើក្រាប (C) ចូរកំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យសមីការ $f(x)=k$ គ្មានឫស។

ចម្លើយ:

៨២. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ កំណត់ដោយ $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ និង ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអ័ក្សនៃតម្រុយហើយអាស៊ីមតូតដេក។

ឃ. សង់ក្រាប (C)។

ចម្លើយ:

៨៣. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-6x}{x^2+x-2}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់។

ខ. រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ និង ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_0=3$។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f។ សង់ខ្សែកោង (C)។

ង. តាមក្រាប (C) ចូរសិក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $(3-k)x^2-(6+k)x+2k=0$ ទៅតាមប៉ារ៉ាម៉ែត k។

ចម្លើយ:

៨៤. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x-2}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f។ រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ និង ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។

គ. កំណត់តម្លៃបរិមានៃ f។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

ឃ. រកកូអរដោនេចំណុច A ដែលជាប្រសព្វរវាង (C) និង អាស៊ីមតូតដេក។

ង. តាមក្រាប (C) ចូរសិក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញាឫសនៃសមីការ $(1-m)x^2-mx+2m=0$ ទៅតាមប៉ារ៉ាម៉ែត m។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ២
អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

១ និយមន័យ

និយមន័យ ១

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល មានរាង $y = f(x) = e^x$ មានន័យគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

២ លក្ខណៈ

ជាទូទៅ ១

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត m, n គេបាន

ក. $e^{m+n} = e^m \cdot e^n$

គ. $e^{m-n} = \frac{e^m}{e^n}$

ខ. $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

ឃ. $(e^m)^n = e^{mn}$

៣ សមីការនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ជាទូទៅ ២

ចំពោះអនុគមន៍ អ៊ិចស្បូមានលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

- $e^x = a \Leftrightarrow e^x = e^{\ln a} \Rightarrow x = \ln a$

- $e^x > a \Leftrightarrow e^x > e^{\ln a} \Rightarrow x > \ln a$
- $e^x < a \Leftrightarrow e^x < e^{\ln a} \Rightarrow x < \ln a$

៤ ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ជាទូទៅ ៣

- បើ $f(x) = e^x$ នោះ $f'(x) = e^x$
- បើ $f(x) = e^{u(x)}$ នោះ $f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

លំហាត់គំរូ ១

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = e^{4x}$

ខ. $y = e^{x^2-3x+1}$

គ. $y = xe^x$

ឃ. $y = (x^2-3)e^x$

ង. $y = x^2e^{-2x}$

ច. $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

ឆ. $y = xe^{-x}$

ជ. $f(x) = x^2e^x$

ឈ. $g(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

ញ. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

ដ. $f(x) = \frac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}$

ឋ. $g(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

ចម្លើយ:

៩ លីមីតនៃអនុគមន៍

ជាទូទៅ ៤

រូបមន្តលីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}} = e$

លំហាត់គំរូ ២

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x}$

ខ. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{5x}$

គ. $\lim\limits_{x \to +\infty} 6e^{2x}$

ឃ. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x+1}$

ង. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{4x}$

ច. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x$

ឆ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^{x-2}}{x^3}$

ជ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

ឈ. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$

ចម្លើយ:

៦ សិក្សាអនុគមន៍

លំហាត់គំរូ ៣

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=xe^{x}$

ចម្លើយ:

លំហាត់គំរូ ៤

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^2e^{-x}$

ចម្លើយ:

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល (១០០ លំហាត់)

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប និងពង្រឹងសមត្ថភាព

១. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=e^x$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $(0,+\infty)$ គ. $[0,+\infty)$ ឃ. $\mathbb{R}^*$

២. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $x>1$

៣. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$ មានន័យកាលណា៖

ក. $x\neq 0$ ខ. $x>0$ គ. $x\neq 1$ ឃ. $x\geq 0$

៤. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ គឺ៖

ក. $[0,+\infty)$ ខ. $(0,+\infty)$ គ. $\mathbb{R}$ ឃ. $(-\infty,0]$

៥. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ គឺ៖

ក. $[0,+\infty)$ ខ. $\mathbb{R}$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

៦. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ មានដែនកំណត់៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ គ. $x>0$ ឃ. $x\neq 0$

៧. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-2}$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$ ខ. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $x>\ln 2$

៨. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b រូបមន្ត e^{a+b} ស្មើនឹង៖

ក. $e^a\cdot e^b$ ខ. e^a+e^b គ. $(e^a)^b$ ឃ. e^a-e^b

៩. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b រូបមន្ត e^{a-b} ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{e^a}{e^b}$ ខ. e^a-e^b គ. e^b-e^a ឃ. $\frac{e^b}{e^a}$

១០. រូបមន្ត $(e^a)^b$ ស្មើនឹង៖

ក. e^{ab} ខ. e^{a+b} គ. $e^{a/b}$ ឃ. ae^b

១១. តម្លៃនៃ e^0 ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. $+\infty$

១២. បើ $a>0$ នោះតម្លៃនៃ $e^{\ln a}$ ស្មើនឹង៖

ក. a ខ. $\ln a$ គ. e^a ឃ. 1

១៣. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a តម្លៃនៃ $\ln(e^a)$ ស្មើនឹង៖

ក. a ខ. e^a គ. 1 ឃ. 0

១៤. សញ្ញានៃ e^x ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គឺ៖

ក. $e^x > 0$ ខ. $e^x \geq 0$ គ. $e^x < 0$ ឃ. ដូរសញ្ញាតាម x

១៥. កន្សោម e^{-x} ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{e^x}$ ខ. $-e^x$ គ. $(-e)^x$ ឃ. $1-e^x$

១៦. តម្លៃនៃ $e^{\ln 3+\ln 2}$ ស្មើនឹង៖

ក. 6 ខ. 5 គ. e^5 ឃ. e^6

១៧. តម្លៃនៃ $\frac{e^5}{e^2}$ ស្មើនឹង៖

ក. e^3 ខ. $e^{2.5}$ គ. e^7 ឃ. e^{10}

១៨. តម្លៃនៃ $(e^2)^3$ ស្មើនឹង៖

ក. e^6 ខ. e^5 គ. e^8 ឃ. $6e$

១៩. អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{1-e^x}$ មានន័យកាលណា៖

ក. $x \leq 0$ ខ. $x \geq 0$ គ. $x < 1$ ឃ. $x \leq 1$

២០. ដែនកំណត់នៃ $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-2}}$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ខ. $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ គ. $x > 2$ ឃ. $\mathbb{R}$

២១. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^x$ គឺ៖

ក. $f'(x)=e^x$ ខ. $f'(x)=xe^{x-1}$ គ. $f'(x)=\frac{e^x}{x}$ ឃ. $f'(x)=1$

២២. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{2x}$ គឺ៖

ក. $2e^{2x}$ ខ. e^{2x} គ. $\frac{1}{2}e^{2x}$ ឃ. $2xe^{2x-1}$

២៣. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{-x}$ គឺ៖

ក. $-e^{-x}$ ខ. e^{-x} គ. e^x ឃ. $-e^x$

២៤. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{3x-1}$ គឺ៖

ក. $3e^{3x-1}$ ខ. e^{3x-1} គ. $(3x-1)e^{3x-1}$ ឃ. $\frac{1}{3}e^{3x-1}$

២៥. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{x^2}$ គឺ៖

ក. $2xe^{x^2}$ ខ. $x^2e^{x^2}$ គ. e^{2x} ឃ. $2e^{x^2}$

២៦. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{-x^2}$ គឺ៖

ក. $-2xe^{-x^2}$ ខ. $2xe^{-x^2}$ គ. $-x^2e^{-x^2}$ ឃ. $-2e^{-x^2}$

២៧. ដេរីវេនៃ $f(x)=xe^x$ គឺ៖

ក. $(x+1)e^x$ ខ. e^x គ. xe^x ឃ. $(x-1)e^x$

២៨. ដេរីវេនៃ $f(x)=x^2e^x$ គឺ៖

ក. $(x^2+2x)e^x$ ខ. $2xe^x$ គ. $(x^2+x)e^x$ ឃ. x^2e^x

២៩. ដេរីវេនៃ $f(x)=(x-1)e^x$ គឺ៖

ក. xe^x ខ. $(x-2)e^x$ គ. e^x ឃ. $(x+1)e^x$

៣០. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{e^x}{x}$ គឺ៖

ក. $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ ខ. $\frac{(x+1)e^x}{x^2}$ គ. $\frac{e^x}{x^2}$ ឃ. $\frac{e^x}{1}$

៣១. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ ខ. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ គ. $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ ឃ. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$

៣២. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{\sin x}$ គឺ៖

ក. $\cos x\cdot e^{\sin x}$ ខ. $-\cos x\cdot e^{\sin x}$ គ. $\sin x\cdot e^{\sin x}$ ឃ. $e^{\cos x}$

៣៣. ដេរីវេនៃ $f(x)=e^{\cos x}$ គឺ៖

ក. $-\sin x\cdot e^{\cos x}$ ខ. $\sin x\cdot e^{\cos x}$ គ. $\cos x\cdot e^{\cos x}$ ឃ. $e^{-\sin x}$

៣៤. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ គឺ៖

ក. $-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ ខ. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ គ. $-\frac{1}{(e^x+1)^2}$ ឃ. $\frac{1}{e^x}$

៣៥. ដេរីវេនៃ $f(x)=(x^2-2x+2)e^x$ គឺ៖

ក. x^2e^x ខ. $(x^2-2)e^x$ គ. $(2x-2)e^x$ ឃ. $(x^2+2)e^x$

៣៦. ដេរីវេទី ២ នៃ $f(x)=e^{2x}$ គឺ៖

ក. $4e^{2x}$ ខ. $2e^{2x}$ គ. $8e^{2x}$ ឃ. e^{2x}

៣៧. ដេរីវេទី ២ នៃ $f(x)=xe^x$ គឺ៖

ក. $(x+2)e^x$ ខ. $(x+1)e^x$ គ. xe^x ឃ. $2e^x$

៣៨. បើ $f(x)=e^{-x}$ នោះ $f''(x)=$៖

ក. e^{-x} ខ. $-e^{-x}$ គ. e^x ឃ. $-e^x$

៣៩. បើ $f(x)=e^{3x}$ នោះដេរីវេទី n គឺ $f^{(n)}(x)=$៖

ក. $3^n e^{3x}$ ខ. $3e^{3x}$ គ. $n\cdot 3e^{3x}$ ឃ. $3^{n-1}e^{3x}$

៤០. ចំណុចរបត់នៃក្រាបតាង $f(x)=xe^x$ មានអាប់ស៊ីស x ស្មើនឹង៖

ក. -2 ខ. -1 គ. 0 ឃ. 1

៤១. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. 0 គ. $-\infty$ ឃ. 1

៤២. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $-\infty$ គ. $+\infty$ ឃ. 1

៤៣. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. $-\infty$ ឃ. -1

៤៤. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. 0 គ. $-\infty$ ឃ. 1

៤៥. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. 0 គ. 1 ឃ. e

៤៦. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. 0 គ. 1 ឃ. 2

៤៧. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. 1 ឃ. e

៤៨. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $-\infty$ គ. $+\infty$ ឃ. -1

៤៩. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. $-\infty$ ឃ. 1

៥០. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$ គឺ៖

ក. 1　ខ. 0　គ. e　ឃ. $+\infty$

៥១. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ គឺៈ

ក. 2　ខ. 1　គ. 0　ឃ. $\frac{1}{2}$

៥២. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{x}$ $(k\neq 0)$ គឺៈ

ក. k　ខ. 1　គ. 0　ឃ. $\frac{1}{k}$

៥៣. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$ គឺៈ

ក. 2　ខ. 1　គ. 0　ឃ. -2

៥៤. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3}$ គឺៈ

ក. 2　ខ. $-\frac{1}{3}$　គ. 1　ឃ. $+\infty$

៥៥. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to -\infty}\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3}$ គឺៈ

ក. $-\frac{1}{3}$　ខ. 2　គ. 0　ឃ. 1

៥៦. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}(x-e^{x})$ គឺៈ

ក. $-\infty$　ខ. $+\infty$　គ. 0　ឃ. 1

៥៧. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ គឺៈ

ក. 1　ខ. 0　គ. 2　ឃ. $+\infty$

៥៨. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}}{e^{x}+1}$ គឺៈ

ក. $+\infty$　ខ. 1　គ. 0　ឃ. 2

៥៩. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to -\infty}(x^2+1)e^{x}$ គឺៈ

ក. 0　ខ. $+\infty$　គ. $-\infty$　ឃ. 1

៦០. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ គឺៈ

ក. 1　ខ. 0　គ. $\cos 1$　ឃ. $+\infty$

៦១. ឫសនៃសមីការ $e^{x}=1$ គឺៈ

ក. $x=0$　ខ. $x=1$　គ. $x=e$　ឃ. គ្មានឫស

៦២. ឫសនៃសមីការ $e^{x}=e^{3}$ គឺៈ

ក. $x=3$　ខ. $x=\ln 3$　គ. $x=e^{3}$　ឃ. $x=1$

៦៣. ឫសនៃសមីការ $e^{2x-1}=1$ គឺៈ

ក. $x=\frac{1}{2}$ ខ. $x=1$ គ. $x=0$ ឃ. $x=-\frac{1}{2}$

៦៤. ឫសនៃសមីការ $e^x=5$ គឺ៖

ក. $x=\ln 5$ ខ. $x=e^5$ គ. $x=5$ ឃ. $x=\frac{5}{e}$

៦៥. ឫសនៃសមីការ $e^{2x}=4$ គឺ៖

ក. $x=\ln 2$ ខ. $x=\ln 4$ គ. $x=2$ ឃ. $x=2\ln 2$

៦៦. ឫសនៃសមីការ $e^x=-2$ គឺ៖

ក. គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ គ. $x=\ln(-2)$

ខ. $x=-\ln 2$ ឃ. $x=-2$

៦៧. សំណុំឫសនៃសមីការ $e^{x^2-4}=1$ គឺ៖

ក. $\{-2,2\}$ ខ. $\{2\}$ គ. $\{0,4\}$ ឃ. $\{4\}$

៦៨. សំណុំឫសនៃសមីការ $e^{2x}-3e^x+2=0$ គឺ៖

ក. $\{0,\ln 2\}$ ខ. $\{1,2\}$ គ. $\{0,1\}$ ឃ. $\{\ln 2\}$

៦៩. សំណុំឫសនៃសមីការ $e^{2x}-4e^x+3=0$ គឺ៖

ក. $\{0,\ln 3\}$ ខ. $\{1,3\}$ គ. $\{0,3\}$ ឃ. $\{\ln 3\}$

៧០. ឫសនៃសមីការ $e^x+e^{-x}=2$ គឺ៖

ក. $x=0$ ខ. $x=1$ គ. $x=-1$ ឃ. $x=\pm 1$

៧១. ឫសនៃសមីការ $e^{2x}-e^x=0$ គឺ៖

ក. $x=0$ ខ. $x=1$ គ. $x=e$ ឃ. គ្មានឫស

៧២. ឫសនៃសមីការ $e^{x+1}\cdot e^{x-1}=1$ គឺ៖

ក. $x=0$ ខ. $x=1$ គ. $x=-1$ ឃ. $x=\pm 1$

៧៣. វិសមីការ $e^x>1$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(0,+\infty)$ ខ. $[0,+\infty)$ គ. $(1,+\infty)$ ឃ. $\mathbb{R}$

៧៤. វិសមីការ $e^x\leq 1$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(-\infty,0]$ ខ. $([-\infty,0)$ គ. $(-\infty,1]$ ឃ. $\emptyset$

៧៥. វិសមីការ $e^{2x-4}>1$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(2,+\infty)$ ខ. $(4,+\infty)$ គ. $[2,+\infty)$ ឃ. $(0,+\infty)$

៧៦. វិសមីការ $e^x > -5$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $(-\ln 5,+\infty)$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $\emptyset$

៧៧. វិសមីការ $e^x < 0$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $\emptyset$ ខ. $\mathbb{R}$ គ. $(-\infty,0)$ ឃ. $\{0\}$

៧៨. វិសមីការ $e^{x^2-1} \leq 1$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $[-1,1]$ ខ. $(-\infty,1]$ គ. $[0,1]$ ឃ. $\{-1,1\}$

៧៩. សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ $e^{2x}-5e^x+6<0$ គឺ៖

ក. $(\ln 2,\ln 3)$ ខ. $(2,3)$ គ. $(0,\ln 3)$ ឃ. $(-\infty,\ln 2)$

៨០. ចំនួនឫសពិតនៃសមីការ $e^x = x+1$ គឺ៖

ក. មានឫសតែមួយ $x=0$

គ. គ្មានឫស

ខ. មានឫសពីរ

ឃ. មានឫសរាប់មិនអស់

៨១. អនុគមន៍ $f(x)=e^x$ ជាអនុគមន៍៖

ក. កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

គ. កើនផងចុះផង

ខ. ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

ឃ. ជាអនុគមន៍ថេរ

៨២. អនុគមន៍ $f(x)=e^{-x}$ ជាអនុគមន៍៖

ក. ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

គ. កើនលើ $(0,+\infty)$

ខ. កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

ឃ. ចុះលើ $(-\infty,0)$

៨៣. អនុគមន៍ $f(x)=xe^x$ មានដេរីវេ $f'(x)=0$ ត្រង់៖

ក. $x=-1$ ខ. $x=0$ គ. $x=1$ ឃ. $x=-2$

៨៤. តម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=xe^x$ គឺ៖

ក. $-\frac{1}{e}$ ខ. 0 គ. -1 ឃ. $-e$

៨៥. ដេរីវេនៃ $f(x)=x^2e^{-x}$ ស្មើ 0 ត្រង់តម្លៃ x ណាខ្លះ?

ក. $x=0, x=2$ ខ. $x=0, x=-2$ គ. $x=1, x=2$ ឃ. $x=0, x=1$

៨៦. តម្លៃអតិបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2e^{-x}$ គឺ៖

ក. $\frac{4}{e^2}$ ខ. $\frac{2}{e}$ គ. $4e^2$ ឃ. 0

៨៧. សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y=e^x$ កាលណា $x\to-\infty$ គឺ៖

ក. $y=0$ ខ. $x=0$ គ. $y=1$ ឃ. $y=-1$

៨៨. សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ កាលណា $x\to+\infty$ គឺ៖

ក. $y=1$ ខ. $y=0$ គ. $y=-1$ ឃ. $x=0$

៨៩. សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ កាលណា $x\to-\infty$ គឺ៖

ក. $y=0$ ខ. $y=1$ គ. $y=-1$ ឃ. $x=1$

៩០. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=e^x$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ គឺ៖

ក. $y=x+1$ ខ. $y=x$ គ. $y=2x+1$ ឃ. $y=x-1$

៩១. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=e^{-x}$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ គឺ៖

ក. $y=-x+1$ ខ. $y=-x$ គ. $y=x+1$ ឃ. $y=-x-1$

៩២. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=e^x$ កាត់អ័ក្សអរដោនេ $y'y$ ត្រង់ចំណុច៖

ក. $(0,1)$ ខ. $(1,0)$ គ. $(0,0)$ ឃ. $(0,e)$

៩៣. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=e^x$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'x$ ត្រង់ចំណុច៖

ក. មិនកាត់អ័ក្ស $x'x$ ទេ គ. $(1,0)$
ខ. $(0,0)$ ឃ. $(-1,0)$

៩៤. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=(x-2)e^x$ កាត់អ័ក្ស $x'x$ ត្រង់ចំណុច៖

ក. $(2,0)$ ខ. $(0,-2)$ គ. $(-2,0)$ ឃ. $(1,0)$

៩៥. សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $y=x+e^{-x}$ កាលណា $x\to+\infty$ គឺ៖

ក. $y=x$ គ. $y=0$
ខ. $y=-x$ ឃ. គ្មានអាស៊ីមតូតទ្រេត

៩៦. សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $y=2x-1+e^x$ កាលណា $x\to-\infty$ គឺ៖

ក. $y=2x-1$ ខ. $y=2x$ គ. $y=2x+1$ ឃ. $y=-1$

៩៧. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=e^{2x}$ ត្រង់ $x=0$ គឺ៖

ក. 2 ខ. 1 គ. 0 ឃ. 4

៩៨. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=e^x$ និង $y=e^{-x}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង៖

ក. អ័ក្សអរដោនេ $y'y$

ខ. អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'x$

គ. គល់កូអរដោនេ O

ឃ. បន្ទាត់ $y=x$

៩៩. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ជាអនុគមន៍៖

ក. សេស

ខ. គូ

គ. មិនគូមិនសេស

ឃ. ជាអនុគមន៍ថេរ

១០០. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ជាអនុគមន៍៖

ក. គូ

ខ. សេស

គ. មិនគូមិនសេស

ឃ. ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = e^x - x - 1$ និងមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ទាញថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃបរមាធៀបនោះ។ ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $d : y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C កាលណា $x \to -\infty$

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច P នៃ C ដែលបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ង. សង់ C និងបន្ទាត់ d និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P ។ $(\ln 2 \approx 0.7)$

ចម្លើយ:

២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x}$ និង មានក្រាប C។

ក. កំណត់លីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)$ អាចសរសេរខាងក្រោមទម្រង់ $f(x)=\frac{xe^x-e^x+2}{e^x}$ ទាញរកលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ទៅនឹង C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0។

ង. តាមក្រាភិច កំណត់ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x)=2$ រួចអមឫសទាំងនោះដោយចំនួនគត់ពីរតគ្នា។

ចម្លើយ:

៣. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x}{x}$ និងក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមានេះ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់អាប់ស៊ីស $x_0=1$ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. សង់ក្រាប C ។ប្រើក្រាប C ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $e^x-mx=0$ មានឫស។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៤. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$ ហើយមានក្រាប C តាងក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. ចូរគណនាលីមីតកាលណា x ខិតជិត $-\infty$ និង $+\infty$ រួចទាញសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ C។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា រួចគូសតារាងអថេរភាព។

គ. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $x'ox$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ f ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។ សង់ក្រាប C បន្ទាត់អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ង. ដោយប្រើក្រាប C ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(2x+1)e^{-2x}=m$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

ចម្លើយ:

៥. គេកំណត់អនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ មានក្រាប C ជាក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. កំណត់ ចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ f អាចសរសេរ $f(x)=a+\frac{b}{e^x-1}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{D}$ ។ ដោយប្រើទម្រង់នេះ ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ C។

ខ. បង្ហាញថា f មានដេរីវេចំពោះ គ្រប់ចំណុចនៃ $\mathbb{D}$ ហើយគណនាដេរីវេនៃ f' នៃ f។ សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f រួចគូសតារាងអថេរភាព ហើយគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់នៃ $\mathbb{D}$ ។

គ. រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C និងសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចអាប់ស៊ីស 1 ។

ឃ. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

៦. ក. តាង $g(x)=(x-1)e^x+1$ ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ g ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីត រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $\mathbb{R}$

ខ. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(x-2)e^x+x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយមានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ⓑ. រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ Cធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតវា។

ⓒ. គណនា $f'(x)$ ។ ប្រើលទ្ធផលសំណួរ (ក) សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ⓓ. បង្ហាញថា ក្រាប C តាងអនុគមន៍ f មានចំណុចរបត់មួយដែលត្រូវគណនាកូអរដោនេ ហើយត្រង់ចំណុចរបត់នេះ ក្រាប C មានបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ⓔ. សង់ក្រាប C អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់នោះ ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

៧. គេឲ្យ អនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និង អាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះនោះ។

ង. សង់ក្រាប C គេឲ្យ $e=2.7$ និង $e^{-1}=0.36$ ។

ចម្លើយ:

៨. គេឲ្យ អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ មានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និង អាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ។

ឃ. បន្ទាត់ $(T): y = 3$ កាត់ខ្សែកោង C ត្រង់ M ។ គណនាកូអរដោនេនៃ M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច M ។

ង. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះនោះ។

ច. សង់ក្រាប C គេឲ្យ $e = 2.7$ និង $e^{-1} = 0.36$ ។

ចម្លើយ:

៩. គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $y = f(x) = x^2e^{-x}$ មានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f ។

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់និងអាស៊ីមតូត ។

គ. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់អាប់ស៊ីស $x = 2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និង បរមាធៀបនៃ f ។

ង. គូសតារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប។

ចម្លើយ:

១០. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-2+e^{1-x}$ តាងដោយក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់ D_f និង គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀប នៃ f ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង C ជាមួយបន្ទាត់ L កាត់តាមគល់តម្រុយ ហើយស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនិងសង់ក្រាប។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

១១. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{1+e^x}$ មានក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត f កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C កាលណា $x\to-\infty$ ។ រួចសិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_1)។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)=x-1+\frac{4}{1+e^x}$ ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C កាលណា $x\to+\infty$ ។ រួចសិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_2) ។

ង. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ច. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ។

ចម្លើយ:

១២. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាបក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ឯកតាលើអ័ក្សយក $2cm$ ។

ក. ⓐ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x; f(x)=x-1+\frac{2}{1+e^x}=x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}$ ។

ⓑ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ⓒ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+1$ និង $(d_2): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ⓓ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និង បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច មានអាប់ស៊ីសស្មើសូន្យ។ សង់ក្រាប $(C),(d_1),(d_2),(L)$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

១៣. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}$ មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ និង $(d_2): y=x-2$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។សិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ L ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(\ln 2,\ln 2)$ ។

ឃ. សង់ក្រាប $C,(d_1),(d_2)$ និង L ។

ចម្លើយ:

១៤. **A**. អនុគមន៍ $h(x)=1+e^{x}(1-x)$ កំណត់ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។ ដោយពុំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ចូរសិក្សាសញ្ញា នៃ $h(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

B. អនុគមន៍ $y=f(x)=2+x(1+e^{x})$ មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់។

ខ. បំភ្លឺថា $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ោដយប្រើលទ្ធផល A ។

ឃ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ ខ្សែកោង C ជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+2$ ។

ង. សង់ក្រាប C លើតម្រុយអរតូណរមេ។

ចម្លើយ:

១៥. ក. អនុគមន៍ h កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $h(x) = e^{2x} - 2x - 1$ ហើយមានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ដោយប្រើតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ h ចូរបញ្ជាក់ថា $e^{2x} \geq 2x + 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ខ. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = (x+1)(e^{-2x} + 1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង មានក្រាប (C)។

a. គណនា $f'(x)$ និង $f'(0)$ ។ បញ្ជាក់ថាដេរីវេ $f'(x)$ និងអនុគមន៍ $h(x)$ មាន សញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ ។

b. គណនា $f(0)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ។

c. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 + \left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right) + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) នៅខាង $+\infty$ ។

d. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) ។

e. បន្ទាត់ (Δ) មួយស្របនឹងបន្ទាត់ (D) ហើយប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M និង សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (Δ) ។

f. សង់បន្ទាត់ $(D),(\Delta)$ និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i}.\vec{j})$ តែមួយ។ (គេឲ្យ $e = 2.7$)

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

១៦. **A**. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^x-1$ ។ គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

B. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ ។

ក. គណនា $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរទី (១) ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $(D): y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (D) ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដែលស្របនឹង (D) ។

ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C) ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$) ។

ចម្លើយ:

១៧. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-1+2e^{-x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 នៃក្រាប C ។ បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ រកសមីការបន្ទាត់ L_2 ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

គ. សង់បន្ទាត់ L_1, L_2 នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$ ។

ឃ. គណនាក្រលាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 ក្រាប C បន្ទាត់ $x=0$ និង $x=1$ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

១៨. គេឲ្យ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាខ្សែកោង $(C_1): y=f(x)$ និង $(C_2): y=g(x)$ មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$ រួចទាញថា (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់រួមរវាង (C_1) និង (C_2) ។

ចម្លើយ:

១៩. f ជាអនុគមន៍ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-e^{-x}$ ។ គេតាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា។

A. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ។

គ. តើខ្សែកោង C នៅលើ ឬក្រោមបន្ទាត់ D ។ ចូរបញ្ជាក់។

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត $x, f(x)=\frac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$

ង. រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

B. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។

ខ. A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង C ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A ។

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

ចម្លើយ:

២០. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាងដោយក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. ⓐ. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

ⓑ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ។

ខ. ⓐ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

ⓑ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. ⓐ. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $ln(3)$ ។

ⓑ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

ឃ. ⓐ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y=\frac{1}{4}x+1$ ។

ⓑ. ដោយសន្មត់ថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និង ក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $ln(3)$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1,d_2,d_3 ។ (នៅលើតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ $2cm$) ។

ចម្លើយ:

២១. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O;\vec{i};\vec{j})$ ។

ក. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$ និង គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹង C ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

ខ. គណនាលីមីត f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_2 មានសមីការ $y = x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។

គ. ⓐ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិតx, $f(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

ⓑ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប C និង អាស៊ីតតូត d_1 និង d_2 របស់វា ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣
អនុគមន៍លោការីត

១ និយមន័យ

និយមន័យ ១

អនុគមន៍លោការីតនេពែ កំណត់ដោយ $y = \ln x$ មានន័យចំពោះ $x > 0$

២ លក្ខណៈ

ជាទូទៅ ១

ចំពោះ $k > 0, a > 0, b > 0$

- $e^x = k \Rightarrow x = \ln k$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $e^{\ln k} = k$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln e^k = k$

លំហាត់គំរូ ១

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $e^{\ln 5}$ គ. $e^{\ln 0.2}$ ង. $e^{\ln 7}$

ខ. $\ln e^{3x+4}$ ឃ. $\ln e^{-4x}$ ច. $\ln e^{x-2}$

ចម្លើយ:

៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

ជាទូទៅ ២

- $y = \ln x$ នោះ $y' = \frac{1}{x}$
- $y = \ln u$ នោះ $y' = \frac{u'}{u}$

លំហាត់គំរូ ២

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = x^3 + \ln x$ ខ. $y = x^2 \ln x$ គ. $y = x + 2\ln x$ ឃ. $y = x^4 \ln x$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

លំហាត់គំរូ ៣

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\ln(x^2+3x)$

ខ. $f(x)=\ln(\cos x)$

គ. $f(x)=\ln(x^2-4)^3$

ឃ. $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$

ង. $y=\sqrt[3]{\ln x}$

ច. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ឆ. $y=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

ជ. $y=x\ln x-x$

ឈ. $y=x^2\ln\frac{1}{x^2}$

ចម្លើយ:

ប្រតិបត្តិ ១

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2\sqrt{5x+1}}{(3x-2)^3}$

ចម្លើយ:

ប្រតិបត្តិ ២

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln x$

ខ. $f(x)=x\sqrt[3]{\ln x}$

គ. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ឃ. $y=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

ង. $f(x)=\ln x+e^x$

ច. $y=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x+2}$

ឆ. $y=x-1-\ln x$

ជ. $y=\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

ឈ. $y=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}$

ចម្លើយ:

៤ លីមីតនៃអនុគមន៍

ប្រតិបត្តិ ៣

ក. $\lim_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$ ខ. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)}{x^2}$ គ. $\lim_{x\to 0}(x\ln x)$

ចម្លើយ:

៥ សមីការ និងវិសមីការ

៥.១ សមីការ

ជាទូទៅ ៣

បើ $\ln a = \ln b$ នោះ $a = b$

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

លំហាត់គំរូ ៤

ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

ក. $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$

ខ. $3e^{2x}+e^{x}-10=0$

គ. $\ln(1-x)+\ln(2x+3)-\ln(x+1)=\ln 3$

ឃ. $\frac{e^{x}-2}{e^{x}-3}=4$

ចម្លើយ:

៥.២ វិសមីការ

ជាទូទៅ ៤

- $\ln a \leq \ln b$ នោះ $a \leq b$
- $\ln a \geq \ln b$ នោះ $a \geq b$

លំហាត់គំរូ ៥

ដោះស្រាយវិសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

ក. $\ln(x+3)+\ln(x+5) \leq \ln 15$

ខ. $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln 3x$

គ. $3e^x - 10e^{-x} + 1 \geq 0$

ចម្លើយ:

៥.៣ ប្រព័ន្ធសមីការ

លំហាត់គំរូ ៦

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

ក. $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$

ចម្លើយ:

៦ សិក្សាអនុគមន៍

លំហាត់គំរូ ៧

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x-\ln x$

ចម្លើយ:

លំហាត់គំរូ ៨

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{lnx}{x}$

ចម្លើយ:

លំហាត់គំរូ ៩

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=e^x\ln x$

ចម្លើយ:

ប្រតិបត្តិ ៤

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=ax+b+\frac{\ln x}{x}$ ។ កំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង C តាង f កាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ A ស្របនឹងបន្ទាត់ $y=2x$ ។

ចម្លើយ:

ប្រតិបត្តិ ៥

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1+\frac{-1+\ln x}{x}$ ហើយ C ជាក្រាបរបស់វា។

ក. អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=1+x^2-\ln x$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ g (មិនបាច់គណនាលីមីតទេ) រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}$ ទាញឱ្យបានថា C មានអាស៊ីមតូតឈរមួយដែលគេនឹងកំណត់សមីការ។

គ. សិក្សាទំនាក់ទំនង $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ។

ង. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនស C ជាមួយ Δ រួចបញ្ជាក់ឱ្យបានច្បាស់ទីតាំងនៃ C ធៀបទៅនឹង Δ ។

ច. សង់ខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូតរបស់វាក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។

ចម្លើយ:

វិញ្ញាសាពហុជ្រើសរើស៖ អនុគមន៍លោការីត (១០០ លំហាត់)

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប និងពង្រឹងសមត្ថភាព

១. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ គឺ៖

ក. $(0,+\infty)$ ខ. $[0,+\infty)$ គ. $\mathbb{R}$ ឃ. $\mathbb{R}^*$

២. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x-3)$ គឺ៖

ក. $(3,+\infty)$ ខ. $[3,+\infty)$ គ. $(-\infty,3)$ ឃ. $x\neq 3$

៣. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(2-x)$ គឺ៖

ក. $(-\infty,2)$ ខ. $(2,+\infty)$ គ. $(-\infty,2]$ ឃ. $x\neq 2$

៤. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x^2-1)$ គឺ៖

ក. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ គ. $[-1,1]$

ខ. $(-1,1)$ ឃ. $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

៥. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x^2+1)$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}$ ខ. $(0,+\infty)$ គ. $[-1,1]$ ឃ. $\mathbb{R}^*$

៦. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln|x|$ គឺ៖

ក. $\mathbb{R}^*$ ខ. $\mathbb{R}$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $x>1$

៧. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\ln x}$ គឺ៖

ក. $[1,+\infty)$ ខ. $(0,+\infty)$ គ. $(1,+\infty)$ ឃ. $[0,+\infty)$

៨. អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ មានន័យកាលណា៖

ក. $x>0$ និង $x\neq 1$ គ. $x\neq 1$

ខ. $x>0$ ឃ. $x>1$

៩. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ គឺ៖

ក. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ គ. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

ខ. $(-1,1)$ ឃ. $x>1$

១០. តម្លៃនៃ $\ln 1$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. e ឃ. មិនកំណត់

១១. តម្លៃនៃ $\ln e$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. 10

១២. តម្លៃនៃ $\ln(e^2)$ ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. e^2 គ. $2e$ ឃ. 1

១៣. តម្លៃនៃ $e^{\ln 5}$ ស្មើនឹង៖

ក. 5 ខ. $\ln 5$ គ. e^5 ឃ. 1

១៤. បើ $a>0, b>0$ នោះរូបមន្ត $\ln(ab)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln a+\ln b$ ខ. $\ln a\cdot\ln b$ គ. $\ln a-\ln b$ ឃ. $a\ln b$

១៥. បើ $a>0, b>0$ នោះរូបមន្ត $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln a-\ln b$ ខ. $\frac{\ln a}{\ln b}$ គ. $\ln b-\ln a$ ឃ. $\ln(a-b)$

១៦. បើ $a>0$ និង $n\in\mathbb{R}$ នោះរូបមន្ត $\ln(a^n)$ ស្មើនឹង៖

ក. $n\ln a$ ខ. $\ln(na)$ គ. $(\ln a)^n$ ឃ. $\frac{\ln a}{n}$

១៧. បើ $a>0$ នោះរូបមន្ត $\ln\sqrt{a}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}\ln a$ ខ. $2\ln a$ គ. $\sqrt{\ln a}$ ឃ. $\ln\left(\frac{a}{2}\right)$

១៨. តម្លៃនៃ $\ln 6-\ln 2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 3$ ខ. $\ln 4$ គ. $\frac{\ln 6}{\ln 2}$ ឃ. 3

១៩. តម្លៃនៃ $\ln 2+\ln 5$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 10$ ខ. $\ln 7$ គ. 10 ឃ. $\ln 2.5$

២០. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(4-x^2)$ គឺ៖

ក. $(-2,2)$ គ. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

ខ. $[-2,2]$ ឃ. $x<2$

២១. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln x$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $f'(x)=\frac{1}{x}$ ខ. $f'(x)=-\frac{1}{x}$ គ. $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ ឃ. $f'(x)=1$

២២. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(2x)$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x}$ ខ. $\frac{2}{x}$ គ. $\frac{1}{2x}$ ឃ. $2\ln x$

២៣. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(x+3)$ ចំពោះ $x>-3$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x+3}$ ខ. $\frac{3}{x+3}$ គ. $-\frac{1}{x+3}$ ឃ. $\frac{1}{x}$

២៤. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(3-2x)$ ចំពោះ $x<\frac{3}{2}$ គឺ៖

ក. $\frac{-2}{3-2x}$ ខ. $\frac{2}{3-2x}$ គ. $\frac{1}{3-2x}$ ឃ. $-2\ln(3-2x)$

២៥. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(x^2+1)$ គឺ៖

ក. $\frac{2x}{x^2+1}$ ខ. $\frac{1}{x^2+1}$ គ. $\frac{x}{x^2+1}$ ឃ. $\frac{2}{x}$

២៦. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(x^2-4)$ ចំពោះ $|x|>2$ គឺ៖

ក. $\frac{2x}{x^2-4}$ ខ. $\frac{1}{x^2-4}$ គ. $\frac{x}{x^2-4}$ ឃ. $\frac{2}{x-2}$

២៧. ដេរីវេនៃ $f(x)=x\ln x$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\ln x+1$ ខ. $\ln x$ គ. 1 ឃ. $\frac{1}{x}+1$

២៨. ដេរីវេនៃ $f(x)=x^2\ln x$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $2x\ln x+x$ ខ. $2x\ln x$ គ. x^2+2x ឃ. $x\ln x+x$

២៩. ដេរីវេនៃ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{1-\ln x}{x^2}$ ខ. $\frac{1+\ln x}{x^2}$ គ. $\frac{\ln x-1}{x^2}$ ឃ. $\frac{1}{x^2}$

៣០. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln^2 x$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{2\ln x}{x}$ ខ. $\frac{\ln x}{x}$ គ. $2\ln x$ ឃ. $\frac{2}{x}$

៣១. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln^3 x$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{3\ln^2 x}{x}$ ខ. $3\ln^2 x$ គ. $\frac{\ln^2 x}{x}$ ឃ. $\frac{3}{x}$

៣២. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln|x|$ ចំពោះ $x\neq 0$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x}$ ខ. $\frac{1}{|x|}$ គ. $-\frac{1}{x}$ ឃ. $\frac{x}{|x|}$

៣៣. ដេរីវេនៃ $f(x)=x-x\ln x$ គឺ៖

ក. $-\ln x$ ខ. $\ln x$ គ. $1-\ln x$ ឃ. $-x\ln x$

៣៤. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln\sqrt{x}$ ចំពោះ $x>0$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{2x}$ ខ. $\frac{1}{x}$ គ. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ឃ. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

៣៥. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(\ln x)$ ចំពោះ $x>1$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x\ln x}$ ខ. $\frac{1}{\ln x}$ គ. $\frac{1}{x}$ ឃ. $\frac{\ln x}{x}$

៣៦. ដេរីវេទី ២ នៃ $f(x)=\ln x$ គឺ៖

ក. $-\frac{1}{x^2}$ ខ. $\frac{1}{x^2}$ គ. $-\frac{1}{x}$ ឃ. $\frac{2}{x^2}$

៣៧. ដេរីវេទី ២ នៃ $f(x)=x\ln x$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{x}$ ខ. $-\frac{1}{x^2}$ គ. $\ln x$ ឃ. 1

៣៨. ដេរីវេទី ៣ នៃ $f(x)=\ln x$ គឺ៖

ក. $\frac{2}{x^3}$ ខ. $-\frac{2}{x^3}$ គ. $\frac{6}{x^4}$ ឃ. $-\frac{1}{x^3}$

៣៩. ដេរីវេនៃ $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ខ. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ គ. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ឃ. $\sqrt{x^2+1}$

៤០. ចំណុចរបត់នៃក្រាបតាង $f(x)=x^2\ln x$ មានអាប់ស៊ីស x ស្មើនឹង៖

ក. $e^{-3/2}$ ខ. $e^{-1/2}$ គ. e^{-1} ឃ. 1

៤១. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. 0 គ. $-\infty$ ឃ. 1

៤២. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ គឺ៖

ក. $-\infty$ ខ. 0 គ. $+\infty$ ឃ. -1

៤៣. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. 1 ឃ. e

៤៤. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. 1 ឃ. $\frac{1}{2}$

៤៥. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $-\infty$ គ. $+\infty$ ឃ. -1

៤៦. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $-\infty$ គ. 1 ឃ. $+\infty$

៤៧. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. $+\infty$

៤៨. តម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. -1

៤៩. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$ គឺ៖

ក. 2 ខ. 1 គ. 0 ឃ. $\frac{1}{2}$

៥០. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$ $(k\neq 0)$ គឺ៖

ក. k ខ. 1 គ. 0 ឃ. $\frac{1}{k}$

៥១. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $+\infty$ គ. 1 ឃ. 2

៥២. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $-\infty$ គ. $+\infty$ ឃ. -1

៥៣. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}(x-\ln x)$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. 0 គ. $-\infty$ ឃ. 1

៥៤. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln x+3}{\ln x-1}$ គឺ៖

ក. 2 ខ. -3 គ. 1 ឃ. $+\infty$

៥៥. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. 1 គ. 0 ឃ. 2

៥៦. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0^+}x^3\ln x$ គឺ៖

ក. 0 ខ. $-\infty$ គ. $+\infty$ ឃ. 1

៥៧. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. $+\infty$ ឃ. e

៥៨. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 1 គ. $+\infty$ ឃ. e

៥៩. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to +\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. $+\infty$

៦០. តម្លៃនៃ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. $\cos 1$ ឃ. $+\infty$

៦១. ឫសនៃសមីការ $\ln x = 0$ គឺ៖

ក. $x=1$ ខ. $x=0$ គ. $x=e$ ឃ. គ្មានឫស

៦២. ឫសនៃសមីការ $\ln x=1$ គឺ៖

ក. $x=e$ ខ. $x=0$ គ. $x=1$ ឃ. $x=e^2$

៦៣. ឫសនៃសមីការ $\ln x=2$ គឺ៖

ក. $x=e^2$ ខ. $x=2e$ គ. $x=2$ ឃ. $x=\sqrt{e}$

៦៤. ឫសនៃសមីការ $\ln(x-1)=0$ គឺ៖

ក. $x=2$ ខ. $x=1$ គ. $x=0$ ឃ. $x=e+1$

៦៥. ឫសនៃសមីការ $\ln(2x-3)=0$ គឺ៖

ក. $x=2$ ខ. $x=\frac{3}{2}$ គ. $x=1$ ឃ. $x=\frac{e+3}{2}$

៦៦. ឫសនៃសមីការ $\ln x=-1$ គឺ៖

ក. $x=\frac{1}{e}$ ខ. $x=-e$ គ. $x=1$ ឃ. គ្មានឫស

៦៧. ឫសនៃសមីការ $\ln(x+2)=\ln(2x-1)$ គឺ៖

ក. $x=3$ ខ. $x=1$ គ. $x=-3$ ឃ. គ្មានឫស

៦៨. ឫសនៃសមីការ $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 5$ គឺ៖

ក. $x=3$ ខ. $x=\pm 3$ គ. $x=9$ ឃ. $x=5$

៦៩. សំណុំឫសនៃសមីការ $\ln^2 x-3\ln x+2=0$ គឺ៖

ក. $\{e,e^2\}$ ខ. $\{1,2\}$ គ. $\{0,\ln 2\}$ ឃ. $\{e\}$

៧០. សំណុំឫសនៃសមីការ $\ln^2 x-\ln x=0$ គឺ៖

ក. $\{1,e\}$ ខ. $\{0,1\}$ គ. $\{0,e\}$ ឃ. $\{e\}$

៧១. សំណុំឫសនៃសមីការ $\ln(x^2-3)=0$ គឺ៖

ក. $\{-2,2\}$ ខ. $\{2\}$ គ. $\{0,4\}$ ឃ. $\{\pm 3\}$

៧២. ឫសនៃសមីការ $\ln x+\ln(x-3)=\ln 4$ គឺ៖

ក. $x=4$ ខ. $x=-1$ គ. $x=4, x=-1$ ឃ. $x=1$

៧៣. វិសមីការ $\ln x>0$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(1,+\infty)$ ខ. $[1,+\infty)$ គ. $(0,+\infty)$ ឃ. $(0,1)$

៧៤. វិសមីការ $\ln x<0$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(0,1)$ ខ. $(-\infty,1)$ គ. $(-\infty,0)$ ឃ. $[0,1)$

៧៥. វិសមីការ $\ln x \geq 1$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $[e,+\infty)$ ខ. $(e,+\infty)$ គ. $[1,+\infty)$ ឃ. $(0,e]$

៧៦. វិសមីការ $\ln(x-1)>0$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(2,+\infty)$ ខ. $(1,+\infty)$ គ. $[2,+\infty)$ ឃ. $(0,+\infty)$

៧៧. វិសមីការ $\ln(2x+1)\leq 0$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $(-\frac{1}{2},0]$ ខ. $(-\infty,0]$ គ. $[0,+\infty)$ ឃ. $(-\frac{1}{2},+\infty)$

៧៨. សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ $\ln^2 x-4\leq 0$ គឺ៖

ក. $[e^{-2},e^2]$ ខ. $[-2,2]$ គ. $(0,e^2]$ ឃ. $[1,e^2]$

៧៩. សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ $\ln x>\ln(2x-1)$ គឺ៖

ក. $(\frac{1}{2},1)$ ខ. $(1,+\infty)$ គ. $(0,1)$ ឃ. $(-\infty,1)$

៨០. ចំនួនឫសពិតនៃសមីការ $\ln x=-x$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ គឺ៖

ក. មានឫសតែមួយ
ខ. មានឫសពីរ
គ. គ្មានឫស
ឃ. មានឫសរាប់មិនអស់

៨១. អនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ ជាអនុគមន៍៖

ក. កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$
ខ. ចុះជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$
គ. កើនផងចុះផង
ឃ. ជាអនុគមន៍ថេរ

៨២. សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $y=\ln x$ គឺ៖

ក. $x=0$ ខ. $y=0$ គ. $x=1$ ឃ. $y=1$

៨៣. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\ln x$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'x$ ត្រង់ចំណុច៖

ក. $(1,0)$ ខ. $(0,1)$ គ. $(0,0)$ ឃ. $(e,0)$

៨៤. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\ln x$ ត្រង់ $x=1$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. -1

៨៥. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\ln x$ ត្រង់ចំណុច $x=1$ គឺ៖

ក. $y=x-1$ ខ. $y=x+1$ គ. $y=x$ ឃ. $y=-x+1$

៨៦. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $y=\ln x$ ត្រង់ចំណុច $x=e$ គឺ៖

ក. $y=\frac{1}{e}x$ ខ. $y=\frac{1}{e}x+1$ គ. $y=x-e$ ឃ. $y=\frac{1}{e}x-1$

៨៧. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ស្មើ 0 ត្រង់៖

ក. $x=e$ ខ. $x=1$ គ. $x=0$ ឃ. $x=e^2$

៨៨. តម្លៃអតិបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{e}$ ខ. e គ. 1 ឃ. 0

៨៩. សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y=\frac{\ln x}{x}$ កាលណា $x\to+\infty$ គឺ៖

ក. $y=0$ ខ. $y=1$ គ. $x=0$ ឃ. $y=\frac{1}{e}$

៩០. តម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x\ln x$ គឺ៖

ក. $-\frac{1}{e}$ ខ. 0 គ. -1 ឃ. $-e$

៩១. តម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x-\ln x$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. e ឃ. -1

៩២. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\ln x$ និង $y=e^x$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង៖

ក. បន្ទាត់ពុះទី ១ $y=x$
គ. អ័ក្ស $x'x$
ខ. អ័ក្ស $y'y$
ឃ. គល់កូអរដោនេ O

៩៣. ចំណុចរបត់នៃក្រាប $y=\frac{\ln x}{x}$ មានអាប់ស៊ីស x ស្មើនឹង៖

ក. $e^{3/2}$ ខ. $e^{1/2}$ គ. e^2 ឃ. e

៩៤. សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $y=\ln(x-2)$ គឺ៖

ក. $x=2$ ខ. $x=0$ គ. $y=2$ ឃ. $x=-2$

៩៥. សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $y=\frac{1}{\ln x}$ គឺ៖

ក. $x=1$ ខ. $x=0$ គ. $y=0$ ឃ. $x=e$

៩៦. សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $y=x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ កាលណា $x\to+\infty$ គឺ៖

ក. $y=x$
គ. $y=0$
ខ. $y=x+1$
ឃ. គ្មានអាស៊ីមតូតទ្រេត

៩៧. អនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ លើ $(-1,1)$ ជាអនុគមន៍៖

ក. សេស ខ. គូ គ. មិនគូមិនសេស ឃ. ជាអនុគមន៍ថេរ

៩៨. អនុគមន៍ $f(x)=\ln(x^2+1)$ ជាអនុគមន៍៖

ក. គូ
គ. មិនគូមិនសេស
ខ. សេស
ឃ. ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច

៩៩. បើ $f(x)=\ln x$ នោះតម្លៃនៃ $f(e^x)$ គឺៈ

ក. x
ខ. e^x
គ. $\ln x$
ឃ. 1

១០០. បើ $f(x)=e^x$ នោះតម្លៃនៃ $f(\ln x)$ ចំពោះ $x>0$ គឺៈ

ក. x
ខ. e^x
គ. $\ln x$
ឃ. 0

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $e^{\ln 7}$ ខ. $\ln e^{x-2}$ គ. $\ln^{7x}$

ចម្លើយ:

២. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍៖

ក. $y = 3 - \ln x$ ខ. $y = \ln(x-3)$ គ. $y = \ln(2+e^{x})$

ចម្លើយ:

៣. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

ចម្លើយ:

៤. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\sqrt{x}\ln x$ ខ. $y=x^3\sqrt{\ln x}$ គ. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ចម្លើយ:

៥. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$ ខ. $y=x\ln x-x$ គ. $y=x^2\ln\frac{1}{x^2}$

ចម្លើយ:

៦. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = 2x - x\ln x$

ខ. $f(x) = \begin{cases} x(1-\ln x) & \text{បើ } x > 0 \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៧. ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=-2\ln|x|+x-2$។

ខ. ក្រាប (C) កាត់ ox ត្រង់ចំណុច P,Q,R ដែលមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា p,q,r។
ចូរប្រៀបធៀប p,q,r និង បណ្ដាចំនួន $-1,0,1,5,6$។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៨. រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយបានទិញម៉ាស៊ីនហ្វាក់តម្លៃ 250\$ ហើយមានអត្រាតម្លៃថយចុះ 25% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើបីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហ្វាក់នេះ នឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ:

៩. បាក់តេរីមួយប្រភេទបំបែកខ្លួនដោយមានមេគុណអត្រាកំណើន $k = 0.872$ ដែល t ជាថ្ងៃ។ បើដើមដំបូងមានបាក់តេរីចំនួន 9 តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 738?

ចម្លើយ:

១០. នៅទីក្រុងមួយកាលពី 10 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 45600នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអាត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 64800នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះ។

ចម្លើយ:

លំហាត់ជំពូកទី៤

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

ខ. $y=\log_2\left(\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\right)$

ចម្លើយ:

២. រកអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = \dfrac{4x-3}{2x+5}$

ខ. $y = \dfrac{3x^2-7x+15}{x-1}$

គ. $\dfrac{2x-1}{x^2-7x+10}$

ចម្លើយ:

៣. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ និងមានក្រាប (C)។

ក. រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$។

ខ. គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃ (C)។

គ. គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

ឃ. បង្ហាញថា $I(1,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C)។ សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$។

ង. សិក្សាតាមក្រាភិច ចំនួនឫសនៃសមីការ $x^2+(1-m)x+m-1=0$។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៤. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$។

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$។

ខ. តាមក្រាបរកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x)=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$។

ចម្លើយ:

៥. អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ចំពោះ $x\neq 1$ ដោយ $f(x)=\dfrac{9x}{(x+1)^2}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$។

ខ. រកតម្លៃបរមាធៀប រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

គ. បង្ហាញថា (C) មានចំណុចរបត់មួយ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់នោះ។

ឃ. គណនា $f(-4), f(-3), f(-2), f(3)$ និង $f(4)$។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៦. គេអោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃ (C)។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=4$។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូតនៃ (C) បន្ទាត់ប៉ះ (T) និង ខ្សែកោង (C)។

ង. ដោយប្រើខ្សែកោង (C) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ $(m-1)x^2-4(m-1)x+3m=0$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នា ហើយមានសញ្ញាដូចគ្នា។

ចម្លើយ:

៧. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = \frac{e^x}{x-1}$

ខ. $y = e^{2x} - e^x$

គ. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

ចម្លើយ:

៨. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = x - 1 - \ln x$

ខ. $y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

គ. $y = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៩. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^{x}-x-1$ និង មានក្រាប (C)។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ទាញថា $f(x)$ មានអប្បបរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃបរិមាធៀបនោះ។ ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) កាលណា $x\to-\infty$។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច P នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$។

ង. សង់ (C) និង (d) និង បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P។ $(\ln 2=0.7)$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

១០. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x}$ និង មានក្រាប (C)។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)$ អាចសរសេរជា $f(x)=\dfrac{xe^x-e^x+2}{e^x}$ ទាញរកលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$។

គ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ (T) និង បន្ទាត់ (d) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$។

ច. តាមក្រាភិច កំណត់ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x)=2$ រួចរកឫសទាំងពីរនោះដោយចំនួនគត់ពីរតគ្នា។

ចម្លើយ:

១១. គេអោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=ax+b+\dfrac{\ln x}{x}$។ កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (C) និង តាង $f(x)$ កាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ A ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y=2x$។

ចម្លើយ:

១២. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=x+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ ហើយមានក្រាប (C) ជាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះ។

ក. រកដែនកំណត់ រួចគណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងនៃដែនកំណត់។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

គ. បង្ហាញថា $(\Delta): y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) រួចកំណត់ទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹង (Δ)។

ឃ. បង្ហាញថា $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C)។

ង. ឲ្យសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង (C) ត្រង់ A។

ច. សង់បន្ទាត់ (Δ) ខ្សែកោង (C) នឹង បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A។

ចម្លើយ:

១៣. អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1+\dfrac{-1+\ln x}{x}$ ហើយ (C) ជាក្រាបរបស់វា។

ក. អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់ដោយ $g(x)=2+x^2-\ln x$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ (មិនចាំបាច់គណនាលីមីត) រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ទាញឲ្យបានថា (C) មានអាស៊ីមតូតឈរមួយដែលគេនឹងកំណត់សមីការ។

គ. សិក្សាទំនាក់ទំនង $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)។

ង. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនៃ (C) ជាមួយ (Δ) រួចបញ្ជាក់អោយបានច្បាស់ទីតាំងនៃ (C) ធៀបទៅនឹង (Δ)។

ច. សង់ខ្សែកោង (C) និង សមីការអាស៊ីមតតូតរបស់វាក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។

ចម្លើយ:

១៤. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) តាង $y = x\ln x - 1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$។

ចម្លើយ:

១៥. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ f រួចបង្ហាញថា f មានអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ ។ សង់ d និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។ (គេនឹងយក $\sqrt{e}=1.6, \frac{1}{2e}=0.2$)

ចម្លើយ:

១៦. f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f(x)$ មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកកូអរដោនេចំណុចរបត់នៃ $f(x)$។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលក្រាប C កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ង. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ រួចសង់បន្ទាត់ (T) និងក្រាប C ។ ដោយប្រើក្រាប C កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $\frac{1+2\ln x}{x^2}=m$ មានឬស។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$.

ចម្លើយ:

១៧. f កំណត់ដោយ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ហើយគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x(x-1)>0$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $L: y=-\frac{x}{2}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និង L ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយខាងលើតែមួយ រួចដោយប្រើក្រាប C កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=m$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា។ $\ln 2=0.7$ ។

ចម្លើយ:

១៨. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2+\ln x+1}{x}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x)>0$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។គណនា $f(2)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) ។ គេយក $\ln 2=0.7$ ។

ចម្លើយ:

១៩. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ មួយ។ គេឱ្យ $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

២០. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{lnx}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ $D:\ y=1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ L អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ (គេយក $e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7$, $\ln 2=0.7$)

ចម្លើយ:

២១. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងក្រាប C និង អាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ L និង ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (គេយក $e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប C ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាប C អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

២២. f ជាអនុគមន៍ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(D): y=1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A ។

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ (គេយក $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7, \ln 2=0.7$)

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

២៣. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិង ដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$)

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឲ្យសមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស។ គណនាផ្ទៃក្រលាផ្ទៃកប្លង់ដែលកំនត់ដោយក្រាប (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ បន្ទាត់ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

២៤. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^3}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$ ។ គណនា $f(\sqrt[3]{e})$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងខ្សែកោង (C) និង អាស៊ីមតូតដេក។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។ ($e = 2.7, \sqrt[3]{e} = 1.4, \frac{1}{3e} = 0.12$) ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីអោយវិសមីការ $1 - \frac{\ln x}{x^3} > k$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C)។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

២៥. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x-1-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ និង (C) ជាក្រាបនៃ f ។

ក. ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។ រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[2,+\infty)$ ។

ង. គណនាក្រឡាផ្ទៃ A ដែលនៅចន្លោះខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $L: y=x-1$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $2\leq x\leq 4$ ។ គេឱ្យ $\ln2=0.7$ និង $\ln3=1.1$ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

២៦. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x \in \mathbb{D} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ ដោយ $y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ ។រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃខ្សែកោង (C) ។

ខ. គណនា និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើគេដឹងថា $x(x-1) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{D}$ ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមា និង អតិបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $(L): y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ មួយ(គេយក $e = 2.7, \ln 2 = 0.7, \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = -0.7$) ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = a$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ដោយប្រើខ្សែកោង (C)។

ចម្លើយ:

២៧. f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $y=f(x)=-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយដែលមានឯកតា $1cm$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) បើ $x\to-\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)\leq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ គណនា $f'(0), f(0)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា គល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់និងផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប (C)

ឃ. គណនា $f(3)$ ហើយសង់ខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (គេយក $e^3=20$) ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{4e^x}{e^x+1}\geq x+2$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

ចម្លើយ:

២៨. f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x)=-x-\frac{4\ln x}{x}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា $(L): y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (L) ។

គ. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)<0$ បើគេដឹងថា $x^2+4-4\ln x>0$ ចំពោះ $x>0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ បន្ទាត់ (D) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ហើយ ស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និងសមីការនៃបន្ទាត់ (D) ។

ឃ. សង់ $(L),(D)$ និង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ដោយយក $e=2.7, \frac{4}{e}=1.5$ ។ គេយក $S(a)$ ជាក្រលាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ ក្រាប (C) និង អាស៊ីមតូតទ្រេត (L) ដែលត្រូវនឹង $1\le x\le a$ ។រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $S(a)=2$ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

២៩. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to0^+} f(x)$ ។ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ (d) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ ។ សង់ (d) និង (C) ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។ (គេយក $\sqrt{e}=1.6, \frac{1}{2e}=0.2$)

ចម្លើយ:

៣០. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិង ដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។ គេឲ្យ $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$ ។

ឃ. គណនាក្រលាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៣១. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិង ដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេក។ សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។ គេឲ្យ $e=2.7, e^{0.5}=1.65$ ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយ ក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ $x=1$ និង $x=e^{0.5}$ ។

ចម្លើយ:

៣២. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I=]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$ ។

A. : h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $h(x)=-x+1-2\ln x$ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ដោយគេមិនតម្រូវអោយគណនាលីមីតនៃ $h(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ឡើយ។

B. ក. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថានៅលើ $I, f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ។

ឃ. ទាញយកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I និងសង់ក្រាប C នៃ $f(x)$ នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

ចម្លើយ:

៣៣. ក. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$ ។

ⓐ. A. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។
B. គណនា $g(1)$ ។

ⓑ. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំនួរ ទី 1 បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម៖
បើ $x\geq$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1$ និង បើ $0<x\leq 1$ នោះ $x^2+\ln x\leq 1$ ។

ⓒ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើ $(0,+\infty)$។

ខ. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយក្រាប C របស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង ∞ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

ⓑ. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ។

ⓒ. ប្រើលទ្ធផលនៃសំនួរ A សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។

ⓓ. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។
b. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃ ចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និង Δ ។ សង់ Δ និង ក្រាប C ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៣៤. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1,+\infty)$ ។

គ. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។
b. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(1,+\infty)$, $\frac{x+1}{x-1}>1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹង d_1 ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C)ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នេះ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3=1.1$ និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $[4.5,0]$។

ចម្លើយ:

៣៥. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x}{x}$ និងក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីត $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមានេះ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់អាប់ស៊ីស $x_0=1$ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. សង់ក្រាប C ។ប្រើក្រាប C ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $e^x-mx=0$ មានឫស។

ចម្លើយ:

៣៦. f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$ ហើយមានក្រាប C តាងក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. ចូរគណនាលីមីតកាលណា x ខិតជិត $-\infty$ និង $+\infty$ រួចទាញសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ C។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា រួចគូសតារាងអថេរភាព។

គ. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $x'ox$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ f ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។ សង់ក្រាប C បន្ទាត់អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ង. ដោយប្រើក្រាប C ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(2x+1)e^{-2x}=m$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

ចម្លើយ:

៣៧. គេកំណត់អនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ មានក្រាប C ជាក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. កំណត់ ចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ f អាចសរសេរ $f(x)=a+\frac{b}{e^x-1}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{D}$ ។ ដោយប្រើទម្រង់នេះ ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ C។

ខ. បង្ហាញថា f មានដេរីវេចំពោះ គ្រប់ចំណុចនៃ $\mathbb{D}$ ហើយគណនាដេរីវេនៃ f' នៃ f។ សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f រួចគូសតារាងអថេរភាព ហើយគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែននៃ $f(x)$ ។

គ. រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C និងសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចអាប់ស៊ីស 1 ។

ឃ. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

៣៨. ក. តាង $g(x)=(x-1)e^x+1$ ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ g ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីត រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $\mathbb{R}$

ខ. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(x-2)e^x+x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយមានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

b. រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតវា។

c. គណនា $f'(x)$ ។ ប្រើលទ្ធផលផ្នែក (ក) សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

d. បង្ហាញថា ក្រាប C តាងអនុគមន៍ f មានចំណុចរបត់មួយដែលត្រូវគណនាកូអរដោនេ ហើយត្រង់ចំណុចរបត់នេះ ក្រាប C មានបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

e. សង់ក្រាប C អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់នោះ ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

៣៩. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) តាង $y = x\ln x - 1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$។

ចម្លើយ:

៤០. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f រួចគណនាលីមីត $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ f រួចបង្ហាញថា f មានអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច $M(0,1)$ ។ សង់ d និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។ (គេនឹងយក $\sqrt{e}=1.6, \frac{1}{2e}=0.2$)

ចម្លើយ:

៤១. f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f(x)$ មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកកូអរដោនេចំណុចរបត់នៃ $f(x)$។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលក្រាប C កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ង. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ រួចសង់បន្ទាត់ (T) និងក្រាប C ។ ដោយប្រើក្រាប C កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $\frac{1+2\ln x}{x^2}=m$ មានឫស។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$.

ចម្លើយ:

៤២. f កំណត់ដោយ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ហើយគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x(x-1)>0$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $L: y=-\frac{x}{2}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និង L ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយខាងលើតែមួយដោយប្រើក្រាប C កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=m$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា។ $(\ln 2=0.7)$

ចម្លើយ:

៤៣. ក. អនុគមន៍ $g(x)=2x^2-\ln x+1$ កំណត់ចំពោះ $x>0$ ។គណនា $g'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ g (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតចុងដែន) រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2x+\frac{g(x)}{x}$ ចំពោះ $x>0$ មានក្រាប C តំណាងក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ មានឯកតា $1cm$ ។

ⓐ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ រួចទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ⓑ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ⓒ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $D: y=2x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ⓓ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C តាងអនុគមន៍ f ។

ⓔ. បង្ហាញថា ក្រាប C កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសនៅចន្លោះ $[0.5,0.6]$ ។ គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប C,L និង D ក្នុងតម្រុយតែមួយ។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$ និង $\ln 0.6=-0.5$ ។

ចម្លើយ:

៤៤. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2+\ln x+1}{x}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) > 0$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d) : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។គណនា $f(2)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) ។ គេយក $\ln 2 = 0.7$ ។

ចម្លើយ:

៤៥. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ មួយ។ គេឱ្យ $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

៤៦. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{lnx}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ $D: \ y=1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ L អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ (គេយក $e=2.7$ $,\frac{2}{e}=0.7$ $,\ln 2=0.7$)

ចម្លើយ:

៤៧. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងក្រាប C និង អាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ L និង ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (គេយក $e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប C ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាប C អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៤៨. គេឲ្យ អនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និង អាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះនោះ។

ង. សង់ក្រាប C គេឲ្យ $e=2.7$ និង $e^{-1}=0.36$ ។

ចម្លើយ:

៤៩. គេឲ្យ អនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ មានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និង អាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ។

ឃ. បន្ទាត់ $(T): y = 3$ កាត់ខ្សែកោង C ត្រង់ M ។ គណនាកូអរដោនេនៃ M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច M ។

ង. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះនោះ។

ច. សង់ក្រាប C គេឲ្យ $e = 2.7$ និង $e^{-1} = 0.36$ ។

ចម្លើយ:

៥០. គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $y = f(x) = x^2e^{-x}$ មានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f ។

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់និងអាស៊ីមតូត ។

គ. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់អាប់ស៊ីស $x = 2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និង បរមាធៀបនៃ f ។

ង. គូសតារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប។

ចម្លើយ:

៥១. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x - 2 + e^{1-x}$ តាងដោយក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់ D_f និង គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀប នៃ f ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង C ជាមួយបន្ទាត់ L កាត់តាមគល់តម្រុយ ហើយស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនិងសង់ក្រាប។

ចម្លើយ:

៥២. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{1+e^x}$ មានក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត f កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C កាលណា $x\to-\infty$ ។ រួចសិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_1)។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)=x-1+\frac{4}{1+e^x}$ ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C កាលណា $x\to+\infty$ ។ រួចសិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_2) ។

ង. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ច. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ។

ចម្លើយ:

៥៣. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាបក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ឯកតាលើអ័ក្សយក $2cm$ ។

ក. ⓐ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)=x-1+\frac{2}{1+e^x}=x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}$ ។

ⓑ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ⓒ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+1$ និង $(d_2): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

ⓓ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច មានអាប់ស៊ីសស្មើសូន្យ។
សង់ក្រាប $C,(d_1),(d_2),(L)$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ:

៥៤. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}$ មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ និង $(d_2): y=x-2$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។សិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ L ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(\ln 2,\ln 2)$ ។

ឃ. សង់ក្រាប $C,(d_1),(d_2)$ និង L ។

ចម្លើយ:

៥៥. **A**. : អនុគមន៍ $h(x)=1+e^{x}(1-x)$ កំណត់ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។ ដោយពុំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $h(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

B. : អនុគមន៍ $y=f(x)=2+x(1+e^{x})$ មានក្រាប C ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់។

ខ. បំភ្លឺថា $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ដោយប្រើលទ្ធផល A ។

ឃ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ ខ្សែកោង C ជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+2$ ។

ង. សង់ក្រាប C លើតម្រុយអរតូណរមេ។

ចម្លើយ:

៥៦. **A**. : f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^x-1$ ។ គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

B. : g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរទី (A) ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $(D): y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (D) ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដែលស្របនឹង (D) ។

ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C) ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$) ។

ចម្លើយ:

៥៧. f ជាអនុគមន៍ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(D): y=1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A ។

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
(គេយក $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7, \ln 2=0.7$)

ចម្លើយ:

៥៨. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ កំណត់អាស៊ីមតូតឈរនិងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមា f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$)

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឲ្យសមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឬស។
គណនាផ្ទៃក្រលាផ្ទៃកប្លង់ដែលកំនត់ដោយ (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

៥៩. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{\ln x}{x^3}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\sqrt[3]{e}$ ។ គណនា $f(\sqrt[3]{e})$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងខ្សែកោង (C) និង អាស៊ីមតូតដេក។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។ ($e=2.7, \sqrt[3]{e}=1.4, \frac{1}{3e}=0.12$) ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីអោយវិសមីការ $1-\frac{\ln x}{x^3}>k$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C)។

ចម្លើយ:

៦០. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x-1-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ និង (C) ជាក្រាបនៃ f ។

ក. ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។ រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[2,+\infty)$ ។

ង. គណនាក្រឡាផ្ទៃ A ដែលនៅចន្លោះខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $L: y=x-1$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $2\le x\le 4$ ។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$ និង $\ln 3=1.1$ ។

ចម្លើយ:

៦១. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x \in \mathbb{D} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ ដោយ $y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។

- **ក**. គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ និង $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ។រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃខ្សែកោង (C) ។
- **ខ**. គណនា និង សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើគេដឹងថា $x(x-1) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{D}$ ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមា និង អតិបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
- **គ**. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $(L): y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។
- **ឃ**. សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ មួយ(គេយក $e = 2.7, \ln 2 = 0.7, \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = -0.7$) ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = a$ មានឬសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ដោយប្រើខ្សែកោង (C)។

ចម្លើយ:

៦២. f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x)=-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយដែលមានឯកតា $1cm$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ពេល $x\to-\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)\leq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ គណនា $f'(0), f(0)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា គល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់និងផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប (C)

ឃ. គណនា $f(3)$ ហើយសង់ខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (គេយក $e^3=20$) ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{4e^x}{e^x+1}\geq x+2$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

ចម្លើយ:

៦៣. f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $y=f(x)=-x-\frac{4\ln x}{x}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយ ។

ក. គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា $(L): y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (L) ។

គ. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)<0$ បើគេដឹងថា $x^2+4-4\ln x>0$ ចំពោះ $x>0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ បន្ទាត់ (D) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ហើយ ស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និងសមីការនៃបន្ទាត់ (D) ។

ឃ. សង់ $(L),(D)$ និង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ដោយយក $e=2.7, \frac{4}{e}=1.5$ ។ គេយក $S(a)$ ជាក្រលាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ ក្រាប (C) និង អាស៊ីមតូតទ្រេត (L) ដែលត្រូវនឹង $1\le x\le a$ ។រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $S(a)=2$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ចម្លើយ:

៦៤. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to0^+} f(x)$ ។ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ (d) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ ។ សង់ (d) និង (C) ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។ (គេយក $\sqrt{e}=1.6, \frac{1}{2e}=0.2$)

ចម្លើយ:

៦៥. អនុគម៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-1+2e^{-x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 នៃក្រាប C ។ បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ រកសមីការបន្ទាត់ L_2 ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

គ. សង់បន្ទាត់ L_1, L_2 នៅក្នុងតម្រុយអរដោនេតែមួយ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$ ។

ឃ. គណនាក្រលាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 ក្រាប C បន្ទាត់ $x=0$ និង $x=1$ ។

ចម្លើយ:

៦៦. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិង ដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។ គេឲ្យ $e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$ ។

ឃ. គណនាក្រលាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៦៧. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិង ដេកនៃក្រាប C ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេក។ សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។ គេឲ្យ $e=2.7, e^{0.5}=1.65$ ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយ (C) អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e^{0.5}$ ។

ចម្លើយ:

៦៨. f ជាអនុគមន៍ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-e^{-x}$ ។ គេតាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា។

A. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ។

គ. តើខ្សែកោង C នៅលើ ឬក្រោមបន្ទាត់ D ។ ចូរបញ្ជាក់។

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត $x, f(x)=\frac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$

ង. រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

B. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។

ខ. A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង C ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A ។

គ. បង្ហាញថា $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

ចម្លើយ:

៦៩. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I=]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$ ។

A. : h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $h(x)=-x+1-2\ln x$ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ដោយគេមិនតម្រូវអោយគណនាលីមីតនៃ $h(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ឡើយ។

B. ក. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថានៅលើ $I, f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ។

ឃ. ទាញយកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I និងសង់ក្រាប C នៃ $f(x)$ នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

ចម្លើយ:

៧០. **A**. : គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$ ។

ក. ⓐ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។
ⓑ. គណនា $g(1)$ ។

ខ. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំនួរ ទី 1 បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម៖ បើ $x\geq$ នោះ៖ $x^2+\ln x\geq 1$ និង បើ $0<x\leq 1$ នោះ៖ $x^2+\ln x\leq 1$ ។

គ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើ $(0,+\infty)$។

B. : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយក្រាប C របស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង ∞ (ដោយដឹងថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

ខ. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ។

គ. ប្រើលទ្ធផលផ្នែក A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។

ឃ. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹង C ត្រង់ $+\infty$ ។
b. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃ ចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និង Δ ។ សង់ Δ និង C ។

ចម្លើយ:

៧១. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ ដោយ $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ $+2$; ត្រង់ -2; និង ត្រង់ $+\infty$ ។ ចូរបញ្ជាក់អំពីអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់នៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ចម្លើយ:

៧២. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O;\vec{i};\vec{j})$ ។

ក. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}$ និង គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹង C ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

ខ. គណនាលីមីត f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ d_2 មានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។

គ. ⓐ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិតx, $f(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

ⓑ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប C និង អាស៊ីតតូត d_1 និង d_2 របស់វា ។

ចម្លើយ:

៧៣. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1,+\infty)$ ។

គ. *a*. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។
b. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(1,+\infty)$, $\frac{x+1}{x-1}>1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹង d_1 ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C)ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នេះ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3=1.1$ និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $[4.5,0]$

ចម្លើយ:

មេរៀនទី ៣ អនុគមន៍លោការីត

៧៤. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាងដោយក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. ⓐ. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

ⓑ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ។

ខ. ⓐ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

ⓑ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. ⓐ. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នឹង C ត្រង់ចំណុច I ដែលមាន $x=ln(3)$ ។

ⓑ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

ឃ. ⓐ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (d_3) ទៅនឹង C ត្រង់ចំណុច $x=0$ មានសមីការ $y=\frac{1}{4}x+1$។

ⓑ. ដោយសន្មត់ថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និង ក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $ln(3)$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះd_1,d_2,d_3 ។ (នៅលើតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ$2cm$) ។

ចម្លើយ:

៧៥. មន្ត្រីរាជការម្នាក់មានអាយុ 30 ឆ្នាំបានយកប្រាក់ចំនួន 1000ដុល្លាទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 11% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ពេលចូលនិវត្តន៍អាយុ 60 ឆ្នាំ តើគាត់បានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើធនាគារទូទាត់ប្រាក់ជាបន្តបន្ទាប់?

ចម្លើយ:

៧៦. នៅទីក្រុងមួយកាលពី២០ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 60000 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយអថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 150000នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះ។

ចម្លើយ:

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ១ ៖ អនុគមន៍សនិទាន

ក. ចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
គ	ក	ខ	គ	ខ	ក	ខ	ខ	ខ	គ
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
គ	ក	គ	ខ	ខ	ក	គ	ក	ក	គ
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ខ	ខ	ក	គ	គ	គ	ក	ខ	ខ	ក
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ខ	គ	ក	គ	ខ	ខ	ក	ខ	ខ	ខ
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
គ	ខ	គ	ខ	គ	ខ	ខ	ខ	គ	ខ
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
ក	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ	ក	ខ	គ
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
ខ	គ	ខ	ក	ខ	ខ	ក	ខ	ខ	ខ
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
ខ	ខ	ក	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
ខ	ខ	ខ	ក	ខ	ក	ខ	ខ	ខ	ខ
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
ក	ខ	ខ	ឃ	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ	ខ

ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=2x+3$

ខ. $f(x)=\sqrt{x+1}$

គ. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$

ច. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=2x+3$ ៖
អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។
ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$ ។

ខ. $f(x)=\sqrt{x+1}$ ៖
អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែកន្សោមក្រោមរ៉ាឌីកាល់មិនអវិជ្ជមាន ៖

$$x+1\geq 0 \iff x\geq -1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=[-1,+\infty)}$ ។

គ. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ៖
អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$x^2-1\geq 0 \iff (x-1)(x+1)\geq 0 \iff x\leq -1 \text{ ឬ } x\geq 1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ ៖
អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែភាគបែងខុសពីសូន្យ ៖

$$x+2\neq 0 \iff x\neq -2$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$ ៖
អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែភាគបែងខុសពីសូន្យ ៖

$$x-3\neq 0 \iff x\neq 3$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{3\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែកន្សោមក្រោមរ៉ាឌីកាល់នៅភាគបែងវិជ្ជមានដាច់ខាត ៖

$$x-2>0 \iff x>2$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(2,+\infty)}$ ។

លំហាត់ទី ២

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

ង. $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ x\neq 2\end{cases}$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))\setminus\{2\}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\ x+3\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ x\neq -3\end{cases}$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))\setminus\{-3\}}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែភាគបែង $x-1\neq 0 \iff x\neq 1$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$ ។

ឃ. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-4x+3\geq 0 \iff (x-1)(x-3)\geq 0$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)}$ ។

ង. $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \iff |x|\geq 2 \\ x^2-9\geq 0 \iff |x|\geq 3 \\ x-1\neq 0 \iff x\neq 1 \end{cases}$ ។

ប្រសព្វនៃលក្ខខណ្ឌទាំងបីគឺ $|x|\geq 3$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \iff |x|\geq 2 \\ x-2\neq 0 \iff x\neq 2 \end{cases} \iff x\leq -2$ ឬ $x>2$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)}$ ។

លំហាត់ទី ៣

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=e^x$

ខ. $f(x)=e^x-1$

គ. $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

ឃ. $f(x)=\ln(x^2-4x+3)$

ង. $f(x)=x+1+\dfrac{\ln x}{x}$

ច. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=e^x \implies \boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$ ។

ខ. $f(x)=e^x-1 \implies \boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1} \implies x-1\neq 0 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ ។

ឃ. $f(x)=\ln(x^2-4x+3)$ ៖ លក្ខខណ្ឌ $x^2-4x+3>0 \iff (x-1)(x-3)>0 \implies \boxed{D=(-\infty,1)\cup(3,+\infty)}$ ។

ង. $f(x)=x+1+\dfrac{\ln x}{x}$ ៖ លក្ខខណ្ឌ $x>0$ និង $x\neq 0 \implies \boxed{D=(0,+\infty)}$ ។

ច. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ ៖ លក្ខខណ្ឌ $\dfrac{x-1}{x}>0 \iff x(x-1)>0 \implies \boxed{D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)}$ ។

លំហាត់ទី ៤

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ ៖

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$ ៖

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$ ៖

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$ ៖

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{x+1}$ (ចំពោះ $x\neq -1$) ៖

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty \implies \boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x+1)(x+2)}$ ៖

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty \implies \boxed{x=-1}$ និង $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty \implies \boxed{x=-2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ ។

លំហាត់ទី ៥

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{1-x}{2x-1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$

គ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-x+2}$

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3x-4}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{1-x}{2x-1}$ ៖ $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$ (ភាគយកខុសពី 0) $\implies$ $\boxed{x=\dfrac{1}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$ ៖ $x+1=0 \iff x=-1 \implies \boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-1}$ ៖ $x^2-1=0 \iff x=\pm 1 \implies$ $\boxed{x=1 \text{ និង } x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-x+2}$ ៖ $\Delta=-7<0 \implies x^2-x+2>0, \forall x \implies$ $\boxed{\text{គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3x-4}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+4)} \implies$ $\boxed{x=1 \text{ និង } x=-4}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)(x-2)} \implies$ $\boxed{x=1 \text{ និង } x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

លំហាត់ទី ៦

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{3-x}{(2x-1)^2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}$

គ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-5x+6}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+2}$

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-3x-4}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{3-x}{(2x-1)^2}$ ៖ $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2} \implies$ $\boxed{x=\dfrac{1}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{3x+1}{(x-1)(x-3)} \implies$ $\boxed{x=1 \text{ និង } x=3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x^2-5x+6}=\dfrac{2+3x}{(x-2)(x-3)} \implies$ $\boxed{x=2 \text{ និង } x=3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+2}$ ៖ $\Delta=-7<0 \implies$ $\boxed{\text{គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{1}{x-4}$ $(x\neq -1)$ ៖ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\dfrac{1}{5}$ មិនមែនអាស៊ីមតូតទេ នាំឱ្យ $\boxed{x=4}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរតែមួយគត់ ។

ច. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-4)}$ ៖ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\infty \Longrightarrow$ $\boxed{x=-1 \text{ និង } x=4}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

លំហាត់ទី ៧

រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \Longrightarrow \boxed{y=2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \Longrightarrow \boxed{y=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-3 \Longrightarrow \boxed{y=-3}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-3 \Longrightarrow \boxed{y=-3}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Longrightarrow \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Longrightarrow \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

លំហាត់ទី ៨

រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Longrightarrow \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Longrightarrow \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-2 \Longrightarrow \boxed{y=-2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{3}{2} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{3}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=11 \Longrightarrow \boxed{y=11}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

លំហាត់ទី ៩

រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+4x+5} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Longrightarrow \boxed{y=0}$ (អ័ក្ស Ox) ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Longrightarrow \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Longrightarrow \boxed{y=0}$ (អ័ក្ស Ox) ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{4}{3} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{4}{3}}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

លំហាត់ទី ១០

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x-x^2}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x+x^2}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x-2x^2}{1-x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}=x+5+\dfrac{11}{x-2}$ ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{11}{x-2}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $\boxed{y=x+5}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

ខ. $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x-2}=-x-3-\dfrac{5}{x-2}$ ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-5}{x-2}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $\boxed{y=-x-3}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=x-4+\dfrac{6}{x+1}$ ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6}{x+1}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $\boxed{y=x-4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{1-x}=2x-1+\dfrac{3}{1-x}$ ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{1-x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $\boxed{y=2x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}-\dfrac{3}{4(2x+1)}$ ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3}{4(2x+1)}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $\boxed{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{9}+\dfrac{58}{9(3x+2)}$ ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{58}{9(3x+2)}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $\boxed{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{9}}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

លំហាត់ទី ១១

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{16}-\dfrac{3}{16(4x+5)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{16}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{23}{16}+\dfrac{285}{16(4x+11)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{23}{16}}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{11}{16}+\dfrac{21}{16(4x+1)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{11}{16}}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{13}{4}+\dfrac{73}{4(2x+5)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{13}{4}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{17}{16}+\dfrac{53}{16(4x+5)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{17}{16}}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}=\dfrac{11}{2}x-\dfrac{5}{4}+\dfrac{13}{4(2x+1)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{11}{2}x-\dfrac{5}{4}}$ ។

លំហាត់ទី ១២

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{5x+2}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{9}+\dfrac{25}{9(3x+2)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{9}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}=x+1+\dfrac{2}{x+1} \Longrightarrow \boxed{y=x+1}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{8}+\dfrac{23}{8(4x-1)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{8}}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{5x+2}=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{17}{25}+\dfrac{334}{25(5x+2)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{17}{25}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{87}{16}-\dfrac{627}{16(4x+5)} \Longrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{87}{16}}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{16}+\dfrac{25}{16(8x+1)} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{16}}$ ។

លំហាត់ទី ១៣

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{-3x+2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+3}{x+1}$

គ. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}$

ង. $f(x)=\sqrt{9x^2+x+2}$

ច. $f(x)=\sqrt{8x^2+x-5}$

ឆ. $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{-3x+2}=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{9}+\dfrac{25}{9(-3x+2)} \Longrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{9}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+3}{x+1}=2x+\dfrac{3}{x+1} \Longrightarrow \boxed{y=2x}$ ។

គ. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ ៖

- ខាង $+\infty$ ៖ $\boxed{y=x+\dfrac{1}{2}}$; - ខាង $-\infty$ ៖ $\boxed{y=-x-\dfrac{1}{2}}$ ។

ឃ. $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}=\sqrt{\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}$ ៖

- ខាង $+\infty$ ៖ $\boxed{y=2x+\dfrac{1}{4}}$; - ខាង $-\infty$ ៖ $\boxed{y=-2x-\dfrac{1}{4}}$ ។

ង. $f(x)=\sqrt{9x^2+x+2}=\sqrt{\left(3x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{71}{36}}$ ៖

- ខាង $+\infty$ ៖ $\boxed{y=3x+\dfrac{1}{6}}$; - ខាង $-\infty$ ៖ $\boxed{y=-3x-\dfrac{1}{6}}$ ។

ច. $f(x)=\sqrt{8x^2+x-5}$ ៖

- ខាង $+\infty$ ៖ $\boxed{y=2\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$; - ខាង $-\infty$ ៖ $\boxed{y=-2\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$ ។

ឆ. $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$ ៖

- ខាង $+\infty$ ៖ $\boxed{y=x+\dfrac{1}{2}}$; - ខាង $-\infty$ ៖ $\boxed{y=-x-\dfrac{1}{2}}$ ។

លំហាត់ទី ១៤

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x+1)'(x-2)-(2x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)-(2x+1)(1)}{(x-2)^2}=\frac{2x-4-2x-1}{(x-2)^2}=\boxed{\frac{-5}{(x-2)^2}}$$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$ ៖

$$f'(x)=\frac{-1(x-2)-(1-x)(1)}{(x-2)^2}=\frac{-x+2-1+x}{(x-2)^2}=\boxed{\frac{1}{(x-2)^2}}$$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$ ៖

$$f'(x)=\frac{-3(x+1)-(2-3x)(1)}{(x+1)^2}=\frac{-3x-3-2+3x}{(x+1)^2}=\boxed{\frac{-5}{(x+1)^2}}$$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$ ៖

$$f'(x)=\frac{3(1-x)-(2+3x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{3-3x+2+3x}{(1-x)^2}=\boxed{\frac{5}{(1-x)^2}}$$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ ៖

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)^2-(x^2+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)[x(x+1)-(x^2+1)]}{(x+1)^4}=\boxed{\frac{2(x-1)}{(x+1)^3}}$$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$ ៖

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3x+2)-(x^2+1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}=\frac{2x^3+6x^2+4x-(2x^3+3x^2+2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}=\boxed{\frac{3x^2+2x-3}{(x^2+3x+2)^2}}$$ ។

លំហាត់ទី ១៥

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x^2+4x+5)-(2x+4)(x^2+3x+2)}{(x^2+4x+5)^2}=\boxed{\frac{x^2+6x+7}{(x^2+4x+5)^2}}$$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x^2+4x+11)-(2x+4)(x^2-3x+2)}{(x^2+4x+11)^2}=\boxed{\frac{7x^2+18x-41}{(x^2+4x+11)^2}}$$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(4x+3)(-x^2+4x)-(-2x+4)(2x^2+3x+2)}{(-x^2+4x)^2}=\boxed{\frac{11x^2+4x-8}{(-x^2+4x)^2}}$$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(6x+3)(-2x^2+5)-(-4x)(3x^2+3x+2)}{(-2x^2+5)^2}=\boxed{\frac{6x^2+38x+15}{(-2x^2+5)^2}}$$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(-2x^2+4x+5)-(-4x+4)(x^2-3x-2)}{(-2x^2+4x+5)^2}=\boxed{\frac{-2x^2+2x-7}{(-2x^2+4x+5)^2}}$$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(22x+3)(x^2+8x+1)-(2x+8)(11x^2+3x+2)}{(x^2+8x+1)^2}=\boxed{\frac{85x^2+18x-13}{(x^2+8x+1)^2}}$$ ។

លំហាត់ទី ១៦

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+4x+5} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{3(x^2+4x+5)-(2x+4)(3x+2)}{(x^2+4x+5)^2} = \boxed{\dfrac{-3x^2-4x+7}{(x^2+4x+5)^2}}$ ។

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2x(x^2+4x+11)-(2x+4)(x^2+2)}{(x^2+4x+11)^2} = \boxed{\dfrac{4x^2+18x-8}{(x^2+4x+11)^2}}$ ។

គ. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x} \Longrightarrow f'(x) = \boxed{\dfrac{2x^4+6x^3+2x^2-16x-8}{(-x^3+4x)^2}}$ ។

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5} \Longrightarrow f'(x) = \boxed{\dfrac{-6x^2+58x-15}{(-2x^2+5)^2}}$ ។

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5} \Longrightarrow f'(x) = \boxed{\dfrac{50x^2-44x+163}{(-2x^2+4x+5)^2}}$ ។

ច. $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1} \Longrightarrow f'(x) = \boxed{\dfrac{-41x^2-20x-13}{(3x^2+8x+1)^2}}$ ។

លំហាត់ទី ១៧

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$

ខ. $f(x) = \dfrac{1-x-x^2}{x-2}$

គ. $f(x) = \dfrac{2-3x+x^2}{x+1}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{2+3x-2x^2}{1-x}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$

ច. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x-2)-(x^2+3x+1)}{(x-2)^2}=\boxed{\dfrac{x^2-4x-7}{(x-2)^2}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x-2} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{(-2x-1)(x-2)-(-x^2-x+1)}{(x-2)^2}=\boxed{\dfrac{-x^2+4x+3}{(x-2)^2}}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x+2)}{(x+1)^2}=\boxed{\dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{1-x} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{(-4x+3)(1-x)-(-1)(-2x^2+3x+2)}{(1-x)^2}=\boxed{\dfrac{2x^2-4x+5}{(1-x)^2}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+4)(2x+1)-2(x^2+4x+1)}{(2x+1)^2}=\boxed{\dfrac{2(x^2+x+1)}{(2x+1)^2}}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+3)(3x+2)-3(x^2+3x+8)}{(3x+2)^2}=\boxed{\dfrac{3x^2+4x-18}{(3x+2)^2}}$ ។

លំហាត់ទី ១៨

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{4x^2+10x+7}{(4x+5)^2}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{4x^2+22x-41}{(4x+11)^2}}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{4x^2+2x-5}{(4x+1)^2}}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{6x^2+30x+1}{(2x+5)^2}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{4x^2+10x-7}{(4x+5)^2}}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{22x^2+22x-1}{(2x+1)^2}}$ ។

លំហាត់ទី ១៩

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{2+5x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{3x^2+4x-7}{(3x+2)^2}}$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{8x^2-4x-11}{(4x-1)^2}}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{5x+2} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{5x^2+4x-66}{(5x+2)^2}}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{4x^2+10x+163}{(4x+5)^2}}$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1} \Longrightarrow f'(x)=\boxed{\dfrac{-32x^2-8x-13}{(8x+1)^2}}$ ។

លំហាត់ទី ២០

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=2x-3$

ខ. $f(x)=3x+2$

គ. $f(x)=-x+1$

ឃ. $f(x)=-2x+1$

ង. $f(x)=4-3x$

ច. $f(x)=-5x+10$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=2x-3$ ៖
រកឫស ៖ $2x-3=0 \iff x=\frac{3}{2}$ ។
ដោយមេគុណ $a=2>0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ ៖

- $f(x)<0$ ចំពោះ $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ ។
- $f(x)=0$ ចំពោះ $x=\frac{3}{2}$ ។
- $f(x)>0$ ចំពោះ $x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ ។

ខ. $f(x)=3x+2$ ៖
រកឫស ៖ $3x+2=0 \iff x=-\frac{2}{3}$ ។
ដោយមេគុណ $a=3>0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ ៖

- $f(x)<0$ ចំពោះ $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ ។
- $f(x)=0$ ចំពោះ $x=-\frac{2}{3}$ ។
- $f(x)>0$ ចំពោះ $x\in\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ ។

គ. $f(x)=-x+1$ ៖
រកឫស ៖ $-x+1=0 \iff x=1$ ។
ដោយមេគុណ $a=-1<0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ ៖

- $f(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,1)$ ។
- $f(x)=0$ ចំពោះ $x=1$ ។
- $f(x)<0$ ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ ។

ឃ. $f(x) = -2x+1$ ៖
រកឫស ៖ $-2x+1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ។
ដោយមេគុណ $a = -2 < 0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ ៖

- $f(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ។
- $f(x) = 0$ ចំពោះ $x = \frac{1}{2}$ ។
- $f(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ។

ង. $f(x) = 4-3x$ ៖
រកឫស ៖ $4-3x = 0 \iff x = \frac{4}{3}$ ។
ដោយមេគុណ $a = -3 < 0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ ៖

- $f(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ ។
- $f(x) = 0$ ចំពោះ $x = \frac{4}{3}$ ។
- $f(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ ។

ច. $f(x) = -5x+10$ ៖
រកឫស ៖ $-5x+10 = 0 \iff x = 2$ ។
ដោយមេគុណ $a = -5 < 0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ ៖

- $f(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty, 2)$ ។
- $f(x) = 0$ ចំពោះ $x = 2$ ។
- $f(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (2, +\infty)$ ។

លំហាត់ទី ២១

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=x^2-2x-3$ គ. $f(x)=x^2-2x+1$ ង. $f(x)=x^2-3x+4$

ខ. $f(x)=x^2-3x+2$ ឃ. $f(x)=2x^2-2x+1$ ច. $f(x)=x^2-5x+10$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x^2-2x-3$ ៖
សមីការ $x^2-2x-3=0$ មានឫសពីរគឺ $x_1=-1$ និង $x_2=3$ ។ មេគុណ $a=1>0$ គេបានតារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ ។
- $f(x)=0$ ចំពោះ $x\in\{-1,3\}$ ។
- $f(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-1,3)$ ។

ខ. $f(x)=x^2-3x+2$ ៖
សមីការ $x^2-3x+2=0 \iff (x-1)(x-2)=0$ មានឫស $x_1=1, x_2=2$ ។ មេគុណ $a=1>0$ ៖

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ ។
- $f(x)=0$ ចំពោះ $x\in\{1,2\}$ ។
- $f(x)<0$ ចំពោះ $x\in(1,2)$ ។

គ. $f(x)=x^2-2x+1$ ៖
កន្សោមជាការេពេញលេញ ៖ $f(x)=(x-1)^2\geq 0$ មានឫសឌុប $x=1$ ៖

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ។
- $f(x)=0$ ចំពោះ $x=1$ ។

ឃ. $f(x)=2x^2-2x+1$ ៖
ឌីសគ្រីមីណង់សង្ខេប ៖ $\Delta'=(-1)^2-2(1)=-1<0$ ។
ដោយ $a=2>0$ និង $\Delta'<0$ នាំឱ្យត្រីធាមានសញ្ញាវិជ្ជមានជានិច្ច ៖

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

ដូចនេះ $f(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ង. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ៖
ឌីសគ្រីមីណង់ ៖ $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$ ។
ដោយ $a = 1 > 0$ និង $\Delta < 0$ នាំឱ្យ ៖

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

ដូចនេះ $f(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ច. $f(x) = x^2 - 5x + 10$ ៖
ឌីសគ្រីមីណង់ ៖ $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(10) = 25 - 40 = -15 < 0$ ។
ដោយ $a = 1 > 0$ និង $\Delta < 0$ នាំឱ្យ ៖

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

ដូចនេះ $f(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី ២២

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

ខ. $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$

គ. $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+1}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{2+3x}{1-x}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

ច. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ។ ឫសភាគយក ៖ $x = -\dfrac{1}{2}$; ឫសភាគបែង ៖ $x = 2$ ។
តារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x=-\frac{1}{2}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ។ ឫសភាគយក ៖ $x=1$; ឫសភាគបែង ៖ $x=2$ ។
តារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0 \iff x\in(1,2)$ ។
- $f(x)=0 \iff x=1$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។ ឫសភាគយក ៖ $x=\frac{2}{3}$; ឫសភាគបែង ៖ $x=-1$ ។
តារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ ។
- $f(x)=0 \iff x=\frac{2}{3}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x}{1-x}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ។ ឫសភាគយក ៖ $x=-\frac{2}{3}$; ឫសភាគបែង ៖ $x=1$ ។
តារាងសញ្ញា ៖

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\frac{2}{3},1\right)$ ។
- $f(x)=0 \iff x=-\frac{2}{3}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ ៖

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។ ដោយភាគយក $x^2+1>0$ និងភាគបែង $(x+1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ ៖

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$+$	

ដូចនេះ $f(x)>0$ **ចំពោះគ្រប់** $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x+2)}$ ៖

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ ។ ដោយ $x^2+1>0,\forall x$ នោះសញ្ញានៃ $f(x)$ ស្របតាមភាគបែង $(x+1)(x+2)$ ៖

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ៖

- $f(x)>0 \iff x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-2,-1)$ ។

លំហាត់ទី ២៣

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x^2+4x}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2+1}$ ៖

ភាគបែង $(x+2)^2+1>0,\forall x \implies D=\mathbb{R}$ ។ សញ្ញានៃ $f(x)$ ស្របតាមភាគយក ៖

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{-2,-1\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-2,-1)$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)^2+7}$ ៖

ភាគបែង $>0,\forall x \implies D=\mathbb{R}$ ។ សញ្ញានៃ $f(x)$ ស្របតាមភាគយក ៖

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{1,2\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(1,2)$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{-x(x-4)}$ ៖

ភាគយកមាន $\Delta=9-16=-7<0 \implies 2x^2+3x+2>0,\forall x$ ។ ភាគបែង $-x^2+4x$ មានឫស $x=0$ និង $x=4$ $(D=\mathbb{R}\setminus\{0,4\})$ ៖

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

- $f(x)>0 \iff x\in(0,4)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{-2x^2+5}$ ៖

ភាគយក $\Delta=9-24=-15<0 \implies$ ភាគយក $>0,\forall x$ ។ ភាគបែង $-2x^2+5=0 \iff x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ។

- $f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right)$ ។

ង. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-2}{-2x^2+4x+5}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \approx -0.56,\ x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3.56$ ។

ឫសភាគបែង ៖ $x_3 = \dfrac{2-\sqrt{14}}{2} \approx -0.87,\ x_4 = \dfrac{2+\sqrt{14}}{2} \approx 2.87$ ។

លំដាប់ឫសលើបន្ទាត់ចំនួន ៖ $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ ៖

x	$-\infty$	x_3	x_1	x_4	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖ $+$	0 $-$	‖ $+$	0 $-$	

- $f(x) > 0 \iff x \in (x_3, x_1) \cup (x_4, x_2)$ ។
- $f(x) = 0 \iff x \in \{x_1, x_2\}$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, x_3) \cup (x_1, x_4) \cup (x_2, +\infty)$ ។

ច. $f(x) = \dfrac{11x^2+3x+2}{x^2+8x+1}$ ៖

ភាគយកមាន $\Delta = 9 - 88 = -79 < 0 \implies$ ភាគយក $> 0, \forall x$ ។

ភាគបែងមានឫស ៖ $x = -4 \pm \sqrt{15}$ ៖

x	$-\infty$	$-4-\sqrt{15}$	$-4+\sqrt{15}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	‖ $-$	‖ $+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -4-\sqrt{15}) \cup (-4+\sqrt{15}, +\infty)$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in (-4-\sqrt{15}, -4+\sqrt{15})$ ។

លំហាត់ទី ២៤

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$

គ. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{-x^3+4x}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$

ច. $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+4x+5}$ ៖

ភាគបែង $(x+2)^2+1 > 0, \forall x \implies D = \mathbb{R}$ ។ សញ្ញាស្របតាមទ្វេធា $3x+2$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ ។
- $f(x) = 0 \iff x = -\frac{2}{3}$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ។

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+4x+11}$ ៖
ភាគយក $x^2+2>0$ និងភាគបែង $(x+2)^2+7>0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៖

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

ដូចនេះ $f(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

គ. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{-x(x-2)(x+2)}$ ៖
ភាគយក $>0, \forall x$ ។ ភាគបែងមានឫស $-2, 0, 2$ ។ មេគុណ $-1<0$ ៖

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

- $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ ។

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+12}{-2x^2+5}$ ៖
ភាគយក $>0, \forall x$ (ព្រោះ $\Delta = -39 < 0$) ។ ភាគបែងមានឫស $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right)$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{-2x^2+4x+5}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x_1=\dfrac{-23-\sqrt{577}}{2}\approx -23.51,\ x_2=\dfrac{-23+\sqrt{577}}{2}\approx 0.51$ ។

ឫសភាគបែង ៖ $x_3=\dfrac{2-\sqrt{14}}{2}\approx -0.87,\ x_4=\dfrac{2+\sqrt{14}}{2}\approx 2.87$ ។

លំដាប់ ៖ $x_1<x_3<x_2<x_4$ ៖

x	$-\infty$		x_1		x_3		x_2		x_4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

- $f(x)>0 \iff x\in(x_1,x_3)\cup(x_2,x_4)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{x_1,x_2\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,x_1)\cup(x_3,x_2)\cup(x_4,+\infty)$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{3x^2+8x+1}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x_1=\dfrac{3-\sqrt{41}}{8}\approx -0.43,\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{41}}{8}\approx 1.18$ ។

ឫសភាគបែង ៖ $x_3=\dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}\approx -2.54,\ x_4=\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}\approx -0.13$ ។

លំដាប់ ៖ $x_3<x_1<x_4<x_2$ ៖

x	$-\infty$		x_3		x_1		x_4		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

- $f(x)>0 \iff x\in(x_3,x_1)\cup(x_4,x_2)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{x_1,x_2\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,x_3)\cup(x_1,x_4)\cup(x_2,+\infty)$ ។

លំហាត់ទី ២៥

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1-x-x^2}{x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2+3x-2x^2}{1-x}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$

ច. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\approx -2.62,\ x_2=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\approx -0.38$; ឫសភាគបែង ៖ $x=2$ ៖

x	$-\infty$		x_1		x_2		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\left\{\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2},2\right)$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{-(x^2+x-1)}{x-2}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1.62,\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.62$; ឫសភាគបែង ៖ $x=2$ ៖

x	$-\infty$		x_1		x_2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},2\right)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x+1}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x=1,2$; ឫសភាគបែង ៖ $x=-1$ ៖

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{1,2\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-1}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x=-\frac{1}{2},2$; ឫសភាគបែង ៖ $x=1$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$ ។
- $f(x) = 0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$ ។

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{2x+1}$ ៖

ឫសភាគយក ៖ $x = -2 \pm \sqrt{3}$; ឫសភាគបែង ៖ $x = -\frac{1}{2}$ ៖

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(-2-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup (-2+\sqrt{3}, +\infty)$ ។
- $f(x) = 0 \iff x \in \{-2 \pm \sqrt{3}\}$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2-\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{2}, -2+\sqrt{3}\right)$ ។

ប. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+8}{3x+2}$ ៖

ភាគយក $\Delta = 9 - 32 = -23 < 0 \implies$ ភាគយក $> 0, \forall x$ ។ ភាគបែង $x = -\frac{2}{3}$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ។

លំហាត់ទី ២៦

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+5}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4x+11}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{4x+1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{4x+5}$ ៖ ឫស $-2<-\dfrac{5}{4}<-1$ ៖

x	$-\infty$		-2		$-\frac{5}{4}$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-2,-\frac{5}{4}\right)\cup(-1,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{-2,-1\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{5}{4},-1\right)$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{4x+11}$ ៖ ឫស $-\dfrac{11}{4}<1<2$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{11}{4}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\frac{11}{4},1\right)\cup(2,+\infty)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{1,2\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{11}{4}\right)\cup(1,2)$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{4x+1}$ ៖ ឫស $-2<-1<-\dfrac{1}{4}$ ៖

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in(-2,-1)\cup\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\{-2,-1\}$ ។

- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-2)\cup\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{2x+5}$ ៖ ភាគយក $>0,\forall x$ នាំឱ្យសញ្ញាស្របតាមភាគបែង $2x+5$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{4x+5}$ ៖ ឫសភាគយក $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; ភាគបែង $x=-\dfrac{5}{4}$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\frac{5}{4},\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2},+\infty\right)$ ។
- $f(x)=0 \iff x\in\left\{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ ។

ច. $f(x)=\dfrac{11x^2+3x+2}{2x+1}$ ៖ ភាគយក $>0,\forall x$ នាំឱ្យសញ្ញាស្របតាម $2x+1$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី ២៧

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{5x+2}$

ង. $f(x)=\dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$

ច. $f(x)=\dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{3x+2}$ ៖ ភាគយក $(x+2)^2+1>0,\forall x$ ៖

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$+$

- $f(x)>0 \iff x\in\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ ៖ ភាគយក $(x+1)^2+2>0,\forall x$ ៖

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$+$

- $f(x)>0 \iff x\in(-1,+\infty)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{4x-1}$ ៖ ភាគយកមាន $\Delta=-7<0 \implies$ ភាគយក $>0,\forall x$ ៖

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$+$

- $f(x)>0 \iff x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ ។
- $f(x)<0 \iff x\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+12}{5x+2}$ ៖ ភាគយកមាន $\Delta=-39<0 \implies$ ភាគយក $>0,\forall x$ ៖

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$ ។

ង. $f(x) = \dfrac{x^2+23x-12}{4x+5}$ ៖ ឫសភាគយក $x_1 = \dfrac{-23-\sqrt{577}}{2} \approx -23.51,\ x_2 = \dfrac{-23+\sqrt{577}}{2} \approx 0.51$; ភាគបែង $x = -\frac{5}{4}$ ៖

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{5}{4}$		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- $f(x) > 0 \iff x \in \left(x_1, -\frac{5}{4}\right) \cup (x_2, +\infty)$ ។
- $f(x) = 0 \iff x \in \{x_1, x_2\}$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup \left(-\frac{5}{4}, x_2\right)$ ។

ច. $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+2}{8x+1}$ ៖ ឫសភាគយក $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{41}}{8} \approx -0.43,\ x_2 = \dfrac{3+\sqrt{41}}{8} \approx 1.18$; ភាគបែង $x = -\frac{1}{8}$ ៖

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{1}{8}$		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

- $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup \left(-\frac{1}{8}, x_2\right)$ ។
- $f(x) = 0 \iff x \in \{x_1, x_2\}$ ។
- $f(x) < 0 \iff x \in \left(x_1, -\frac{1}{8}\right) \cup (x_2, +\infty)$ ។

លំហាត់ទី ២៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y = f(x)$ ខាងក្រោមជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វានីមួយៗ ៖

ក. $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ ខ. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ គ. $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x-2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ ៖

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ។

គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{1(x-1)-(x-2)(1)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

ដោយ $(x-1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 1$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in D$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើដែនកំណត់ D របស់វាជានិច្ច ។

ខ. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ ៖

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$ ។

គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x-1)(1)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$

ដោយ $5>0$ និង $(x+2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2$ នោះ $f'(x)>0,\ \forall x\in D$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើដែនកំណត់ D របស់វាជានិច្ច ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$ ៖

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ។

បំលែងទម្រង់ទូទៅ ៖

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4-4}{x-2}=\frac{(x-2)^2-4}{x-2}=x-2-\frac{4}{x-2}$$

គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=1-\left(-\frac{4}{(x-2)^2}\right)=1+\frac{4}{(x-2)^2}$$

ដោយ $\dfrac{4}{(x-2)^2}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 2$ នោះ $f'(x)=1+\dfrac{4}{(x-2)^2}>1>0,\ \forall x\in D$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើដែនកំណត់ D របស់វាជានិច្ច ។

លំហាត់ទី ២៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=f(x)$ ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វានីមួយៗ ៖

ក. $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$ គ. $f(x)=\dfrac{-x^2+x+3}{x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ។
គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{-1(x-1)-(-x+2)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-x+1+x-2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

ដោយ $-1<0$ និង $(x-1)^2>0, \forall x\neq 1$ នោះ $f'(x)<0,\ \forall x\in D$ ។
ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើដែនកំណត់របស់វាជានិច្ច ។

ខ. $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។
គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{-2(x+1)-(-2x+3)(1)}{(x+1)^2}=\frac{-2x-2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-5}{(x+1)^2}$$

ដោយ $-5<0$ និង $(x+1)^2>0, \forall x\neq -1$ នោះ $f'(x)<0,\ \forall x\in D$ ។
ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើដែនកំណត់របស់វាជានិច្ច ។

គ. $f(x)=\dfrac{-x^2+x+3}{x+1}$ ៖
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។
ចែកពហុធាភាគយកនឹងភាគបែង ៖

$$f(x)=-x+2+\frac{1}{x+1}$$

គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=-1-\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(1+\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

ដោយ $1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x)=-\left(1+\frac{1}{(x+1)^2}\right)<-1<0,\quad \forall x\in D$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើដែនកំណត់របស់វាជានិច្ច ។

លំហាត់ទី ៣០

រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(2m-1)x^2+m+1$ ចំពោះ $x>0$ ជាអនុគមន៍កើន ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $f(x)=(2m-1)x^2+m+1$ មានដេរីវេ ៖

$$f'(x)=2(2m-1)x$$

ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $x>0$ លុះត្រាតែ ៖

$$f'(x)>0,\quad \forall x>0 \iff 2(2m-1)x>0,\quad \forall x>0$$

ដោយ $x>0$ (វិជ្ជមានដាច់ខាត) យើងអាចចែកអង្គទាំងពីរនឹង $2x>0$ ដោយរក្សាទិសដៅវិសមភាព ៖

$$2m-1>0 \iff 2m>1 \iff m>\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ តម្លៃ m ដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{m>\frac{1}{2}}$ ឬ $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ ។

លំហាត់ទី ៣១

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(k+3)x^2-k+2$ ចំពោះ $x<0$ ជា ៖

ក. អនុគមន៍ចុះ

ខ. អនុគមន៍ថេរ

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

$$f'(x)=2(k+3)x$$

ក. ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x<0$ លុះត្រាតែ ៖

$$f'(x)<0,\quad \forall x<0 \iff 2(k+3)x<0,\quad \forall x<0$$

ដោយលក្ខខណ្ឌ $x<0$ នាំឱ្យ $2x<0$ (អវិជ្ជមានដាច់ខាត) ។ ពេលចែកអង្គទាំងពីរនឹង $2x<0$ វិសមភាពត្រូវត្រឡប់ទិសដៅ ៖

$$k+3>0 \iff k>-3$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x<0$ លុះត្រាតែ $\boxed{k>-3}$ ។

ខ. ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរចំពោះ $x<0$ លុះត្រាតែ ៖

$$f'(x)=0,\quad \forall x<0 \iff 2(k+3)x=0,\quad \forall x<0 \iff k+3=0 \iff k=-3$$

ពិនិត្យជាក់ស្តែង ៖ នៅពេល $k=-3$ គេបាន $f(x)=(-3+3)x^2-(-3)+2=5$ (ថេរជានិច្ច) ។
ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលុះត្រាតែ $\boxed{k=-3}$ ។

លំហាត់ទី ៣២

រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$
ខ. $f(x) = -2x^2 + 3x + 6$
គ. $f(x) = -x^2 + 9x - 3$
ឃ. $f(x) = -3x^2 - 9x + 8$
ង. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
ច. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ ៖

$f'(x) = -2x + 4 = 0 \iff x = 2$ ។ ដោយ $a = -1 < 0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ ៖

$$f_{\max} = f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 1 = -4 + 8 - 1 = \boxed{3}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ 3 ត្រង់ $x = 2$ ។

ខ. $f(x) = -2x^2 + 3x + 6$ ៖

$f'(x) = -4x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$ ។ ដោយ $a = -2 < 0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = \frac{3}{4}$ ៖

$$f_{\max} = f\left(\frac{3}{4}\right) = -2\left(\frac{9}{16}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right) + 6 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + \frac{48}{8} = \boxed{\frac{57}{8}}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ $\frac{57}{8}$ ត្រង់ $x = \frac{3}{4}$ ។

គ. $f(x) = -x^2 + 9x - 3$ ៖

$f'(x) = -2x + 9 = 0 \iff x = \frac{9}{2}$ ។ ដោយ $a = -1 < 0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = \frac{9}{2}$ ៖

$$f_{\max} = f\left(\frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{81}{4}\right) + 9\left(\frac{9}{2}\right) - 3 = -\frac{81}{4} + \frac{162}{4} - \frac{12}{4} = \boxed{\frac{69}{4}}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ $\frac{69}{4}$ ត្រង់ $x = \frac{9}{2}$ ។

ឃ. $f(x) = -3x^2 - 9x + 8$ ៖

$f'(x) = -6x - 9 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$ ។ ដោយ $a = -3 < 0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -\frac{3}{2}$ ៖

$$f_{\max} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3\left(\frac{9}{4}\right) - 9\left(-\frac{3}{2}\right) + 8 = -\frac{27}{4} + \frac{54}{4} + \frac{32}{4} = \boxed{\frac{59}{4}}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ $\frac{59}{4}$ ត្រង់ $x = -\frac{3}{2}$ ។

ង. $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ៖

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \iff x = -2$ ។ ដោយ $a = 1 > 0$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -2$ ៖

$$f_{\min} = f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = \boxed{-1}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ -1 ត្រង់ $x = -2$ ។

ច. $f(x)=-x^2+3x-2$ ៖

$f'(x)=-2x+3=0 \iff x=\frac{3}{2}$ ។ ដោយ $a=-1<0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{3}{2}$ ៖

$$f_{\max}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{9}{4}\right)+3\left(\frac{3}{2}\right)-2=-\frac{9}{4}+\frac{18}{4}-\frac{8}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ $\frac{1}{4}$ ត្រង់ $x=\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី ៣៣

រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=-x^2+4x+4$ គ. $f(x)=-x^2+4x-3$ ង. $f(x)=x^2-x+3$

ខ. $f(x)=-x^2+3x+2$ ឃ. $f(x)=x^2-4x+8$ ច. $f(x)=x^2+3x+2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=-x^2+4x+4$ ៖

$f'(x)=-2x+4=0 \iff x=2$ ។ ដោយ $a=-1<0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ៖

$$f_{\max}=f(2)=-(2)^2+4(2)+4=-4+8+4=\boxed{8}$$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ 8 ត្រង់ $x=2$ ។

ខ. $f(x)=-x^2+3x+2$ ៖

$f'(x)=-2x+3=0 \iff x=\frac{3}{2}$ ។ ដោយ $a=-1<0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{3}{2}$ ៖

$$f_{\max}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+2=-\frac{9}{4}+\frac{18}{4}+\frac{8}{4}=\boxed{\frac{17}{4}}$$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ $\frac{17}{4}$ ត្រង់ $x=\frac{3}{2}$ ។

គ. $f(x)=-x^2+4x-3$ ៖

$f'(x)=-2x+4=0 \iff x=2$ ។ ដោយ $a=-1<0$ នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ៖

$$f_{\max}=f(2)=-(2)^2+4(2)-3=-4+8-3=\boxed{1}$$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ 1 ត្រង់ $x=2$ ។

ឃ. $f(x)=x^2-4x+8$ ៖

$f'(x)=2x-4=0 \iff x=2$ ។ ដោយ $a=1>0$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ៖

$$f_{\min}=f(2)=2^2-4(2)+8=4-8+8=\boxed{4}$$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$ ។

ង. $f(x) = x^2 - x + 3$ ៖

$f'(x) = 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ។ ដោយ $a = 1 > 0$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ ៖

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{1 - 2 + 12}{4} = \boxed{\frac{11}{4}}$$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ $\frac{11}{4}$ ត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ ។

ប. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ៖

$f'(x) = 2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$ ។ ដោយ $a = 1 > 0$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -\frac{3}{2}$ ៖

$$f_{\min} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ $-\frac{1}{4}$ ត្រង់ $x = -\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី ៣៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $h(x) = mx^2 + nx + 1$ មានក្រាប (H) ។ ចូររកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យ h មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ ហើយមាន $h(3) = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $h(x)$ ៖

$$h'(x) = 2mx + n$$

អនុគមន៍ h មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ លុះត្រាតែ ៖

$$h'(1) = 0 \quad \text{និង} \quad h''(1) = 2m > 0 \iff m > 0$$

សមីការ $h'(1) = 0$ នាំឱ្យ ៖

$$2m(1) + n = 0 \iff 2m + n = 0 \implies n = -2m \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត តាមប្រធាន $h(3) = 2$ ៖

$$h(3) = m(3)^2 + n(3) + 1 = 2 \iff 9m + 3n + 1 = 2 \iff 9m + 3n = 1 \quad (2)$$

ជំនួស (1) ចូលក្នុង (2) ៖

$$9m + 3(-2m) = 1 \iff 9m - 6m = 1 \iff 3m = 1 \implies m = \frac{1}{3}$$

ដោយ $m = \frac{1}{3} > 0$ នោះលក្ខខណ្ឌអប្បបរមាផ្ទៀងផ្ទាត់ត្រឹមត្រូវ ។

ទាញរក n ពីសមីការ (1) ៖

$$n = -2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ ចំនួនពិតដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{m=\frac{1}{3},\quad n=-\frac{2}{3}}$ ។

លំហាត់ទី ៣៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ ដែលមានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=2$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-3$ ។

គ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f មានចំណុចរបត់ត្រង់ $x=1$ ។

ឃ. បង្ហាញថាគ្មានតម្លៃ a ណាដែលធ្វើឱ្យ f មានតម្លៃអតិបរិមាឡើយ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទីមួយ និងដេរីវេទីពីរ ៖

$$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2},\qquad f''(x)=2+\frac{2a}{x^3}=\frac{2(x^3+a)}{x^3}$$

ក. f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=2$ ៖
លក្ខខណ្ឌចាំបាច់គឺ $f'(2)=0$ ៖

$$2(2)-\frac{a}{2^2}=0 \iff 4-\frac{a}{4}=0 \implies a=16$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ដេរីវេទីពីរ ៖ $f''(2)=2+\frac{2(16)}{2^3}=2+4=6>0$ (ពិតជាចំណុចអប្បបរមា) ។
ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=16}$ ។

ខ. f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-3$ ៖
លក្ខខណ្ឌចាំបាច់គឺ $f'(-3)=0$ ៖

$$2(-3)-\frac{a}{(-3)^2}=0 \iff -6-\frac{a}{9}=0 \iff \frac{a}{9}=-6 \implies a=-54$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ដេរីវេទីពីរ ៖ $f''(-3)=2+\frac{2(-54)}{(-3)^3}=2+\frac{-108}{-27}=2+4=6>0$ (ពិតជាចំណុចអប្បបរមា) ។
ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=-54}$ ។

គ. f មានចំណុចរបត់ត្រង់ $x=1$ ៖
ក្រាបនៃអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $f''(1)=0$ ហើយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាកាត់តាម $x=1$ ៖

$$f''(1)=2+\frac{2a}{1^3}=2+2a=0 \implies a=-1$$

នៅពេល $a=-1$ គេបាន $f''(x)=\frac{2(x^3-1)}{x^3}$ ដែលប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ កាត់តាម $x=1$ ។
ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=-1}$ ។

ឃ. បង្ហាញថាគ្មានតម្លៃ a ដែលធ្វើឱ្យ f មានតម្លៃអតិបរិមា ៖
ដើម្បីឱ្យ f មានបរមាធៀបត្រង់ x_0 លុះត្រាតែ $f'(x_0)=0$ ៖

$$2x_0-\frac{a}{x_0^2}=0 \iff 2x_0^3=a \iff x_0^3=\frac{a}{2} \quad (a\neq 0)$$

ពិនិត្យដេរីវេទីពីរត្រង់ចំណុច x_0 នេះ ៖

$$f''(x_0)=2+\frac{2a}{x_0^3}=2+\frac{2a}{\frac{a}{2}}=2+4=6>0$$

ដោយ $f''(x_0)=6>0$ ជានិច្ច គ្រប់ចំណុចស្ថានីយ x_0 សុទ្ធតែជាចំណុចអប្បបរមាធៀបទាំងអស់ មិនអាចជាចំណុចអតិបរមាឡើយ ។
ចំពោះករណី $a=0$ គេបាន $f(x)=x^2$ ដែលជាប៉ារ៉ាបូលមានតែអប្បបរមាត្រង់កំពូល គ្មានអតិបរិមាឡើយ ។
ដូចនេះ គ្មានតម្លៃ a ណាដែលអាចធ្វើឱ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរិមាឡើយ ។ (បញ្ជាក់រួច)

លំហាត់ទី ៣៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+2$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
ក. រកតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ។
ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀបនៃ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតម្លៃ a និង b ៖
គណនាដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍ ៖

$$f'(x)=3x^2+6ax+3b$$

អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និងអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែ $x=1$ និង $x=2$ ជាឫសនៃ $f'(x)=0$ ៖

$$\begin{cases} f'(1)=3(1)^2+6a(1)+3b=0 \\ f'(2)=3(2)^2+6a(2)+3b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3+6a+3b=0 \\ 12+12a+3b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b=-1 & (1) \\ 4a+b=-4 & (2) \end{cases}$$

យកសមីការ (2) ដកសមីការ (1) អង្គនឹងអង្គ ៖

$$(4a+b)-(2a+b)=-4-(-1) \iff 2a=-3 \implies a=-\frac{3}{2}$$

ជំនួសតម្លៃ $a=-\frac{3}{2}$ ចូលក្នុងសមីការ (1) ៖

$$2\left(-\frac{3}{2}\right)+b=-1 \iff -3+b=-1 \implies b=2$$

ពិនិត្យដេរីវេទីពីរ ៖ $f''(x)=6x+6a=6x-9$ ៖

- $f''(1) = 6(1) - 9 = -3 < 0 \implies x = 1$ ពិតជាចំណុចអតិបរមាធៀប ។
- $f''(2) = 6(2) - 9 = 3 > 0 \implies x = 2$ ពិតជាចំណុចអប្បបរមាធៀប ។

ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a = -\frac{3}{2}, \quad b = 2}$ ។

ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀបនៃ f ៖
ជំនួស $a = -\frac{3}{2}$ និង $b = 2$ ចូលក្នុងកន្សោមអនុគមន៍ ៖

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 2$$

គណនាតម្លៃអតិបរមាធៀប ៖

$$f_{\max} = f(1) = 1^3 - \frac{9}{2}(1)^2 + 6(1) + 2 = 1 - \frac{9}{2} + 8 = 9 - 4.5 = \frac{9}{2}$$

គណនាតម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖

$$f_{\min} = f(2) = 2^3 - \frac{9}{2}(2)^2 + 6(2) + 2 = 8 - 18 + 12 + 2 = 4$$

ផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀប ៖

$$f_{\max} - f_{\min} = \frac{9}{2} - 4 = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ផលដកដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{f(1) - f(2) = \frac{1}{2}}$ ។

លំហាត់ទី ៣៧

រកតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ មាន ៖

ក. អតិបរមាត្រង់ $x = -1$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 3$ ។

ខ. អប្បបរមាត្រង់ $x = 4$ និងចំណុចរបត់ត្រង់ $x = -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទីមួយ និងដេរីវេទីពីរ ៖

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

ក. f មានអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 3$ ៖
លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ ៖

$$\begin{cases} f'(-1) = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ f'(3) = 3(3)^2 + 2a(3) + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2a + b = -3 & (1) \\ 6a + b = -27 & (2) \end{cases}$$

យក (2) ដក (1) អង្គនឹងអង្គ ៖

$$(6a+b)-(-2a+b)=-27-(-3) \iff 8a=-24 \implies a=-3$$

ជំនួស $a=-3$ ចូល (1) ៖

$$-2(-3)+b=-3 \iff 6+b=-3 \implies b=-9$$

ពិនិត្យដេរីវេទីពីរ ៖ $f''(x)=6x+2(-3)=6x-6$ ៖

- $f''(-1)=6(-1)-6=-12<0 \implies x=-1$ ជាចំណុចអតិបរមាពិតប្រាកដ ។
- $f''(3)=6(3)-6=12>0 \implies x=3$ ជាចំណុចអប្បបរមាពិតប្រាកដ ។

ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=-3, \quad b=-9}$ ។

ខ. f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=4$ និងចំណុចរបត់ត្រង់ $x=-1$ ៖
ចំណុចរបត់ត្រង់ $x=-1$ តម្រូវឱ្យ ៖

$$f''(-1)=0 \iff 6(-1)+2a=0 \iff -6+2a=0 \implies 2a=6 \implies a=3$$

ជាមួយ $a=3$ នោះ $f'(x)=3x^2+6x+b$ ។
លក្ខខណ្ឌអប្បបរមាត្រង់ $x=4$ តម្រូវឱ្យ $f'(4)=0$ ៖

$$f'(4)=3(4)^2+6(4)+b=0 \iff 48+24+b=0 \iff 72+b=0 \implies b=-72$$

ពិនិត្យដេរីវេទីពីរ ៖

- $f''(4)=6(4)+2(3)=24+6=30>0 \implies x=4$ ជាចំណុចអប្បបរមាពិតប្រាកដ ។
- $f''(x)=6x+6=6(x+1)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ កាត់តាម $x=-1 \implies x=-1$ ជាចំណុចរបត់ពិតប្រាកដ ។

ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=3, \quad b=-72}$ ។

លំហាត់ទី ៣៨

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=2x^2-8x+5$ ខ. $f(x)=x^3-3x+3x+2$ គ. $f(x)=x^4-2x^2+2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=2x^2-8x+5$ ៖

- **ដែនកំណត់** ៖ $D=\mathbb{R}$ ។
- **ទិសដៅអថេរភាព** ៖
ដេរីវេ ៖ $f'(x)=4x-8=4(x-2)$ ។
$f'(x)=0 \iff x=2$ ។
- ចំពោះ $x\in(-\infty,2) \implies f'(x)<0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត ។
- ចំពោះ $x\in(2,+\infty) \implies f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ។

- **បរមាធៀប ៖**
  ត្រង់ $x=2$, $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ ៖

$$f(2)=2(2)^2-8(2)+5=8-16+5=\boxed{-3}$$

- **លីមីត ៖** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^2=+\infty$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

ខ. $f(x)=x^3-3x+3x+2=x^3+2$ ៖

- **ដែនកំណត់ ៖** $D=\mathbb{R}$ ។
- **ទិសដៅអថេរភាព ៖**
  ដេរីវេ ៖ $f'(x)=3x^2\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=0$ (ឫសឌុប មិនប្តូរសញ្ញា) ។
  ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ និងគ្មានតម្លៃបរមាធៀបឡើយ ។
- **លីមីត ៖** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។
- **ចំណុចរបត់ ៖** $f''(x)=6x=0 \iff x=0$ (ប្តូរសញ្ញា) $\Longrightarrow I(0,2)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

គ. $f(x)=x^4-2x^2+2$ ៖

- **ដែនកំណត់ ៖** $D=\mathbb{R}$ ។
- **ទិសដៅអថេរភាព ៖**
  ដេរីវេ ៖ $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=-1,\quad x=0,\quad x=1$ ។
  - ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1) \Longrightarrow f'(x)<0 \Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
  - ចំពោះ $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty) \Longrightarrow f'(x)>0 \Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើន ។

- **បរមាធៀប ៖**
  - ត្រង់ $x=\pm1$ ៖ អប្បបរមាធៀបគឺ $f(\pm1)=(\pm1)^4-2(\pm1)^2+2=\boxed{1}$ ។
  - ត្រង់ $x=0$ ៖ អតិបរមាធៀបគឺ $f(0)=\boxed{2}$ ។
- **លីមីត ៖** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

លំហាត់ទី ៣៩

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+3x}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ ឆ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ ង. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$ ជ. $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+5}{x^2-2x-3}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ ច. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ ឈ. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{1-x^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+3x}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $x^2+3x\neq0 \iff x(x+3)\neq0 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}}$ ។
- សម្រួលកន្សោមចំពោះ $x\neq0$ ៖ $f(x)=\dfrac{x(x-4)}{x(x+3)}=\dfrac{x-4}{x+3}=1-\dfrac{7}{x+3}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \implies \boxed{y=1}$ (ដេក) ; $\lim\limits_{x\to-3^\pm} f(x)=\pm\infty \implies \boxed{x=-3}$ (ឈរ) ។
  ត្រង់ $x=0$ ៖ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\dfrac{4}{3}$ (ក្រាបមានចន្លោះប្រហោងត្រង់ $(0,-4/3)$) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)^2}>0,\ \forall x\in D \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$ និង $(0,+\infty)$ ព្រមទាំងគ្មានបរមាឡើយ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \implies \boxed{y=2}$ (ដេក) ; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=1}$ (ឈរ) ។
- បំបែក ៖ $f(x)=\dfrac{2(x-1)^2+2x-3}{(x-1)^2}=2+\dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$ ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-3)}{(x-1)^4}=\dfrac{2(x-1)-2(2x-3)}{(x-1)^3}=\dfrac{-2x+4}{(x-1)^3}=\dfrac{-2(x-2)}{(x-1)^3}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=2$ ។
- អថេរភាព ៖ $f'(x)>0 \iff x\in(1,2) \implies f$ កើន ; $f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \implies f$ ចុះ ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=2,\ f$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ $f(2)=\dfrac{2(4)-4-1}{(2-1)^2}=\boxed{3}$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1-\dfrac{3}{(x-1)(x-3)}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $x^2-4x+3\neq 0 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $y=1$ (ដេក) ; $x=1$ និង $x=3$ (ឈរ) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2}=\dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=2$ ។
- អថេរភាព ៖ $f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,1)\cup(1,2) \implies f$ ចុះ ; $f'(x)>0 \iff x\in(2,3)\cup(3,+\infty) \implies f$ កើន ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=2,\ f$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ $f(2)=\dfrac{4-8}{4-8+3}=\boxed{4}$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}=3+\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{2,4\}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $y=3$ (ដេក) ; $x=2$ និង $x=4$ (ឈរ) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{-(2x-6)}{(x^2-6x+8)^2}=\dfrac{-2(x-3)}{(x^2-6x+8)^2}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=3$ ។
- អថេរភាព ៖ $f'(x)>0 \iff x\in(-\infty,2)\cup(2,3) \implies f$ កើន ; $f'(x)<0 \iff x\in(3,4)\cup(4,+\infty) \implies f$ ចុះ ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=3,\ f$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ $f(3)=3+\dfrac{1}{9-18+8}=\boxed{2}$ ។

ង. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}=1-\dfrac{5}{x^2+1}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}}$ (ដោយ $x^2+1>0,\ \forall x$) ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \implies \boxed{y=1}$ (ដេក) ។ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=0$ ។

- អថេរភាព ៖ $f'(x)<0 \iff x<0 \implies f$ ចុះ ; $f'(x)>0 \iff x>0 \implies f$ កើន ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=0$, f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ $f(0)=\boxed{-4}$ ។

ប. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=1-\dfrac{3}{x^2+2}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \implies \boxed{y=1}$ (ដេក) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=0$ ។
- អថេរភាព ៖ $f'(x)<0 \iff x<0 \implies f$ ចុះ ; $f'(x)>0 \iff x>0 \implies f$ កើន ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=0$, f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ $f(0)=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$ ។

ឆ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $y=1$ (ដេក) ; $x=-1$ និង $x=1$ (ឈរ) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x^2-1)-2x(x^2-2x+3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2(x^2-4x+1)}{(x^2-1)^2}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=2-\sqrt{3}\approx 0.27$ ឬ $x=2+\sqrt{3}\approx 3.73$ ។
- បរមាធៀប ៖
  - អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2-\sqrt{3}$ គឺ $f(2-\sqrt{3})=\boxed{1-\sqrt{3}}$ ។
  - អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2+\sqrt{3}$ គឺ $f(2+\sqrt{3})=\boxed{1+\sqrt{3}}$ ។

ជ. $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+5}{x^2-2x-3}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $x^2-2x-3\neq 0 \iff (x+1)(x-3)\neq 0 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \implies \boxed{y=-1}$ (ដេក) ; $x=-1$ និង $x=3$ (ឈរ) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{(-2x+3)(x^2-2x-3)-(2x-2)(-x^2+3x+5)}{(x^2-2x-3)^2}=\dfrac{-x^2-16x+1}{(x^2-2x-3)^2}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=-8\pm\sqrt{65}$ ។
- បរមាធៀប ៖ អប្បបរមាត្រង់ $x=-8-\sqrt{65}$ និងអតិបរមាត្រង់ $x=-8+\sqrt{65}$ ។

ឈ. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{1-x^2}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $1-x^2\neq 0 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}$ ។
- អាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-2 \implies \boxed{y=-2}$ (ដេក) ; $x=-1$ និង $x=1$ (ឈរ) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(1-x^2)-(-2x)(2x^2-x+3)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{-x^2+10x-1}{(1-x^2)^2}$ ។
  $f'(x)=0 \iff x=5\pm 2\sqrt{6}$ ។

- បរមាធៀប ៖ អប្បបរមាត្រង់ $x=5-2\sqrt{6}$ និងអតិបរមាត្រង់ $x=5+2\sqrt{6}$ ។

លំហាត់ទី ៤០

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x\neq 2$ ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x-2}$ និងមានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែលគ្រប់ $x\neq 2$ គេបាន $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) ធៀបទៅនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់វា ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ង. ពិភាក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $2x^2+(1-m)x+2m-1=0$ តាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ៖

ធ្វើវិធីចែកពហុធាភាគយក $2x^2+x-1$ នឹងភាគបែង $x-2$ ៖

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+x-1 & x-2 \\ \cline{2-2} -(2x^2-4x) & 2x+5 \\ \hline 5x-1 & \\ -(5x-10) & \\ \hline 9 & \end{array}$$

គេបាន ៖ $f(x)=2x+5+\dfrac{9}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=2,\quad b=5,\quad c=9}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- **អាស៊ីមតូតឈរ ៖** គណនាលីមីតត្រង់ $x\to 2$ ៖

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(2x+5+\frac{9}{x-2}\right)=9+\left(\frac{9}{0^-}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(2x+5+\frac{9}{x-2}\right)=9+\left(\frac{9}{0^+}\right)=+\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

- **អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖** គណនាលីមីតនៃផលដក $f(x)-(2x+5)$ កាលណា $x\to\pm\infty$ ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+5)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x-2}=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (d): $\boxed{y=2x+5}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត (d) ៖

ពិនិត្យសញ្ញានៃផលដក $f(x)-y_d=\dfrac{9}{x-2}$ ៖

- បើ $x\in(2,+\infty) \implies x-2>0 \implies f(x)-y_d>0$ នាំឱ្យក្រាប (C) **ស្ថិតនៅខាងលើ** អាស៊ីមតូតទ្រេត (d) ។
- បើ $x\in(-\infty,2) \implies x-2<0 \implies f(x)-y_d<0$ នាំឱ្យក្រាប (C) **ស្ថិតនៅខាងក្រោម** អាស៊ីមតូតទ្រេត (d) ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ៖

- **ដែនកំណត់ ៖** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ។
- **ដេរីវេ ៖**

$$f'(x)=(2x+5)'+\left(\frac{9}{x-2}\right)'=2-\frac{9}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)^2-9}{(x-2)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \iff 2(x-2)^2=9 \iff (x-2)^2=\dfrac{9}{2} \iff x-2=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ៖

$$x_1=2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\approx-0.12,\qquad x_2=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\approx 4.12$$

- **តម្លៃបរមាធៀប ៖**

$$f(x_1)=2\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+5+\frac{9}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}=9-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=9-6\sqrt{2}\approx 0.51 \quad \text{(អតិបរមាធៀប)}$$

$$f(x_2)=2\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+5+\frac{9}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=9+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=9+6\sqrt{2}\approx 17.49 \quad \text{(អប្បបរមាធៀប)}$$

- **ផ្ចិតឆ្លុះ ៖** ចំណុចប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $I(2,9)$ ។
ចំពោះគ្រប់ $x\neq 2$ គេបាន $4-x\neq 2$ ហើយ ៖

$$f(4-x)+f(x)=\left(2(4-x)+5+\frac{9}{2-x}\right)+\left(2x+5+\frac{9}{x-2}\right)=18=2(9)$$

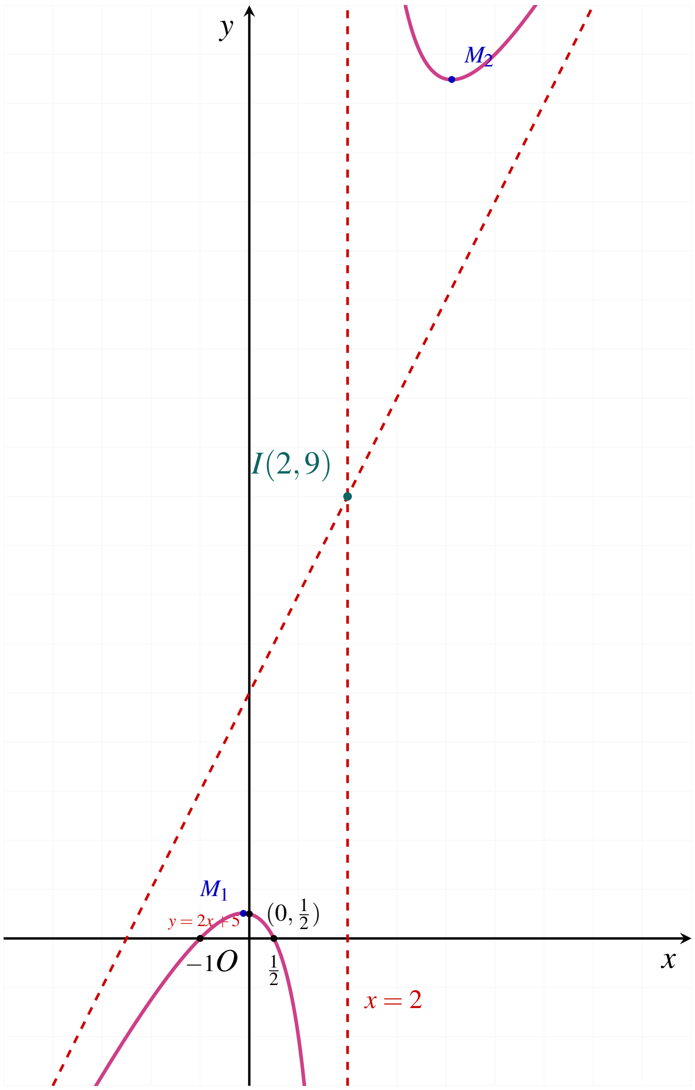
ដូចនេះ $I(2,9)$ **ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប** (C) ។

- **ចំណុចប្រសព្វអ័ក្សកូអរដោនេ ៖**
  - ប្រសព្វអ័ក្ស (Oy) ៖ $x=0 \implies y=f(0)=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ ។ ចំណុច $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ។
  - ប្រសព្វអ័ក្ស (Ox) ៖ $y=0 \iff 2x^2+x-1=0 \iff (2x-1)(x+1)=0 \implies x=\dfrac{1}{2},\ x=-1$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		$2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		2		$2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$9-6\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$9+6\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

ក្រាបតំណាង (C) ៖



ង. **ពិភាក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ៖**
សមីការដែលត្រូវពិភាក្សា ៖ $2x^2+(1-m)x+2m-1=0$ (ចំពោះ $x \neq 2$) ។
បំប្លែងសមីការ ៖

$$2x^2+x-1-mx+2m=0 \iff 2x^2+x-1=m(x-2) \iff \frac{2x^2+x-1}{x-2}=m \iff f(x)=m$$

ចំនួនឫសនៃសមីការគឺចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ដេក $(d_m): y=m$ ៖

- បើ $m<9-6\sqrt{2}\approx 0.51$ ៖ បន្ទាត់កាត់ក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x<2$ (ឫសទាំងពីរអវិជ្ជមាន ឬមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នាអាស្រ័យតាម m ធៀបនឹង $\frac{1}{2}$) ។
- បើ $m=9-6\sqrt{2}$ ៖ បន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់កំពូលអតិបរមា នាំឱ្យសមីការមានឫសឌុប $x=2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។
- បើ $9-6\sqrt{2}<m<9+6\sqrt{2}$ ៖ បន្ទាត់មិនកាត់ក្រាប (C) ឡើយ នាំឱ្យសមីការ**គ្មានឫសក្នុង** $\mathbb{R}$ ។
- បើ $m=9+6\sqrt{2}$ ៖ បន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់កំពូលអប្បបរមា នាំឱ្យសមីការមានឫសឌុប $x=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

- បើ $m > 9+6\sqrt{2} \approx 17.49$ ៖ បន្ទាត់កាត់ក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមានទាំងពីរ $x > 2$ (សមីការមានឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា) ។

លំហាត់ទី ៤១

គេឱ្យ f កំណត់លើ $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$ ហើយ (C) ជាក្រាបនៃ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 2$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ឃ. រកកូអរដោនេផ្ចិតឆ្លុះ I នៃក្រាប (C) រួចសង់ក្រាប (C) ។

ង. ពិភាក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2-(m+4)x+2m+8=0$ តាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **រកចំនួនពិត a,b,c ៖**

បំបែកកន្សោមភាគយក ៖

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4+4}{x-2} = \frac{(x-2)^2+4}{x-2} = x-2+\frac{4}{x-2}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=1, \quad b=-2, \quad c=4}$ ។

ខ. **រកសមីការអាស៊ីមតូត ៖**

- **អាស៊ីមតូតឈរ ៖**

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x-2+\frac{4}{x-2}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់សមីការ $\boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

- **អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖**

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-2} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): \boxed{y=x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

គ. **សិក្សាអថេរភាព ៖**

- **ដេរីវេ ៖**

$$f'(x) = 1-\frac{4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2-2)(x-2+2)}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \iff x(x-4)=0 \iff x=0$ ឬ $x=4$ ។

- បរមាធៀប ៖
  - ត្រង់ $x=0 \Longrightarrow f(0)=0-2+\dfrac{4}{0-2}=-4$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀប ។
  - ត្រង់ $x=4 \Longrightarrow f(4)=4-2+\dfrac{4}{4-2}=2+2=4$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀប ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

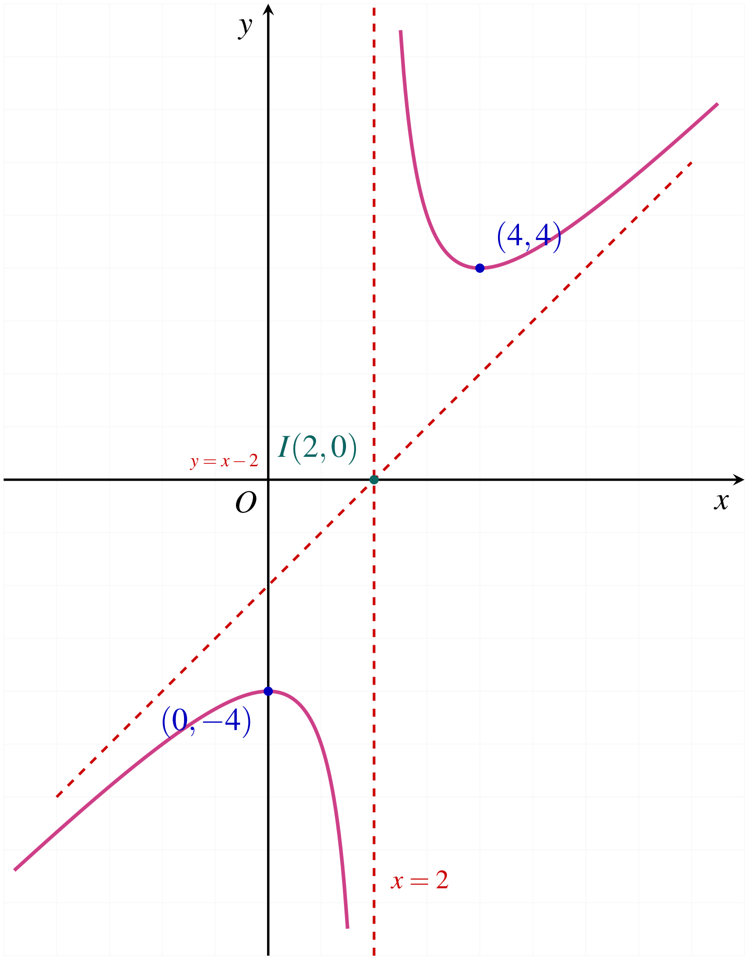
ឃ. ផ្ចិតឆ្លុះ និងសង់ក្រាប (C) ៖

ចំណុចប្រសព្វអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $I(2,0)$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តផ្ចិតឆ្លុះ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ជាមួយ $a=2, b=0$ ៖

$$f(4-x)+f(x)=\left(4-x-2+\frac{4}{4-x-2}\right)+\left(x-2+\frac{4}{x-2}\right)=(2-x)-\frac{4}{x-2}+x-2+\frac{4}{x-2}=0=2(0)$$

ដូចនេះ $I(2,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។



ង. **ពិភាក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ ៖**

សមីការ $x^2-(m+4)x+2m+8=0 \iff x^2-4x+8=m(x-2) \iff \dfrac{x^2-4x+8}{x-2}=m \iff f(x)=m$ ។

- បើ $m<-4$ ៖ បន្ទាត់កាត់ក្រាបត្រង់ពីរចំណុចដែលមាន $x<2$ (ឫសអវិជ្ជមានពីរ) ។
- បើ $m=-4$ ៖ បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(0,-4)$ នាំឱ្យមានឫសឌុប $x=0$ ។
- បើ $-4<m<4$ ៖ បន្ទាត់មិនកាត់ក្រាប (C) ទេ នាំឱ្យសមីការ**គ្មានឫសក្នុង** $\mathbb{R}$ ។
- បើ $m=4$ ៖ បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(4,4)$ នាំឱ្យមានឫសឌុប $x=4$ ។
- បើ $m>4$ ៖ បន្ទាត់កាត់ក្រាបត្រង់ពីរចំណុចដែលមាន $x>2$ (ឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា) ។

លំហាត់ទី ៤២

គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និងតាងដោយ (C) ក្រាបនៃ f ។

ក. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) និងសិក្សាទីតាំងធៀប ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះនីមួយៗនៃដែនកំណត់ ។

ង. រកកូអរដោនេផ្ចិតឆ្លុះ I រួចសង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់ ៖** $x+1\neq 0 \iff x\neq -1 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)}$ ។

ខ. **ទម្រង់បន្ទាប់ ៖**

ចែកភាគយកនឹងភាគបែង ៖ $x^2-x-3=(x-2)(x+1)-1$ ។

នាំឱ្យ $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+1)-1}{x+1}=\boxed{x-2-\dfrac{1}{x+1}}$ (ពិត) ។

គ. **អាស៊ីមតូត និងទីតាំងធៀប ៖**

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=0 \implies (d):\boxed{y=x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-y_d=-\dfrac{1}{x+1}$ ៖
  - បើ $x>-1 \implies f(x)-y_d<0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោម (d) ។
  - បើ $x<-1 \implies f(x)-y_d>0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងលើ (d) ។

ឃ. **ទិសដៅអថេរភាព ៖**

$f'(x)=1-\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ។

ដោយ $(x+1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ នាំឱ្យ $f'(x)>1>0,\ \forall x\in D$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតជានិច្ចលើ $(-\infty,-1)$ និងលើ $(-1,+\infty)$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។

ង. **ផ្ចិតឆ្លុះ និងសង់ក្រាប ៖**

ប្រសព្វនៃអាស៊ីមតូតគឺ $I(-1,-3)$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

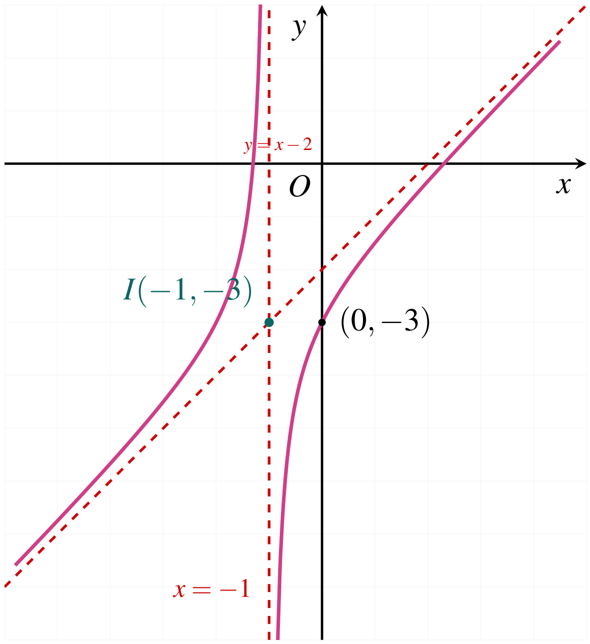
$$f(-2-x)+f(x)=-2-x-2-\frac{1}{-2-x+1}+x-2-\frac{1}{x+1}=-6=2(-3)$$

ដូចនេះ $I(-1,-3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

ក្រាបតំណាង (C) ៖



លំហាត់ទី ៤៣

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq 1$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. បង្ហាញថាប្រសព្វអាស៊ីមតូត $I(1,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) រួចសង់ក្រាប (C) ។

ង. ពិភាក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2+(1-m)x+m-1=0$ តាមតម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-x+2x-2+1}{x-1}=x+2+\dfrac{1}{x-1} \implies \boxed{a=1,\quad b=2,\quad c=1}$ ។

ខ. **អាស៊ីមតូត ៖**

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0 \implies (d):\boxed{y=x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. **អថេរភាព ៖**

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$ ឬ $x=2$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(0)=\dfrac{-1}{-1}=\boxed{1}$ ត្រង់ $x=0$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(2)=2+2+\dfrac{1}{1}=\boxed{5}$ ត្រង់ $x=2$ ។

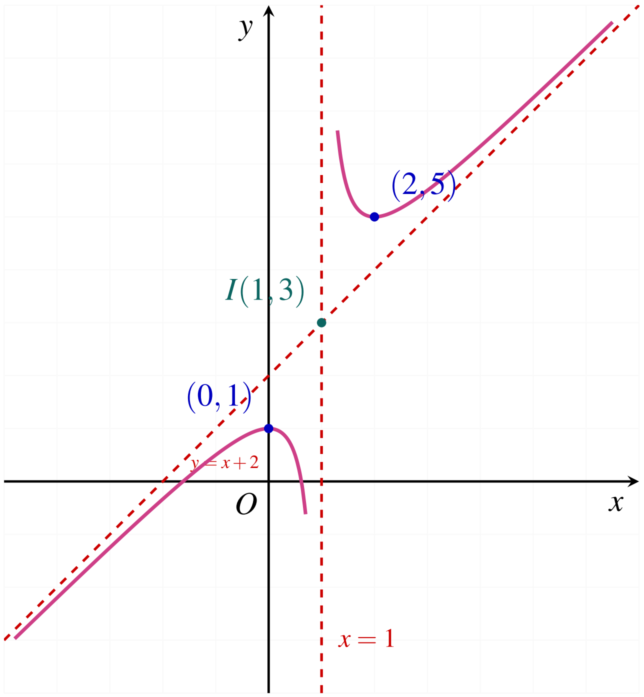
តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

ឃ. **ផ្ចិតឆ្លុះ និងក្រាប (C) ៖**

$I(1,3)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ $f(2-x)+f(x)=(2-x+2+\frac{1}{1-x})+(x+2+\frac{1}{x-1})=6=2(3)$ ។

ដូចនេះ $I(1,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។



ង. **ពិភាក្សាឫសសមីការ ៖**

$x^2+(1-m)x+m-1=0 \iff f(x)=m$ ៖

- $m<1$ ៖ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា $x_1<0<x_2<1$ ។
- $m=1$ ៖ មានឫសឌុប $x=0$ ។
- $1<m<5$ ៖ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ។
- $m=5$ ៖ មានឫសឌុប $x=2$ ។
- $m>5$ ៖ មានឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា $1<x_1<2<x_2$ ។

លំហាត់ទី ៤៤

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ ។

យើងតាង (C) ជាក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. ១. រកចំនួនពិត a,b,c ដែលគ្រប់ $x\neq 2$ គេបាន $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។

២. គេតាង (d) ជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ។ បង្ហាញថា (d) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ត្រង់ $\pm\infty$ និងសិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d) ។

៣. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ។

ម្យ៉ាងទៀត ត្រង់ $x=2$ ៖

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-x-1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2-x-1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖
ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ៖

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0 \iff (x-1)(x-3)=0 \iff x=1$ ឬ $x=3$ ។
ដោយ $(x-2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq2$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើ $(x-1)(x-3)$ ៖

- $f'(x)>0 \iff x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty) \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ។
- $f'(x)<0 \iff x\in(1,2)\cup(2,3) \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត ។
- ត្រង់ $x=1$, f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ $f(1)=\dfrac{1^2-1-1}{1-2}=\boxed{1}$ ។
- ត្រង់ $x=3$, f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ $f(3)=\dfrac{3^2-3-1}{3-2}=\boxed{5}$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

គ. ១. រកចំនួនពិត a,b,c ៖
ធ្វើវិធីចែកពហុធាភាគយក x^2-x-1 នឹងភាគបែង $x-2$ ៖

$$x^2-x-1=(x+1)(x-2)+1 \implies f(x)=x+1+\frac{1}{x-2}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=1,\quad b=1,\quad c=1}$ ។

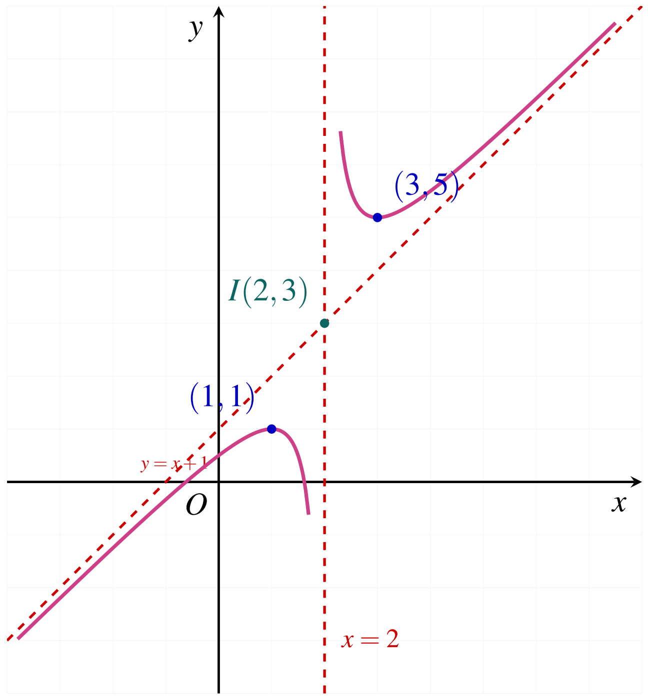
២. **អាស៊ីមតូតទ្រេត (d) និងទីតាំងធៀប ៖**
គណនាលីមីតផលដក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y = x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។
ទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹង (d) តាមសញ្ញានៃ $f(x)-y_d = \frac{1}{x-2}$ ៖

- $x \in (2,+\infty) \implies \frac{1}{x-2} > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងលើអាស៊ីមតូត (d) ។
- $x \in (-\infty,2) \implies \frac{1}{x-2} < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូត (d) ។

៣. **សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ៖**



លំហាត់ទី ៤៥

គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2-x-3}{x+1}$ និងតាង (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = x-2-\frac{1}{x+1}$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ៖
អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x+1\neq 0 \iff x\neq -1$ ។
ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ៖
តម្រូវភាគបែង ៖

$$x-2-\frac{1}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)-1}{x+1}=\frac{x^2-x-2-1}{x+1}=\frac{x^2-x-3}{x+1}=f(x)$$

ដូចនេះ $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ពិតប្រាកដមែន ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖
គណនាលីមីតផលដក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{y=x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ៖

- **លីមីត និងអាស៊ីមតូតឈរ ៖** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ។
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \Longrightarrow$ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។
- **ដេរីវេ ៖** ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ ៖

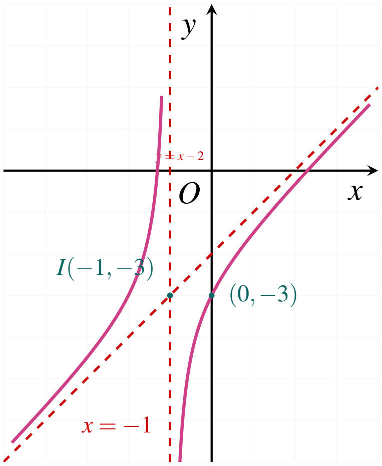
$$f'(x)=1-\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)=1+\frac{1}{(x+1)^2}>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើចន្លោះ $(-\infty,-1)$ និង $(-1,+\infty)$ ព្រមទាំងគ្មានតម្លៃបរមាធៀបឡើយ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

ក្រាបតំណាង (C) ៖



លំហាត់ទី ៤៦

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{1-x}=\frac{x^2-4}{1-x}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. ចែកពហុធាដើម្បីសរសេរ $f(x)$ ជាទម្រង់ $ax+b+\frac{c}{1-x}$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

ង. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $1-x\neq 0 \iff x\neq 1 \implies \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ ។

ខ. $f(x)=\frac{-x^2+4}{x-1}=\frac{-(x^2-1)+3}{x-1}=-(x+1)+\frac{3}{x-1}=\boxed{-x-1-\frac{3}{1-x}}$ ។

គ. អាស៊ីមតូត ៖

- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x-1)]=0 \implies (d):\boxed{y=-x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

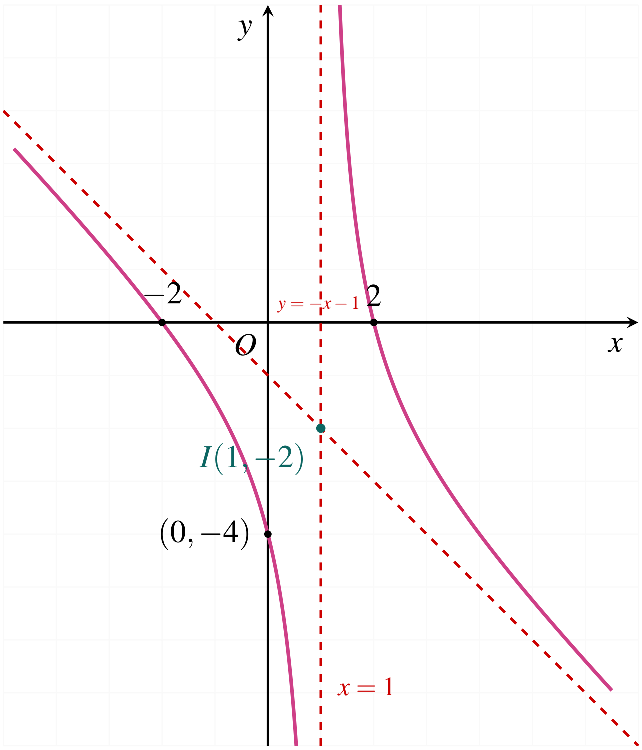
ឃ. ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=-1-\frac{3}{(x-1)^2}=-\left(1+\frac{3}{(x-1)^2}\right)<-1<0,\quad \forall x\neq 1$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(-\infty,1)$ និងលើ $(1,+\infty)$ ជានិច្ច និងគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។

ង. តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$



លំហាត់ទី ៤៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. រកតម្លៃបរមាធៀប និងសង់តារាងអថេរភាព ។

ឃ. បង្ហាញថា $I(-1,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$ ។

សរសេរ $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

ខ. អាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} f(x)=\pm\infty \implies \boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x+1}=0 \implies (d):\boxed{y=x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

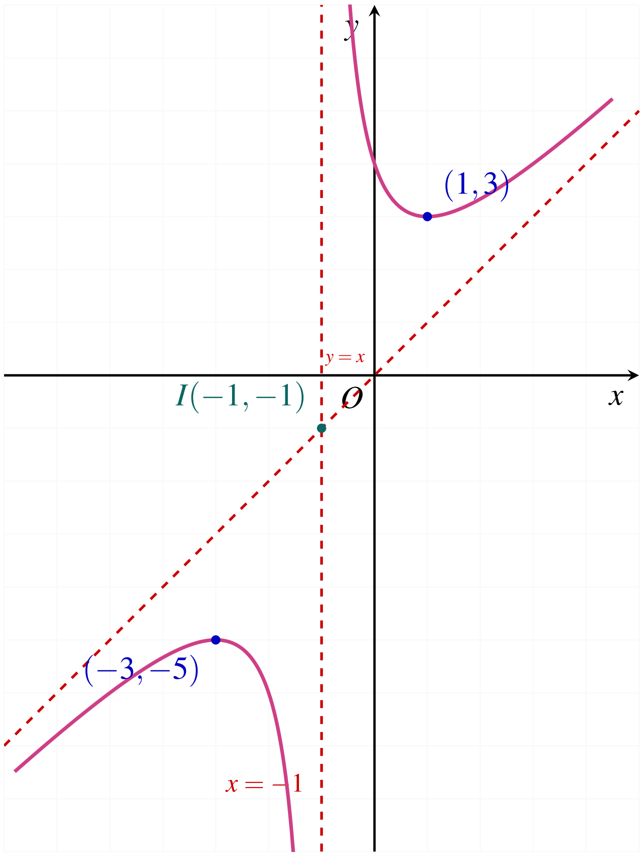
ⓖ. $f'(x)=0 \iff x=-3$ ឬ $x=1$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-3)=-3+\dfrac{4}{-2}=\boxed{-5}$ ត្រង់ $x=-3$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(1)=1+\dfrac{4}{2}=\boxed{3}$ ត្រង់ $x=1$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

ⓦ. ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $f(-2-x)+f(x)=(-2-x+\frac{4}{-1-x})+(x+\frac{4}{x+1})=-2=2(-1) \implies \boxed{I(-1,-1)}$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។



លំហាត់ទី ៤៨

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2$ និងមានខ្សែកោង (C) ។

ⓚ. សិក្សាអថេរភាព និងរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_0 = 1$ ។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (T) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S នៃរូបប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C), អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. អថេរភាព និងអាស៊ីមតូត ៖

$f(x) = x+1+\dfrac{4}{x+2}$ ។

$\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty \implies \boxed{x=-2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x+1)] = 0 \implies (d): \boxed{y=x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

$f'(x) = 1-\dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=-4$ ឬ $x=0$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-4) = -4+1+\dfrac{4}{-2} = \boxed{-5}$ ត្រង់ $x=-4$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(0) = 0+1+\dfrac{4}{2} = \boxed{3}$ ត្រង់ $x=0$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

ខ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0=1$ និងចំណុច A ៖

គណនា $f(1) = 1+1+\dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{3}$ និង $f'(1) = 1-\dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) = \frac{5}{9}(x-1)+\frac{10}{3} = \frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{30}{9} \implies \boxed{y=\frac{5}{9}x+\frac{25}{9}}$$

រកប្រសព្វ A ជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+1$ ៖

$$x+1 = \frac{5}{9}x+\frac{25}{9} \iff \frac{4}{9}x = \frac{16}{9} \implies x=4 \implies y=4+1=5$$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{A(4,5)}$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ៖

ចំពោះ $x\in[1,2]$ ក្រាប (C) នៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត (d) ៖

$$S = \int_1^2 [f(x)-(x+1)]\,dx = \int_1^2 \frac{4}{x+2}\,dx = 4[\ln|x+2|]_1^2 = 4(\ln 4-\ln 3) = \boxed{4\ln\frac{4}{3}} \approx 1.15 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}$$

លំហាត់ទី ៤៩

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{2\}}$ ។

លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3x+6+1}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}\implies \boxed{a=1,\ b=-3,\ c=1}$ ។

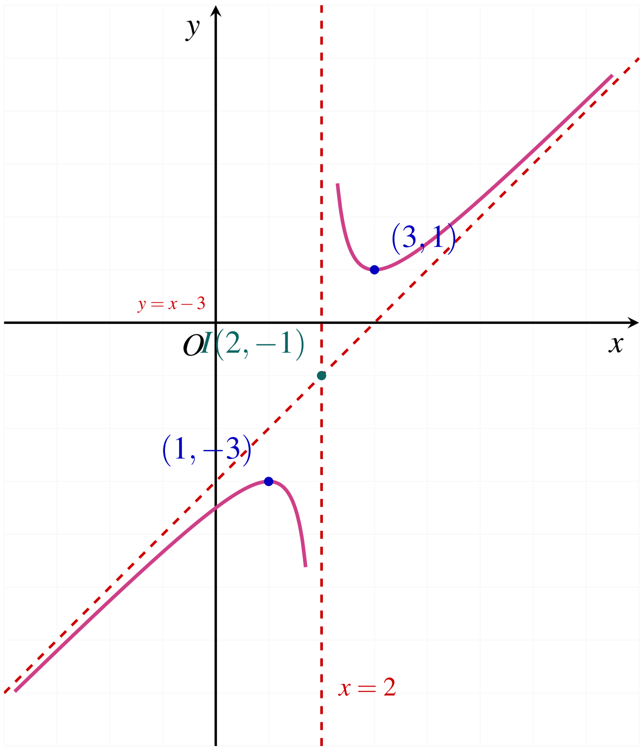
គ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=2}$; អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=x-3}$ ។

ឃ. $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(1)=1-3-1=\boxed{-3}$ ត្រង់ $x=1$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(3)=3-3+1=\boxed{1}$ ត្រង់ $x=3$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



លំហាត់ទី ៥០

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \neq 2$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើដែនកំណត់របស់វាជានិច្ច ។

គ. រកចំណុចប្រសព្វរវាង (C) ជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ និងផ្ចិតឆ្លុះ I ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-x+2-6}{x-2}=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ ៖

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-1)]=0 \implies (d):\boxed{y=x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ខ. $f'(x)=1+\dfrac{6}{(x-2)^2}>1>0, \forall x\neq 2$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(-\infty,2)$ និងលើ $(2,+\infty)$ ជានិច្ច និងគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។

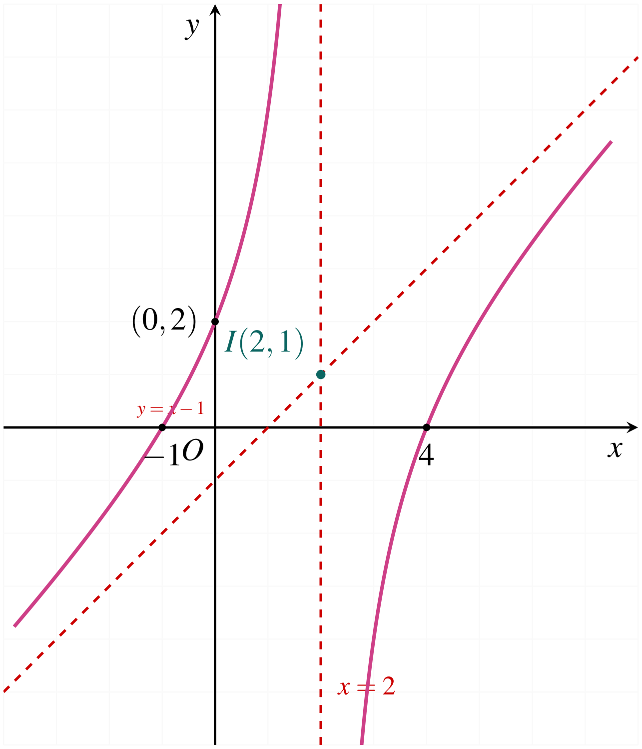
គ. ប្រសព្វអ័ក្ស ៖

- ប្រសព្វ (Oy) ៖ $x=0 \implies y=\dfrac{-4}{-2}=2$ គឺចំណុច $(0,2)$ ។
- ប្រសព្វ (Ox) ៖ $y=0 \iff x^2-3x-4=0 \iff (x-4)(x+1)=0 \implies x=-1, x=4$ ។

ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ ប្រសព្វអាស៊ីមតូតគឺ $\boxed{I(2,1)}$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$



លំហាត់ទី ៥១

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតឈរ, អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

គ. រកចំណុចកាត់អ័ក្ស និងផ្ចិតឆ្លុះ $I(1,2)$ រួចសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

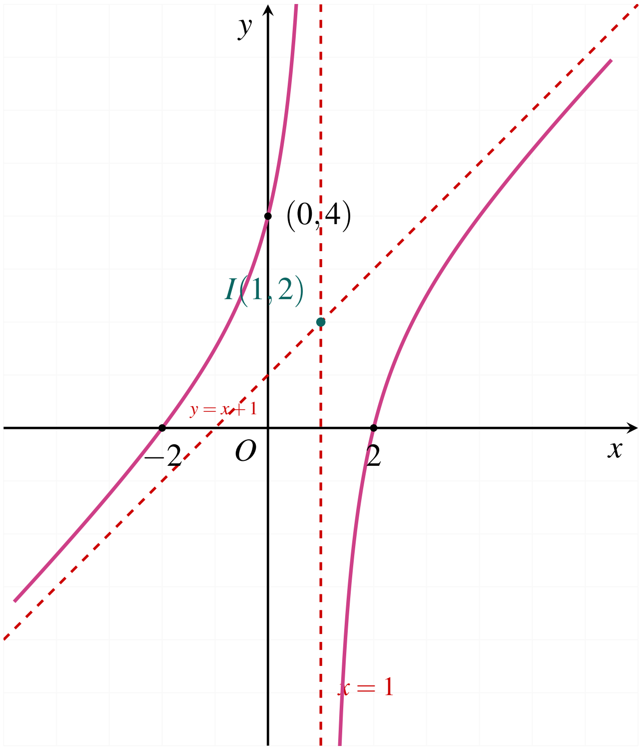
ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ ។

$f(x)=x+1-\dfrac{3}{x-1}$ នាំឱ្យ ៖

- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)]=0 \implies \boxed{y=x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ខ. $f'(x)=1+\dfrac{3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}>0, \forall x\neq1$ នាំឱ្យ f កើនជានិច្ចលើ $(-\infty,1)$ និងលើ $(1,+\infty)$ ។

គ. កាត់អ័ក្ស ៖ $(0,4),(2,0),(-2,0)$ ។ ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,2)$ ។



លំហាត់ទី ៥២

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀប ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x(x-1)+9}{x-1}=x+\dfrac{9}{x-1}$ ៖

- $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim_{x\to \pm\infty} [f(x)-x] = 0 \implies (d): \boxed{y=x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

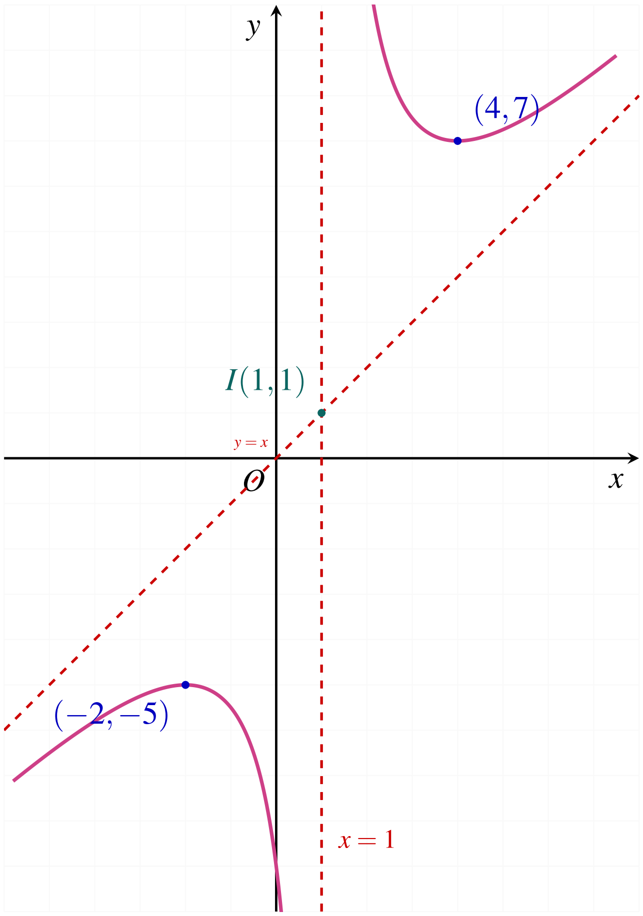
ខ. $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-2) = -2 + \dfrac{9}{-3} = \boxed{-5}$ ត្រង់ $x=-2$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(4) = 4 + \dfrac{9}{3} = \boxed{7}$ ត្រង់ $x=4$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

គ. ផ្ចិតឆ្លុះ $I(1,1)$ ។ ក្រាបកាត់អ័ក្ស (Oy) ត្រង់ $(0,-9)$ ។



លំហាត់ទី ៥៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតឈរ, អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀប ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ ។

$f(x)=x+4+\dfrac{1}{x-1}$ នាំឱ្យ ៖

- $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)=\pm\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+4)]=0 \implies (d):\boxed{y=x+4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ខ. $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(0)=0+4-1=\boxed{3}$ ត្រង់ $x=0$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(2)=2+4+1=\boxed{7}$ ត្រង់ $x=2$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

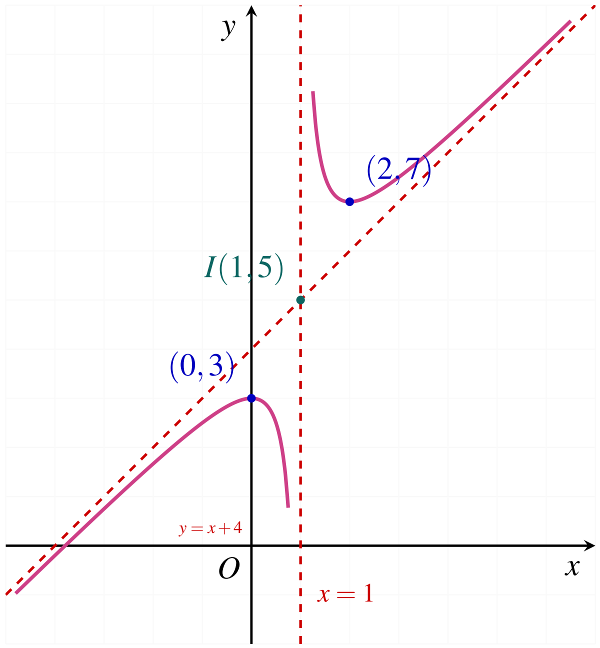
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

គ. $f(x)-(x+4)=\dfrac{1}{x-1}$ ៖

- លើ $(1,+\infty)$ ៖ (C) ស្ថិតនៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
- លើ $(-\infty,1)$ ៖ (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,5)$ ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ



លំហាត់ទី ៥៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{x-2}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រកបរមាធៀប និងសង់តារាងអថេរភាព ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង (C) ជាមួយអ័ក្ស (Oy) និងផ្ចិតឆ្លុះ I នៃក្រាប (C) ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T_1) និង (T_2) ទៅនឹងក្រាប (C) ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y = -3x + 1$ ។

ង. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **អាស៊ីមតូត ៖**

ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ។ សរសេរ $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x-2}$ ៖

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \implies \boxed{x=2}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0 \implies (d): \boxed{y = x-2}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ខ. **ដេរីវេ និងអថេរភាព ៖**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ ។

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ឬ $x = 4$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(0)=0-2+\frac{4}{-2}=\boxed{-4}$ ត្រង់ $x=0$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(4)=4-2+\frac{4}{2}=\boxed{4}$ ត្រង់ $x=4$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

គ. ចំណុចកាត់អ័ក្ស និងផ្ចិតឆ្លុះ ៖

- ប្រសព្វ (Oy) ៖ $x=0 \implies y=-4$ គឺចំណុច $(0,-4)$ ។
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ $\boxed{I(2,0)}$ ។
  ពិតណាស់ ៖ $f(4-x)+f(x)=(2-x-\frac{4}{x-2})+(x-2+\frac{4}{x-2})=0=2(0)$ ។

ឃ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹង $(\Delta): y=-3x+1$ ៖
មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រូវស្មើនឹង -3 ៖

$$f'(x_0)=-3 \iff 1-\frac{4}{(x_0-2)^2}=-3 \iff \frac{4}{(x_0-2)^2}=4 \iff (x_0-2)^2=1 \iff x_0=1 \text{ ឬ } x_0=3$$

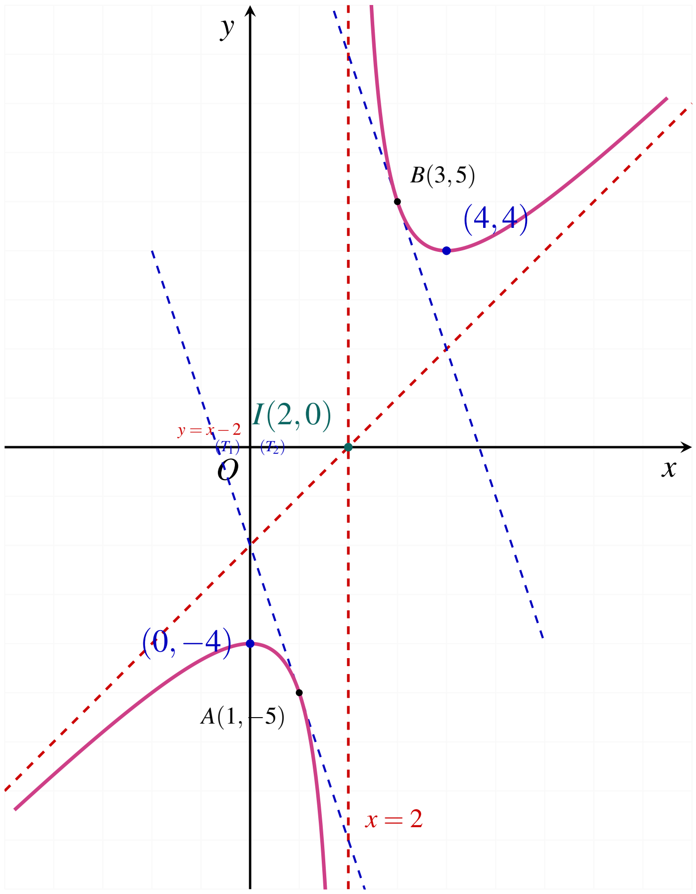
- ចំពោះ $x_0=1 \implies y_0=f(1)=1-2+\frac{4}{-1}=-5$ ៖

$$(T_1): y=-3(x-1)-5 \implies \boxed{(T_1): y=-3x-2}$$

- ចំពោះ $x_0=3 \implies y_0=f(3)=3-2+\frac{4}{1}=5$ ៖

$$(T_2): y=-3(x-3)+5 \implies \boxed{(T_2): y=-3x+14}$$

ង. ក្រាបតំណាង (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖



លំហាត់ទី ៥៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f_m(x) = \dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}$ $(m \neq 0)$ មានក្រាប (C_m) ។

ក. បង្ហាញថាក្រាប (C_m) តែងតែមានអាស៊ីមតូតឈរមួយជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. បង្ហាញថាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_m) អាចសរសេរជា $y = m(x+1)$ រួចបង្ហាញថាអាស៊ីមតូតទ្រេតនេះកាត់តាមចំណុចនឹងមួយជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

គ. ចំពោះ $m = 1$ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C_1) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ។
ភាគបែងស្មើសូន្យត្រង់ $x = -2$ ។ ជំនួស $x = -2$ ចូលភាគយក ៖

$$m(-2)^2 + 3m(-2) + 2m + 1 = 4m - 6m + 2m + 1 = 1 \neq 0, \quad \forall m$$

ដោយភាគយកស្មើ $1 \neq 0$ ជានិច្ច នោះ $\lim\limits_{x \to -2^{\pm}} f_m(x) = \pm\infty$ គ្រប់តម្លៃ m ។

ដូចនេះ ក្រាប (C_m) តែងតែមានបន្ទាត់ $\boxed{x = -2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរជានិច្ចគ្រប់ m ។

ខ. ចែកពហុធាភាគយកនឹងភាគបែង ៖

$$mx^2 + 3mx + 2m + 1 = (mx + m)(x + 2) + 1$$

នាំឱ្យ ៖

$$f_m(x) = mx + m + \frac{1}{x+2} = m(x+1) + \frac{1}{x+2}$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}[f_m(x) - m(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+2} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ (d_m): $\boxed{y = m(x+1)}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_m) ។

ពិនិត្យចំណុចនឹង ៖ ឱ្យ $x+1=0 \iff x=-1 \implies y = m(0) = 0$ (ឯករាជ្យពី m) ។

ដូចនេះ អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_m) តែងតែកាត់តាមចំណុចនឹង $\boxed{A(-1,0)}$ ជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

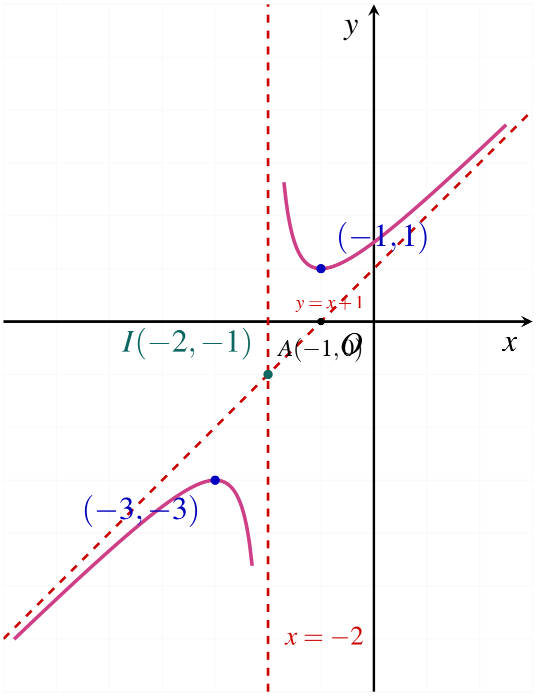
ⓒ. **ចំពោះ $m=1$ ៖**

អនុគមន៍ក្លាយជា $f(x) = x+1+\frac{1}{x+2} = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$ ៖

- អាស៊ីមតូត ៖ $x=-2$ (ឈរ) និង $y=x+1$ (ទ្រេត) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ ៖
  - អតិបរមាធៀប ៖ $f(-3) = -3+1-1 = \boxed{-3}$ ត្រង់ $x=-3$ ។
  - អប្បបរមាធៀប ៖ $f(-1) = -1+1+1 = \boxed{1}$ ត្រង់ $x=-1$ ។
- ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-2,-1)$ ។

តារាងអថេរភាព $(m=1)$ ៖

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



លំហាត់ទី ៥៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ មានក្រាប (C) និងមានបន្ទាត់ពីរ $(L_1): y=2x+1$ និង $(L_2): y=2x-7$ ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ ។

បំបែក ៖ $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-1}$ ៖

- $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x)=\pm\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+3)]=0 \implies (d): \boxed{y=x+3}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ខ. ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(0)=\dfrac{-2}{-1}=\boxed{2}$ ត្រង់ $x=0$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(2)=2+3+1=\boxed{6}$ ត្រង់ $x=2$ ។

ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,4)$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

គ. ប្រសព្វជាមួយ (L_1) និង (L_2) ៖

- ប្រសព្វ (C) និង $(L_1): y=2x+1$ ៖

$$\frac{x^2+2x-2}{x-1}=2x+1 \iff x^2+2x-2=(2x+1)(x-1)=2x^2-x-1 \iff x^2-3x+1=0$$

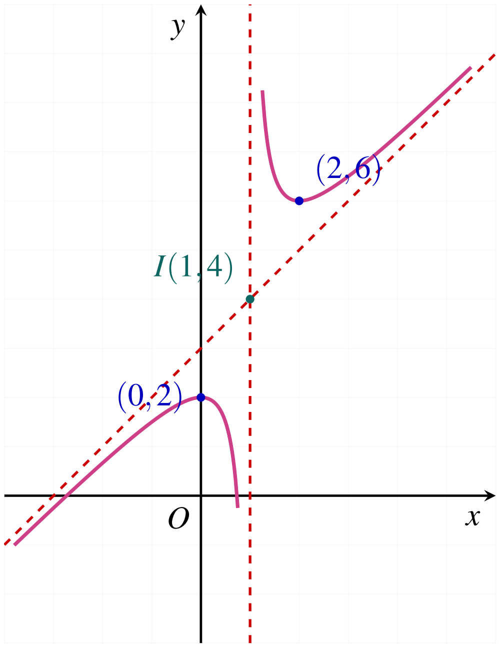
$\Delta = 9-4 = 5 > 0 \implies x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ។

កាត់ (L_1) ត្រង់ពីរចំណុច $A\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 4-\sqrt{5}\right)$ និង $B\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 4+\sqrt{5}\right)$ ។

- ប្រសព្វ (C) និង $(L_2): y = 2x-7$ ៖

$$\frac{x^2+2x-2}{x-1} = 2x-7 \iff x^2+2x-2 = 2x^2-9x+7 \iff x^2-11x+9=0$$

$\Delta = 121-36 = 85 > 0 \implies x = \dfrac{11\pm\sqrt{85}}{2}$ ។



លំហាត់ទី ៥៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a, b, c ដែល $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងសិក្សាទីតាំងធៀប ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះនីមួយៗនៃដែនកំណត់ ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

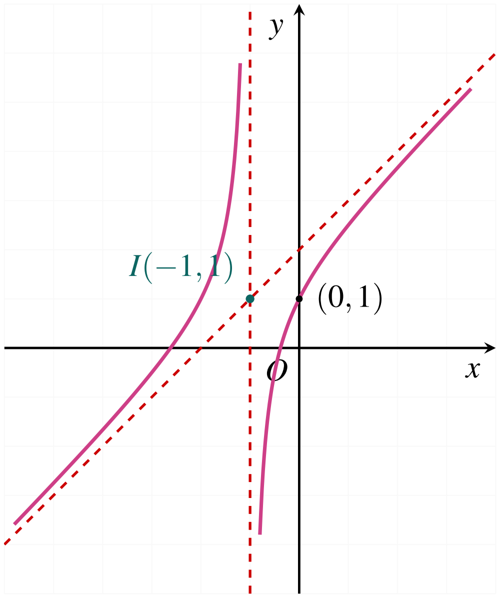
ក. $f(x) = \dfrac{x^2+x+2x+2-1}{x+1} = x+2-\dfrac{1}{x+1} \implies \boxed{a=1,\ b=2,\ c=-1}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=-1}$; អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=x+2}$ ។
ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x+2)=-\dfrac{1}{x+1}$ ៖

- លើ $(-1,+\infty)$ ៖ (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
- លើ $(-\infty,-1)$ ៖ (C) ស្ថិតនៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>1>0, \forall x\neq -1$ នាំឱ្យ f កើនជានិច្ចលើ $(-\infty,-1)$ និងលើ $(-1,+\infty)$ ។

ឃ. ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-1,1)$ ។ កាត់អ័ក្ស (Oy) ត្រង់ $(0,1)$ ។



លំហាត់ទី ៥៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+3}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

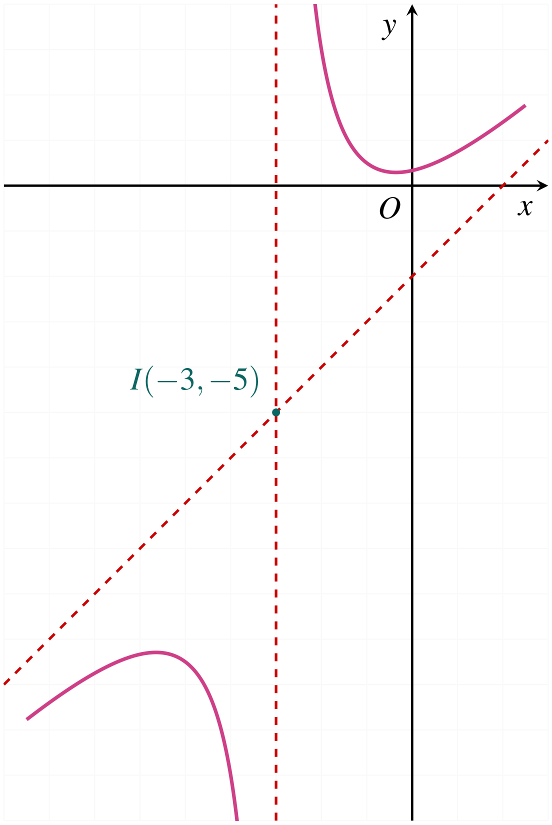
ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2x-6+7}{x+3}=x-2+\dfrac{7}{x+3} \implies \boxed{a=1,\ b=-2,\ c=7}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=-3}$; អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=x-2}$ ។

គ. $f'(x)=1-\dfrac{7}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+3)^2-7}{(x+3)^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=-3\pm\sqrt{7}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-3-\sqrt{7})=-5-2\sqrt{7}\approx-10.29$ ត្រង់ $x=-3-\sqrt{7}$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(-3+\sqrt{7})=-5+2\sqrt{7}\approx 0.29$ ត្រង់ $x=-3+\sqrt{7}$ ។

ឃ. ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-3,-5)$ ។



លំហាត់ទី ៥៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតឈរ, អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀប ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

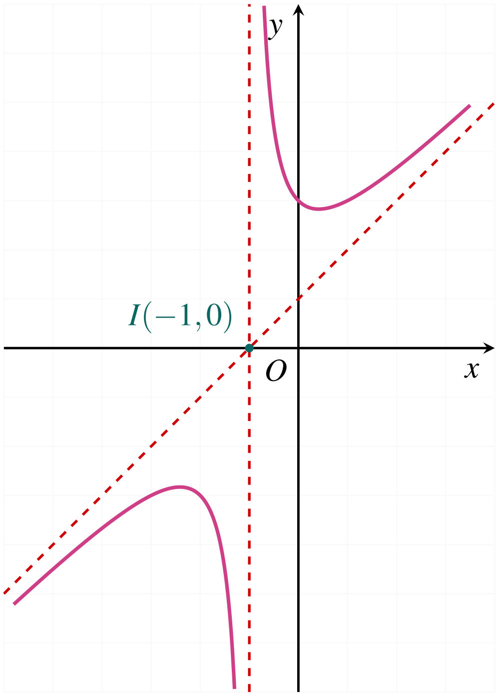
ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$ ។

$f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+1} \implies \boxed{x=-1}$ (ឈរ) និង $\boxed{y=x+1}$ (ទ្រេត) ។

ខ. $f'(x)=1-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-2}{(x+1)^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=-1\pm\sqrt{2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-1-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\approx-2.83$ ត្រង់ $x=-1-\sqrt{2}$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(-1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}\approx 2.83$ ត្រង់ $x=-1+\sqrt{2}$ ។

គ. ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-1,0)$ ។



លំហាត់ទី ៦០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច និងសង់ក្រាប (C) ។

ឃ. ពិភាក្សាឫសសមីការ $x^2-(2+m)x+m=0$ តាមតម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2-1}{x-1}=x-1-\dfrac{1}{x-1} \Longrightarrow \boxed{a=1,\ b=-1,\ c=-1}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=1}$; អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=x-1}$ ។

គ. $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}>0, \forall x\neq 1 \Longrightarrow f$ កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

ឃ. $x^2-(2+m)x+m=0 \iff x^2-2x=m(x-1) \iff f(x)=m$ ៖
ដោយបន្ទាត់ដេក $y=m$ តែងតែកាត់ខ្សែងទាំងពីរនៃក្រាប (C) ជានិច្ចគ្រប់ $m\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

លំហាត់ទី ៦១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{-(x^2-4x+3)+3}{x-1}=\dfrac{-(x-1)(x-3)+3}{x-1}=-x+3+\dfrac{3}{x-1} \Longrightarrow \boxed{a=-1,\ b=3,\ c=3}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=1}$; អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=-x+3}$ ។

គ. $f'(x)=-1-\dfrac{3}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1 \Longrightarrow f$ ចុះដាច់ខាតជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។ ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(1,2)$ ។

លំហាត់ទី ៦២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ ចំពោះ $x\neq -2$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{(x+2)^2-3}{x+2}=x+2-\dfrac{3}{x+2} \Longrightarrow \boxed{a=1,\ b=2,\ c=-3}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=-2}$; អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=x+2}$ ។

គ. $f'(x)=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}>0, \forall x\neq -2 \Longrightarrow f$ កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។ ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-2,0)$ ។

លំហាត់ទី ៦៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-2x+6}{x+1}$ ចំពោះ $x\neq -1$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ ។

ខ. រកអាស៊ីមតូតឈរ, អាស៊ីមតូតទ្រេត និងតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+x-3x-3+9}{x+1}=x-3+\dfrac{9}{x+1} \implies \boxed{a=1,\ b=-3,\ c=9}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូត ៖ $x=-1$ (ឈរ) និង $y=x-3$ (ទ្រេត) ។

$f'(x)=1-\dfrac{9}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-4)=-4-3-3=\boxed{-10}$ ត្រង់ $x=-4$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(2)=2-3+3=\boxed{2}$ ត្រង់ $x=2$ ។

គ. ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-1,-4)$ ។ សមីការ $f(x)=m$ មានឫស ២ កាលណា $m<-10$ ឬ $m>2$ ។

លំហាត់ទី ៦៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ ចំពោះ $x\neq -1$ មានក្រាប (C) ។

ក. រក m,n,p ដែល $f(x)=mx+n+\dfrac{p}{x+1}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេត និងតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+4}{x+1}=x+1+\dfrac{4}{x+1} \implies \boxed{m=1,\ n=1,\ p=4}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូត ៖ $x=-1$ (ឈរ) និង $y=x+1$ (ទ្រេត) ។

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-3)=-3+1-2=\boxed{-4}$ ត្រង់ $x=-3$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(1)=1+1+2=\boxed{4}$ ត្រង់ $x=1$ ។

គ. ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ $I(-1,0)$ ។

លំហាត់ទី ៦៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការ $f(x)=a$ មានឫសពីរ $1<x_1<x_2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}\implies \boxed{x=1}$ (ឈរ) និង $\boxed{y=x+2}$ (ទ្រេត) ។

ខ. $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-1)=-1+2-2=\boxed{-1}$ ត្រង់ $x=-1$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(3)=3+2+2=\boxed{7}$ ត្រង់ $x=3$ ។

គ. ដើម្បីឱ្យសមីការ $f(x)=a$ មានឫសពីរធំជាង 1 លុះត្រាតែបន្ទាត់ $y=a$ កាត់ខ្នែងខាងស្តាំនៃក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា ដែលតម្រូវឱ្យ $\boxed{a>7}$ ។

លំហាត់ទី ៦៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+\dfrac{4}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^2-(m+1)x+m+4=0$ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. អាស៊ីមតូត ៖ $\boxed{x=1}$ (ឈរ) និង $\boxed{y=x}$ (ទ្រេត) ។

ខ. $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-1)=-1-2=\boxed{-3}$ ត្រង់ $x=-1$ ។

- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(3)=3+2=\boxed{5}$ ត្រង់ $x=3$ ។

គ. សមីការ $x^2-(m+1)x+m+4=0 \iff f(x)=m$ ។ ផ្អែកតាមតារាងអថេរភាព សមីការគ្មានឫសលុះត្រាតែ $\boxed{-3<m<5}$ ។

លំហាត់ទី ៦៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ $(x\neq -1)$ មានក្រាប (C) ។

ក. រក a,b,c ដោយដឹងថាក្រាប (C) កាត់តាមចំណុច $A(0,1)$ និងមានបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $B(1,0)$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) តាមតម្លៃ a,b,c ដែលរកឃើញ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **រក** a,b,c **៖**

- (C) កាត់តាម $A(0,1) \implies f(0)=\dfrac{c}{1}=1 \implies c=1$ ។
- (C) កាត់តាម $B(1,0) \implies f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}=0 \implies a+b+1=0 \implies b=-a-1$ ។
- មានបរមាធៀបត្រង់ $x=1 \implies f'(1)=0$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(ax^2+bx+c)}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+b-c}{(x+1)^2}$$

$f'(1)=0 \iff a(1)+2a(1)+b-1=0 \iff 3a+b=1$ ។ ជំនួស $b=-a-1$ ៖ $3a-a-1=1 \iff 2a=2 \implies a=1 \implies b=-2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=1,\quad b=-2,\quad c=1}$ **នាំឱ្យ** $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ ។

ខ. បំបែក ៖ $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x+1}$ ៖

- អាស៊ីមតូត ៖ $x=-1$ (ឈរ) និង $y=x-3$ (ទ្រេត) ។
- $f'(x)=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ ៖ អតិបរមា $f(-3)=-8$, អប្បបរមា $f(1)=0$ ។

លំហាត់ទី ៦៨ & ៦៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ $(x\neq -2)$ មានក្រាប (C) ។

ក. រក a,b,c ដោយដឹងថាក្រាប (C) កាត់អ័ក្ស (Oy) ត្រង់ $A\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ និងមានចំណុចបរមាធៀបត្រង់ $B(-1,0)$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) តាមតម្លៃ a,b,c ដែលរកឃើញ ។

ⓖ. ពិភាក្សាឬសសមីការ $f(x)=m$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

ⓐ. រក a,b,c ៖

- កាត់ $A\left(0,\frac{3}{2}\right) \implies f(0)=\frac{c}{2}=\frac{3}{2} \implies c=3$ ។
- កាត់ $B(-1,0) \implies f(-1)=\frac{a(-1)^2+b(-1)+3}{1}=0 \iff a-b+3=0 \implies b=a+3$ ។
- បរមាធៀបត្រង់ $x=-1 \implies f'(-1)=0$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+2)-(ax^2+bx+3)}{(x+2)^2}=\frac{ax^2+4ax+2b-3}{(x+2)^2}$$

$f'(-1)=0 \iff a-4a+2b-3=0 \iff -3a+2(a+3)-3=0 \iff -a+3=0 \implies a=3$ ។
ទាញបាន ៖ $b=3+3=6$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=3,\quad b=6,\quad c=3}$ **នាំឱ្យ** $f(x)=\frac{3x^2+6x+3}{x+2}=\frac{3(x+1)^2}{x+2}$ ។

ⓑ. បំបែក ៖ $f(x)=3x+\frac{3}{x+2}$ ៖

- អាស៊ីមតូត ៖ $x=-2$ (ឈរ) និង $y=3x$ (ទ្រេត) ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=3-\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{3(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$ ៖
  - អតិបរមាធៀប ៖ $f(-3)=3(-3)+\frac{3}{-1}=\boxed{-12}$ ត្រង់ $x=-3$ ។
  - អប្បបរមាធៀប ៖ $f(-1)=3(-1)+\frac{3}{1}=\boxed{0}$ ត្រង់ $x=-1$ ។

ⓖ. ពិភាក្សាឬសសមីការ $f(x)=m$ ៖

- $m<-12$ ឬ $m>0$ ៖ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។
- $m=-12$ ៖ មានឫសឌុប $x=-3$; $m=0$ ៖ មានឫសឌុប $x=-1$ ។
- $-12<m<0$ ៖ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី ៧០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ⓐ. កំណត់តម្លៃ a និង b ដោយដឹងថាក្រាប (C) មានចំណុចអតិបរមាត្រង់ $x=0$ ស្មើនឹង 1 ។

ⓑ. សិក្សាអថេរភាព និងរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) តាមតម្លៃ a,b ដែលរកឃើញ ។

គ. បង្ហាញថាប្រសព្វអាស៊ីមតូត $I(1,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) និងសង់ក្រាប (C) ។

ឃ. ពិភាក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2+(1-m)x+m-1=0$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **កំណត់តម្លៃ a និង b ៖**

- អតិបរមាត្រង់ $x=0$ ស្មើនឹង $1 \Longrightarrow f(0)=1$ ៖

$$f(0)=\frac{0+0+b}{0-1}=-b=1 \Longrightarrow b=-1$$

- ដេរីវេនៃ $f(x)$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$$

លក្ខខណ្ឌបរមាត្រង់ $x=0 \Longrightarrow f'(0)=0$ ៖

$$\frac{-a-b}{(-1)^2}=0 \Longleftrightarrow -a-b=0 \Longrightarrow a=-b=-(-1)=1$$

ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=1, \quad b=-1}$ **នាំឱ្យ** $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ ។

ខ. **អថេរភាព និងអាស៊ីមតូត ៖**

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ។ បំបែក ៖ $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ ៖

- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty \Longrightarrow \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0 \Longrightarrow (d):\boxed{y=x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ៖

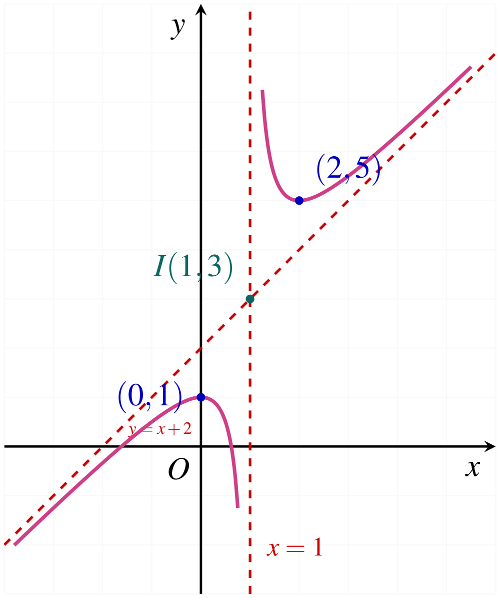
- អតិបរមាធៀប ៖ $f(0)=\boxed{1}$ ត្រង់ $x=0$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(2)=2+2+1=\boxed{5}$ ត្រង់ $x=2$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

គ. ផ្ចិតឆ្លុះ និងក្រាប (C) ៖

$f(2-x)+f(x)=(2-x+2+\frac{1}{1-x})+(x+2+\frac{1}{x-1})=6=2(3) \implies \boxed{I(1,3)}$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។



ឃ. ពិភាក្សាឫសសមីការ ៖

$x^2+(1-m)x+m-1=0 \iff f(x)=m$ ៖

- $m<1$ ៖ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា $x_1<0<x_2<1$ ។
- $m=1$ ៖ មានឫសឌុប $x=0$ ។
- $1<m<5$ ៖ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ។
- $m=5$ ៖ មានឫសឌុប $x=2$ ។
- $m>5$ ៖ មានឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា $1<x_1<2<x_2$ ។

លំហាត់ទី ៧១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+5}$ មានក្រាបតំណាង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និងរកចំណុចបរមាធៀបនៃ f ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $x=3$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C) និងសង់ក្រាប (C) ។

ង. ពិភាក្សាឫសសមីការ $(1-m)x^2-6(1-m)x-5m=0$ តាមតម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖
ភាគបែង $x^2-6x+5=0 \iff (x-1)(x-5)=0 \iff x=1$ ឬ $x=5$ ។
ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1,5\}=(-\infty,1)\cup(1,5)\cup(5,+\infty)}$ ។

ខ. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1 \Longrightarrow (d):\boxed{y=1}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេក ។
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \Longrightarrow \boxed{x=1}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរទីមួយ ។
- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=-\infty \Longrightarrow \boxed{x=5}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរទីពីរ ។

គ. អថេរភាព ៖
បំប្លែង ៖ $f(x)=\dfrac{(x^2-6x+5)-5}{x^2-6x+5}=1-\dfrac{5}{x^2-6x+5}$ ។
គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=-5\left(-\frac{2x-6}{(x^2-6x+5)^2}\right)=\frac{10(x-3)}{(x^2-6x+5)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \iff x-3=0 \iff x=3$ ៖

$$f(3)=1-\frac{5}{9-18+5}=1-\frac{5}{-4}=1+\frac{5}{4}=\boxed{\frac{9}{4}}$$ (អប្បបរមាធៀបក្នុងចន្លោះ $(1,5)$)

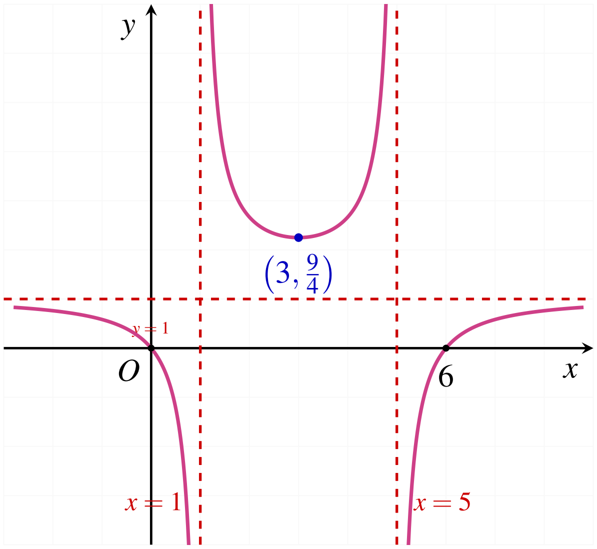
តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

ឃ. អ័ក្សឆ្លុះ និងក្រាប (C) ៖
ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេបាន $6-x\in D$ ហើយ ៖

$$f(6-x)=\frac{(6-x)^2-6(6-x)}{(6-x)^2-6(6-x)+5}=\frac{36-12x+x^2-36+6x}{36-12x+x^2-36+6x+5}=\frac{x^2-6x}{x^2-6x+5}=f(x)$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=3}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។



ង. **ពិភាក្សាឫសសមីការ ៖**

សមីការ $(1-m)x^2 - 6(1-m)x - 5m = 0 \iff x^2 - 6x - m(x^2 - 6x + 5) = 0 \iff f(x) = m$ ៖

- $m < 1$ ៖ បន្ទាត់កាត់ក្រាបត្រង់ពីរចំណុចនៅខ្នែងខាងក្រៅ $\implies$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។
- $m = 1$ ៖ អាស៊ីមតូតដេក គ្មានប្រសព្វ $\implies$ គ្មានឫស ។
- $1 < m < \frac{9}{4}$ ៖ គ្មានប្រសព្វ $\implies$ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ។
- $m = \frac{9}{4}$ ៖ ប៉ះត្រង់កំពូលអប្បបរមា $\implies$ មានឫសឌុប $x = 3$ ។
- $m > \frac{9}{4}$ ៖ កាត់ខ្នែងកណ្ដាលត្រង់ពីរចំណុច $\implies$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាក្នុង $(1, 5)$ ។

លំហាត់ទី ៧២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{(x-2)^2}$ ចំពោះ $x \neq 2$ មានក្រាប (C) ។

ក. កំណត់ a, b, c ដោយដឹងថាក្រាប (C) មានអាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ និងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 1$ និង $x = -3$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. អាស៊ីមតូតដេក $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a = 1 \implies a = 1$ ។

កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 1$ និង $x = -3 \implies x^2 + bx + c = (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ ៖

ដូចនេះ $\boxed{a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3}$ **នាំឱ្យ** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)^2}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty \Longrightarrow \boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-2)^2-(x^2+2x-3)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{-6x+2}{(x-2)^3}$$

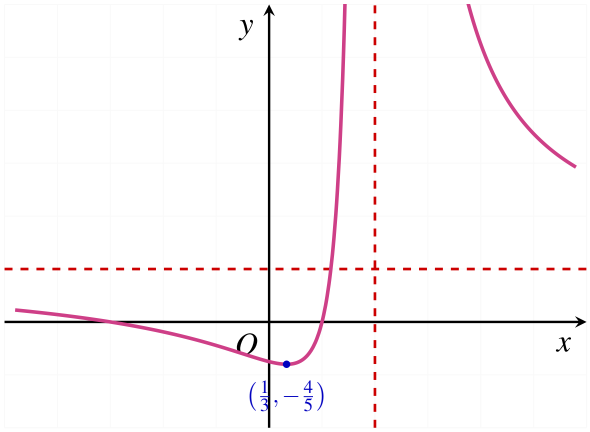
$f'(x)=0 \iff -6x+2=0 \iff x=\dfrac{1}{3}$ ៖

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}-3}{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2}=\frac{-\frac{20}{9}}{\frac{25}{9}}=-\frac{4}{5}\quad \text{(អប្បបរមាធៀប)}$$

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{4}{5}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

គ. ក្រាបតំណាង (C) កាត់ (Oy) ត្រង់ $\left(0,-\dfrac{3}{4}\right)$ និងមានអប្បបរមាត្រង់ $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{5}\right)$ ។



លំហាត់ទី ៧៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ កំណត់លើ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ មានក្រាប (C) ។

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍គូ និងទាញបញ្ជាក់នូវអ័ក្សឆ្លុះនៃ (C) ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍គូ ៖
ចំពោះគ្រប់ $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} \implies -x \in D$ ហើយ ៖

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{2x^2}{x^2-4} = f(x)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍គូ ហើយអ័ក្សអរដោនេ (Oy) ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ៖

- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\frac{4}{x^2}} = 2$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty \implies \boxed{x=-2}$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty \implies \boxed{x=2}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=-2}$ និង $\boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

- គណនាដេរីវេ ៖
ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន ៖

$$f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^2-4)-2x^2(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{4x(x^2-4)-2x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff -16x = 0 \iff x = 0$ ។

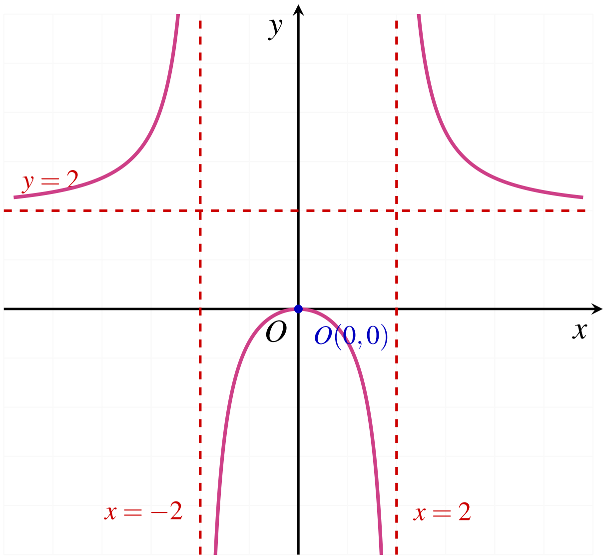
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ចំពោះ $x<0$ $(x\neq-2) \implies f'(x)>0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $(-\infty,-2)$ និង $(-2,0)$ ។
  - ចំពោះ $x>0$ $(x\neq2) \implies f'(x)<0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(0,2)$ និង $(2,+\infty)$ ។

- បរមាធៀប ៖
ត្រង់ $x=0$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃ**អតិបរមាធៀប** គឺ $\boxed{f(0)=0}$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

- សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៧៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$ ចំពោះ $x\neq\pm2$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ៖

- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=-1$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=-2}$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=2}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=-2}$ និង $\boxed{x=2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ៖

- ភាពគូ/សេស ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in D \implies -x \in D$ ហើយ $f(-x) = f(x)$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូ និងមានអ័ក្ស (Oy) ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។
- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(4-x^2) - x^2(4-x^2)'}{(4-x^2)^2} = \frac{2x(4-x^2) - x^2(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8x}{(4-x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff 8x = 0 \iff x = 0$ ។

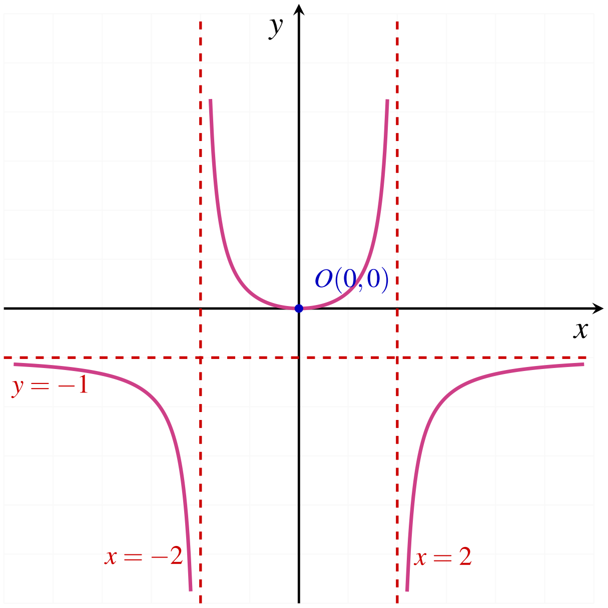
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ចំពោះ $x < 0$ $(x \neq -2) \implies f'(x) < 0$ នាំឱ្យ f ចុះលើ $(-\infty, -2)$ និង $(-2, 0)$ ។
  - ចំពោះ $x > 0$ $(x \neq 2) \implies f'(x) > 0$ នាំឱ្យ f កើនលើ $(0, 2)$ និង $(2, +\infty)$ ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = 0$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃ**អប្បបរមាធៀប** គឺ $\boxed{f(0) = 0}$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ៖

- **តារាងអថេរភាព ៖**

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

- **សង់ក្រាប (C) ៖**



លំហាត់ទី ៧៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=\dfrac{(2x-1)(x-4)}{(x+4)(x-3)}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f និងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C) ។

ខ. រកចំណុចកាត់អ័ក្សកូអរដោនេនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតនៃ (C) ៖

- ដែនកំណត់ ៖ ភាគបែង $x^2+x-12=(x+4)(x-3)\neq 0 \iff x\neq -4$ និង $x\neq 3$ ។
  ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}}$ ។
- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=2}$ **ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប** (C) **ខាង** $\pm\infty$ ។
- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

$$\lim_{x\to -4^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -4^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=-4}$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=3}$$

  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=-4}$ **និង** $\boxed{x=3}$ **ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ** (C) ។

ខ. រកចំណុចកាត់អ័ក្សកូអរដោនេ និងអាស៊ីមតូត ៖

- ប្រសព្វនឹងអ័ក្ស (Oy) $(x=0)$ ៖ $y=f(0)=\dfrac{4}{-12}=-\dfrac{1}{3} \implies \left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$ ។
- ប្រសព្វនឹងអ័ក្ស (Ox) $(y=0)$ ៖ $(2x-1)(x-4)=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$ ឬ $x=4$ ។
  ចំណុចប្រសព្វគឺ $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ និង $(4,0)$ ។
- ប្រសព្វនឹងអាស៊ីមតូតដេក $y=2$ ៖

$$\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=2 \iff 2x^2-9x+4=2x^2+2x-24 \iff 11x=28 \iff x=\frac{28}{11}$$

  ចំណុចប្រសព្វគឺ $\left(\dfrac{28}{11},2\right)$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

- **គុណនាដេរីវេ ៖**
ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេមាន ៖

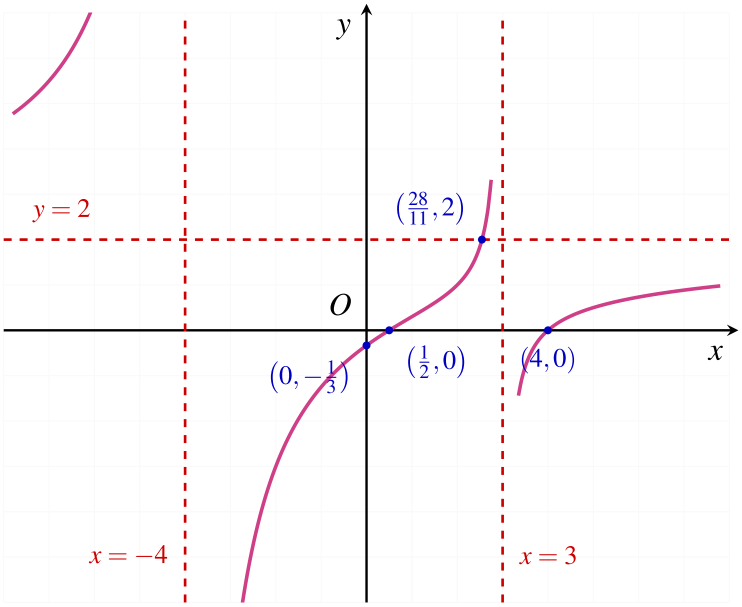
$$f'(x) = \frac{(4x-9)(x^2+x-12)-(2x^2-9x+4)(2x+1)}{(x^2+x-12)^2}$$
$$= \frac{(4x^3-5x^2-57x+108)-(4x^3-16x^2-x+4)}{(x^2+x-12)^2}$$
$$= \frac{11x^2-56x+104}{(x^2+x-12)^2}$$

ពិនិត្យត្រីធាភាគយក $11x^2-56x+104$ មាន $\Delta' = (-28)^2 - 11(104) = 784 - 1144 = -360 < 0$ និង $a = 11 > 0$ ។
នាំឱ្យ $11x^2-56x+104 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។
ដូចនេះ $f'(x) > 0$ **ចំពោះគ្រប់** $x \in D$ **នាំឱ្យ** f **ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះនីមួយៗនៃដែនកំណត់ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។**

- **តារាងអថេរភាព ៖**

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

- **សង់ក្រាប** (C) **៖**



លំហាត់ទី ៧៦ & ៨០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ មានក្រាប (C) ។

ក. បង្ហាញថា $f(x)=3+\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $x=3$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃ (C) និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញទម្រង់ $f(x)$ និងទាញរកអាស៊ីមតូត ៖

- ដោយ $x^2-6x+8=(x-2)(x-4) \implies D=\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$ ។
  គេមាន ៖

$$f(x)=\frac{3(x^2-6x+8)+1}{x^2-6x+8}=3+\frac{1}{x^2-6x+8}=3+\frac{1}{(x-2)(x-4)} \quad \text{(ពិត)}$$

- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[3+\frac{1}{(x-2)(x-4)}\right]=3+0=3$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=3}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=2}$$
$$\lim_{x\to4^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to4^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=4}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=2}$ និង $\boxed{x=4}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\left[3+\frac{1}{x^2-6x+8}\right]'=-\frac{(x^2-6x+8)'}{(x^2-6x+8)^2}=\frac{-2(x-3)}{(x^2-6x+8)^2}$$

  $f'(x)=0 \iff -2(x-3)=0 \iff x=3$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ចំពោះ $x<3$ $(x\neq2)$ $\implies f'(x)>0$ នាំឱ្យ f កើនលើ $(-\infty,2)$ និង $(2,3)$ ។
  - ចំពោះ $x>3$ $(x\neq4)$ $\implies f'(x)<0$ នាំឱ្យ f ចុះលើ $(3,4)$ និង $(4,+\infty)$ ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=3$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃ**អតិបរមាធៀប** គឺ ៖

$$f(3)=3+\frac{1}{(3-2)(3-4)}=3-1=\boxed{2}$$

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3

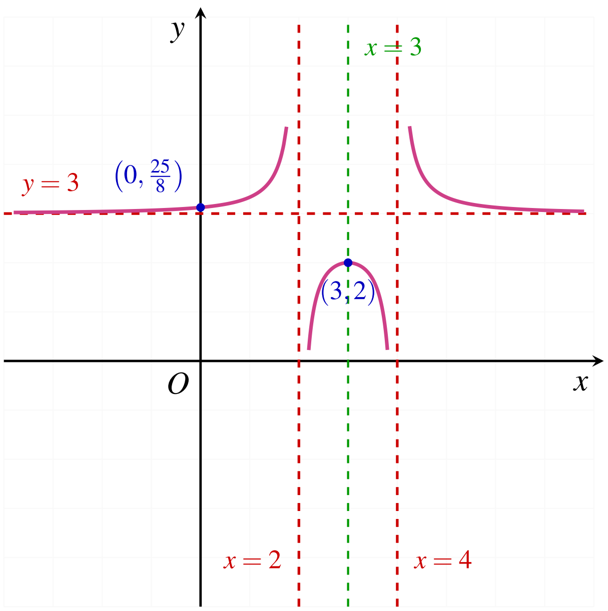
គ. បង្ហាញថា $x=3$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ និងសង់ក្រាប (C) ៖

- ចំពោះគ្រប់ h ដែល $3+h\in D \iff 3-h\in D$ គេមាន ៖

$$f(3+h)=3+\frac{1}{(3+h-2)(3+h-4)}=3+\frac{1}{(1+h)(-1+h)}=3+\frac{1}{h^2-1}$$
$$f(3-h)=3+\frac{1}{(3-h-2)(3-h-4)}=3+\frac{1}{(1-h)(-1-h)}=3+\frac{1}{h^2-1}$$

ដោយ $f(3+h)=f(3-h)$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=3}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

- សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៧៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ និងសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដោយភាគបែង $x^2+4>0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \boxed{D=\mathbb{R}}$ ។
  ក្រាប (C) គ្មានអាស៊ីមតូតឈរឡើយ ។
- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងរកតម្លៃបរមាធៀប ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+4)-(x^2+2x)(2x)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{(2x^3+2x^2+8x+8)-(2x^3+4x^2)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-2x^2+8x+8}{(x^2+4)^2} = \frac{-2(x^2-4x-4)}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

- រកឫសនៃ $f'(x)=0 \Longleftrightarrow x^2-4x-4=0$ ៖
  មាន $\Delta' = (-2)^2-(1)(-4) = 4+4 = 8 = (2\sqrt{2})^2 > 0$ ៖

$$x_1 = 2-2\sqrt{2} \approx -0.83 \quad , \quad x_2 = 2+2\sqrt{2} \approx 4.83$$

- តម្លៃបរមាធៀប ៖
  – ត្រង់ $x_1 = 2-2\sqrt{2}$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប គឺ ៖

$$f\left(2-2\sqrt{2}\right) = \boxed{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} \approx -0.21$$

  – ត្រង់ $x_2 = 2+2\sqrt{2}$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀប គឺ ៖

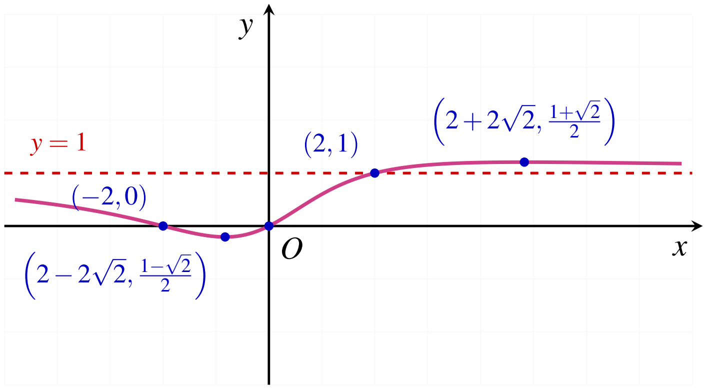
$$f\left(2+2\sqrt{2}\right) = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1.21$$

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ៖

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	1

- ចំណុចប្រសព្វសំខាន់ៗ ៖
  - កាត់ (Ox) ៖ $x^2+2x=0 \Longrightarrow O(0,0)$ និង $(-2,0)$ ។
  - កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y=1$ ៖ $x^2+2x=x^2+4 \Longleftrightarrow 2x=4 \Longleftrightarrow x=2 \Longrightarrow (2,1)$ ។
- សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៧៨ & ៨២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ៖**

- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}=1$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

ដោយ $\lim_{x\to-2}(x^2-1)=3>0$ និង $(x+2)^2>0, \forall x\neq -2$ នោះ ៖

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=-2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. **សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃបរមាធៀបនៃ f ៖**

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)^2-(x^2-1)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{2x(x+2)-2(x^2-1)}{(x+2)^3}$$
$$=\frac{2x^2+4x-2x^2+2}{(x+2)^3}=\frac{4x+2}{(x+2)^3}=\frac{2(2x+1)}{(x+2)^3}$$

$f'(x)=0 \iff 2(2x+1)=0 \iff x=-\frac{1}{2}$ ។

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
សញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើផលគុណ $(2x+1)(x+2)$ ៖
  - ចំពោះ $x\in(-\infty,-2)$ ៖ $2x+1<0$ និង $x+2<0 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
  - ចំពោះ $x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ ៖ $2x+1<0$ និង $x+2>0 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
  - ចំពោះ $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ ៖ $2x+1>0$ និង $x+2>0 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃ**អប្បបរមាធៀប** គឺ ៖

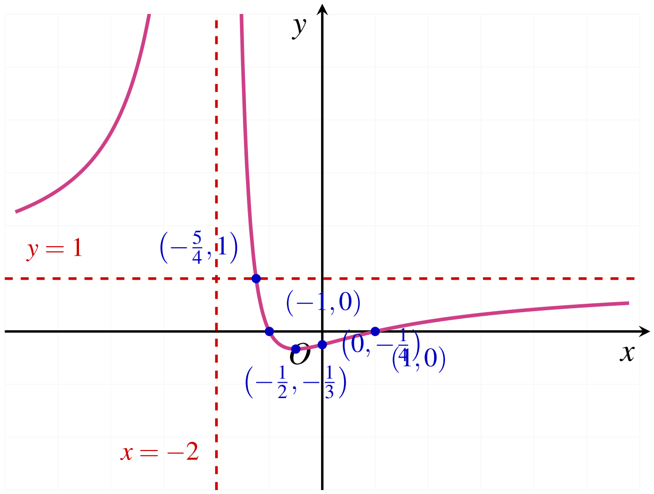
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ៖

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1

- ចំណុចកាត់អ័ក្សកូអរដោនេ ៖
  - កាត់ (Oy) ៖ $x=0 \implies y=-\frac{1}{4} \implies \left(0,-\frac{1}{4}\right)$ ។
  - កាត់ (Ox) ៖ $x^2-1=0 \implies (-1,0)$ និង $(1,0)$ ។
  - កាត់ $y=1$ ៖ $x^2-1=x^2+4x+4 \iff 4x=-5 \iff x=-\frac{5}{4} \implies \left(-\frac{5}{4},1\right)$ ។
- សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៧៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{-(x+3)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតនៃ (C) ៖

- ដែនកំណត់ ៖ ភាគបែង $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)\neq 0 \iff x\neq -2$ និង $x\neq -1$ ។
  ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}}$ ។
- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។
- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=-2}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=-1}$$

  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=-2}$ និង $\boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

- គណនាដេរីវេ ៖
  ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេមាន ៖

$$f'(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+3x+2)-(-x^2-2x+3)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$= \frac{(-2x^3-8x^2-10x-4)-(-2x^3-7x^2+9)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$= \frac{-x^2-10x-13}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{-(x^2+10x+13)}{(x^2+3x+2)^2}$$

- **រកឫស និងបរមាធៀប ៖**
  $f'(x)=0 \iff x^2+10x+13=0$ មាន $\Delta'=5^2-13=12=(2\sqrt{3})^2>0$ ៖

  $$x_1=-5-2\sqrt{3}\approx -8.46 \quad , \quad x_2=-5+2\sqrt{3}\approx -1.54$$

  – ត្រង់ $x_1=-5-2\sqrt{3}$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប គឺ ៖

  $$f(x_1)=\boxed{-8+4\sqrt{3}}\approx -1.07$$

  – ត្រង់ $x_2=-5+2\sqrt{3}$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀប គឺ ៖

  $$f(x_2)=\boxed{-8-4\sqrt{3}}\approx -14.93$$

- **តារាងអថេរភាព ៖**

x	$-\infty$	$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-1 \searrow$	$-8+4\sqrt{3}$	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$-8-4\sqrt{3}$	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	-1

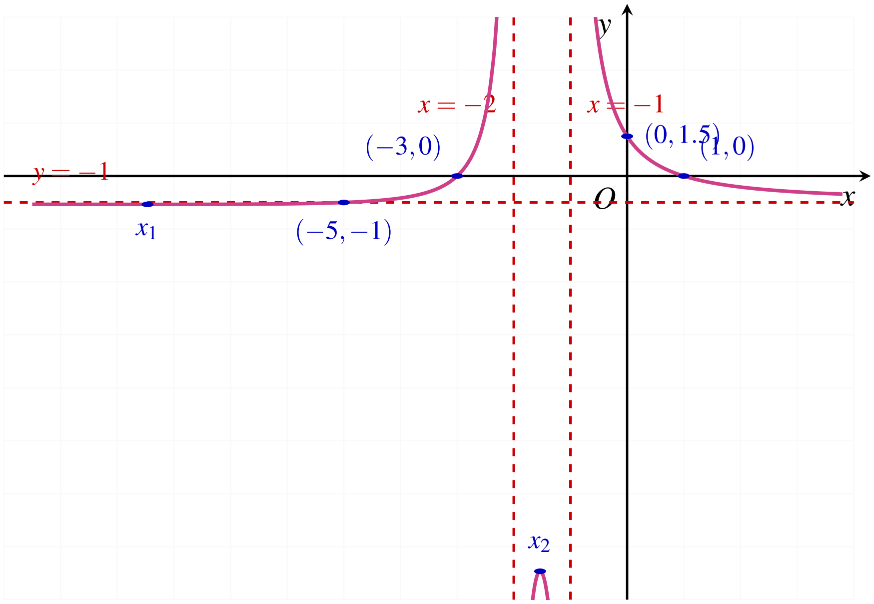
- **ចំណុចប្រសព្វសំខាន់ៗ ៖**

  – កាត់ (Oy) ៖ $x=0 \implies y=\frac{3}{2}=1.5 \implies (0,1.5)$ ។

  – កាត់ (Ox) ៖ $y=0 \iff -(x+3)(x-1)=0 \implies (-3,0)$ និង $(1,0)$ ។

  – កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y=-1$ ៖ $\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=-1 \iff x+5=0 \iff x=-5 \implies (-5,-1)$ ។

- **សង់ក្រាប (C) ៖**



លំហាត់ទី ៨១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=3+\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C) ។

ខ. រកតម្លៃបរមាធៀប និងអ័ក្សឆ្លុះនៃ (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតនៃ (C) ៖

- ដែនកំណត់ ៖ ភាគបែង $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\neq 0 \iff x\neq 1$ និង $x\neq 3$ ។
  ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}}$ ។
- អាស៊ីមតូតដេក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[3+\frac{1}{(x-1)(x-3)}\right]=3$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=3}$ **ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប** (C) **ខាង** $\pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=1}$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=3}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=1}$ **និង** $\boxed{x=3}$ **ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ** (C) ។

ខ. រកតម្លៃបរមាធៀប និងអ័ក្សឆ្លុះនៃ (C) ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\left[3+\frac{1}{x^2-4x+3}\right]'=-\frac{(x^2-4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{-(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{-2(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$f'(x)=0 \iff -2(x-2)=0 \iff x=2$ ។

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ចំពោះ $x<2$ $(x\neq 1)$ $\implies f'(x)>0$ នាំឱ្យ f កើនលើ $(-\infty,1)$ និង $(1,2)$ ។
  - ចំពោះ $x>2$ $(x\neq 3)$ $\implies f'(x)<0$ នាំឱ្យ f ចុះលើ $(2,3)$ និង $(3,+\infty)$ ។
- បរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=2$ ដេរីវេប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃ**អតិបរមាធៀប** គឺ ៖

$$f(2)=3+\frac{1}{(2-1)(2-3)}=3-1=\boxed{2}$$

- អ័ក្សឆ្លុះ ៖ ចំពោះគ្រប់ h ដែល $2+h \in D \iff 2-h \in D$ គេមាន ៖

$$f(2+h) = 3 + \frac{1}{(1+h)(-1+h)} = 3 + \frac{1}{h^2-1} = f(2-h)$$

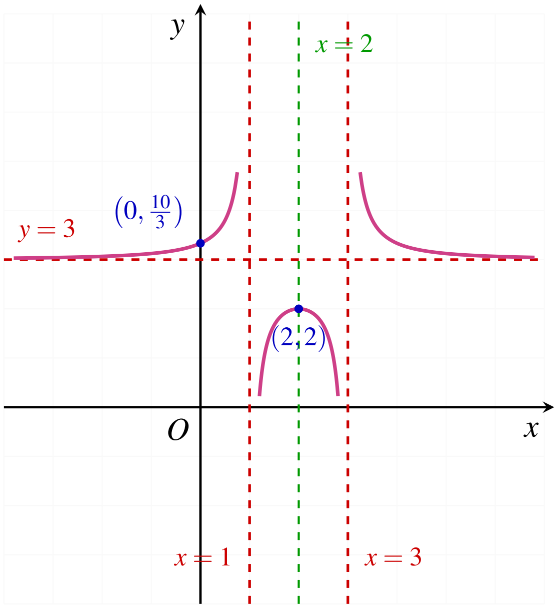
ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=2}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ៖

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

- ចំណុចប្រសព្វសំខាន់ៗ ៖
  - កាត់ (Oy) ៖ $x=0 \implies y = \dfrac{10}{3} \approx 3.33 \implies \left(0, \dfrac{10}{3}\right)$ ។
  - កាត់ (Ox) ៖ $3x^2 - 12x + 10 = 0 \implies x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{3}$ ។
- សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៨៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{3x^2-6x}{x^2+x-2} = \dfrac{3x(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ៖

- ដែនកំណត់ ៖
  អនុគមន៍មានន័យកាលណាភាគបែងខុសពីសូន្យ ៖

$$x^2+x-2\neq 0 \iff (x-1)(x+2)\neq 0 \iff x\neq 1 \text{ និង } x\neq -2$$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)}$ ។

- អាស៊ីមតូតដេក ៖
  គណនាលីមីតត្រង់អនន្ត ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-6x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=3}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) កាលណា $x\to\pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖
  - ត្រង់ $x\to -2$ ៖ ភាគយក $3(-2)^2-6(-2)=24\neq 0$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{3x(x-2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{24}{(-3)(0^-)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{3x(x-2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{24}{(-3)(0^+)}=-\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=-2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

  - ត្រង់ $x\to 1$ ៖ ភាគយក $3(1)^2-6(1)=-3\neq 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x(x-2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{-3}{(0^-)(3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x(x-2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{-3}{(0^+)(3)}=-\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖
  ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេមាន ៖

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6x)'(x^2+x-2)-(3x^2-6x)(x^2+x-2)'}{(x^2+x-2)^2}$$
$$=\frac{(6x-6)(x^2+x-2)-(3x^2-6x)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{(6x^3-18x+12)-(6x^3-9x^2-6x)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{9x^2-12x+12}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3(3x^2-4x+4)}{(x^2+x-2)^2}$$

ពិនិត្យត្រីធាភាគយក $3x^2-4x+4$ ៖
មាន $\Delta' = (-2)^2-3(4) = 4-12 = -8 < 0$ និងមេគុណ $a = 3 > 0$ ។
នាំឱ្យ $3x^2-4x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។
ម្យ៉ាងទៀត ភាគបែង $(x^2+x-2)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។
ដូចនេះ $f'(x) > 0$ **ចំពោះគ្រប់** $x \in D$ ។

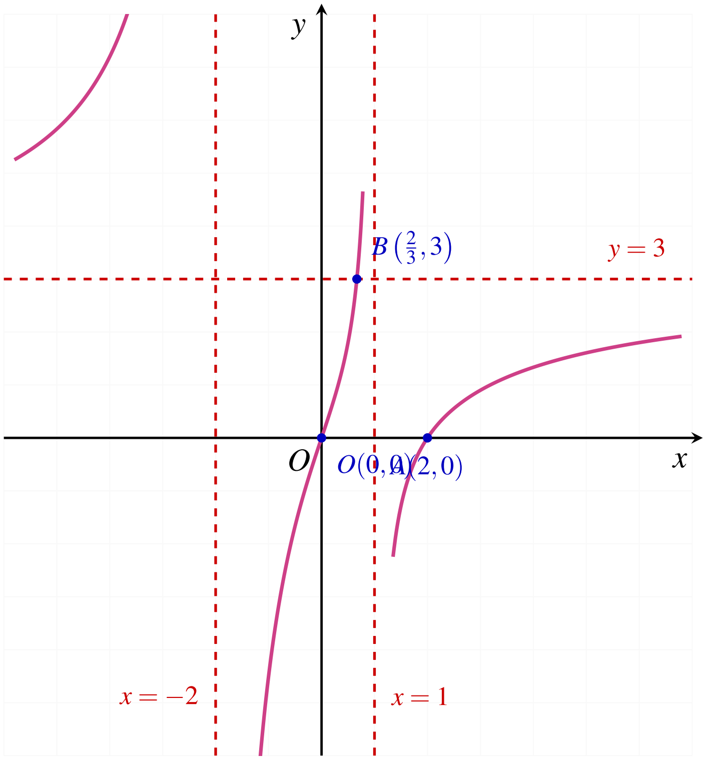
- **ទិសដៅអថេរភាព ៖**
  ដោយ $f'(x) > 0, \forall x \in D$ នាំឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះនីមួយៗនៃដែនកំណត់គឺ $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។
  អនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមាធៀបឡើយ ។
- **តារាងអថេរភាព ៖**

x	$-\infty$ -2	-2 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 3$

- **ចំណុចប្រសព្វ និងធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប** (C) ៖
  - ប្រសព្វនឹងអ័ក្ស (Ox) ៖ $y = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ឬ $x = 2 \implies O(0,0)$ និង $A(2,0)$ ។
  - ប្រសព្វនឹងអ័ក្ស (Oy) ៖ $x = 0 \implies y = 0 \implies O(0,0)$ ។
  - ប្រសព្វនឹងអាស៊ីមតូតដេក $y = 3$ ៖

$$f(x) = 3 \iff \frac{3x^2-6x}{x^2+x-2} = 3 \iff 3x^2-6x = 3(x^2+x-2) \iff -6x = 3x-6 \iff x = \frac{2}{3}$$

  ដូចនេះ ក្រាប (C) កាត់អាស៊ីមតូតដេកត្រង់ចំណុច $B\left(\frac{2}{3},3\right)$ ។
  - តម្លៃពិសេសមួយចំនួន ៖
    $x=-3 \implies f(-3) = \frac{45}{4} = 11.25$; $\quad x=-4 \implies f(-4) = 7.2$;
    $x=-1 \implies f(-1) = -\frac{9}{2} = -4.5$; $\quad x=3 \implies f(3) = 0.9$; $\quad x=4 \implies f(4) = \frac{4}{3} \approx 1.33$ ។
- **សង់ក្រាប** (C) ៖



លំហាត់ទី ៨៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ និងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃ (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រកបរមាធៀប និងសង់តារាងអថេរភាព ។

គ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}}$ ។

អាស៊ីមតូតដេក ៖ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \implies \boxed{y=1}$ ។

អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=-2}$ និង $\boxed{x=1}$ ។

ខ. ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+x-2)-x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x^2+x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$$

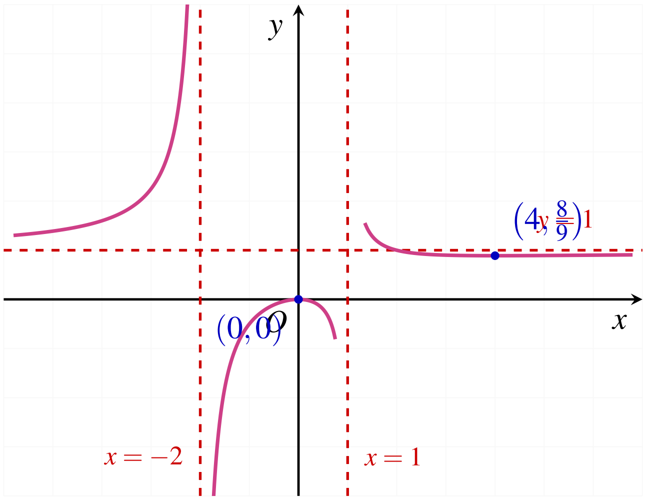
$f'(x)=0 \iff x=0$ ឬ $x=4$ ៖

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(0)=\boxed{0}$ ត្រង់ $x=0$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(4)=\dfrac{16}{16+4-2}=\dfrac{16}{18}=\boxed{\dfrac{8}{9}}$ ត្រង់ $x=4$ ។

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow 1$

គ. ក្រាបតំណាង (C) ៖



ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ២ ៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. ចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ក	ខ	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^x-x-1$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ទាញថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃបរមាធៀបនោះ។ ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $d: y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច P នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ង. សង់ (C) និងបន្ទាត់ d និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P ។ (យក $\ln 2\approx 0.7$)

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ៖

- កាលណា $x\to+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ។
- កាលណា $x\to-\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x-1)=0-(-\infty)-1=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា និងគូសតារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f'(x)=(e^x-x-1)'=e^x-1$ ។
- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ $f'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff x=0$ ។ - បើ $x<0 \implies f'(x)<0$ (f ចុះដាច់ខាតលើ $(-\infty,0)$) ។
 - បើ $x>0 \implies f'(x)>0$ (f កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$) ។
- បរមាធៀប ៖ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=0$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបគឺ $f(0)=e^0-0-1=0$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d: y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ៖

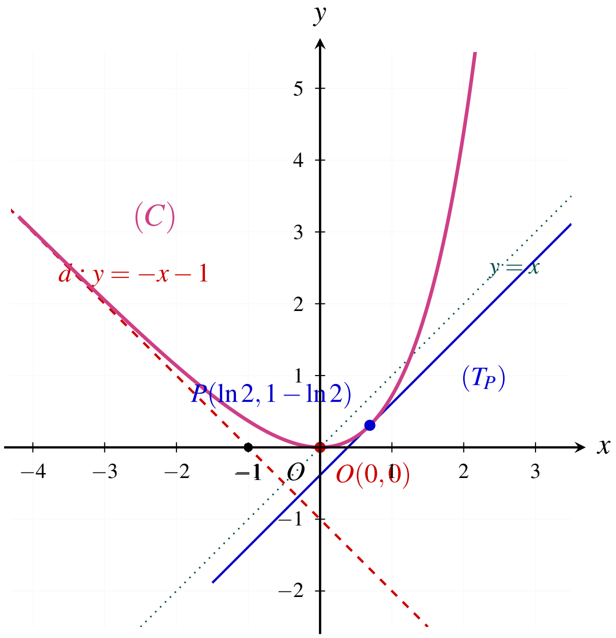
- ពិនិត្យផលដក ៖ $f(x)-(-x-1)=(e^x-x-1)+x+1=e^x$ ។

- លីមីត ៖ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)] = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ ដោយ $e^x > 0, \forall x \implies f(x) - y_d > 0$ នោះក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ d ជានិច្ច ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច P ដែលបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ៖

- បន្ទាត់ $y=x$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=1$ ។
- បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹង $y=x \iff f'(x_P)=1 \iff e^{x_P}-1=1 \iff e^{x_P}=2 \iff x_P=\ln 2\approx 0.7$ ។
- អរដោនេ ៖ $y_P = f(\ln 2) = e^{\ln 2} - \ln 2 - 1 = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2 \approx 0.3$ ។
  ដូចនេះ ចំណុច P មានកូអរដោនេ $P(\ln 2, 1-\ln 2) \approx P(0.7, 0.3)$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T_P) ៖ $y = 1\cdot(x-\ln 2) + 1 - \ln 2 = x + 1 - 2\ln 2 \approx x - 0.386$ ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d និងបន្ទាត់ប៉ះ T_P ក្នុងតម្រុយរួមគ្នា ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$d: y=-x-1$	$y=-x-1$
ចំណុចអប្បបរមាធៀប	$O(0,0)$	$(0,0)$
ចំណុចប៉ះ P	$P(\ln 2, 1-\ln 2)$	$(0.693, 0.307)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P	$y=x+1-2\ln 2$	$y\approx x-0.386$

លំហាត់ទី ២

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x}$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. កំណត់លីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to+\infty$ ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ $d:y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=\frac{xe^x-e^x+2}{e^x}$ រួចទាញរកលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។

ង. តាមក្រាហ្វិក កំណត់ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x)=2$ រួចអមឫសទាំងនោះដោយចំនួនគត់ពីរតគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីតត្រង់ $+\infty$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត d ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0 \implies d:y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x}>0,\forall x \implies$ ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ d ជានិច្ច ។

ខ. ទម្រង់ប្រភាគនៃ $f(x)$ និងលីមីតត្រង់ $-\infty$ ៖

- $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x}=\frac{(x-1)e^x+2}{e^x}=\frac{xe^x-e^x+2}{e^x}$ (ពិត) ។
- គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-e^x+2)=0-0+2=2$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ ។

  ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1-2e^{-x}=\frac{e^x-2}{e^x}$ ។
- សញ្ញា ៖ $f'(x)=0 \iff e^x-2=0 \iff x=\ln 2\approx 0.693$ ។ - បើ $x<\ln 2 \implies f'(x)<0$ (f ចុះ); បើ $x>\ln 2 \implies f'(x)>0$ (f កើន) ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(\ln 2)=\ln 2-1+\frac{2}{2}=\ln 2\approx 0.693$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

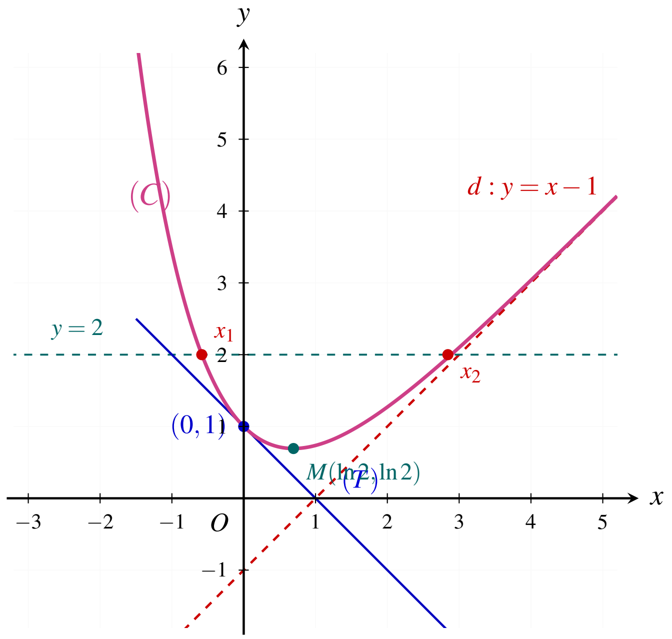
x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

ឃ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ត្រង់ $x_0=0$ ៖ $f(0)=1,\ f'(0)=1-2=-1 \implies (T):y=-1(x-0)+1 \iff y=-x+1$ ។

ង. **កំណត់ចំនួនឫសនៃ $f(x)=2$ និងអមដោយចំនួនគត់ពីរតគ្នា ៖** ដោយ $\min f=\ln 2\approx 0.693<2$ ហើយ $f\to+\infty$ សងខាង នោះបន្ទាត់ $y=2$ កាត់ក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា $x_1<\ln 2<x_2$ (សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា) ៖ - $f(-1)=2e-2\approx 3.44>2$ និង $f(0)=1<2 \implies -1<x_1<0$ ។

- $f(2)=1+\frac{2}{e^2}\approx 1.27<2$ និង $f(3)=2+\frac{2}{e^3}\approx 2.10>2 \implies 2<x_2<3$ ។

ច. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d និងបន្ទាត់ប៉ះ T ៖



តារាងសង្ខេបជាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ជាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$d: y = x - 1$	$y = x - 1$
ចំណុចអប្បបរមាធៀប	$M(\ln 2, \ln 2)$	$(0.693, 0.693)$
ប្រសព្វអ័ក្ស (Oy)	$(0,1)$	$(0,1)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 0$	$(T): y = -x + 1$	$y = -x + 1$
ឫសទីមួយនៃ $f(x) = 2$	$x_1 \in (-1, 0)$	$x_1 \approx -0.584$
ឫសទីពីរនៃ $f(x) = 2$	$x_2 \in (2, 3)$	$x_2 \approx 2.843$

លំហាត់ទី ៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x}{x}$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមានេះ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់អាប់ស៊ីស $x_0=1$ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ។ ប្រើក្រាប (C) ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $e^x-mx=0$ មានឫស។

ដំណោះស្រាយ

ក. **គណនាលីមីត និងទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ៖**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (រូបមន្តគ្រឹះ) ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{0}{-\infty}=0 \implies y=0$ (អ័ក្ស Ox) ជា**អាស៊ីមតូតដេកខាង** $-\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \implies x=0$ (អ័ក្ស Oy) ជា**អាស៊ីមតូតឈរ** ។

ខ. **គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា អប្បបរមា និងតារាងអថេរភាព ៖**

- $f'(x)=\frac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ ។
- ដោយ $e^x>0$ និង $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ នោះសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺតាម $(x-1)$ ៖
$f'(x)=0 \iff x=1$ ។ $f'(x)<0$ លើ $(-\infty,0)\cup(0,1)$ (f ចុះ) និង $f'(x)>0$ លើ $(1,+\infty)$ (f កើន) ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\frac{e^1}{1}=e\approx 2.718$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

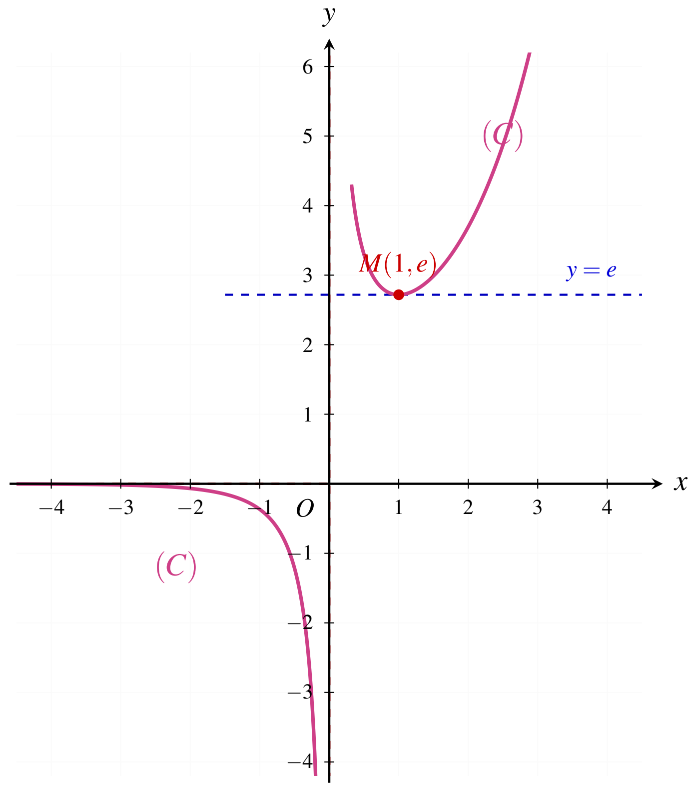
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e	↗	$+\infty$

គ. **បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0=1$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖** $f'(1)=0 \implies (T): y=f'(1)(x-1)+f(1)=e$ (ជាបន្ទាត់ដេកស្របនឹងអ័ក្ស Ox) ។

ឃ. **ពិភាក្សាឫសនៃសមីការ $e^x-mx=0$ ៖** ចំពោះ $x\neq 0$ សមីការសមមូលនឹង $\frac{e^x}{x}=m \iff f(x)=m$ ។ តាមក្រាប និងតារាងអថេរភាព ៖ - បើ $m<0$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) ខ្នែង $x<0$ ត្រង់មួយចំណុច $\implies$ មានឫសអវិជ្ជមានមួយ ។
- បើ $0\le m<e$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ មិនកាត់ (C) ឡើយ $\implies$ គ្មានឫស ។
- បើ $m=e$ ៖ បន្ទាត់ $y=e$ ប៉ះ (C) ត្រង់ $(1,e)$ $\implies$ មានឫសឌុប $x=1$ ។
- បើ $m>e$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) ខ្នែង $x>0$ ត្រង់ពីរចំណុច $\implies$ មានឫសវិជ្ជមានពីរ ។

សន្និដ្ឋាន ៖ សមីការមានឫសលុះត្រាតែ $m<0$ ឬ $m\ge e$ ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
អាស៊ីមតូតឈរ	$x = 0$ (អ័ក្ស Oy)	$x = 0$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $-\infty$	$y = 0$ (អ័ក្ស Ox)	$y = 0$
ចំណុចអប្បបរមាធៀប	$M(1, e)$	$(1, 2.718)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 1$	$y = e$ (ស្របនឹងអ័ក្ស Ox)	$y \approx 2.718$
លក្ខខណ្ឌ $e^x - mx = 0$ មានឫស	$m < 0$ ឬ $m \geq e$	$m \in (-\infty, 0) \cup [2.718, +\infty)$

លំហាត់ទី ៤

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតកាលណា x ខិតជិត $-\infty$ និង $+\infty$ រួចទាញសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា រួចគូសតារាងអថេរភាព។

គ. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងអ័ក្ស $x'Ox$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ f ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ។ សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ង. ដោយប្រើក្រាប (C) ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(2x+1)e^{-2x}=m$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងទាញរកអាស៊ីមតូតដេក ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=0 \implies y=0$ (អ័ក្ស Ox) ជា**អាស៊ីមតូតដេក**ខាង $+\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-2x}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា និងគូសតារាងអថេរភាព ៖

- $f'(x)=2e^{-2x}+(2x+1)(-2e^{-2x})=-4xe^{-2x}$ ។
- ដោយ $e^{-2x}>0,\forall x$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ គឺតាម $-4x$ ៖ $f'(x)=0 \iff x=0$ ។
  បើ $x<0 \implies f'(x)>0$ (f កើន); បើ $x>0 \implies f'(x)<0$ (f ចុះ) ។
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=(2(0)+1)e^{0}=1$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

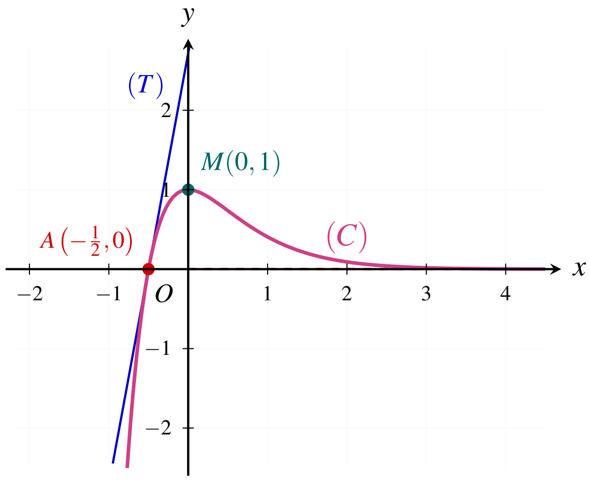
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

គ. រកចំណុចប្រសព្វ A និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)$ ៖ $f(x)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2} \implies A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ។
សញ្ញានៃ $f(x)$ គឺតាម $(2x+1)$ ៖ $f(x)<0$ លើ $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $f(x)>0$ លើ $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ ។

ឃ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ត្រង់ A ៖ $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2e\approx 5.44 \implies (T): y=2e\left(x+\frac{1}{2}\right)=2ex+e\approx 5.437x+2.718$ ។

ង. កំណត់ m ដើម្បីឱ្យ $(2x+1)e^{-2x}=m$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ៖ សមីការសមមូលនឹង $f(x)=m$ ។ តាមតារាងអថេរភាព f កើនពី $-\infty$ ទៅ 1 ហើយចុះទៅជិត 0 ខាងស្តាំ។ ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា លុះត្រាតែ $0<m<1$ ។

ច. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
អាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$	$y=0$ (អ័ក្ស Ox)	$y=0$
ចំណុចអតិបរមាធៀប	$M(0,1)$	$(0,1)$
ប្រសព្វអ័ក្ស Ox	$A\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$(-0.5,0)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A	$(T): y=2ex+e$	$y\approx 5.437x+2.718$
លក្ខខណ្ឌឫសពីរផ្សេងគ្នា	$0<m<1$	$m\in(0,1)$

លំហាត់ទី ៥

គេកំណត់អនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដែល $f(x)=a+\dfrac{b}{e^x-1}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។ ដោយប្រើទម្រង់នេះ ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានដេរីវេចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ហើយគណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f រួចគូសតារាងអថេរភាព ហើយគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។

គ. រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) និងសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចអាប់ស៊ីស 1 ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **កំណត់ a,b និងគណនាលីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖** $f(x)=\frac{(e^x-1)+1}{e^x-1}=1+\frac{1}{e^x-1} \implies a=1$ និង $b=1$ ។
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+0=1 \implies y=1$ ជា**អាស៊ីមតូតដេក**ខាង $+\infty$ ។

ខ. **ភាពមានដេរីវេ គណនា $f'(x)$ អថេរភាព និងលីមីតចុងដែនកំណត់ ៖**

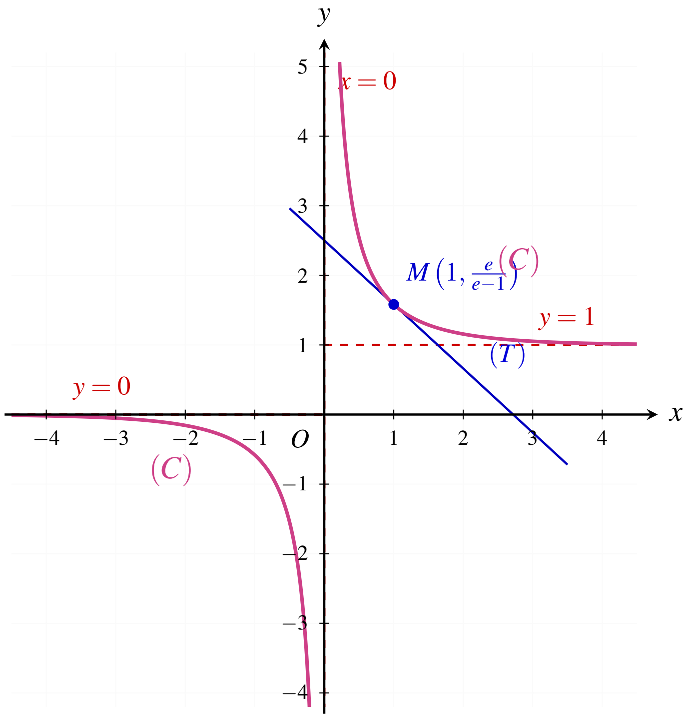
- f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ដោយភាគបែង $e^x-1\neq 0$ ។
- $f'(x)=-\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}<0, \forall x\neq 0$ ។
  ដូចនេះ f ចុះដាច់ខាតលើ $(-\infty,0)$ និងចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។ គ្មានបរមាធៀបឡើយ។
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

គ. **អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ត្រង់ $x=1$ ៖** - អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $x=0$ (អ័ក្ស Oy) ។
- អាស៊ីមតូតដេក ៖ $y=0$ (អ័ក្ស Ox) ខាង $-\infty$ និង $y=1$ ខាង $+\infty$ ។
- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0=1$ ៖ $f(1)=\frac{e}{e-1}\approx 1.582,\ f'(1)=-\frac{e}{(e-1)^2}\approx -0.921$ ៖

$$(T): y=-\frac{e}{(e-1)^2}x+\frac{e^2}{(e-1)^2}\approx -0.921x+2.503$$

ឃ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
អាស៊ីមតូតឈរ	$x = 0$ (អ័ក្ស Oy)	$x = 0$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $-\infty$	$y = 0$ (អ័ក្ស Ox)	$y = 0$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$	$y = 1$	$y = 1$
ចំណុចប៉ះ M	$M\left(1, \dfrac{e}{e-1}\right)$	$(1, 1.582)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M	$y = -\dfrac{e}{(e-1)^2}x + \dfrac{e^2}{(e-1)^2}$	$y \approx -0.921x + 2.503$

លំហាត់ទី ៦

ក. តាង $g(x)=(x-1)e^x+1$ ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ g ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីត រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(x-2)e^x+x$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

b. រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតវា។

c. គណនា $f'(x)$ ។ ប្រើលទ្ធផលសំណួរ (a) សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

d. បង្ហាញថា ក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយដែលត្រូវគណនាកូអរដោនេ ហើយត្រង់ចំណុចរបត់នេះ ក្រាប (C) មានបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

e. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់នោះ ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **សិក្សាអនុគមន៍ជំនួយ $g(x)=(x-1)e^x+1$ ៖**

- ដេរីវេ ៖ $g'(x)=1\cdot e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ។
- សញ្ញា ៖ $g'(x)=0 \iff x=0$ (ព្រោះ $e^x>0$) ។ $g'(x)<0$ លើ $(-\infty,0)$ និង $g'(x)>0$ លើ $(0,+\infty)$ ។
- អប្បបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=0$ គឺ $g(0)=(0-1)e^0+1=-1+1=0$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ g ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ៖ ដោយ $g(0)=0$ ជាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត នោះ $g(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ (ហើយ $g(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$) ។

ខ. **សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=(x-2)e^x+x$ ៖**

a. **គណនាលីមីត ៖** - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-2e^x+x)=0-0+(-\infty)=-\infty$ (ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$) ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ ។

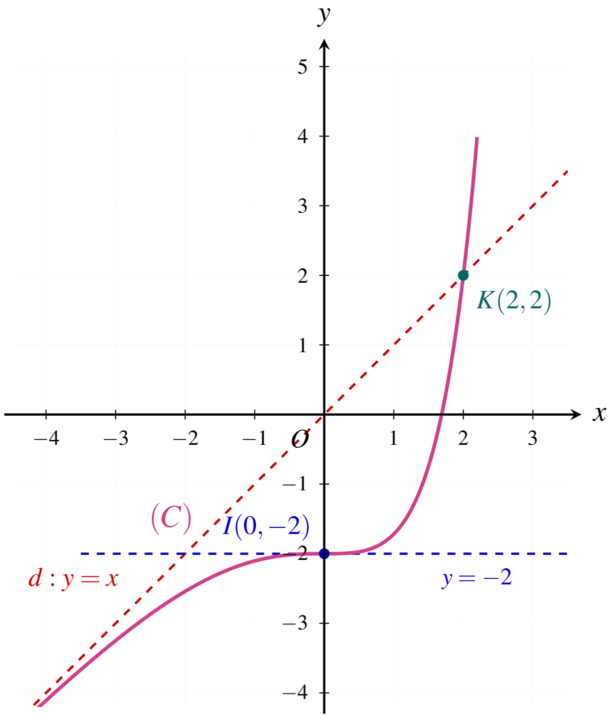
b. **អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖** $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x=0 \implies d: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។
ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-x=(x-2)e^x$ មានសញ្ញាដូច $(x-2)$ ៖ - បើ $x<2 \implies (C)$ នៅក្រោម d ; បើ $x=2 \implies (C)$ កាត់ d ត្រង់ $K(2,2)$; បើ $x>2 \implies (C)$ នៅលើ d ។

c. **គណនា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖** $f'(x)=1\cdot e^x+(x-2)e^x+1=(x-1)e^x+1=g(x)$ ។
ដោយ $g(x)\geq 0$ នោះ $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ (ស្មើសូន្យតែត្រង់ $x=0$) $\implies f$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

ⓓ. **ចំណុចរបត់ និងបន្ទាត់ប៉ះផ្ចិត ៖** $f''(x) = g'(x) = xe^x$ ។ $f''(x) = 0 \iff x = 0$ ។
ដោយ f'' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = 0$ នោះចំណុច $I(0, f(0)) = I(0, -2)$ ជា**ចំណុចរបត់**នៃក្រាប (C) ។
ត្រង់ $I(0, -2)$ មេគុណប្រាប់ទិសគឺ $f'(0) = g(0) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ I មានសមីការ $y = -2$ (ជាបន្ទាត់ដេក ស្របនឹងអ័ក្ស Ox) ។

គ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត d និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$d: y=x$	$y=x$
ចំណុចរបត់	$I(0,-2)$	$(0,-2)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ I	$y=-2$ (ស្របនឹងអ័ក្ស Ox)	$y=-2$
ចំណុចប្រសព្វជាមួយ d	$K(2,2)$	$(2,2)$

លំហាត់ទី ៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះនោះ។

ង. សង់ក្រាប (C) គេឱ្យ $e\approx 2.7$ និង $e^{-1}\approx 0.36$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីតចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $e^x+1>0, \forall x\in\mathbb{R} \implies D=\mathbb{R}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1 \implies y=1$ ជា**អាស៊ីមតូតដេកខាង** $+\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1 \implies y=-1$ ជា**អាស៊ីមតូតដេកខាង** $-\infty$ ។

ខ. ដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងបរមាធៀប ៖

- $f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ ។
- ដោយ $e^x>0$ និង $(e^x+1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ ។
- ដូចនេះ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R} \implies -x\in\mathbb{R}$ ៖

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

ដូចនេះ f ជា**អនុគមន៍សេស** ហើយគល់តម្រុយ $O(0,0)$ ជា**ផ្ចិតឆ្លុះ**នៃក្រាប (C) ។

ឃ. តារាងអថេរភាព និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះ ៖

- តារាងអថេរភាព ៖

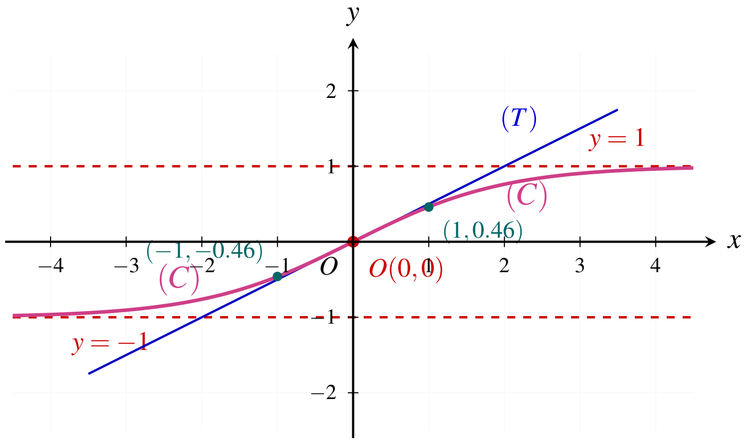
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	-1 ↗	0	↗ 1

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $O(0,0)$ ៖ $f'(0)=\frac{2e^0}{(e^0+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ៖

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{2}x$$

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ T ៖

- តម្លៃពិសេស ៖ $f(1)=\frac{e-1}{e+1}\approx\frac{1.7}{3.7}\approx 0.46$ និង $f(-1)\approx -0.46$ ។



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $-\infty$	$y=-1$	$y=-1$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$	$y=1$	$y=1$
ផ្ចិតឆ្លុះ	$O(0,0)$	$(0,0)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះ	$(T): y=\frac{1}{2}x$	$y=0.5x$

លំហាត់ទី ៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់ គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ។

ឃ. បន្ទាត់ $(T_1): y=3$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ M ។ គណនាកូអរដោនេនៃ M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច M ។

ង. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f និងសង់ក្រាប (C) ។ (គេឱ្យ $e\approx 2.7$ និង $e^{-1}\approx 0.36$)

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់ លីមីតចុងដែន និងអាស៊ីមតូត ៖**

- $e^x-1\neq 0 \iff x\neq 0 \implies D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \implies y=1$ ជា**អាស៊ីមតូតដេកខាង** $+\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0+1}{0-1}=-1 \implies y=-1$ ជា**អាស៊ីមតូតដេកខាង** $-\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty \implies x=0$ ជា**អាស៊ីមតូតឈរ** ។

ខ. **ដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងបរមាធៀប ៖** $f'(x)=\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}<0,\forall x\neq 0$ ។
ដូចនេះ f ចុះដាច់ខាតលើ $(-\infty,0)$ និងចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។ គ្មានបរមាធៀបឡើយ។

គ. **ភាពសេស និងផ្ចិតឆ្លុះ ៖** $f(-x)=\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\frac{e^x+1}{e^x-1}=-f(x)$ នាំឱ្យ f **ជាអនុគមន៍សេស** ហើយគល់ $O(0,0)$ **ជាផ្ចិតឆ្លុះ**នៃក្រាប (C) ។

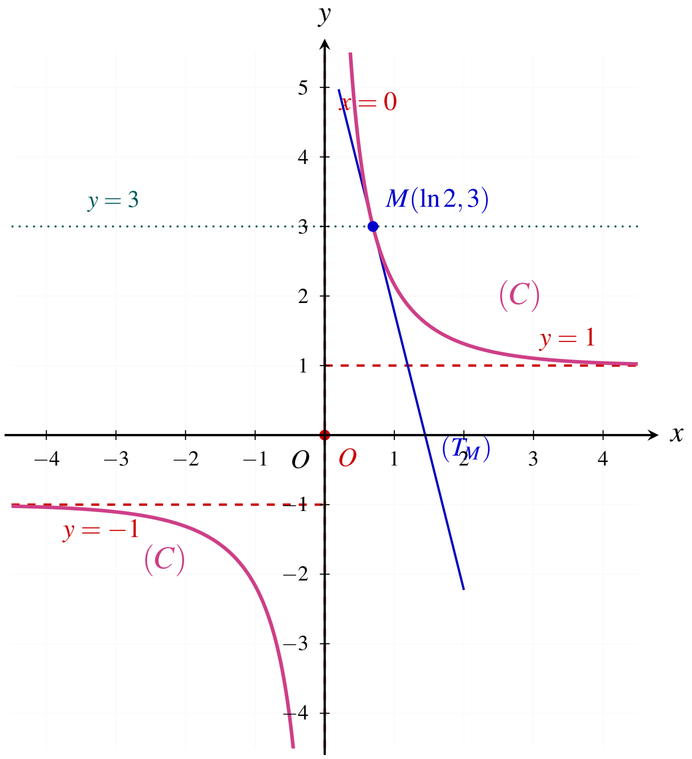
ឃ. **កូអរដោនេ M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M ៖** - ឱ្យ $f(x)=3 \iff \frac{e^x+1}{e^x-1}=3 \iff e^x+1=3e^x-3 \iff 2e^x=4 \iff e^x=2 \iff x=\ln 2$ ។
ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វគឺ $M(\ln 2,3)\approx M(0.7,3)$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(\ln 2)=\frac{-2(2)}{(2-1)^2}=-4$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T_M) ត្រង់ M ៖

$$(T_M): y=-4(x-\ln 2)+3=-4x+4\ln 2+3\approx -4x+5.77$$

ង. **តារាងអថេរភាពនៃ f ៖**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

ច. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ (T_M) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
អាស៊ីមតូតឈរ	$x = 0$ (អ័ក្ស Oy)	$x = 0$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $-\infty$	$y = -1$	$y = -1$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$	$y = 1$	$y = 1$
ចំណុច M	$M(\ln 2, 3)$	$(0.693, 3)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M	$(T_M) : y = -4x + 4\ln 2 + 3$	$y \approx -4x + 5.77$

លំហាត់ទី ៩

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x^2e^{-x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f ។

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត។

គ. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់អាប់ស៊ីស $x=2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឃ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

ង. គូសតារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់នៃ f ៖** អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \implies D=\mathbb{R}$ ។

ខ. **គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត ៖**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0 \implies y=0$ (អ័ក្ស Ox) ជា**អាស៊ីមតូតដេកខាង** $+\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$ ។

គ. **បន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ $x=2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖**

- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})=x(2-x)e^{-x}$ ។
- ត្រង់ $x=2$ ៖ $f'(2)=2(2-2)e^{-2}=0$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិសស្មើសូន្យ នាំឱ្យបន្ទាត់ប៉ះ (L) មានសមីការ ៖

$$(L): y=f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}\approx 0.541$$

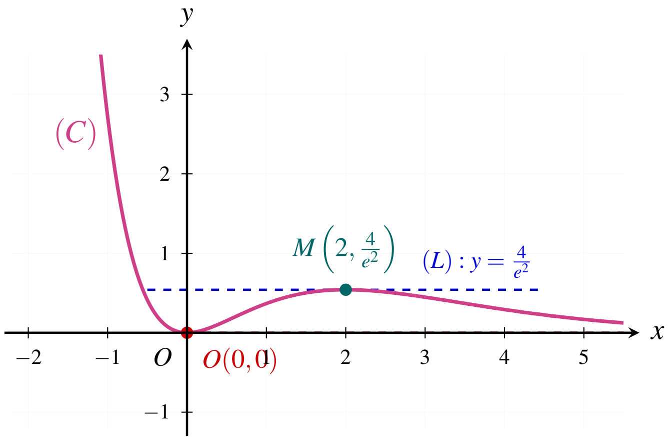
សមីការមានរាង $y=\text{const}$ ដូចនេះបន្ទាត់ (L) ជាបន្ទាត់ដេក ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស (Ox) ។

ឃ. **សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀប ៖** ដោយ $e^{-x}>0,\forall x$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ គឺតាម $x(2-x)$ ៖ - $f'(x)=0 \iff x=0$ ឬ $x=2$ ។
- បើ $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty) \implies f'(x)<0$ (f ចុះ) ។
- បើ $x\in(0,2) \implies f'(x)>0$ (f កើន) ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=0$ ។
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ $f(2)=\frac{4}{e^2}\approx 0.541$ ។

ង. **តារាងអថេរភាពនៃ f ៖**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

ច. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$	$y=0$ (អ័ក្ស Ox)	$y=0$
ចំណុចអប្បបរមាធៀប	$O(0,0)$	$(0,0)$
ចំណុចអតិបរមាធៀប	$M\left(2,\dfrac{4}{e^2}\right)$	$(2,0.541)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M	$(L): y=\dfrac{4}{e^2}$	$y\approx 0.541$

លំហាត់ទី ១០

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x - 2 + e^{1-x}$ តាងដោយក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់ D_f និងគណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយបន្ទាត់ L កាត់តាមគល់តម្រុយ ហើយស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ លីមីតចុងដែន និងអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D_f = \mathbb{R}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0 \implies d : y = x - 2$ **ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង** $+\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - 2 + e^{1-x}) = +\infty$ (ព្រោះ $e^{1-x} \to +\infty$ លឿនជាង $x \to -\infty$) ។

ខ. ដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងបរមាធៀប ៖

- $f'(x) = 1 - e^{1-x}$ ។
- $f'(x) = 0 \iff e^{1-x} = 1 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$ ។ - បើ $x < 1 \implies 1 - x > 0 \implies e^{1-x} > 1 \implies f'(x) < 0$ (f ចុះ) ។
  - បើ $x > 1 \implies 1 - x < 0 \implies e^{1-x} < 1 \implies f'(x) > 0$ (f កើន) ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 - 2 + e^0 = -1 + 1 = 0$ ។

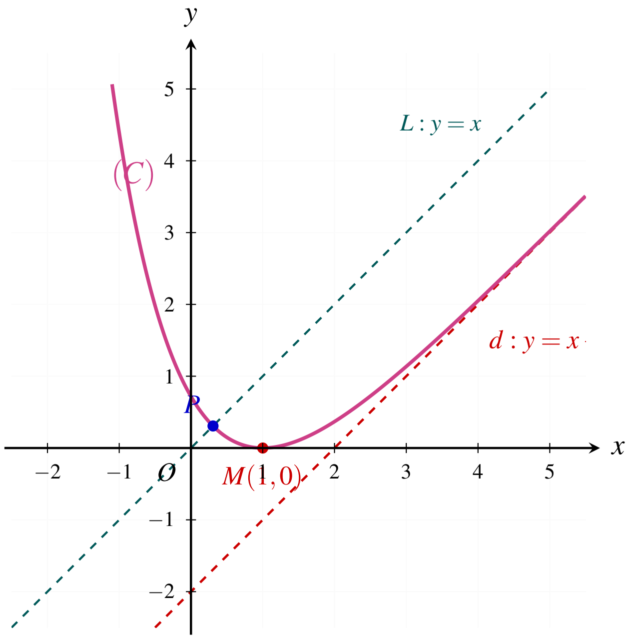
គ. ទីតាំងធៀបរវាង (C) និងបន្ទាត់ L កាត់តាមគល់តម្រុយ ស្របនឹង d ៖

- បន្ទាត់ L កាត់តាម $O(0,0)$ និងស្របនឹង $d : y = x - 2$ មានសមីការ $L : y = x$ ។
- ពិនិត្យផលដក ៖ $f(x) - x = (x - 2 + e^{1-x}) - x = e^{1-x} - 2$ ។
- $f(x) - x = 0 \iff e^{1-x} = 2 \iff 1 - x = \ln 2 \iff x = 1 - \ln 2 \approx 1 - 0.7 = 0.3$ ។ - បើ $x < 1 - \ln 2 \implies e^{1-x} > 2 \implies f(x) - x > 0$ នាំឱ្យ (C) នៅលើ L ។
  - បើ $x > 1 - \ln 2 \implies e^{1-x} < 2 \implies f(x) - x < 0$ នាំឱ្យ (C) នៅក្រោម L ។
  - បើ $x = 1 - \ln 2$ នាំឱ្យ (C) កាត់ L ត្រង់ $P(1 - \ln 2, 1 - \ln 2) \approx P(0.3, 0.3)$ ។

ឃ. តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត d និងបន្ទាត់ L ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_f = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$d : y = x - 2$	$y = x - 2$
ចំណុចអប្បបរមាធៀប	$M(1,0)$	$(1,0)$
បន្ទាត់កាត់តាមគល់ស្រប d	$L : y = x$	$y = x$
ប្រសព្វរវាង (C) និង L	$P(1-\ln 2, 1-\ln 2)$	$(0.307, 0.307)$

លំហាត់ទី ១១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត f កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងក្រាប (C) ធៀបនឹង (d_1) ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{1+e^x}$ ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងក្រាប (C) ធៀបនឹង (d_2) ។

ង. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ច. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ៖

- កាលណា $x\to-\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{1+e^x}=\frac{0}{1}=0$ ។
  ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2-0)=-\infty$ ។
- កាលណា $x\to+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{-x}+1}=4$ ។
  ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2-4)=+\infty$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_1) និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=0 \Longrightarrow (d_1): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x+2)=-\frac{4e^x}{1+e^x}<0, \forall x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d_1) ជានិច្ច ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $f(x)=x-2+\dfrac{4}{1+e^x}$ ៖

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{1+e^x}=x+2-\frac{4(e^x+1)-4}{1+e^x}=x+2-4+\frac{4}{1+e^x}=x-2+\frac{4}{1+e^x}\quad (\text{ពិត})$$

ឃ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_2) និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{1+e^x}=0 \Longrightarrow (d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x-2)=\frac{4}{1+e^x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d_2) ជានិច្ច ។

ង. សិក្សាអថេរភាពនៃ f និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $x=0$ ៖

- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1-\frac{4e^x(1+e^x)-4e^x(e^x)}{(1+e^x)^2}=1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{(1+e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}$ ។

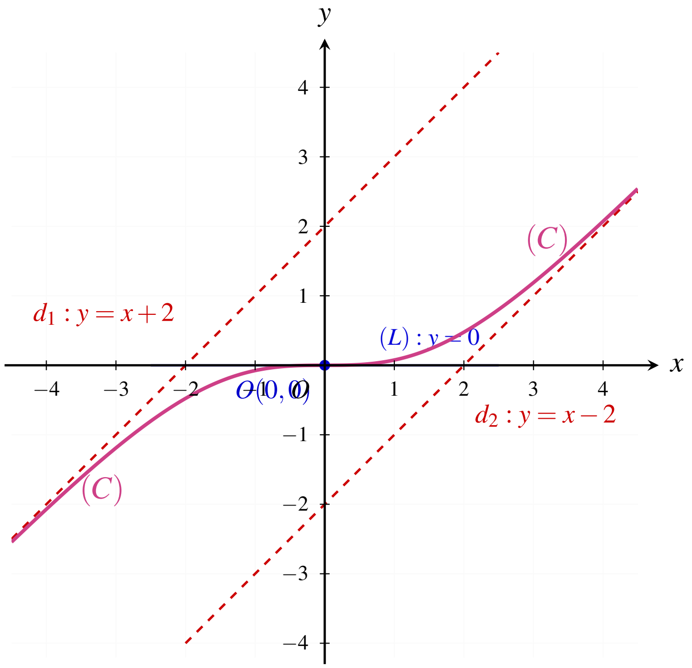
- សញ្ញា ៖ $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ ដោយ $f'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff x=0$ ។
  ដូចនេះ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- បន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $x=0$ ៖ $f(0)=0+2-\frac{4}{2}=0$ និង $f'(0)=0$ ៖

$$(L): y=f'(0)(x-0)+f(0) \implies y=0 \quad \text{(អ័ក្សអាប់ស៊ីស } Ox\text{)}$$

ច. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ៖



តារាងសង្ខេបជាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ជាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$(d_1) : y = x+2$	$y = x+2$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$(d_2) : y = x-2$	$y = x-2$
ចំណុចរបត់	$O(0,0)$	$(0,0)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់	$(L) : y = 0$ (អ័ក្ស Ox)	$y = 0$

លំហាត់ទី ១២

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក. ⓐ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x) = x - 1 + \frac{2}{1+e^x} = x + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ ។

ⓑ. គណនាលីមីត $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ។

ⓒ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y = x + 1$ និង $(d_2): y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ⓓ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(d_1), (d_2)$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចអាប់ស៊ីសស្មើសូន្យ។ សង់ក្រាប $(C), (d_1), (d_2), (L)$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **បំលែងកន្សោម លីមីត និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖**

ⓐ. **ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព ៖** - $f(x) = x - \frac{(e^x+1)-2}{e^x+1} = x - 1 + \frac{2}{1+e^x}$ (ពិត) ។

- $f(x) = x - \frac{2e^x - (e^x+1)}{e^x+1} = x + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ (ពិត) ។

ⓑ. **គណនាលីមីត ៖** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

ⓒ. **អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖** - $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{2e^x}{1+e^x}\right) = 0 \implies (d_1): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។

- $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0 \implies (d_2): y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

ⓓ. **ទីតាំងធៀប ៖** - $f(x) - (x+1) = -\frac{2e^x}{1+e^x} < 0 \implies (C)$ នៅក្រោម (d_1) ជានិច្ច ។

- $f(x) - (x-1) = \frac{2}{1+e^x} > 0 \implies (C)$ នៅលើ (d_2) ជានិច្ច ។

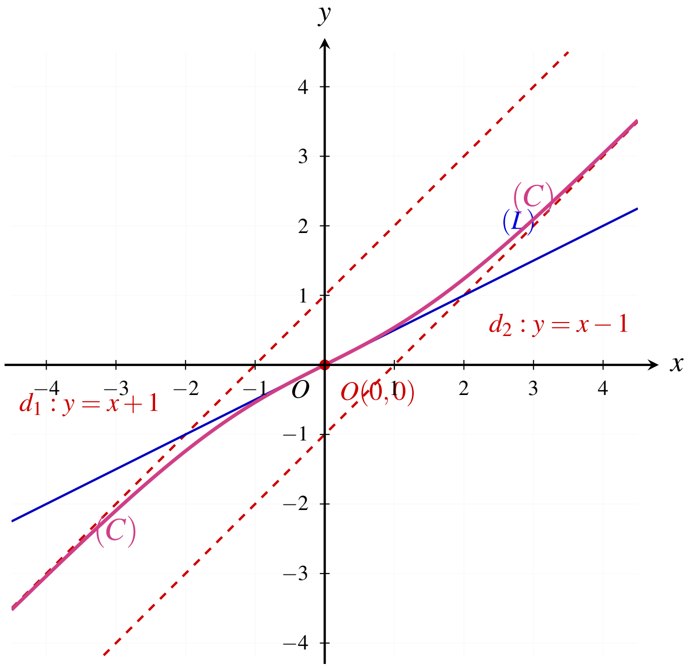
ខ. **ភាពសេស និងអថេរភាពនៃ f ៖**

- ភាពសេស ៖ $f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x - \left(-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = -\left(x - \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = -f(x)$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍សេស និងមាន $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2 - 2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(1+e^x)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។
- ដូចនេះ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $x=0$ ៖ $f(0)=0,\ f'(0)=\frac{1+1}{(1+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\implies(L):y=\frac{1}{2}x$ ។

ឃ. សង់ក្រាប $(C),(d_1),(d_2),(L)$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$(d_1): y=x+1$	$y=x+1$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$(d_2): y=x-1$	$y=x-1$
ផ្ចិតឆ្លុះ	$O(0,0)$	$(0,0)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះ	$(L): y=\frac{1}{2}x$	$y=0.5x$

លំហាត់ទី ១៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ និង $(d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។ សិក្សាទីតាំងក្រាប (C) ធៀបនឹង $(d_1),(d_2)$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ L ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(\ln 2,\ln 2)$ ។

ឃ. សង់ក្រាប $(C),(d_1),(d_2)$ និង L ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖ - $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ។

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=4 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត $(d_1),(d_2)$ និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)=0 \Longrightarrow (d_1): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។
  ទីតាំង ៖ $f(x)-(x+2)=-\frac{4e^x}{e^x+2}<0 \Longrightarrow (C)$ នៅក្រោម (d_1) ជានិច្ច ។
- សរសេរ $f(x)=x+2-\frac{4(e^x+2)-8}{e^x+2}=x-2+\frac{8}{e^x+2}$ ។
  $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0 \Longrightarrow (d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។
  ទីតាំង ៖ $f(x)-(x-2)=\frac{8}{e^x+2}>0 \Longrightarrow (C)$ នៅលើ (d_2) ជានិច្ច ។

គ. អថេរភាព តារាងអថេរភាព និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A(\ln 2,\ln 2)$ ៖

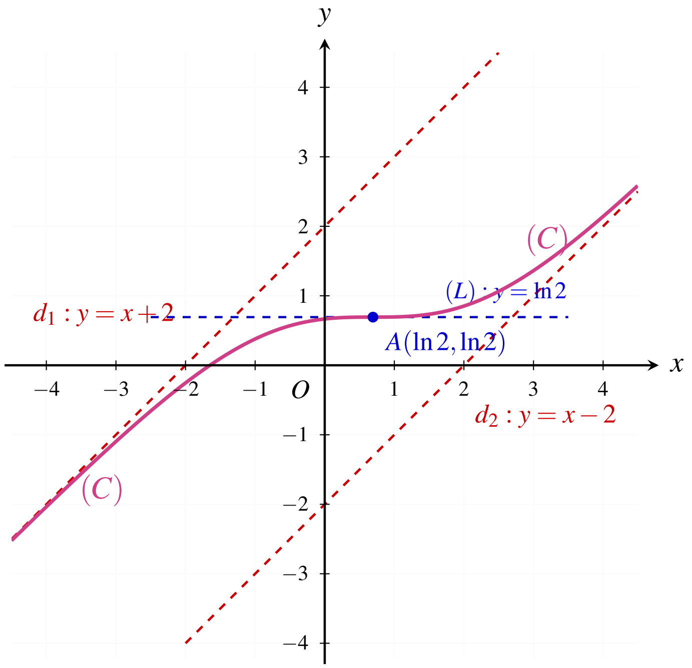
- $f'(x)=1-\frac{4e^x(e^x+2)-4e^x(e^x)}{(e^x+2)^2}=1-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x+2)^2-8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}\geq 0$ ។
- $f'(x)=0 \Longleftrightarrow e^x-2=0 \Longleftrightarrow x=\ln 2\approx 0.693$ ។
  ដូចនេះ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↗	$+\infty$

- បន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $A(\ln 2,\ln 2)$ ៖ ដោយ $f'(\ln 2)=0$ នាំឱ្យ ៖

$$(L): y=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2) \Longrightarrow y=\ln 2\approx 0.693 \quad \text{(បន្ទាត់ដេក)}$$

ឃ. សង់ក្រាប $(C),(d_1),(d_2)$ និង (L) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$(d_1) : y = x+2$	$y = x+2$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$(d_2) : y = x-2$	$y = x-2$
ចំណុចរបត់ A	$A(\ln 2, \ln 2)$	$(0.693, 0.693)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A	$(L) : y = \ln 2$	$y \approx 0.693$

លំហាត់ទី ១៤

A. អនុគមន៍ $h(x)=1+e^x(1-x)$ កំណត់ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។ ដោយពុំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ ចូរសិក្សាសញ្ញា នៃ $h(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

B. អនុគមន៍ $y=f(x)=2+x(1+e^x)$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់។

ខ. បំភ្លឺថា $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f និងទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+2$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) លើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

A. **សិក្សាសញ្ញានៃ** $h(x)=1+e^x(1-x)$ **៖**

- ដេរីវេ ៖ $h'(x)=e^x(1-x)+e^x(-1)=-xe^x$ ។
- សញ្ញា $h'(x)$ ៖ $h'(x)=0 \iff x=0$ ។ $h'(x)>0$ លើ $(-\infty,0)$ និង $h'(x)<0$ លើ $(0,+\infty)$ ។
- តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត ៖ ត្រង់ $x=0$ គឺ $h(0)=1+e^0(1-0)=2$ ។
- ភាពជាបន្ត និងសញ្ញានៃ $h(x)$ ៖ - លើ $(-\infty,0]$ អនុគមន៍កើនពី 1 ទៅ 2 នាំឱ្យ $h(x)>0$ ជានិច្ចលើចន្លោះនេះ ។
  - លើ $[0,+\infty)$ អនុគមន៍ចុះពី 2 ទៅ $-\infty$ នោះសមីការ $h(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha\approx 1.28$ ។
  សន្និដ្ឋាន ៖ $h(x)>0$ លើ $(-\infty,\alpha)$; $h(\alpha)=0$; $h(x)<0$ លើ $(\alpha,+\infty)$ ។

B. **សិក្សាអនុគមន៍** $f(x)=2+x(1+e^x)=x+2+xe^x$ **៖**

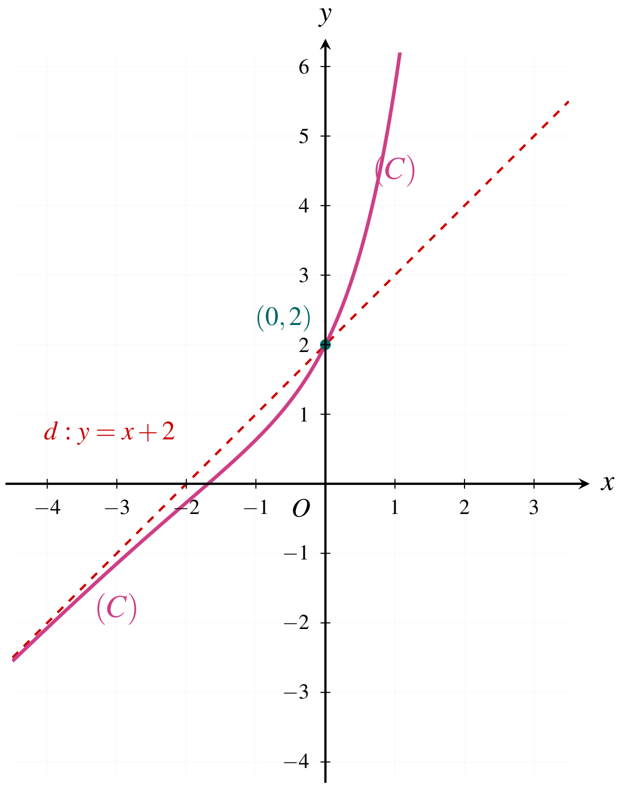
ក. **គណនាលីមីត ៖** - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2+xe^x)=-\infty$ (ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$) ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ខ. **អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង** $-\infty$ **៖** $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0 \implies d: y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។

គ. **ទីតាំងធៀប និងអថេរភាព ៖** - ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x+2)=xe^x$ មានសញ្ញាដូច x ៖ បើ $x<0 \implies (C)$ នៅក្រោម d ; បើ $x=0 \implies (C)$ កាត់ d ត្រង់ $(0,2)$; បើ $x>0 \implies (C)$ នៅលើ d ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1+(1+e^x)+xe^x=2+(x+1)e^x>0, \forall x\in\mathbb{R} \implies f$ កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↗ $+\infty$

C. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត d ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$d: y=x+2$	$y=x+2$
ប្រសព្វអ័ក្ស (Oy)	$(0,2)$	$(0,2)$
ទីតាំងធៀបជាមួយ d	(C) នៅក្រោម d លើ $(-\infty,0)$	កាត់ d ត្រង់ $(0,2)$

លំហាត់ទី ១៥

ក. អនុគមន៍ h កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $h(x)=e^{2x}-2x-1$ ។ បញ្ជាក់ថា $e^{2x}\geq 2x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

a. គណនា $f'(x)$ និង $f'(0)$ ។ បញ្ជាក់ថា $f'(x)$ និង $h(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

b. គណនា $f(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

c. បង្ហាញថា $f(x)=x+1+\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$ ។ បង្ហាញថា $(D): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

d. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) ។

e. បន្ទាត់ (Δ) មួយស្របនឹងបន្ទាត់ (D) ហើយប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។ កំណត់កូអរដោនេ M និងសរសេរសមីការ (Δ) ។

f. សង់បន្ទាត់ $(D),(\Delta)$ និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (គេឱ្យ $e\approx 2.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បញ្ជាក់ថា $e^{2x}\geq 2x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៖

- ដេរីវេ ៖ $h'(x)=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$ ។
- សញ្ញា ៖ $h'(x)=0 \iff e^{2x}=1 \iff x=0$ ។ $h'(x)<0$ លើ $(-\infty,0)$ និង $h'(x)>0$ លើ $(0,+\infty)$ ។
- អប្បបរមាដាច់ខាត ៖ ត្រង់ $x=0$ គឺ $h(0)=e^0-0-1=0$ ។
- ដោយ $h(0)=0$ ជាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត នោះ $h(x)\geq 0 \implies e^{2x}-2x-1\geq 0 \implies e^{2x}\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$ ៖

a. គណនា $f'(x)$ និងប្រៀបធៀបសញ្ញាជាមួយ $h(x)$ ៖

$$\begin{aligned}f'(x)&=1\cdot(e^{-2x}+1)+(x+1)(-2e^{-2x})=e^{-2x}+1-(2x+2)e^{-2x}\\&=1-(2x+1)e^{-2x}=e^{-2x}(e^{2x}-2x-1)=e^{-2x}h(x)\end{aligned}$$

$f'(0)=e^0h(0)=1\cdot 0=0$ ។
ដោយ $e^{-2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ និង $h(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ (ពោលគឺ $f'(x)>0,\forall x\neq 0$) ។

b. លីមីត និងតារាងអថេរភាព ៖ - $f(0)=(0+1)(e^0+1)=1(2)=2$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=(+\infty)(0+1)=+\infty$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

ⓒ. **ទម្រង់ពន្លាត និងអាស៊ីមតូតទ្រេត** (D) ៖ $f(x)=(x+1)e^{-2x}+x+1=x+1+\frac{x}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}=x+1+\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$ ។
ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ នាំឱ្យ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ ។
ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។

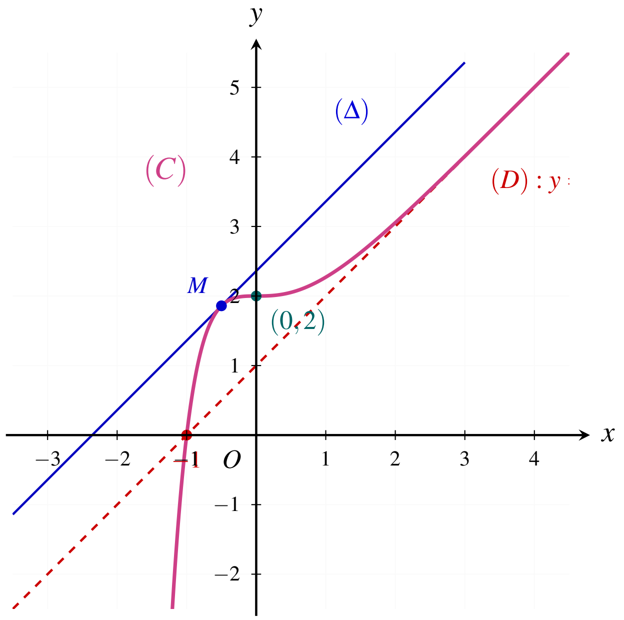
ⓓ. **ទីតាំងធៀប** ៖ $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-2x}$ មានសញ្ញាដូច $(x+1)$ ៖ - បើ $x<-1 \Longrightarrow (C)$ នៅក្រោម (D) ; បើ $x=-1 \Longrightarrow (C)$ កាត់ (D) ត្រង់ $(-1,0)$; បើ $x>-1 \Longrightarrow (C)$ នៅលើ (D) ។

ⓔ. **ចំណុចប៉ះ** M **និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ** (Δ) **ស្របនឹង** (D) ៖ - បន្ទាត់ (Δ) ស្របនឹង $(D): y=x+1 \iff f'(x_M)=1$ ៖

$$1-(2x_M+1)e^{-2x_M}=1 \iff (2x_M+1)e^{-2x_M}=0 \iff 2x_M+1=0 \iff x_M=-\frac{1}{2}$$

- អរដោនេ ៖ $y_M=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(e^1+1\right)=\frac{e+1}{2}\approx\frac{2.7+1}{2}=1.85$ ។
ដូចនេះ $M\left(-\frac{1}{2},\frac{e+1}{2}\right)\approx M(-0.5,1.85)$ ។ - សមីការ (Δ) ៖ $y=1\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{e+1}{2}=x+\frac{e+2}{2}\approx x+2.35$ ។

គ. សង់បន្ទាត់ $(D),(\Delta)$ និងក្រាប (C) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$(D):y=x+1$	$y=x+1$
ចំណុចប៉ះ M	$M\left(-\frac{1}{2},\frac{e+1}{2}\right)$	$(-0.5,1.859)$
បន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ស្រប (D)	$(\Delta):y=x+\frac{e+2}{2}$	$y\approx x+2.359$
ប្រសព្វជាមួយ (D)	$(-1,0)$	$(-1,0)$

លំហាត់ទី ១៦

A. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^x-1$ ។ គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

B. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរទី (១) ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $(D):y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (D) ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដែលស្របនឹង (D) ។

ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C) ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។ (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើ 1cm) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអនុគមន៍ជំនួយ $f(x)=(1-x)e^x-1$ លើ $\mathbb{R}$ ៖

- ដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=(-1+1-x)e^x=-xe^x$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ដោយ $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ អាស្រ័យនឹង $-x$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff -x=0 \iff x=0$ ។
  - $x<0 \implies f'(x)>0$ (f កើនដាច់ខាតលើ $(-\infty,0)$) ។
  - $x>0 \implies f'(x)<0$ (f ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$) ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖ (ត្រង់ $x=0 \implies f(0)=(1-0)e^0-1=0$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

- ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ៖ តាមតារាងអថេរភាព អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ 0 ត្រង់ $x=0$ ។
ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}: f(x)\le 0$ ហើយ $f(x)=0 \iff x=0$ ។

ខ. សិក្សាអនុគមន៍ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ លើ $\mathbb{R}$ ៖

ក. គណនាលីមីត ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាពនៃ g ៖

- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-xe^x+2-x)=0-0+2-(-\infty)=+\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ ។
- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)(e^x+1)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$ ។
- ដេរីវេ ៖ $g'(x)=-e^x+(2-x)e^x-1=(1-x)e^x-1=f(x)$ ។
- សញ្ញា $g'(x)$ ៖ តាមសំណួរទី ១ គេបាន $g'(x)=f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ និង $g'(0)=0$ ។
ដូចនេះ g ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ g ៖ ($g(0)=(2-0)e^0+2-0=4$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$			$\searrow$	$-\infty$

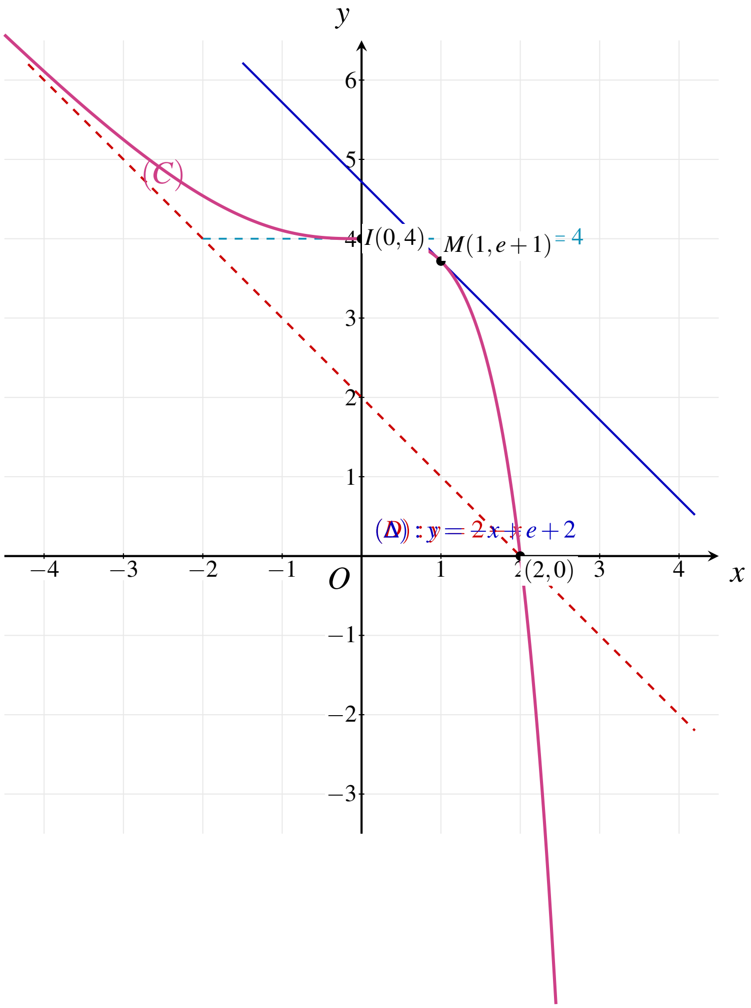
ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (D) និងទីតាំងធៀប ៖

- ផលដក ៖ $g(x)-(2-x)=(2-x)e^x$ ។
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)-(2-x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-xe^x)=0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D):y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ ដោយ $e^x>0,\forall x$ នោះសញ្ញានៃផលដកអាស្រ័យលើ $2-x$ ៖
  - បើ $x<2 \implies g(x)-y_D>0 \implies (C)$ នៅលើ (D) ។
  - បើ $x=2 \implies g(2)=0=y_D(2) \implies (C)$ កាត់ (D) ត្រង់ចំណុច $(2,0)$ ។
  - បើ $x>2 \implies g(x)-y_D<0 \implies (C)$ នៅក្រោម (D) ។

គ. **សមីការបន្ទាត់ប៉ះ** (Δ) **ស្របនឹង** $(D):y=-x+2$ ៖ បន្ទាត់ $(\Delta)\parallel(D) \iff g'(x_0)=-1 \iff (1-x_0)e^{x_0}-1=-1 \iff (1-x_0)e^{x_0}=0 \iff x_0=1$ ។
អរដោនេចំណុចប៉ះ ៖ $y_0=g(1)=(2-1)e^1+2-1=e+1\approx 3.72$ ។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ៖ $y=-1(x-1)+e+1 \iff y=-x+e+2$ ។

ឃ. **ចំណុចរបត់នៃក្រាប** (C) ៖ ដេរីវេទីពីរ ៖ $g''(x)=f'(x)=-xe^x$ ។
$g''(x)=0 \iff x=0$ ។ ចំពោះ $x<0 \implies g''(x)>0$ (ប៉ោង) និង $x>0 \implies g''(x)<0$ (ផត) ។
ដោយ $g''(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=0$ នោះចំណុច $I(0,g(0))=I(0,4)$ ជាចំណុចរបត់នៃ (C) ។
(ត្រង់ $I(0,4)$ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក $y=4$ ព្រោះ $g'(0)=0$) ។

ង. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ (D) និងបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_g = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$(D): y = -x+2$	$y = -x+2$
ចំណុចរបត់	$I(0,4)$	$(0,4)$
បន្ទាត់ប៉ះដេកត្រង់ I	$y = 4$	$y = 4$
បន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta) \parallel (D)$	$(\Delta): y = -x+e+2$	$y \approx -x+4.72$
ចំណុចប៉ះនៃ (Δ)	$M(1, e+1)$	$(1, 3.72)$
ប្រសព្វអ័ក្ស Ox និង (D)	$(2,0)$	$(2,0)$

លំហាត់ទី ១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-1+2e^{-x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត អាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 និងបង្ហាញអប្បបរមា ៖

- **លីមីត ៖**
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1+2e^{-x})=+\infty-1+0=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ ។
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+2)=(+\infty)(0-0+2)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0, \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ។
- **អាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 ៖** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x}=0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $L_1: y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។
  (ដោយ $2e^{-x}>0,\forall x \implies (C)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ L_1 ជានិច្ច) ។
- **អប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ៖**
  - ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1-2e^{-x}$ ។
  - $f'(x)=0 \iff 2e^{-x}=1 \iff e^{x}=2 \iff x=\ln 2$ ។
  - ដេរីវេទីពីរ ៖ $f''(x)=2e^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\ln 2$ ។
  - តម្លៃអប្បបរមា ៖ $f(\ln 2)=\ln 2-1+2e^{-\ln 2}=\ln 2-1+2\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2\approx 0.693$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ L_2 ត្រង់ $A(0,1)$ ៖

- **តារាងអថេរភាព ៖**

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

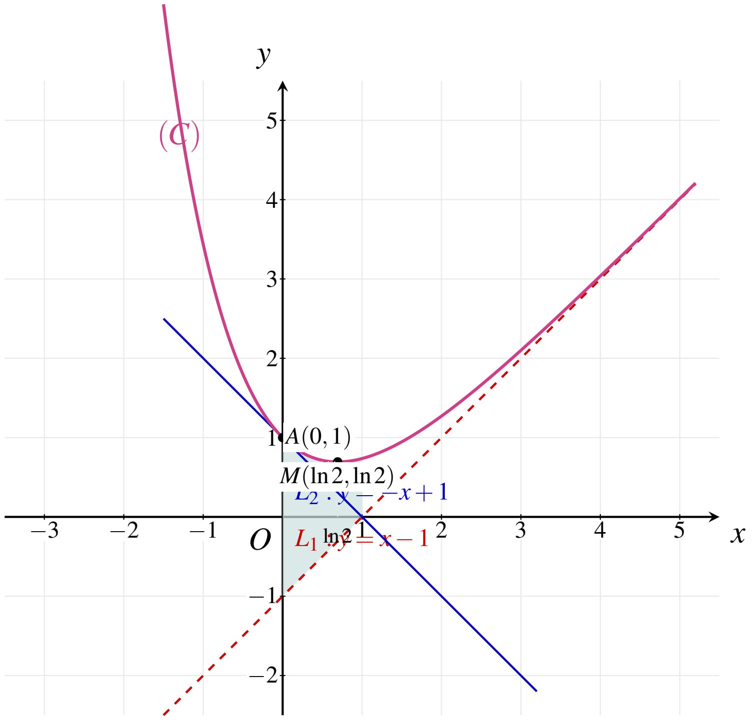
- **សមីការបន្ទាត់ប៉ះ L_2 ត្រង់ $A(0,1)$ ៖** ត្រង់ $x=0 \implies f(0)=0-1+2(1)=1 \implies A(0,1)\in(C)$ ។
  មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(0)=1-2e^{0}=1-2=-1$ ។
  សមីការបន្ទាត់ប៉ះ L_2 ៖ $y=f'(0)(x-0)+f(0) \iff y=-1(x)+1 \iff y=-x+1$ ។

គ. គណនាក្រលាផ្ទៃ S នៃផ្នែកប្លង់ ៖ ផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 និងបន្ទាត់ឈរ $x=0, x=1$ ៖
ដោយ (C) នៅលើបន្ទាត់ L_1 ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ គេបាន ៖

$$S=\int_0^1[f(x)-(x-1)]\,dx=\int_0^1 2e^{-x}\,dx=\left[-2e^{-x}\right]_0^1=-2e^{-1}-(-2e^{0})=2-\frac{2}{e}=\frac{2(e-1)}{e}$$

តម្លៃប្រហែល ៖ $S\approx 2-\frac{2}{2.718}\approx 1.264$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គ. សង់បន្ទាត់ L_1, L_2 និងក្រាប (C) ៖



តារាងសង្ខេបជាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ជាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_f=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$L_1 : y=x-1$	$y=x-1$
ចំណុចអប្បបរមាធៀប	$M(\ln 2,\ln 2)$	$(0.693, 0.693)$
ចំណុចកាត់អ័ក្ស Oy	$A(0,1)$	$(0,1)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A	$L_2 : y=-x+1$	$y=-x+1$
ក្រលាផ្ទៃរវាង (C) និង L_1	$S=\frac{2(e-1)}{e}$	≈ 1.264 ឯកតាផ្ទៃ

លំហាត់ទី ១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$ មានក្រាបតាងរៀងគ្នាដោយ (C_1) និង (C_2) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ៖

- ចំពោះអនុគមន៍ f ៖ $f(0)=e^0=1 \Longrightarrow A(0,1)\in(C_1)$ ។
- ចំពោះអនុគមន៍ g ៖ $g(0)=\ln(0+1)+1=\ln 1+1=0+1=1 \Longrightarrow A(0,1)\in(C_2)$ ។

ដូចនេះ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0), g'(0)$ និងទាញថា (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ៖

- ដេរីវេនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ៖ $f'(x)=e^x \Longrightarrow f'(0)=e^0=1$ ។
- ដេរីវេនៃ g លើ $(-1,+\infty)$ ៖ $g'(x)=\frac{1}{x+1} \Longrightarrow g'(0)=\frac{1}{0+1}=1$ ។

ដោយ $f(0)=g(0)=1$ និង $f'(0)=g'(0)=1$ នោះក្រាប (C_1) និង (C_2) មានបន្ទាត់ប៉ះរួមគ្នាតែមួយត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។
ដូចនេះ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

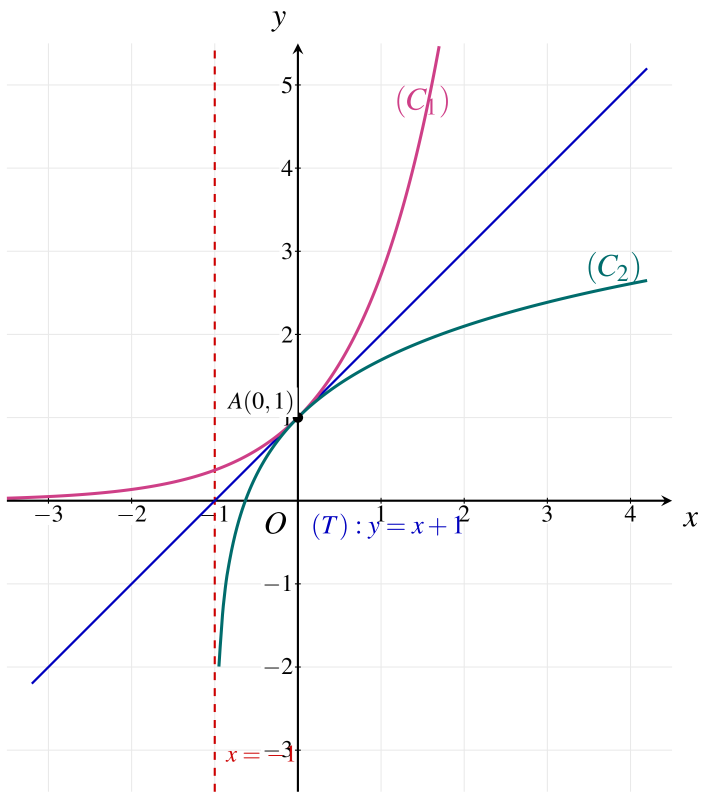
គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួម (T) និងទីតាំងធៀប ៖ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរួម (T) ត្រង់ $A(0,1)$ ៖

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0) \iff y=1(x)+1 \iff y=x+1$$

កំណត់សម្គាល់អំពីទីតាំងធៀប ៖

- ចំពោះ (C_1) ៖ តាមវិសមភាពមូលដ្ឋាន $e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ (ស្មើគ្នាតែត្រង់ $x=0$) នាំឱ្យ (C_1) ស្ថិតនៅលើ (T) ជានិច្ច ។
- ចំពោះ (C_2) ៖ តាមវិសមភាព $\ln(x+1)\leq x, \forall x>-1 \iff \ln(x+1)+1\leq x+1$ នាំឱ្យ (C_2) ស្ថិតនៅក្រោម (T) ជានិច្ច ។
- ហេតុនេះ បន្ទាត់ប៉ះរួម (T) ខណ្ឌចែកខ្សែកោងទាំងពីរ ដោយ (C_1) នៅខាងលើ (T) ហើយ (C_2) នៅខាងក្រោម (T) ហើយក្រាបទាំងពីរប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ តែមួយគត់ ។

សង់ក្រាប $(C_1), (C_2)$ និងបន្ទាត់ប៉ះរួម (T) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗ ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	កំណត់សម្គាល់
អនុគមន៍ទី ១	$f(x) = e^x$	ដែនកំណត់ $D_f = \mathbb{R}$
អនុគមន៍ទី ២	$g(x) = \ln(x+1) + 1$	ដែនកំណត់ $D_g = (-1, +\infty)$
អាស៊ីមតូតឈរនៃ (C_2)	$x = -1$	កាលណា $x \to -1^+$
អាស៊ីមតូតដេកនៃ (C_1)	$y = 0$	កាលណា $x \to -\infty$
ចំណុចប៉ះរួម	$A(0,1)$	ជាចំណុចរួមនៃ (C_1) និង (C_2)
បន្ទាត់ប៉ះរួម	$(T): y = x + 1$	មេគុណប្រាប់ទិស $m = 1$
ទីតាំងធៀប	(C_1) នៅលើ (T), (C_2) នៅក្រោម (T)	ប៉ះគ្នាតែត្រង់ $A(0,1)$

លំហាត់ទី ១៩

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

(កំណត់សម្គាល់ ៖ តាមសំណួរ ក.ឃ $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ និងសំណួរ ខ.គ $f(x) = 0$ មានឫសក្នុង $[-1, 0]$ បញ្ជាក់ថាមេគុណនៃ e^{-x} គឺ 2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអំពីលីមីត អាស៊ីមតូត និងទម្រង់សមមូល ៖

ក. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (4 - x - 2e^{-x}) = -\infty - 0 = -\infty$ ព្រោះ $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ ។

ខ. **អាស៊ីមតូតទ្រេត** $(D) : y = -x + 4$ ៖

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = \lim_{x \to +\infty} (-2e^{-x}) = 0$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D) : y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

គ. **ទីតាំងធៀបនៃ** (C) **និង** (D) ៖

ផលដក $f(x) - y_D = -2e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ព្រោះ $e^{-x} > 0$ ។

ដូចនេះ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់អាស៊ីមតូត (D) ជានិច្ច ។

ឃ. **ផ្ទៀងផ្ទាត់ទម្រង់ប្រភាគ** ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៖

$$f(x) = 4 - x - \frac{2}{e^x} = \frac{(4 - x)e^x - 2}{e^x} = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} \quad (\text{ពិត})$$

ង. **គណនា** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ៖

ដោយប្រើ $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ និង $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ គេបាន ៖

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} = \frac{0 - 0 - 2}{0^+} = -\infty$$

ខ. សិក្សាអថេរភាព បន្ទាត់ប៉ះ និងឫសនៃសមីការ ៖

ក. **ដេរីវេ អថេរភាព និងអតិបរមា** ៖

- $f'(x) = -1 - 2(-e^{-x}) = -1 + 2e^{-x}$ ។
- $f'(x) = 0 \iff 2e^{-x} = 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2 \approx 0.693$ ។
- $x < \ln 2 \implies f'(x) > 0$ (f កើន) ; $x > \ln 2 \implies f'(x) < 0$ (f ចុះ) ។
- តម្លៃអតិបរមា ៖ $f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2} = 4 - \ln 2 - 1 = 3 - \ln 2 \approx 2.307$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3 - \ln 2$	↘	$-\infty$

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ខ. បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ៖

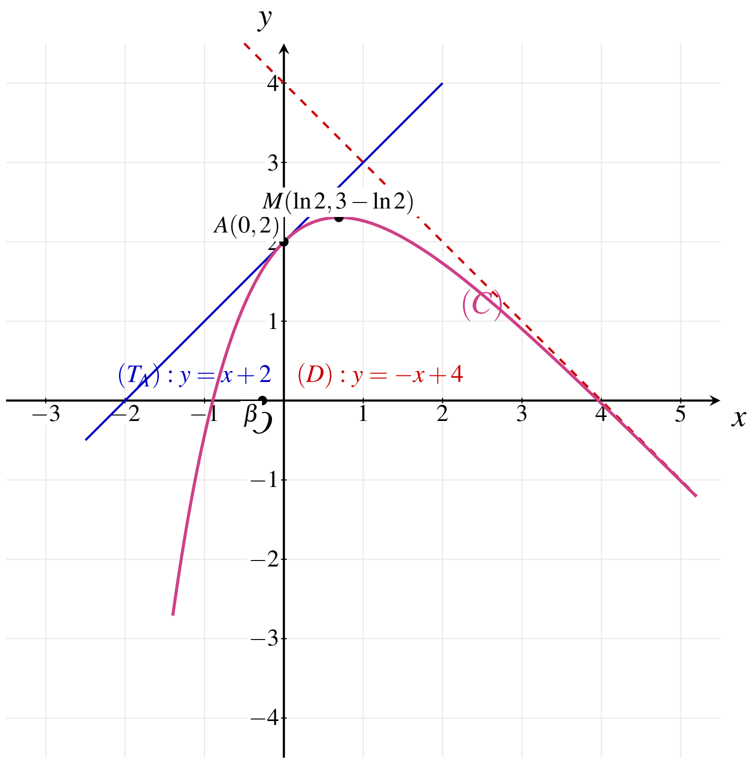
- អរដោនេ ៖ $f(0)=4-0-2e^0=2 \implies A(0,2)$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(0)=-1+2e^0=1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T_A) ៖ $y=1(x-0)+2 \iff y=x+2$ ។

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $\beta \in [-1,0]$ ៖

- អនុគមន៍ f ជាប់ និងកើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $[-1,0]$ ។
- $f(-1)=4-(-1)-2e^1=5-2e \approx 5-5.436=-0.436<0$ ។
- $f(0)=2>0$ ។

ដោយ $f(-1)\times f(0)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x)=0$ មានឫសពិតតែមួយគត់ $\beta \in [-1,0]$ (តម្លៃប្រហែល $\beta \approx -0.27$) ។

សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត (D) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T_A) ៖



តារាងសង្ខេបជាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_f = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$(D) : y = -x + 4$	$y = -x + 4$
ចំណុចអតិបរមាធៀប	$M(\ln 2, 3 - \ln 2)$	$(0.693, 2.307)$
ចំណុចប៉ះ A លើអ័ក្ស Oy	$A(0,2)$	$(0,2)$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A	$(T_A) : y = x + 2$	$y = x + 2$
ឫសនៃសមីការ $f(x) = 0$	$\beta \in [-1, 0]$	$\beta \approx -0.27$
ទីតាំងធៀប	(C) នៅក្រោម (D) ជានិច្ច	$\forall x \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី ២០

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) នឹងបន្ទាត់ $d_1: y=x+2$ ៖

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$) ; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x+3}=4$) ។
- **ទីតាំងធៀប ៖** $f(x)-(x+2)=-\frac{4e^x}{e^x+3}<0,\forall x\in\mathbb{R} \implies (C)$ នៅក្រោម d_1 ជានិច្ច ។
  ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=0 \implies d_1: y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

- **ដេរីវេ ៖** $f'(x)=1-\frac{12e^x}{(e^x+3)^2}=\frac{(e^x+3)^2-12e^x}{(e^x+3)^2}=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
- **អថេរភាព ៖** ដោយ $f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ហើយ $f'(x)=0 \iff x=\ln 3 \implies f$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- តម្លៃត្រង់ $x=\ln 3$ គឺ $f(\ln 3)=\ln 3$ ។
- **តារាងអថេរភាពនៃ f ៖**

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$			$\nearrow$	$+\infty$

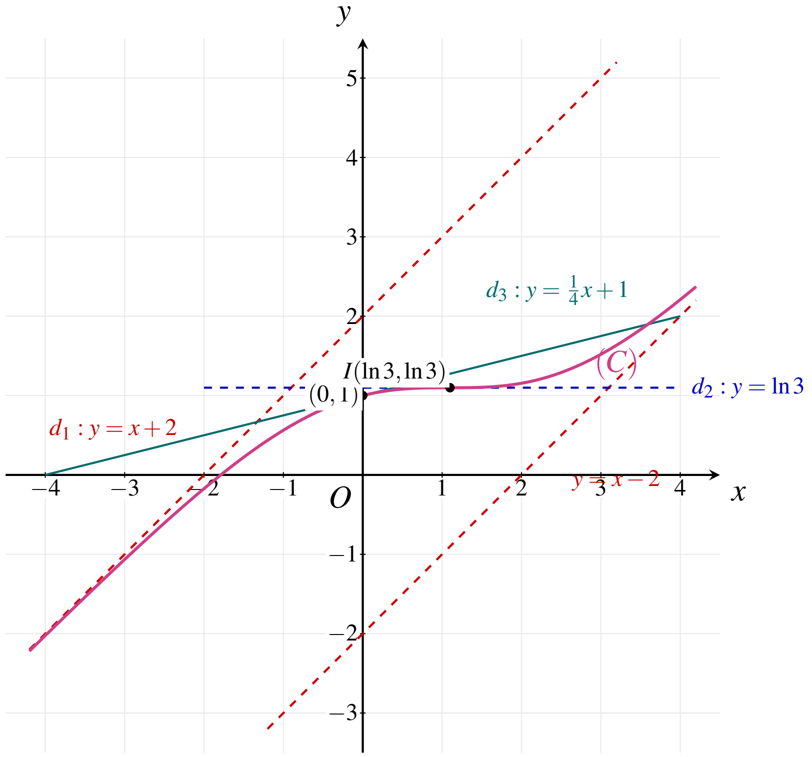
គ. បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ត្រង់ $I(\ln 3,\ln 3)$ និងទីតាំងធៀប ៖

- ដោយ $f'(\ln 3)=0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ជាបន្ទាត់ដេកមានសមីការ ៖ $d_2: y=\ln 3$ ។
- **ទីតាំងធៀប ៖** បើ $x<\ln 3 \implies f(x)<\ln 3$ ((C) នៅក្រោម d_2) ; បើ $x>\ln 3 \implies f(x)>\ln 3$ ((C) នៅលើ d_2) ។ ក្រាប (C) ឆ្លងកាត់បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ត្រង់ចំណុច $I(\ln 3,\ln 3)$ នាំឱ្យ I ជាចំណុចរបត់នៃ (C) ។

ឃ. បន្ទាត់ប៉ះ d_3 ត្រង់ $x=0$ និងផ្ចិតឆ្លុះ I ៖

- ត្រង់ $x=0 \implies f(0)=1$ និង $f'(0)=\left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2=\frac{1}{4}$ ។ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3: y=\frac{1}{4}x+1$ ។
- **ផ្ចិតឆ្លុះ ៖** ចំណុច $I(\ln 3,\ln 3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ព្រោះ $f(\ln 3+X)+f(\ln 3-X)=2\ln 3,\forall X\in\mathbb{R}$ ។

សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ d_1, d_2, d_3 ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_f = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$d_1 : y = x + 2$	$y = x + 2$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$y = x - 2$	$y = x - 2$
ចំណុចរបត់ & ផ្ចិតឆ្លុះ	$I(\ln 3, \ln 3)$	$(1.099, 1.099)$
បន្ទាត់ប៉ះដេកត្រង់ I	$d_2 : y = \ln 3$	$y \approx 1.10$
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 0$	$d_3 : y = \frac{1}{4}x + 1$	$y = 0.25x + 1$
ចំណុចប៉ះត្រង់ Oy	$(0, 1)$	$(0, 1)$

លំហាត់ទី ២១

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ទម្រង់សមមូល លីមីតត្រង់ $-\infty$ និងអាស៊ីមតូត d_1 ៖

- ទម្រង់សមមូល ៖ $\frac{1-3e^x}{1+e^x}=\frac{(1+e^x)-4e^x}{1+e^x}=1-\frac{4e^x}{1+e^x} \implies f(x)=x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}$ ។
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$) ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត d_1 ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4e^x}{1+e^x}\right)=0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x+1)=-\frac{4e^x}{1+e^x}<0, \forall x\in\mathbb{R} \implies (C)$ នៅក្រោម d_1 ជានិច្ច ។

ខ. លីមីតត្រង់ $+\infty$ និងអាស៊ីមតូត $d_2: y=x-3$ ៖

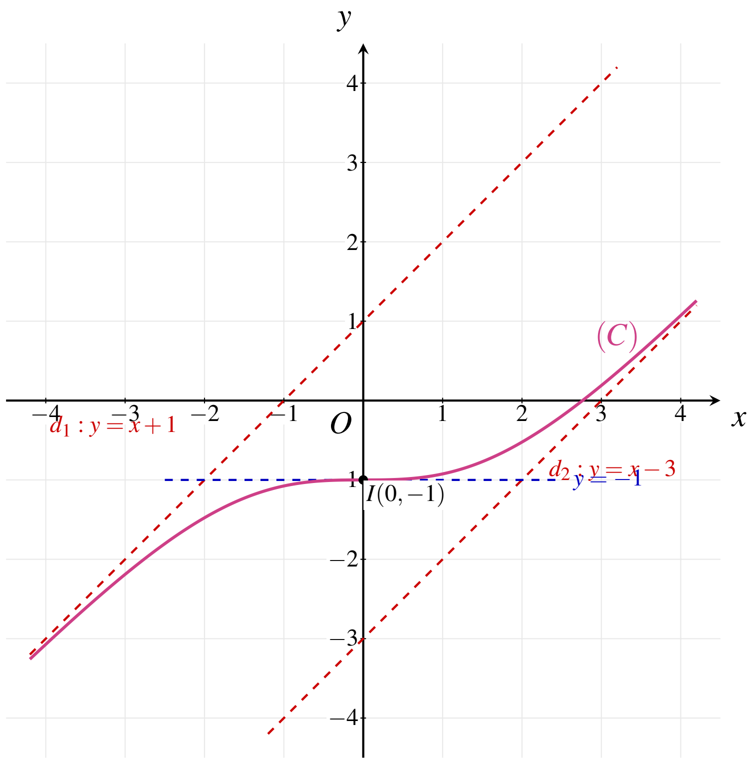
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3e^x}{1+e^x}=-3 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត d_2 ៖ $f(x)-(x-3)=\frac{4}{1+e^x} \implies \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2: y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x-3)=\frac{4}{1+e^x}>0, \forall x\in\mathbb{R} \implies (C)$ នៅលើបន្ទាត់ d_2 ជានិច្ច ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{(1+e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2}=\left(\frac{e^x-1}{1+e^x}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
- អថេរភាព ៖ $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ ហើយ $f'(x)=0 \iff x=0$ នាំឱ្យ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- ត្រង់ $x=0 \implies f(0)=-1$ ។ ចំណុច $I(0,-1)$ ជាចំណុចរបត់ និងផ្ចិតឆ្លុះ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក $y=-1$ ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		↗		$+\infty$

សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត d_1, d_2 ៖



តារាងសង្ខេបជាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ជាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_f = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$d_1 : y = x + 1$	$y = x + 1$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$	$d_2 : y = x - 3$	$y = x - 3$
ចំណុចរបត់ & ផ្ចិតឆ្លុះ	$I(0, -1)$	$(0, -1)$
បន្ទាត់ប៉ះដេកត្រង់ I	$y = -1$	$y = -1$
ទីតាំងធៀប	(C) នៅក្រោម d_1 និងនៅលើ d_2	(C) នៅចន្លោះអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ៣ ៖ អនុគមន៍លោការីត

ក. ចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក	ក

ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $A = e^{\ln 7}$ ខ. $B = \ln(e^{x-2})$ គ. $C = \ln(e^{7x})$

ដំណោះស្រាយ

ក. $A = e^{\ln 7}$ ៖
តាមរូបមន្តគ្រឹះនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីតនេពែរ $e^{\ln u} = u$ (ចំពោះ $u > 0$) ៖

$$A = e^{\ln 7} = \mathbf{7} \implies \boxed{A = 7}$$

ខ. $B = \ln(e^{x-2})$ ៖
តាមរូបមន្ត $\ln(e^u) = u$ (ចំពោះគ្រប់ $u \in \mathbb{R}$) ៖

$$B = \ln(e^{x-2}) = \mathbf{x-2} \implies \boxed{B = x-2}$$

គ. $C = \ln(e^{7x})$ ៖
អនុវត្តរូបមន្ត $\ln(e^u) = u$ ដោយ $u = 7x$ ៖

$$C = \ln(e^{7x}) = \mathbf{7x} \implies \boxed{C = 7x}$$

លំហាត់ទី ២

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ៖

ក. $y = 3 - \ln x$

ខ. $y = \ln(x-3)$

គ. $y = \ln(2 + e^x)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y = 3 - \ln x$ ៖

១. ដែនកំណត់ ៖ $D = (0, +\infty)$ ។

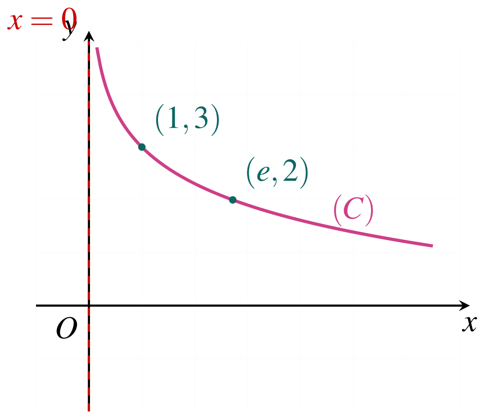
២. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim_{x \to 0^+} (3 - \ln x) = 3 - (-\infty) = +\infty \implies \boxed{x = 0}$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim_{x \to +\infty} (3 - \ln x) = -\infty$ ។

៣. ដេរីវេ ៖ $y' = -\frac{1}{x} < 0, \forall x > 0 \implies$ អនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0, +\infty)$។

៤. ចំណុចប្រសព្វ ៖

- ប្រសព្វអ័ក្ស (Ox) ៖ $3 - \ln x = 0 \iff \ln x = 3 \iff x = e^3 \approx 20.09$ ។
- ចំណុចងាយ ៖ បើ $x = 1 \implies y = 3$; បើ $x = e \approx 2.72 \implies y = 2$ ។



ខ. $y = \ln(x-3)$ ៖

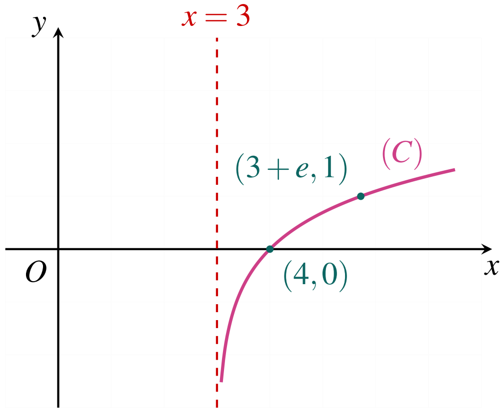
១. ដែនកំណត់ ៖ $x - 3 > 0 \iff \boxed{D = (3, +\infty)}$ ។

២. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim_{x \to 3^+} \ln(x-3) = -\infty \implies \boxed{x = 3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x-3) = +\infty$ ។

៣. ដេរីវេ ៖ $y' = \frac{1}{x-3} > 0, \forall x > 3 \implies$ អនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(3, +\infty)$។

៤. ចំណុចប្រសព្វ ៖ $y = 0 \iff x - 3 = 1 \iff x = 4$ ។ ក្រាបកាត់អ័ក្ស (Ox) ត្រង់ $(4, 0)$។



គ. $y = \ln(2 + e^x)$ ៖

១. ដែនកំណត់ ៖ ដោយ $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies 2 + e^x > 2 > 0 \implies \boxed{D = \mathbb{R}}$ ។

២. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim_{x \to -\infty} \ln(2 + e^x) = \ln(2 + 0) = \ln 2 \implies \boxed{y = \ln 2 \approx 0.69}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $-\infty$។

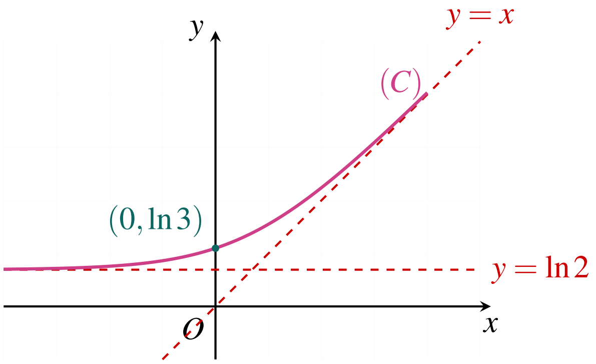
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2+e^x) = +\infty$ ។
- រកអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ៖

$$y = \ln[e^x(1+2e^{-x})] = x + \ln(1+2e^{-x}) \implies \lim_{x\to+\infty}[y-x] = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+2e^{-x}) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y = x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

៣. ដេរីវេ ៖ $y' = \dfrac{e^x}{2+e^x} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies$ អនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$។

៤. ចំណុចកាត់អ័ក្ស Oy ៖ $x = 0 \implies y = \ln(2+1) = \ln 3 \approx 1.10$។



លំហាត់ទី ៣

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

ដំណោះស្រាយ

ក. $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$ ៖

សរសេរឡើងវិញជាផលធៀប ៖ $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^5}$ ។

តាមលីមីតគ្រឹះនៃលោការីតនេពែរ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ (ចំពោះ $n > 0$) ដោយ $n = 5 > 0$ ៖

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^5} = \mathbf{0} \implies \boxed{L_1 = 0}$$

ខ. $L_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ ៖

បំបែកជាពីរប្រភាគ ៖

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ នាំឱ្យ ៖

$$L_2 = 0 + 0 = \mathbf{0} \implies \boxed{L_2 = 0}$$

គ. $L_3 = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x$ ៖

នេះជារូបមន្តលីមីតគ្រឹះសំខាន់នៃអនុគមន៍លោការីតនេពែរ (តាង $t = \dfrac{1}{x} \to +\infty \implies x\ln x = -\dfrac{\ln t}{t} \to 0$) ៖

$$L_3 = \lim_{x \to 0^+} x\ln x = \mathbf{0} \implies \boxed{L_3 = 0}$$

លំហាត់ទី ៤

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \sqrt{x}\ln x$ ខ. $y = x^3\sqrt{\ln x}$ គ. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y = \sqrt{x}\ln x$ (កំណត់ចំពោះ $x > 0$) ៖
អនុវត្តរូបមន្តផលគុណ $(uv)' = u'v + uv'$ ៖

$$y' = (\sqrt{x})'\ln x + \sqrt{x}(\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \boxed{\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}}$$

ខ. $y = x^3\sqrt{\ln x}$ (កំណត់ចំពោះ $x \geq 1$) ៖

$$y' = (x^3)'\sqrt{\ln x} + x^3(\sqrt{\ln x})' = 3x^2\sqrt{\ln x} + x^3\cdot\frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} = 3x^2\sqrt{\ln x} + \frac{x^2}{2\sqrt{\ln x}} = \boxed{\frac{x^2(6\ln x + 1)}{2\sqrt{\ln x}}}$$

គ. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$) ៖
អនុវត្តរូបមន្ត $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ ៖

$$u' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

លំហាត់ទី ៥

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$ ខ. $y = x\ln x - x$ គ. $y = x^2\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$ ៖

ប្រើលក្ខណៈលោការីតបំប្លែងមុននឹងធ្វើដេរីវេ ៖

$$y=\ln(e^x)-\ln(e^x+1)=x-\ln(e^x+1)$$

ធ្វើដេរីវេ ៖

$$y'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\boxed{\frac{1}{e^x+1}}$$

ខ. $y=x\ln x-x$ ៖

$$y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-(x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\boxed{\ln x}$$

គ. $y=x^2\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (កំណត់ចំពោះ $x\neq 0$) ៖

បំប្លែងកន្សោម ៖ $\ln(x^{-2})=-2\ln|x| \implies y=-2x^2\ln|x|$ ។

ធ្វើដេរីវេ ៖

$$y'=-2\left[(x^2)'\ln|x|+x^2(\ln|x|)'\right]=-2\left[2x\ln|x|+x^2\cdot\frac{1}{x}\right]=-2(2x\ln|x|+x)=\boxed{-2x(2\ln|x|+1)}$$

លំហាត់ទី ៦

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=2x-x\ln x$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=(0,+\infty)}$ ។

២. លីមីតចុងដែនកំណត់ ៖

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-x\ln x)=0-0=\mathbf{0}$ (ក្រាបខិតជិតគល់ $O(0,0)$)។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(2-\ln x)=+\infty(2-\infty)=-\infty$ ។
- ពិនិត្យទិសដៅអនន្ត ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln x)=-\infty \implies$ ក្រាបមានខ្នែងប៉ារ៉ាបូលបែរទៅរកអ័ក្ស (Oy) ខាងក្រោម។

៣. ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

$$f'(x)=2-\left[\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right]=2-\ln x-1=\mathbf{1}-\ln\mathbf{x}$$

$$f'(x)=0 \iff 1-\ln x=0 \iff \ln x=1 \iff x=e\approx 2.72$$

- ចំពោះ $x\in(0,e)f'(x)>0 \implies f$ កើន។
- ចំពោះ $x\in(e,+\infty)f'(x)<0 \implies f$ ចុះ។
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ ៖ $f(e)=2e-e\ln e=2e-e=\mathbf{e}\approx 2.72$ ។ ចំណុចកំពូលគឺ $S(e,e)$។

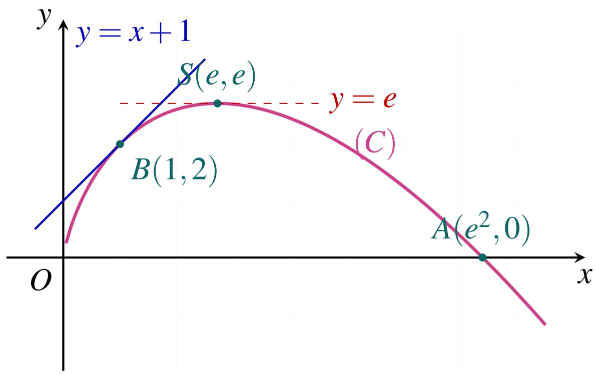
៤. តារាងអថេរភាព ៖

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	e	↘	$-\infty$

៥. ចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស ៖

- ប្រសព្វអ័ក្ស (Ox) ៖ $f(x)=0 \iff x(2-\ln x)=0 \iff \ln x=2 \iff x=e^2\approx 7.39$ ។ ចំណុច $A(e^2,0)$។
- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $B(1,2)$ ៖ $f'(1)=1-0=1 \implies (T)y-2=1(x-1) \iff y=x+1$។

៦. សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៧

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=-2\ln|x|+x-2$ ។

ខ. ក្រាប (C) កាត់អ័ក្ស Ox ត្រង់ ៣ ចំណុច P,Q,R មានអាប់ស៊ីស p,q,r រៀងគ្នា $(p<q<r)$។ បញ្ជាក់ថា $p\in(-1,0)$, $q\in(0,1)$, $r\in(5,6)$។

ដំណោះស្រាយ

១. ដែនកំណត់ ៖ $|x|>0 \iff x\neq 0 \implies \boxed{D=\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$ ។

២. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2(-\infty)+0-2 = +\infty \implies \boxed{x=0}$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2(+\infty)-\infty-2 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}\right) = +\infty(1-0-0) = +\infty$។

៣. ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

$$f'(x) = -\frac{2}{x}+1 = \frac{x-2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \iff x-2=0 \iff x=2$$

សញ្ញាដេរីវេ ៖

- លើ $(-\infty,0)x<0$ និង $x-2<0 \implies f'(x)>0 \implies f$ កើន។
- លើ $(0,2)x>0$ និង $x-2<0 \implies f'(x)<0 \implies f$ ចុះ។
- លើ $(2,+\infty)x>0$ និង $x-2>0 \implies f'(x)>0 \implies f$ កើន។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ ៖ $f(2) = -2\ln 2+2-2 = -2\ln 2 \approx -1.39$ ។

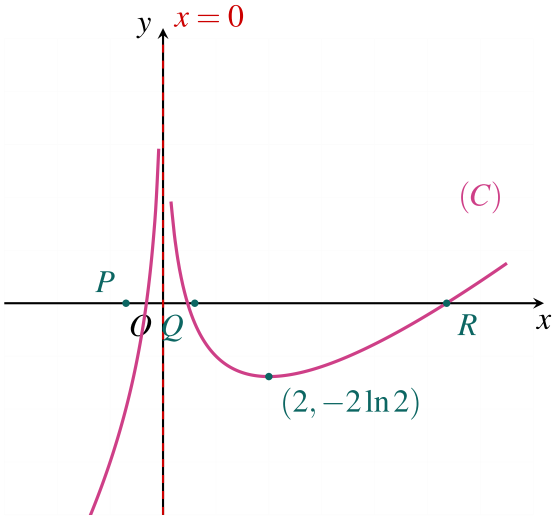
៤. តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-2\ln 2$	↗	$+\infty$

៥. បញ្ជាក់អាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វ ៖

- លើ $(-1,0) f(-1) = -2\ln 1-1-2 = -3<0$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty>0 \implies \exists p\in(-1,0)$ ដែល $f(p)=0$។
- លើ $(0,1)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty>0$ និង $f(1) = 0+1-2 = -1<0 \implies \exists q\in(0,1)$ ដែល $f(q)=0$។
- លើ $(5,6) f(5) = -2\ln 5+3 \approx -2(1.609)+3 = -0.22<0$ និង $f(6) = -2\ln 6+4 \approx -2(1.792)+4 = +0.42>0 \implies \exists r\in(5,6)$ ដែល $f(r)=0$។

៦. សង់ក្រាប (C) ៖



ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ត្រីះបន្ថែម (លំហាត់ ៨, ៩, ១០)

លំហាត់ទី ៨

រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយបានទិញម៉ាស៊ីនហ្វាក់តម្លៃ 250$ ហើយមានអត្រាតម្លៃថយចុះ 25% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើបីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហ្វាក់នេះ នឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

- **ទិន្នន័យ ៖**
  - តម្លៃទិញដំបូង ៖ $V_0 = 250\$$
  - អត្រារំលស់តម្លៃប្រចាំឆ្នាំ ៖ $r = 25\% = 0.25$
  - រយៈពេល ៖ $t = 3$ ឆ្នាំ
- **រូបមន្តរំលស់តម្លៃ (Exponential Decay) ៖**

$$V(t) = V_0(1-r)^t$$

- **គណនាតម្លៃក្រោយរយៈពេល ៣ ឆ្នាំ ៖**

$$V(3) = 250 \cdot (1-0.25)^3 = 250 \cdot (0.75)^3$$

ដោយ $(0.75)^3 = 0.421875$ គេបាន ៖

$$V(3) = 250 \times 0.421875 = 105.46875 \text{ ដុល្លារ} \approx \mathbf{105.47} \text{ ដុល្លារ}$$

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន ៖ បីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហ្វាក់នោះនឹងមានតម្លៃប្រហែល ៖

$$\boxed{V(3) \approx 105.47 \text{ ដុល្លារ}}$$

លំហាត់ទី ៩

បាក់តេរីមួយប្រភេទបំបែកខ្លួនដោយមានមេគុណអត្រាកំណើន $k = 0.872$ ដែល t គិតជាថ្ងៃ។ បើដើមដំបូងមានបាក់តេរីចំនួន 9 តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 738?

ដំណោះស្រាយ

- **ទិន្នន័យ ៖**
  - ចំនួនបាក់តេរីដើម ៖ $N_0 = 9$
  - មេគុណអត្រាកំណើន ៖ $k = 0.872$ ក្នុងមួយថ្ងៃ
  - ច្បាប់កំណើនបាក់តេរី ៖ $N(t) = N_0 e^{kt} = 9e^{0.872t}$
  - ចំនួនបាក់តេរីគោលដៅ ៖ $N(t) = 738$
- **ដោះស្រាយសមីការរក t ៖**

$$9e^{0.872t} = 738 \iff e^{0.872t} = \frac{738}{9} = 82$$

បំពាក់លោការីតនេពែរលើអង្គទាំងពីរ ៖

$$0.872t = \ln(82) \implies t = \frac{\ln(82)}{0.872}$$

ដោយ $\ln(82) \approx 4.406719$ គេបាន ៖

$$t \approx \frac{4.406719}{0.872} \approx 5.053577 \text{ ថ្ងៃ} \approx \mathbf{5} \text{ ថ្ងៃ}$$

សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន ៖ រយៈពេលប្រហែល **៥ ថ្ងៃ** ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 738 ៖

$$\boxed{t \approx 5.05 \text{ ថ្ងៃ} \approx 5 \text{ ថ្ងៃ}}$$

លំហាត់ទី ១០

នៅទីក្រុងមួយកាលពី 10 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 45 600 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 64 800 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះ។

ដំណោះស្រាយ

- **ទិន្នន័យ ៖**

– ចំនួនប្រជាជនកាលពី ១០ ឆ្នាំមុន $(t=0)$ ៖ $P_0 = 45\,600$ នាក់
– ចំនួនប្រជាជនបច្ចុប្បន្ន $(t=10$ ឆ្នាំ$)$ ៖ $P(10) = 64\,800$ នាក់

- រូបមន្តកំណើនប្រចាំឆ្នាំ ៖

$$P(t) = P_0(1+r)^t$$

- ដោះស្រាយសមីការរកអត្រា r ៖

$$45\,600(1+r)^{10} = 64\,800 \iff (1+r)^{10} = \frac{64\,800}{45\,600} = \frac{648}{456} = \frac{27}{19}$$

នាំឱ្យ ៖

$$1+r = \left(\frac{27}{19}\right)^{\frac{1}{10}} \approx (1.4210526)^{0.1} \approx 1.035783$$

$$r \approx 1.035783 - 1 = 0.035783 = \mathbf{3.58\%} \text{ ក្នុងមួយឆ្នាំ}$$

- ចំណាំ ៖ ប្រសិនបើសន្មតតាមម៉ូដែលកំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាប់ $P(t) = P_0 e^{kt}$ ៖

$$e^{10k} = \frac{27}{19} \implies 10k = \ln\left(\frac{27}{19}\right) \approx 0.351398 \implies k \approx 0.03514 = \mathbf{3.51\%} \text{ ក្នុងមួយឆ្នាំ}$$

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន ៖ អត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះគឺ ៖

$r \approx 3.58\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ (ម៉ូដែលប្រចាំឆ្នាំ) ឬ $k \approx 3.51\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ (ម៉ូដែលអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល)

លំហាត់អនុវត្តន៍ជំពូកទី ៤

លំហាត់ទី ១

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

ខ. $y = \log_2\left(\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$ ៖

លក្ខខណ្ឌអត្ថិភាពនៃរ៉ាឌីកាល់ខាងក្នុង ៖

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4 \end{cases} \implies x \geq 4$$

ពិនិត្យកន្សោមក្រោមរ៉ាឌីកាល់ធំ ៖

- $x^2-2\sqrt{x^2-1}=(x^2-1)-2\sqrt{x^2-1}+1=(\sqrt{x^2-1}-1)^2\geq 0,\forall x\geq 4$ ។
- $x-3+2\sqrt{x-4}=(x-4)+2\sqrt{x-4}+1=(\sqrt{x-4}+1)^2\geq 0,\forall x\geq 4$ ។

លក្ខខណ្ឌទាំងអស់ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x\geq 4$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=[4,+\infty)}$ ។

ខ. $y=\log_2\left(\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\right)$ ៖

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែកន្សោមក្នុងលោការីតវិជ្ជមានដាច់ខាត ៖

$$\frac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}>0$$

១. ពិនិត្យភាគបែង ៖ $2^x-1=0\iff 2^x=1\iff x=0$ ។

- បើ $x>0\implies 2^x-1>0$ ។
- បើ $x<0\implies 2^x-1<0$ ។

២. ពិនិត្យភាគយក ៖ តាង $g(x)=2^{1-x}-2x+1$ លើ $\mathbb{R}$ ។

$g'(x)=-(\ln 2)2^{1-x}-2<0,\forall x\implies g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$។

សង្កេតឃើញ $g(1)=2^0-2(1)+1=1-2+1=0$ នាំឱ្យ $x=1$ ជាឫសតែមួយគត់នៃ $g(x)=0$។

- ចំពោះ $x<1\implies g(x)>0$ ។
- ចំពោះ $x>1\implies g(x)<0$ ។

៣. តារាងសញ្ញានៃផលធៀប ៖

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
ភាគយក		$+$	⋮	$+$	0	$-$	
ភាគបែង		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
ផលធៀប		$-$	‖	$+$	0	$-$	

ផលធៀបវិជ្ជមានចំពោះ $x\in(0,1)$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(0,1)}$ ។

លំហាត់ទី ២

រកអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y=\dfrac{4x-3}{2x+5}$ ខ. $y=\dfrac{3x^2-7x+15}{x-1}$ គ. $y=\dfrac{2x-1}{x^2-7x+10}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\dfrac{4x-3}{2x+5}$ ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ភាគបែង $2x+5=0\iff x=-\dfrac{5}{2}$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^{\pm}} \dfrac{4x-3}{2x+5} = \pm\infty \implies \boxed{x=-\dfrac{5}{2}}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

- អាស៊ីមតូតដេក ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x-3}{2x+5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x}{2x} = 2 \implies \boxed{y=2}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេក។

ខ. $y = \dfrac{3x^2-7x+15}{x-1}$ ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ភាគបែង $x-1=0 \iff x=1$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{3x^2-7x+15}{x-1} = \pm\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ចែកពហុធាភាគយកនឹងភាគបែង ៖

$$3x^2-7x+15 = (x-1)(3x-4)+11 \implies y = 3x-4+\frac{11}{x-1}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [y-(3x-4)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{11}{x-1} = 0 \implies \boxed{y=3x-4}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

គ. $y = \dfrac{2x-1}{x^2-7x+10} = \dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)}$ ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ភាគបែងមានឫសពីរគឺ $x=2$ និង $x=5$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} y = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 5^{\pm}} y = \pm\infty \implies \boxed{x=2 \text{ និង } x=5}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ។

- អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដឺក្រេភាគយក (1) តូចជាងដឺក្រេភាគបែង (2) ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-7x+10} = 0 \implies \boxed{y=0 \text{ (អ័ក្ស } Ox)}$$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

លំហាត់ទី ៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ។

ខ. គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃ (C) ។

គ. គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $I(1,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។ សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ង. សិក្សាតាមក្រាហ្វិកនូវចំនួនឫសនៃសមីការ $x^2+(1-m)x+m-1=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **រកចំនួនពិត** a,b,c ៖

ធ្វើវិធីចែកពហុធា ៖ $x^2+x-1 = (x-1)(x+2)+1$ ៖

$$f(x) = x+2+\frac{1}{x-1} \implies \boxed{a=1,\quad b=2,\quad c=1}$$

ខ. **លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖**
ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ។

- $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ និង $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0 \implies \boxed{y=x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

គ. **ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖**

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$ ឬ $x=2$ ។

- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ ៖ $f(0)=1$ ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ ៖ $f(2)=2+2+1=5$ ។

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

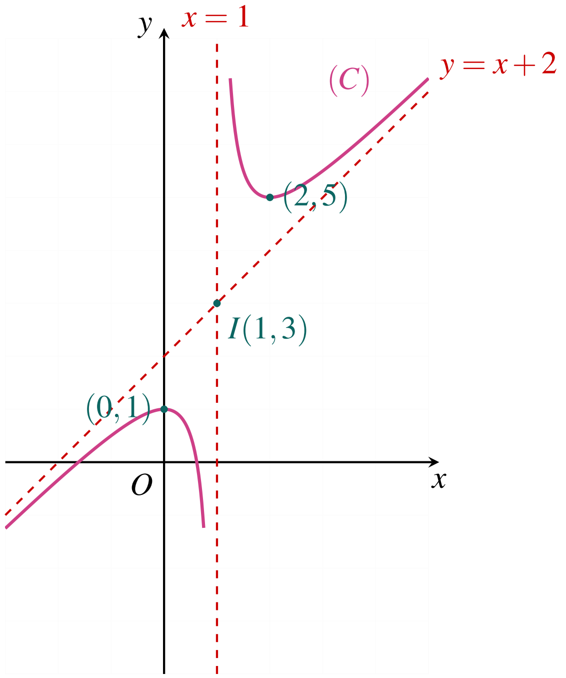
ឃ. **ស្រាយបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ $I(1,3)$ ៖**
ត្រូវស្រាយថា $f(2(1)-x)+f(x)=2(3) \iff f(2-x)+f(x)=6$ ៖

$$f(2-x)=(2-x)+2+\frac{1}{(2-x)-1}=4-x-\frac{1}{x-1}$$

$$f(2-x)+f(x)=\left(4-x-\frac{1}{x-1}\right)+\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)=6 \quad (\text{ពិត})$$

ដូចនេះ ចំណុច $\boxed{I(1,3)}$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

សង់ក្រាប (C) ៖



ង. **ពិភាក្សាឫសតាមក្រាហ្វិក ៖**

សមីការ $x^2+(1-m)x+m-1=0 \iff x^2+x-1-m(x-1)=0$ ។

ចំពោះ $x\neq 1$ ៖

$$\frac{x^2+x-1}{x-1}=m \iff f(x)=m$$

ចំនួនឫសនៃសមីការគឺចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាង (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ៖

- បើ $m<1$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) ត្រង់ ២ ចំណុច $\implies$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា។
- បើ $m=1$ ៖ បន្ទាត់ $y=1$ ប៉ះ (C) ត្រង់កំពូលអតិបរមា $\implies$ សមីការមានឫសឌុប $x=0$។
- បើ $1<m<5$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ មិនកាត់ (C) ឡើយ $\implies$ សមីការគ្មានឫស។
- បើ $m=5$ ៖ បន្ទាត់ $y=5$ ប៉ះ (C) ត្រង់កំពូលអប្បបរមា $\implies$ សមីការមានឫសឌុប $x=2$។
- បើ $m>5$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) ត្រង់ ២ ចំណុច $\implies$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

លំហាត់ទី ៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ. តាមក្រាប រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ៖

១. ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។

២. ទម្រង់កាណូនិច ៖ $2x^2+x+1=(x+1)(2x-1)+2 \implies f(x)=2x-1+\dfrac{2}{x+1}$ ។

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ $\boxed{x=-1}$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-1^{\pm}} f(x)=\pm\infty$ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\boxed{y=2x-1}$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x-1)]=0$ ។

៣. ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=2-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2[(x+1)^2-1]}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

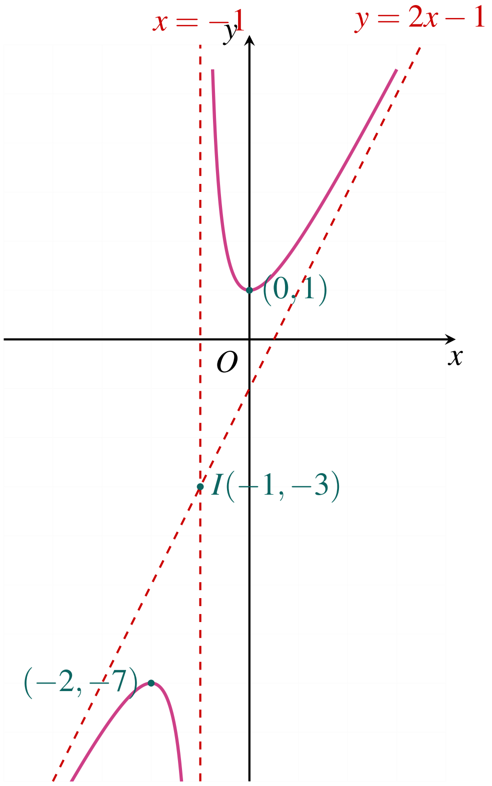
$f'(x)=0 \iff x=-2$ ឬ $x=0$ ។

- អតិបរមាធៀប ៖ $f(-2)=2(-2)-1+\dfrac{2}{-1}=-5-2=-7$ ត្រង់ $x=-2$។
- អប្បបរមាធៀប ៖ $f(0)=-1+2=1$ ត្រង់ $x=0$។

៤. តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

៥. សង់ក្រាប ៖ ផ្ចិតឆ្លុះ $I(-1,-3)$ ជាចំណុចប្រសព្វអាស៊ីមតូត។



មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ខ. រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃ E ៖

តាង $t = |\cos x|$ ។ ដោយ $0 \leq |\cos x| \leq 1 \implies t \in [0,1]$ ។

កន្សោម $E = \dfrac{2t^2+t+1}{t+1} = f(t)$ ចំពោះ $t \in [0,1]$ ។

តាមតារាងអថេរភាព លើចន្លោះ $[0,1]$ អនុគមន៍ $f(t)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ៖

- អប្បបរមា ៖ $E_{\min} = f(0) = \mathbf{1}$ (កើតឡើងនៅពេល $|\cos x| = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$)។
- អតិបរមា ៖ $E_{\max} = f(1) = \dfrac{2(1)^2+1+1}{1+1} = \dfrac{4}{2} = \mathbf{2}$ (កើតឡើងនៅពេល $|\cos x| = 1 \iff x = k\pi$)។

ដូចនេះ $\boxed{E_{\min} = 1}$ និង $\boxed{E_{\max} = 2}$ ។

លំហាត់ទី ៥

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ចំពោះ $x \neq -1$ ដោយ $f(x) = \dfrac{9x}{(x+1)^2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ។

ខ. រកតម្លៃបរមាធៀប រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថា (C) មានចំណុចរបត់មួយ រួចរកកូអរដោនេចំណុចរបត់នោះ។

ឃ. គណនា $f(-4), f(-3), f(-2), f(3)$ និង $f(4)$ ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{9x}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{9x}{x^2} = 0 \implies \boxed{y = 0 \text{ (អ័ក្ស } Ox)}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។
- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{9x}{(x+1)^2} = \dfrac{-9}{0^+} = -\infty \implies \boxed{x = -1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

ខ. បរមាធៀប និងតារាងអថេរភាព ៖

$$f'(x) = \frac{9(x+1)^2 - 9x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{9(x+1)[x+1-2x]}{(x+1)^4} = \frac{9(1-x)}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$ ។

តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ ៖ $f(1) = \dfrac{9(1)}{(1+1)^2} = \dfrac{9}{4} = 2.25$ ។

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0

គ. ចំណុចរបត់ ៖

គណនាដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ ៖

$$f''(x)=9\cdot\frac{-(x+1)^3-(1-x)\cdot3(x+1)^2}{(x+1)^6}=9\cdot\frac{-(x+1)-3(1-x)}{(x+1)^4}=\frac{9(2x-4)}{(x+1)^4}=\frac{18(x-2)}{(x+1)^4}$$

$f''(x)=0 \iff x=2$ ហើយ $f''(x)$ ប្ដូរសញ្ញាឆ្លងកាត់ $x=2$ (ពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមាន)។

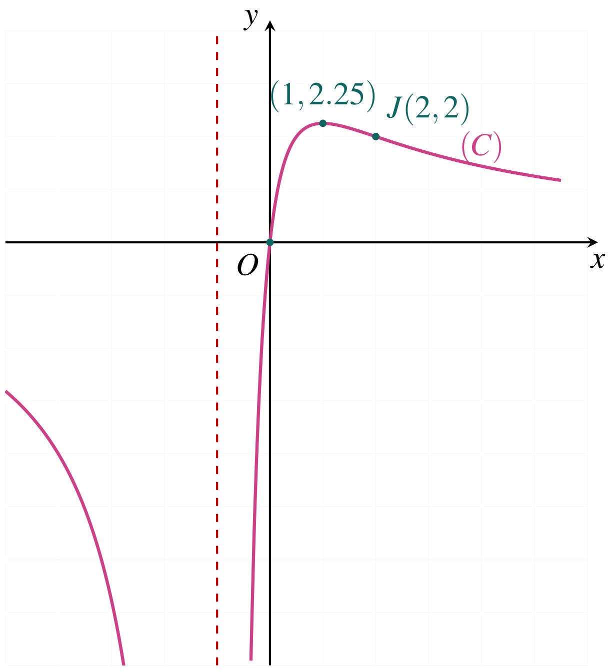
ទាញបាន $x=2$ ជាអាប់ស៊ីសចំណុចរបត់ ៖ $f(2)=\frac{9(2)}{(2+1)^2}=\frac{18}{9}=2$ ។

ដូចនេះ ចំណុចរបត់នៃក្រាបគឺ $\boxed{J(2,2)}$ ។

ឃ. គណនាតម្លៃពិសេស ៖

- $f(-4)=\frac{-36}{(-3)^2}=\mathbf{-4}$
- $f(-3)=\frac{-27}{(-2)^2}=-\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{4}}=\mathbf{-6.75}$
- $f(-2)=\frac{-18}{(-1)^2}=\mathbf{-18}$
- $f(3)=\frac{27}{4^2}=\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{16}}\approx\mathbf{1.69}$
- $f(4)=\frac{36}{5^2}=\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{25}}=\mathbf{1.44}$

ង. សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=4$ ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូត បន្ទាត់ប៉ះ (T) និងខ្សែកោង (C) ។

ង. ដោយប្រើខ្សែកោង (C) កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(m-1)x^2-4(m-1)x+3m=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

ភាគបែង $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0 \iff x=1$ ឬ $x=3$ ។

ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ ។

- $\lim_{x\to1} f(x)=\infty$ និង $\lim_{x\to3} f(x)=\infty \implies$ $\boxed{x=1 \text{ និង } x=3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ។
- $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1 \implies \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

សង្កេត ៖ $f(x)=1-\dfrac{3}{x^2-4x+3}$ ។

$$f'(x)=\frac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=2$ ។ តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ ៖ $f(2)=\dfrac{4-8}{4-8+3}=\dfrac{-4}{-1}=4$ ។

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

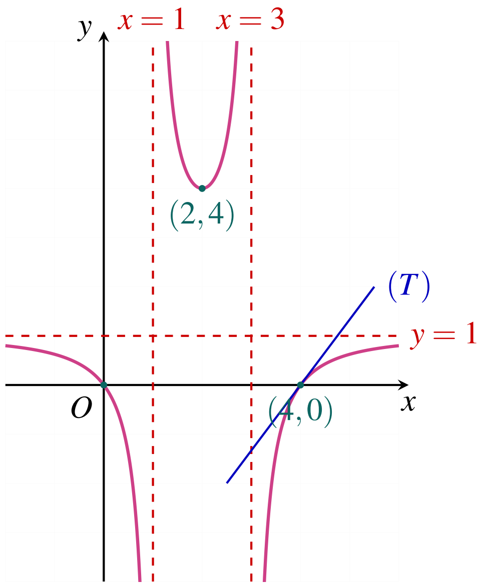
គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x=4$ ៖

$f(4)=\dfrac{16-16}{16-16+3}=0$ ។

$f'(4)=\dfrac{6(4-2)}{(16-16+3)^2}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $(T)y-0=\dfrac{4}{3}(x-4)\iff \boxed{y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{16}{3}}$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ៖ បន្ទាត់ឆ្លុះ $x=2$ ។



ង. កំណត់ m តាមក្រាហ្វិក ៖

សមីការ $(m-1)x^2-4(m-1)x+3m=0 \iff m(x^2-4x+3)=x^2-4x$ ។

ចំពោះ $x\neq 1,3$ ៖ $\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=m \iff f(x)=m$ ។

តាមក្រាប (C) សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាកាលណាខ្សែបន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) ត្រង់ ២ ចំណុច ៖

$\boxed{m<1 \quad \text{ឬ} \quad m>4}$

(ត្រង់ $m=4$ មានឫសឌុប $x=2$; លើ $[1,4)$ គ្មានឫស)។

លំហាត់ទី ៧

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y=\dfrac{e^x}{x-1}$ ខ. $y=e^{2x}-e^x$ គ. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\dfrac{e^x}{x-1}$ $(x\neq 1)$ ៖

$$y'=\frac{(e^x)'(x-1)-e^x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1)-e^x(1)}{(x-1)^2}=\boxed{\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}}$$

ខ. $y=e^{2x}-e^x$ ៖

$$y'=(2x)'e^{2x}-e^x=2e^{2x}-e^x=\boxed{e^x(2e^x-1)}$$

គ. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\ (x\neq 0)$ ៖

$$y'=\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{(e^x-1)^2}=\boxed{\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}}$$

លំហាត់ទី ៨

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y=x-1-\ln x$ ខ. $y=\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$ គ. $y=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=x-1-\ln x\ (x>0)$ ៖

$$y'=1-\frac{1}{x}=\boxed{\frac{x-1}{x}}$$

ខ. $y=\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)=\ln(x-3)-\ln(x+2)\ (x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty))$ ៖

$$y'=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\boxed{\frac{5}{(x-3)(x+2)}}$$

គ. $y=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ ៖

$$y'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}-x=2x\ln x+x-x=\boxed{2x\ln x}$$

លំហាត់ទី ៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^x-x-1$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ទាញថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃបរមាធៀបនោះ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d) y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច P នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ង. សង់ (C) និង (d) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P (គេឱ្យ $\ln 2 = 0.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖

- $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x - 1) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty(1-0-0) = +\infty$ ។
- $\lim_{x\to-\infty}(e^x - x - 1) = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

$f'(x) = e^x - 1$ ។

$f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$ ។

- បើ $x < 0 \implies e^x < 1 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
- បើ $x > 0 \implies e^x > 1 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ ៖ $f(0) = e^0 - 0 - 1 = \mathbf{0}$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

គ. អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ៖

ពិនិត្យផលដក ៖

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-x-1)] = \lim_{x\to-\infty}[e^x - x - 1 + x + 1] = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(d)y = -x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច P ៖

បន្ទាត់ $y = x$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m = 1$ ។

បន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ $P(x_0, y_0)$ ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$ លុះត្រាតែ ៖

$$f'(x_0) = 1 \iff e^{x_0} - 1 = 1 \iff e^{x_0} = 2 \iff x_0 = \ln 2 \approx 0.7$$

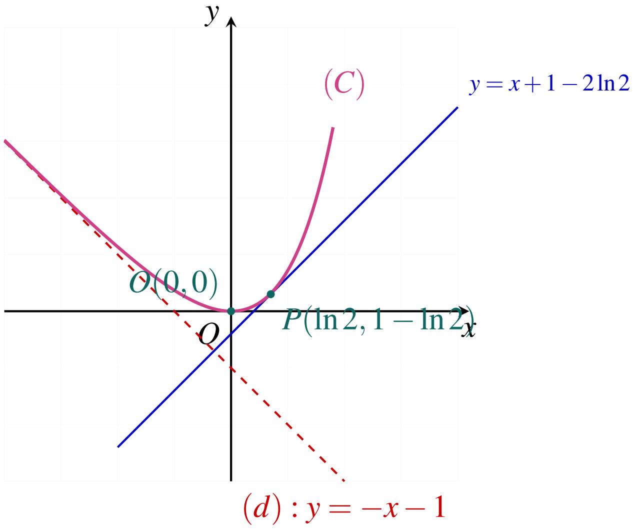
អរដោនេនៃចំណុច P គឺ ៖

$$y_0 = f(\ln 2) = e^{\ln 2} - \ln 2 - 1 = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2 \approx 1 - 0.7 = 0.3$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ ៖ $\boxed{P(\ln 2, 1-\ln 2) \approx P(0.7, 0.3)}$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P គឺ ៖ $y - (1-\ln 2) = 1(x - \ln 2) \iff \boxed{y = x + 1 - 2\ln 2 \approx x - 0.4}$ ។

ង. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ (d) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P ៖



លំហាត់ទី ១០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)$ អាចសរសេរជា $f(x) = \frac{xe^x - e^x + 2}{e^x}$ ទាញរកលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x \to -\infty$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ (T) និងបន្ទាត់ (d) ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ច. តាមក្រាហ្វិក កំណត់ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x) = 2$ រួចរកឫសទាំងពីរនោះដោយចំនួនគត់ពីរតគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **លីមីត និងអាស៊ីមតូតខាង $+\infty$ ៖**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 1 + 2e^{-x}\right) = +\infty - 1 + 0 = +\infty$ ។

ពិនិត្យផលដក ៖

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(d) y = x - 1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។

ខ. **ទម្រង់ប្រភាគ និងលីមីតខាង $-\infty$ ៖**

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x} = \frac{(x-1)e^x + 2}{e^x} = \boxed{\frac{xe^x - e^x + 2}{e^x}}$$

កាលណា $x \to -\infty$ ៖ $xe^x \to 0$ និង $e^x \to 0$ នាំឱ្យភាគយកខិតជិត $2 > 0$ ហើយភាគបែង $e^x \to 0^+$ ៖

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty}$$

គ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

$f'(x) = 1 - 2e^{-x} = \dfrac{e^x - 2}{e^x}$ ។

$f'(x) = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2 \approx 0.7$ ។

- បើ $x < \ln 2 \implies e^x < 2 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
- បើ $x > \ln 2 \implies e^x > 2 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = \ln 2$ គឺ ៖

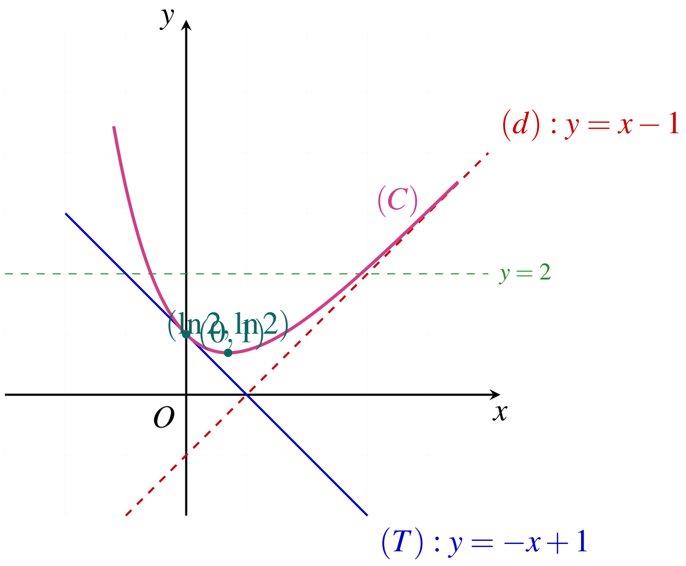
$$f(\ln 2) = \ln 2 - 1 + \frac{2}{e^{\ln 2}} = \ln 2 - 1 + \frac{2}{2} = \ln \mathbf{2} \approx \mathbf{0.7}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

ឃ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ $x = 0$ ៖

- អរដោនេចំណុចប៉ះ ៖ $y_0 = f(0) = 0 - 1 + \dfrac{2}{e^0} = -1 + 2 = 1 \implies A(0,1)$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(0) = 1 - 2e^0 = 1 - 2 = -1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖ $y - 1 = -1(x - 0) \iff \boxed{(T): y = -x + 1}$ ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ (T) និងបន្ទាត់ (d) ៖



មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ច. **កំណត់ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x)=2$ តាមក្រាហ្វិក ៖**

ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x)=2$ គឺជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=2$ ។

- ដោយសារតម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ $f(\ln 2)=\ln 2\approx 0.7<2$ ហើយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $y=2$ កាត់ (C) ត្រង់ **២ ចំណុចផ្សេងគ្នា** នាំឱ្យសមីការមាន **ឫសពីរផ្សេងគ្នា** $x_1<\ln 2<x_2$ ។
- ចំពោះឫសទីមួយ x_1 ៖
  $f(0)=1<2$ និង $f(-1)=-1-1+2e=2e-2\approx 3.44>2$ ។
  ដោយ $f(0)<2<f(-1)$ នាំឱ្យឫសទីមួយស្ថិតនៅចន្លោះ ៖

  $-1<x_1<0$ (ចំនួនគត់ពីរតគ្នាគឺ -1 និង 0)

- ចំពោះឫសទីពីរ x_2 ៖
  $f(2)=2-1+2e^{-2}=1+\frac{2}{e^2}\approx 1+0.27=1.27<2$ ។
  $f(3)=3-1+2e^{-3}=2+\frac{2}{e^3}>2$ ។
  ដោយ $f(2)<2<f(3)$ នាំឱ្យឫសទីពីរស្ថិតនៅចន្លោះ ៖

  $2<x_2<3$ (ចំនួនគត់ពីរតគ្នាគឺ 2 និង 3)

លំហាត់ទី ១១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=ax+b+\frac{\ln x}{x}$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាង $f(x)$ កាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ A ស្របនឹងបន្ទាត់ $y=2x$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. លក្ខខណ្ឌកាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ ៖

ក្រាប (C) កាត់តាម $A(1,0)$ $\iff$ $f(1)=0$ ៖

$$f(1)=a(1)+b+\frac{\ln 1}{1}=a+b+0=a+b=0 \iff \mathbf{b}=-\mathbf{a} \quad (1)$$

២. លក្ខខណ្ឌបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ $y=2x$ ៖

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $y=2x$ គឺ $k=2$ ។
បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A(1,0)$ ស្របនឹងបន្ទាត់នេះ លុះត្រាតែ $f'(1)=2$ ។
គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=a+\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=a+\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ជំនួស $x=1$ ៖

$$f'(1)=a+\frac{1-\ln 1}{1^2}=a+1$$

តាមលក្ខខណ្ឌ ៖

$$a+1=2 \iff \mathbf{a=1}$$

ជំនួស $a=1$ ចូលក្នុង (1) នាំឱ្យ ៖

$$b=-1$$

ដូចនេះ តម្លៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{a=1,\quad b=-1}$ **ហើយអនុគមន៍គឺ** $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$ ។

លំហាត់ទី ១២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ រួចគណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថា $(\Delta) y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) រួចកំណត់ទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹង (Δ) ។

ឃ. បង្ហាញថា $A\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។

ង. ឱ្យសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង (C) ត្រង់ A ។

ច. សង់បន្ទាត់ (Δ) ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់ និងលីមីត ៖**

លក្ខខណ្ឌ ៖ $\dfrac{x+1}{x}\neq 0 \iff x\neq -1$ និង $x\neq 0$ ៖

$$\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)}$$

គណនាលីមីត ៖

- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-1+\ln 0^+=-\infty \implies \boxed{x=-1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0+\ln(+\infty)=+\infty \implies \boxed{x=0}$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|=\ln 1=0 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ខ. **ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖**

$f(x)=x+\ln|x+1|-\ln|x|$ ៖

$$f'(x)=1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=1-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0 \iff x^2+x-1=0 \iff x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1.62,\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.62$ ។

x	$-\infty$		x_1		-1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	→	$f(x_2)$	→	$+\infty$

គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|=0 \implies \boxed{y=x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-x=\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ ៖

- លើ $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)\dfrac{x+1}{x}>1 \implies \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|>0 \implies (C)$ នៅខាងលើ (Δ)។
- លើ $(-1,0)\ -1<x<0 \implies \left|\dfrac{x+1}{x}\right|=\dfrac{x+1}{-x}$ ។ ត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2}$ នោះ $|x+1|/|x|=1 \implies f(x)=x$ (កាត់គ្នា)។

ឃ. បង្ហាញថា $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ៖

ផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តផ្ចិតឆ្លុះ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ដោយ $a=-1/2, b=-1/2 \implies 2a=-1, 2b=-1$ ៖

$$f(-1-x)+f(x)=(-1-x)+\ln\left|\frac{-x}{-1-x}\right|+x+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}\right)=-1+0=-1$$

ដូចនេះ $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ពិតប្រាកដមែន ។

ង. សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង (C) ត្រង់ A ៖

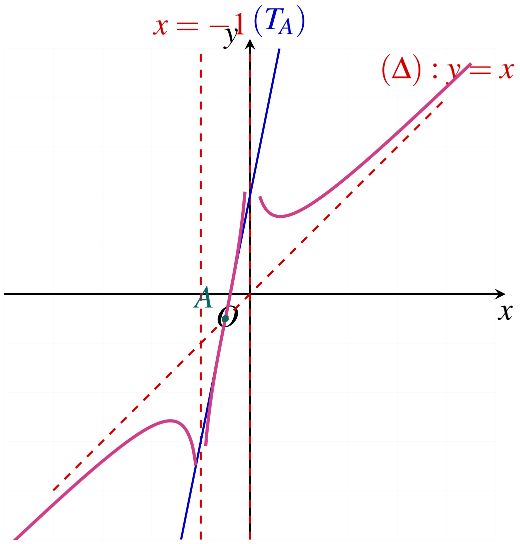
មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2}$ គឺ ៖

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}}=5$$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ គឺ ៖

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=5\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\iff y+\frac{1}{2}=5x+\frac{5}{2}\iff \boxed{(T_A):y=5x+2}$$

ច. សង់បន្ទាត់ (Δ) ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ៖



លំហាត់ទី ១៣

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1+\frac{-1+\ln x}{x}$ ហើយ (C) ជាក្រាបរបស់វា ។

ក. អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់ដោយ $g(x)=2+x^2-\ln x$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ (មិនចាំបាច់គណនាលីមីត) រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ទាញឱ្យបានថា (C) មានអាស៊ីមតូតឈរមួយដែលគេនឹងកំណត់សមីការ ។

គ. សិក្សាទំនាក់ទំនង $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta)y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ង. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនៃ (C) ជាមួយ (Δ) រួចបញ្ជាក់ឱ្យបានច្បាស់ទីតាំងនៃ (C) ធៀបទៅនឹង (Δ) ។

ច. សង់ខ្សែកោង (C) និងសមីការអាស៊ីមតូតរបស់វាក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **សិក្សាអនុគមន៍ជំនួយ $g(x)$ ៖**

$g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$ ។

$g'(x)=0 \iff 2x^2-1=0 \iff x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ព្រោះ $x>0$) ។

តម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖ $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2>0$ ។

ដោយតម្លៃអប្បបរមាធៀបវិជ្ជមានដាច់ខាត នាំឱ្យ ៖

$$\boxed{g(x)>0,\quad \forall x\in(0,+\infty)}$$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$g(x)$	‖ ↘	$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$	↗

ខ. លីមីតនៃ $f(x)$ និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ ៖

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0+1-(+\infty)+(-\infty) = -\infty$ ។
  នាំឱ្យ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{x=0}$ (អ័ក្សអរដោនេ $y'Oy$) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty+1-0+0 = \boxed{+\infty}$ ។

គ. ទំនាក់ទំនង $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ និងតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ៖

$$f'(x) = 1+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-(-1+\ln x)(1)}{x^2} = 1+\frac{1+1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+2-\ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ដោយ $g(x)>0$ និង $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0, \forall x>0$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta) y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ៖
ពិនិត្យផលដក ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right) = 0-0 = 0$$

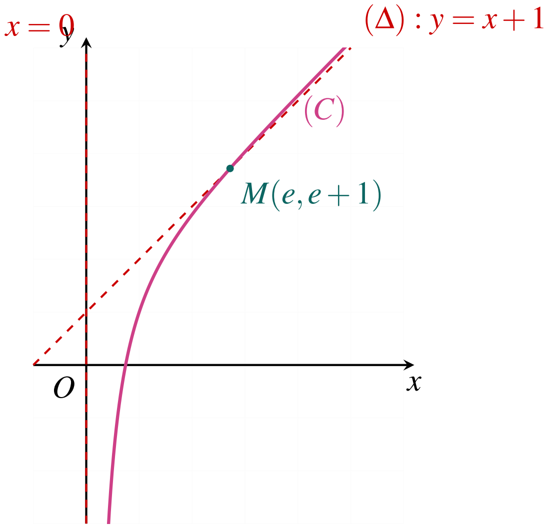
ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(\Delta) y=x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។

ង. ចំណុចប្រសព្វ និងទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹង (Δ) ៖

- ចំណុចប្រសព្វ ៖ $f(x)-(x+1)=0 \iff \frac{\ln x-1}{x}=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$ ។
  អរដោនេ ៖ $y=e+1$ ។ ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{M(e,e+1)}$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ ដោយ $x>0$ សញ្ញានៃផលដកអាស្រ័យលើ $\ln x-1$ ៖
  - បើ $0<x<e \implies \ln x-1<0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (Δ) ។
  - បើ $x=e \implies (C)$ កាត់បន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច $M(e,e+1)$ ។

– បើ $x > e \Longrightarrow \ln x - 1 > 0 \Longrightarrow (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**បន្ទាត់ (Δ) ។

ប. សង់ខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូត ៖



លំហាត់ទី ១៤

កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) តាងដោយ $y = x\ln x - 1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1, -1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x) = x\ln x - 1$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់កូអរដោនេចំណុចប៉ះ ៖ $f(1) = 1\ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$ (ពិត ចំណុច $A(1, -1) \in (H)$)។

២. គណនាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$f'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' - (1)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

ជំនួស $x_0 = 1$ ៖

$$f'(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

៣. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$(L) y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \iff y - (-1) = 1(x - 1) \iff y + 1 = x - 1$$

$$\boxed{(L) y = x - 2}$$

លំហាត់ទី ១៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ f រួចបង្ហាញថា f មានអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (d) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (d) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ និងលីមីត ៖

ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=(0,+\infty)}$ ។

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty \implies \boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy)}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0 \implies \boxed{y=0 \text{ (អ័ក្ស } Ox)}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2-(\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0 \iff 1-2\ln x=0 \iff \ln x=\dfrac{1}{2} \iff x=e^{1/2}=\sqrt{e}\approx 1.65$ ។

តម្លៃអតិបរមាធៀប ៖ $f(\sqrt{e})=\dfrac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2}=\dfrac{1/2}{e}=\dfrac{1}{2e}\approx 0.184$ ។

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

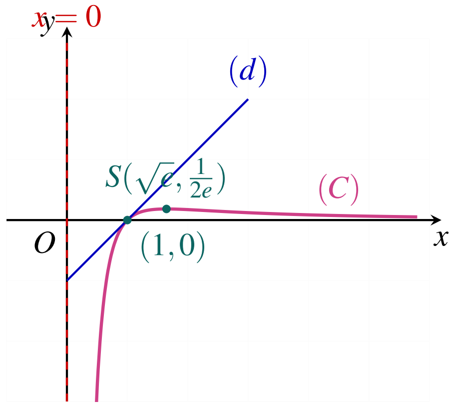
គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x=1$ ៖

$f(1)=\dfrac{\ln 1}{1}=0$ ។

$f'(1)=\dfrac{1-2\ln 1}{1^3}=1$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $(d) y-0=1(x-1) \iff \boxed{y=x-1}$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ១៦

f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f(x)$ មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកកូអរដោនេចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ង. គណនា $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ រួចសង់បន្ទាត់ (T) និងក្រាប (C) ។ ដោយប្រើក្រាប (C) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $\dfrac{1+2\ln x}{x^2} = m$ មានឫស (គេឱ្យ $\ln 2 = 0.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+2\ln x}{x^2} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty \implies \boxed{x = 0 \text{ (អ័ក្ស } Oy)}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\ln x}{x^2}\right) = 0+0 = 0 \implies \boxed{y = 0 \text{ (អ័ក្ស } Ox)}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

ខ. ដេរីវេ និងអតិបរមា ៖

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)x^2 - (1+2\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{2x - 2x - 4x\ln x}{x^4} = \boxed{\frac{-4\ln x}{x^3}}$$

$f'(x) = 0 \iff -4\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$ ។

- បើ $0 < x < 1 \implies \ln x < 0 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន ។
- បើ $x > 1 \implies \ln x > 0 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ ៖ $f(1) = \dfrac{1+2\ln 1}{1^2} = \boxed{1}$ ។

គ. តារាងអថេរភាព និងចំណុចរបត់ ៖

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

គណនាដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ ៖

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{4}{x}\right)x^3 - (-4\ln x)(3x^2)}{x^6} = \frac{-4x^2 + 12x^2\ln x}{x^6} = \frac{4(3\ln x - 1)}{x^4}$$

$f''(x) = 0 \iff 3\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{3} \iff x = e^{1/3} = \sqrt[3]{e} \approx 1.40$ ។

$f(\sqrt[3]{e}) = \dfrac{1+2(1/3)}{e^{2/3}} = \dfrac{5/3}{e^{2/3}} = \dfrac{5}{3\sqrt[3]{e^2}} \approx 0.89$ ។

ដូចនេះ ចំណុចរបត់គឺ $\boxed{J\left(\sqrt[3]{e}, \dfrac{5}{3\sqrt[3]{e^2}}\right) \approx J(1.40, 0.89)}$ ។

ឃ. សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖

រកចំណុចប្រសព្វរវាង (C) នឹងអ័ក្ស Ox ៖

$$f(x) = 0 \iff 1 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x_0 = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61 \implies M\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ ៖

$$f'(x_0) = \frac{-4\ln(e^{-1/2})}{(e^{-1/2})^3} = \frac{-4\left(-\frac{1}{2}\right)}{e^{-3/2}} = 2e^{3/2} = 2e\sqrt{e} \approx 8.91$$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ ៖

$$y - 0 = 2e\sqrt{e}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \iff \boxed{(T): y = 2e\sqrt{e}x - 2e \approx 8.91x - 5.4}$$

ង. គណនាតម្លៃ សង់ក្រាប និងពិភាក្សាឫសតាម m ៖

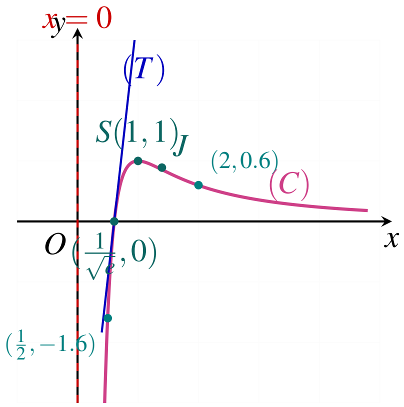
- គណនា $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ ដោយយក $\ln 2 = 0.7$ ៖

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - 2\ln 2}{\frac{1}{4}} = 4(1 - 2(0.7)) = 4(-0.4) = \boxed{-1.6}$$

$$f(2) = \frac{1 + 2\ln 2}{2^2} = \frac{1 + 2(0.7)}{4} = \frac{2.4}{4} = \boxed{0.6}$$

- កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $\frac{1+2\ln x}{x^2}=m$ មានឫស ៖
  ចំនួនឫសនៃសមីការគឺជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ។
  តាមតារាងអថេរភាព តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតនៃ $f(x)$ លើ $(0,+\infty)$ គឺ $f(1)=1$ ហើយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ។
  ដូច្នេះ សំណុំតម្លៃនៃអនុគមន៍គឺ $f((0,+\infty))=(-\infty,1]$ ។
  ដូចនេះ សមីការមានឫសលុះត្រាតែ ៖

$$\boxed{m\leq 1}$$



លំហាត់ទី ១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញាដោយដឹងថា $x(x-1)>0$ ។ គូសតារាងអថេរភាព។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta) y=-\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) និងសិក្សាទីតាំងធៀប។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់ និងលីមីត ៖**

លក្ខខណ្ឌ ៖ $\frac{x-1}{x}>0 \iff \boxed{D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)}$ ។

- $\lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln(+\infty)=+\infty \implies \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln(0^+)=-\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln(x-1)-\ln x$ ចំពោះ $x>1$ (ឬ $\ln(1-x)-\ln(-x)$ ចំពោះ $x<0$) ៖

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)}=\frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}=\frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$$

$f'(x)=0 \iff x=-1$ ឬ $x=2$ ។

- លើ $(-\infty,-1)f'(x)<0 \implies f$ ចុះ។
- លើ $(-1,0)f'(x)>0 \implies f$ កើន (អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1 f(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2$)។
- លើ $(1,2)f'(x)>0 \implies f$ កើន (អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2 f(2)=-1-\ln 2$)។
- លើ $(2,+\infty)f'(x)<0 \implies f$ ចុះ។

x	$-\infty$		-1		0	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

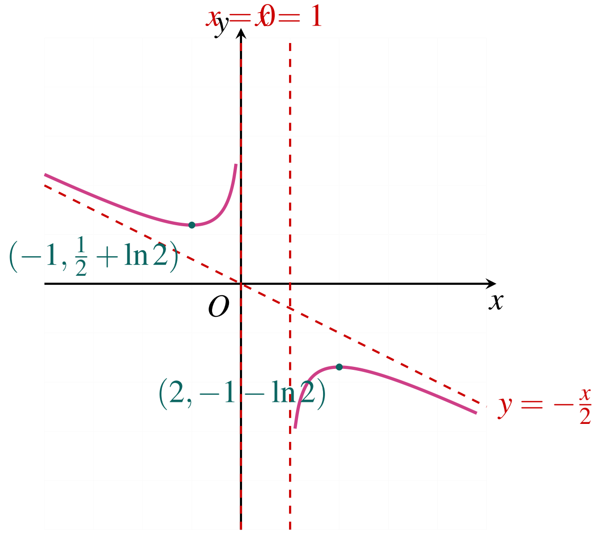
គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=0 \implies \boxed{y=-\frac{x}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ទីតាំងធៀប ៖

- $x\in(-\infty,0) \implies 1-\frac{1}{x}>1 \implies \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)>0 \implies (C)$ នៅខាងលើ (Δ)។
- $x\in(1,+\infty) \implies 1-\frac{1}{x}<1 \implies \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)<0 \implies (C)$ នៅខាងក្រោម (Δ)។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ៖ ផ្ចិតឆ្លុះ $I(1/2,-1/4)$។



លំហាត់ទី ១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x+1}{x}$ កំណត់ចំពោះ $x>0$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x)>0, \forall x>0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d) y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ និងសិក្សាទីតាំងធៀប។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

សរសេរ $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}$ លើ $(0,+\infty)$ ។

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{\ln x+1}{x}\right)=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty \implies \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty+0+0=+\infty$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

$$f'(x)=1+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x(1)}{x^2}-\frac{1}{x^2}=1+\frac{1-\ln x-1}{x^2}=1-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2-\ln x}{x^2}$$

ពិនិត្យភាគយក $h(x)=x^2-\ln x$ លើ $(0,+\infty)$ ៖

$h'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}=0 \iff x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ។

តម្លៃអប្បបរមានៃ $h(x)$ គឺ ៖ $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1+\ln 2}{2}>0$ ។

ដូចនេះ $h(x)>0, \forall x>0 \implies f'(x)>0, \forall x>0$ ។

អនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\quad +$
$f(x)$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$

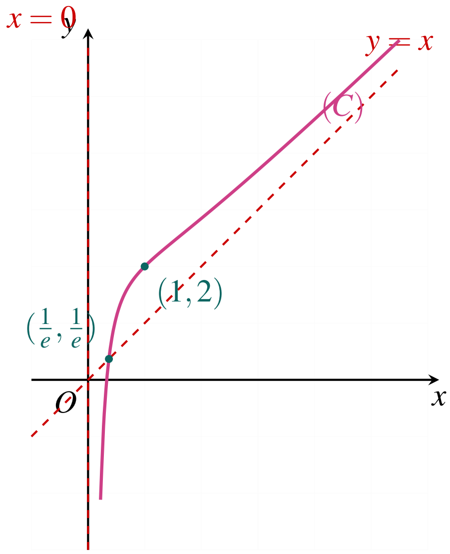
គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x+1}{x}=0+0=0 \implies \boxed{(d) y=x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-x=\dfrac{\ln x+1}{x}$ ៖

- $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \implies \ln x + 1 < 0 \implies (C)$ នៅខាងក្រោម (d)។
- $x = \frac{1}{e} \implies (C)$ កាត់ (d) ត្រង់ចំណុច $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$។
- $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \implies \ln x + 1 > 0 \implies (C)$ នៅខាងលើ (d)។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ១៩

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = 1 - \frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ រកសមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e \approx 2.7, \frac{2}{e} \approx 0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃ k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឱ្យសមីការ $1 - \frac{2\ln x}{x} = k$ មានឫស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អ័ក្ស (Ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1, x = e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = (0, +\infty)$ ។

- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right) = 1-2\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)$$

ដោយកាលណា $x\to 0^+$ គេបាន $\frac{1}{x}\to+\infty$ និង $\ln x\to-\infty \Longrightarrow \frac{\ln x}{x}\to-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1-2(-\infty) = +\infty \Longrightarrow \boxed{x=0 \quad (\text{អ័ក្ស } Oy) \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$$

- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right) = 1-0 = \mathbf{1} \Longrightarrow \boxed{y=1 \quad \text{ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$$

ខ. គណនាដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- អនុវត្តរូបមន្ត $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ ៖

$$f'(x) = 0-2\cdot\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)(x)'}{x^2} = -2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2} = \frac{2(\ln x-1)}{x^2}$$

- ដោយសារ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះសញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើកន្សោម $\ln x-1$ ៖

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \ln x-1=0 \Longleftrightarrow \ln x=1 \Longleftrightarrow x=e$$

  - បើ $0<x<e$ នោះ $\ln x<1 \Longrightarrow f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះដាច់ខាត) ។
  - បើ $x>e$ នោះ $\ln x>1 \Longrightarrow f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើនដាច់ខាត) ។

- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ ៖

$$f(e) = 1-\frac{2\ln e}{e} = 1-\frac{2}{e} \approx 1-0.74 = \mathbf{0.26}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1-\frac{2}{e}$	↗	1

គ. រកកូអរដោនេចំណុច M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

- ចំណុចប្រសព្វ M រវាង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក $y=1$ ៖

$$f(x)=1 \Longleftrightarrow 1-\frac{2\ln x}{x}=1 \Longleftrightarrow \frac{2\ln x}{x}=0 \Longleftrightarrow \ln x=0 \Longleftrightarrow x=1$$

ដូច្នេះកូអរដោនេចំណុច M គឺ $\boxed{M(1,1)}$ ។

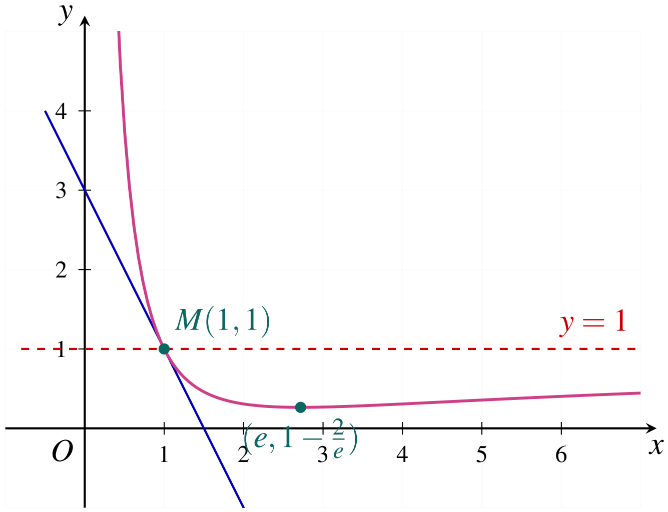
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M(1,1)$ គឺ ៖

$$f'(1)=\frac{2(\ln 1-1)}{1^2}=\frac{2(0-1)}{1}=-2$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ចំណុច $M(1,1)$ គឺ ៖

$$y-y_M=f'(1)(x-x_M)\iff y-1=-2(x-1)\iff \boxed{y=-2x+3}$$

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ៖



ង. ពិភាក្សាចំនួនឫស និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

- **ពិភាក្សាចំនួនឫសនៃសមីការ $1-\frac{2\ln x}{x}=k$ តាមតម្លៃ k ៖**

ចំនួនឫសនៃសមីការជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=k$ ៖

– បើ $k<1-\frac{2}{e}$ ៖ បន្ទាត់ $y=k$ មិនកាត់ (C) ទេ $\Longrightarrow$ សមីការ**គ្មានឫស** ។

– បើ $k=1-\frac{2}{e}$ ៖ បន្ទាត់ $y=k$ ប៉ះ (C) ត្រង់ចំណុចអប្បបរមា $\Longrightarrow$ សមីការមាន**ឫសឌុប** $x=e$ ។

– បើ $1-\frac{2}{e}<k<1$ ៖ បន្ទាត់ $y=k$ កាត់ (C) ត្រង់ ២ ចំណុច $\Longrightarrow$ សមីការមាន**ឫសពីរផ្សេងគ្នា** ។

– បើ $k\geq 1$ ៖ បន្ទាត់ $y=k$ កាត់ (C) ត្រង់ ១ ចំណុចគត់ $\Longrightarrow$ សមីការមាន**ឫសតែមួយគត់** ។

- **គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ ៖**

ចំពោះ $x\in[1,e]$ គេមាន $\frac{2\ln x}{x}\geq 0\implies f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}\leq 1$ ហើយ $f(x)\geq 1-\frac{2}{e}>0$ (ក្រាបនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស) ៖

$$S=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right)dx=\left[x-(\ln x)^2\right]_1^e$$

ព្រោះ $\left((\ln x)^2\right)'=2\ln x\cdot(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$ ។

$$S=\left(e-(\ln e)^2\right)-\left(1-(\ln 1)^2\right)=(e-1)-(1-0)=\mathbf{e-2}$$

ជំនួស $e\approx 2.718$ គេបាន $\boxed{S=e-2\approx 0.72 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ២០

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \dfrac{2}{e}\approx 0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃ k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឱ្យសមីការ $1+2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក និងបន្ទាត់ $x=1, x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=(0,+\infty)$ ។
- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty \implies \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ។

  ដូច្នេះ $x=0$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ។

  ដូច្នេះ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

- សញ្ញា ៖ $f'(x)=0 \iff 1-\ln x=0 \iff x=e$ ។
  - លើចន្លោះ $(0,e)$ ៖ $1-\ln x>0 \implies f'(x)>0$ (កើន) ។
  - លើចន្លោះ $(e,+\infty)$ ៖ $1-\ln x<0 \implies f'(x)<0$ (ចុះ) ។
- អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ $f(e)=1+\dfrac{2}{e}\approx 1+0.74=\mathbf{1.74}$ ។

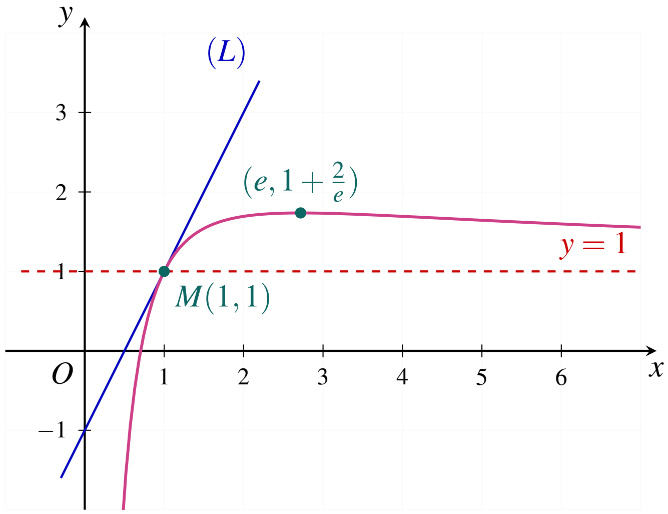
x	0			e		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$		$1+\dfrac{2}{e}$	$\searrow$	1

គ. ចំណុច M និងបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

- ប្រសព្វនឹង $y=1$ ៖ $1+\dfrac{2\ln x}{x}=1 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies \boxed{M(1,1)}$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(1)=\dfrac{2(1-0)}{1}=2$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

$$y-1=2(x-1) \iff \boxed{y=2x-1}$$

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ៖



ង. ពិភាក្សាចំនួនឫស និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

- ពិភាក្សាសមីការ $f(x)=k$ ៖
  - បើ $k>1+\dfrac{2}{e}$ ៖ សមីការគ្មានឫស ។
  - បើ $k=1+\dfrac{2}{e}$ ៖ សមីការមានឫសឌុប $x=e$ ។
  - បើ $1<k<1+\dfrac{2}{e}$ ៖ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។
  - បើ $k\le 1$ ៖ សមីការមានឫសតែមួយគត់ ។
- គណនាផ្ទៃក្រឡាធៀបនឹងអាស៊ីមតូតដេក $y=1$ ចំពោះ $x\in[1,e]$ ៖
  ដោយ $f(x)\ge 1$ លើ $[1,e]$ ៖

$$S=\int_1^e (f(x)-1)\,dx=\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx=\left[(\ln x)^2\right]_1^e=(\ln e)^2-(\ln 1)^2=1-0=\mathbf{1}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S=1 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ២១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \dfrac{2}{e}\approx 0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃ k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អ័ក្ស (Ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=(0,+\infty)$ ។
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2(1-(-\infty))=+\infty \implies$ $\boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2(1-0)=\mathbf{2} \implies$ $\boxed{y=2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

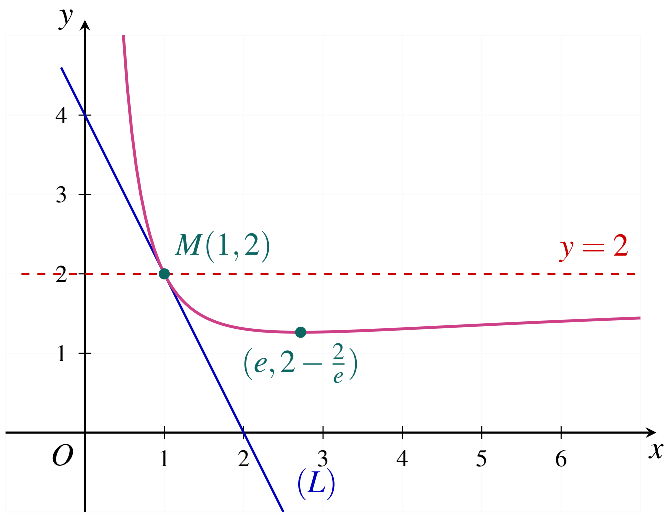
- $f'(x)=-2\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$ ។
- $f'(x)=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$ ។
- $f'(x)<0$ លើ $(0,e)$ និង $f'(x)>0$ លើ $(e,+\infty)$ ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ $f(e)=2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)=2-\dfrac{2}{e}\approx 2-0.74=\mathbf{1.26}$ ។

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2-\dfrac{2}{e}$	↗	2

គ. ចំណុច M និងបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

- ប្រសព្វនឹង $y=2$ ៖ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies \boxed{M(1,2)}$ ។
- $f'(1)=\dfrac{2(\ln 1-1)}{1^2}=-2$ ។
- សមីការបន្ទាត់ (L) ៖ $y-2=-2(x-1) \iff \boxed{y=-2x+4}$ ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ៖



ង. ពិភាក្សាឫស និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

- ពិភាក្សាសមីការ $f(x)=k$ ៖
  - $k<2-\dfrac{2}{e}$ ៖ គ្មានឫស ។
  - $k=2-\dfrac{2}{e}$ ៖ ឫសឌុប $x=e$ ។
  - $2-\dfrac{2}{e}<k<2$ ៖ ឫសពីរផ្សេងគ្នា ។
  - $k\geq 2$ ៖ ឫសតែមួយគត់ ។
- ផ្ទៃក្រឡាលើ $[1,e]$ ៖

$$S=\int_1^e 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[2x-(\ln x)^2\right]_1^e=(2e-1)-(2-0)=\mathbf{2e-3}$$

ជំនួស $e\approx 2.718$ ៖ $\boxed{S=2e-3\approx 2.44 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ២២

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃ (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកចំណុចប្រសព្វ M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (L) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ង. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty \implies \boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=1 \implies \boxed{y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

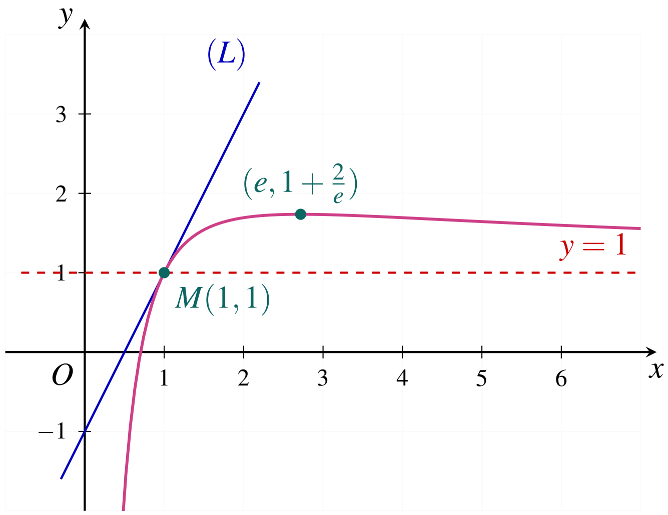
- $f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=e$ ។
- អតិបរមាធៀប ៖ $f(e)=1+\dfrac{2}{e}\approx 1.74$ ។

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

គ. ចំណុច M និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $f(x)=1 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies M(1,1)$ ។

$f'(1)=2 \implies (L): y-1=2(x-1) \iff \boxed{y=2x-1}$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (L) ៖



មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ង. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យមានឫសពីរផ្សេងគ្នា ៖

ផ្អែកតាមតារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) បន្ទាត់ដេក $y=k$ កាត់ក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា លុះត្រាតែ ៖

$$\boxed{1<k<1+\frac{2}{e}}$$

លំហាត់ទី ២៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \dfrac{2}{e}\approx 0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អ័ក្ស (Ox) បន្ទាត់ $x=1$ និង $x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=(0,+\infty)$ ។
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2(1-(-\infty))=+\infty \implies \boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy) \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2(1-0)=\mathbf{2} \implies \boxed{y=2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

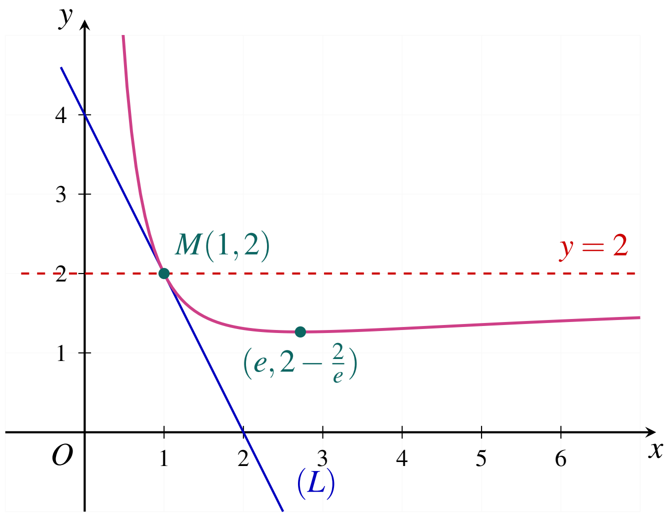
- $f'(x)=-2\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$ ។
- ដោយសារ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖ $f'(x)=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$ ។
- $f'(x)<0$ លើ $(0,e)$ និង $f'(x)>0$ លើ $(e,+\infty)$ ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ $f(e)=2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)=\mathbf{2-\dfrac{2}{e}}\approx \mathbf{1.26}$ ។

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2-\dfrac{2}{e}$	↗	2

គ. ចំណុច M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

- ប្រសព្វនឹង $y=2$ ៖ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=2 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies \boxed{M(1,2)}$ ។
- $f'(1)=\dfrac{2(\ln 1-1)}{1^2}=-2$ ។
- សមីការបន្ទាត់ (L) ៖ $y-2=-2(x-1) \iff \boxed{y=-2x+4}$ ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖



ង. កំណត់តម្លៃ k និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

- ផ្អែកតាមតារាងអថេរភាព $f(x)\geq 2-\dfrac{2}{e}$ ជានិច្ច នាំឱ្យសមីការ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស $\iff \boxed{k\geq 2-\dfrac{2}{e}\approx 1.26}$ ។
- គណនាផ្ទៃក្រឡាលើ $[1,e]$ ៖

$$S=\int_1^e 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[2x-(\ln x)^2\right]_1^e=(2e-1)-(2-0)=\mathbf{2e-3}$$

ជំនួស $e\approx 2.718$ ៖ $\boxed{S=2e-3\approx 2.44 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ២៤

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^3}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$ ។ គណនា $f(\sqrt[3]{e})$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e \approx 2.7, \sqrt[3]{e} \approx 1.4, \frac{1}{3e} \approx 0.12$) ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $1 - \frac{\ln x}{x^3} > k$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = (0, +\infty)$ ។
- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{\ln x}{x^3}\right) = 1 - \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\cdot \ln x\right) = 1 - (+\infty)(-\infty) = +\infty$$

ដូច្នេះ $\boxed{x = 0 \text{ (អ័ក្ស } Oy) \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។

- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ (ចំពោះ $\alpha = 3 > 0$) ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x^3}\right) = 1 - 0 = \mathbf{1} \implies \boxed{y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$$

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- អនុវត្តរូបមន្តដេរីវេផលចែក ៖

$$f'(x) = 0 - \frac{(\ln x)'\cdot x^3 - (\ln x)(x^3)'}{(x^3)^2} = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - 3x^2\ln x}{x^6} = -\frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{3\ln x - 1}{x^4}$$

- ដោយសារ $x^4 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $3\ln x - 1$ ៖

$$f'(x) = 0 \iff 3\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \frac{1}{3} \iff x = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

  - បើ $0 < x < \sqrt[3]{e}$ ៖ $3\ln x - 1 < 0 \implies f'(x) < 0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
  - បើ $x > \sqrt[3]{e}$ ៖ $3\ln x - 1 > 0 \implies f'(x) > 0$ (អនុគមន៍កើន) ។

- ដូច្នេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=\sqrt[3]{e}$ គឺ ៖

$$f(\sqrt[3]{e}) = 1-\frac{\ln(e^{1/3})}{(e^{1/3})^3} = 1-\frac{\frac{1}{3}}{e} = \mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3e}} \approx 1-0.12 = \mathbf{0.88}$$

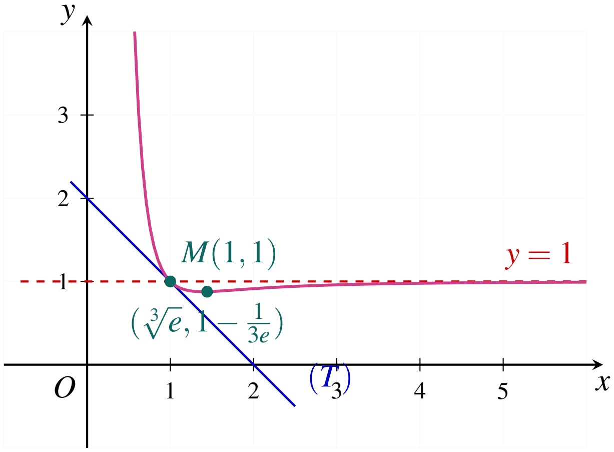
x	0		$\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1-\dfrac{1}{3e}$	↗	1

ⓖ. ចំណុចប្រសព្វ M និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖

- រក M ៖ $f(x)=1 \iff 1-\dfrac{\ln x}{x^3}=1 \iff \ln x = 0 \iff x=1 \implies \boxed{M(1,1)}$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(1)=\dfrac{3\ln 1-1}{1^4}=\dfrac{0-1}{1}=-1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ $M(1,1)$ ៖

$$y-1=-1(x-1) \iff \boxed{y=-x+2}$$

ⓨ. សង់បន្ទាត់ (T) ក្រាប (C) និងដោះស្រាយវិសមីការ ៖



- កំណត់ k ដើម្បីឱ្យ $1-\dfrac{\ln x}{x^3}>k$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

វិសមីការ $f(x)>k$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ មានន័យថាក្រាប (C) ទាំងមូលស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ដេក $y=k$ ។ ដោយសារតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃអនុគមន៍ f គឺ $f_{\min}=1-\dfrac{1}{3e}$ នោះវិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ លុះត្រាតែ ៖

$$k<f_{\min} \iff \boxed{k<1-\frac{1}{3e}}$$

លំហាត់ទី ២៥

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x-1-2\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f លើចន្លោះ $(1,+\infty)$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[2,+\infty)$ ។

ង. គណនាក្រឡាផ្ទៃ A នៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $(L): y=x-1$ ចំពោះ $2\le x\le 4$ (គេឱ្យ $\ln 2\approx 0.7, \ln 3\approx 1.1$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ៖

- អនុគមន៍មានន័យកាលណា $1-\dfrac{1}{x}>0 \iff \dfrac{x-1}{x}>0 \iff x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ ។ លើចន្លោះ $(1,+\infty)$ អនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេជានិច្ច ។
- សរសេរ $f(x)=x-1-2[\ln(x-1)-\ln x]$ ៖

$$f'(x)=1-2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)=1-\frac{2}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-2}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$$

- ដោយ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ ហើយចំពោះ $x>1$ គេបាន $x(x-1)>0$ និង $x+1>0$ នោះ ៖

$$f'(x)=0 \iff x-2=0 \iff x=2$$

  - បើ $1<x<2$ នោះ $f'(x)<0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត ។
  - បើ $x>2$ នោះ $f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ។
- តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ ៖

$$f(2)=2-1-2\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=1-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)=1+2\ln 2\approx 1+2(0.7)=\mathbf{2.4}$$

ខ. គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូត ៖

- កាលណា $x\to1^+$ គេបាន $1-\dfrac{1}{x}\to0^+ \implies \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\to-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=1-1-2(-\infty)=+\infty \implies \boxed{x=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$$

- កាលណា $x\to+\infty$ គេបាន $\dfrac{1}{x}\to0 \implies 1-\dfrac{1}{x}\to1 \implies \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\to0$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-1-0=+\infty$$

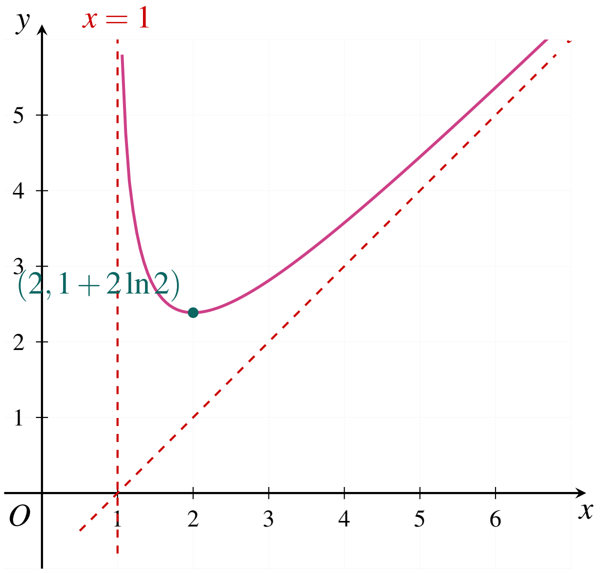
- ពិនិត្យលីមីតនៃផលដក $f(x)-(x-1)$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left[-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=-2\ln 1=0$$

ដូច្នេះបន្ទាត់ $\boxed{(L):y=x-1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។

គ. តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

x	1			2		$+\infty$
$f'(x)$	||		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ || $+\infty$	↘		$1+2\ln 2$	↗	$+\infty$



ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់លើ $[2,+\infty)$ ៖

- លើចន្លោះ $[2,+\infty)$ អនុគមន៍ f ជាប់ និងកើនដាច់ខាត ។
- តម្លៃនៅចុងចន្លោះ ៖ $f(2)=1+2\ln 2\approx 2.39<3$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty>3$ ។
- ដោយ $3\in[f(2),+\infty[$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល អនុគមន៍ f បង្កើតបានជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ដូច្នេះសមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់ $x_0\in[2,+\infty)$ ។

ង. គណនាក្រឡាផ្ទៃ A ៖

- ចំពោះគ្រប់ $x\geq 2$ គេបាន $1-\frac{1}{x}<1\implies \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)<0\implies -2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)>0$ ដូច្នេះក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ (L) ជានិច្ច ៖

$$A=\int_2^4[f(x)-(x-1)]\,dx=-2\int_2^4\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx=2\int_2^4[\ln x-\ln(x-1)]\,dx$$

- ព្រីមីទីវនៃ $\ln u$ គឺ $u\ln u - u$ ៖

$$\int [\ln x - \ln(x-1)]\,dx = [x\ln x - x] - [(x-1)\ln(x-1) - (x-1)] = x\ln x - (x-1)\ln(x-1) - 1$$

- ជំនួសព្រំដែនពី 2 ដល់ 4 ៖

$$\begin{aligned}[x\ln x - (x-1)\ln(x-1)]_2^4 &= (4\ln 4 - 3\ln 3) - (2\ln 2 - 1\ln 1)\\ &= (8\ln 2 - 3\ln 3) - 2\ln 2 = 6\ln 2 - 3\ln 3\end{aligned}$$

$$A = 2(6\ln 2 - 3\ln 3) = 12\ln 2 - 6\ln 3$$

ជំនួស $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1$ ៖

$$A = 12(0.7) - 6(1.1) = 8.4 - 6.6 = \mathbf{1.8} \implies \boxed{A = 1.8 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$$

លំហាត់ទី ២៦

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \in D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ដោយ $y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃ (C) ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x(x-1) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាព ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូត និងខ្សែកោង (C) (យក $e \approx 2.7, \ln 2 \approx 0.7$) ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការ $-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = a$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូតឈរ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{-\infty}{2} + \ln 1 = +\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{+\infty}{2} + \ln 1 = -\infty$ ។
- កាលណា $x \to 0^-$ គេបាន $\frac{x-1}{x} \to \frac{-1}{0^-} = +\infty \implies \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0 + \infty = +\infty$ ៖

$$\boxed{x = 0 \text{ (អ័ក្ស } Oy\text{) ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$$

- កាលណា $x \to 1^+$ គេបាន $\frac{x-1}{x} \to \frac{0^+}{1} = 0^+ \implies \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\frac{1}{2} + (-\infty) = -\infty$ ៖

$$\boxed{x = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$$

ខ. គណនាដេរីវេ តម្លៃបរមា និងតារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេនៃ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln(x-1)-\ln x$ ៖

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)}=\frac{-(x^2-x-2)}{2x(x-1)}$$

$$f'(x)=\frac{-(x-2)(x+1)}{2x(x-1)}$$

- លើដែនកំណត់ D ភាគបែង $2x(x-1)>0$ ជានិច្ច ដូច្នេះសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដូចសញ្ញាភាគយក $-(x-2)(x+1)$ ៖

$$f'(x)=0 \iff x=-1 \quad \text{ឬ} \quad x=2$$

  - ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)$ ៖ $f'(x)<0$ (ចុះ) ។
  - ចំពោះ $x\in(-1,0)$ ៖ $f'(x)>0$ (កើន) ។
  - ចំពោះ $x\in(1,2)$ ៖ $f'(x)>0$ (កើន) ។
  - ចំពោះ $x\in(2,+\infty)$ ៖ $f'(x)<0$ (ចុះ) ។

- តម្លៃបរមាធៀប ៖
  - អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ ៖ $f(-1)=\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{-2}{-1}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}+\ln\mathbf{2}\approx 0.5+0.7=\mathbf{1.2}$ ។
  - អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ៖ $f(2)=-1+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\mathbf{1}-\ln\mathbf{2}\approx -1-0.7=-\mathbf{1.7}$ ។

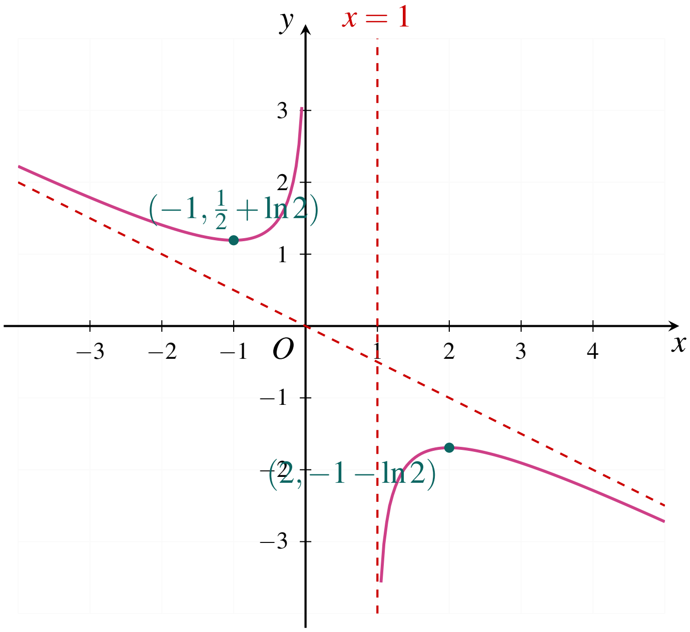
x	$-\infty$		-1		0 ‖		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	d		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗			$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (L) ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln 1=0$$

ដូច្នេះបន្ទាត់ $\boxed{(L): y=-\frac{x}{2} \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } \pm\infty}$ ។

ឃ. សង់ក្រាប និងពិភាក្សាឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ៖



- **ស្វែងរកតម្លៃ a ៖**
ឬសអវិជ្ជមាននៃសមីការជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) លើចន្លោះ $(-\infty,0)$ ជាមួយបន្ទាត់ដេក $y=a$ ។
លើចន្លោះ $(-\infty,0)$ អនុគមន៍ចុះពី $+\infty$ ដល់តម្លៃអប្បបរមា $\frac{1}{2}+\ln 2$ រួចកើនឡើងទៅ $+\infty$ វិញ ។
ដូច្នេះបន្ទាត់ $y=a$ កាត់ខ្សែងខាងឆ្វេង $(x<0)$ ត្រង់ ២ ចំណុចផ្សេងគ្នា លុះត្រាតែ ៖

$$\boxed{a>\frac{1}{2}+\ln 2\approx 1.2}$$

លំហាត់ទី ២៧

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $y=f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)\leq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ គណនា $f'(0), f(0)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាគល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

ឃ. គណនា $f(3)$ ហើយសង់ខ្សែកោង (C) (យក $e^3\approx 20$) ។ ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{4e^x}{e^x+1}\geq x+2$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- កាលណា $x \to -\infty$ គេបាន $e^x \to 0 \implies \dfrac{4e^x}{e^x+1} \to 0$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - 2 + 0 = +\infty$$

ហើយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1} = 0$ ៖

ដូច្នេះបន្ទាត់ $\boxed{(d_1): y = -x-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } -\infty}$ ។

- កាលណា $x \to +\infty$ គេបាន $\dfrac{4e^x}{e^x+1} = \dfrac{4}{1+e^{-x}} \to 4$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty - 2 + 4 = -\infty$$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)-(-x+2) = \dfrac{4e^x}{e^x+1} - 4 = \dfrac{-4}{e^x+1} \to 0$ ៖

ដូច្នេះបន្ទាត់ $\boxed{(d_2): y = -x+2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = -1 + \frac{4e^x(e^x+1)-4e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = -1 + \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(e^{2x}+2e^x+1-4e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

- ដោយសារ $(e^x-1)^2 \geq 0$ និង $(e^x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេទាញបាន ៖

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$

- ត្រង់ $x = 0$ ៖ $f'(0) = -\dfrac{(1-1)^2}{(1+1)^2} = \mathbf{0}$ និង $f(0) = -0-2+\dfrac{4(1)}{1+1} = -2+2 = \mathbf{0}$ ។
- ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

គ. ចំណុចរបត់ និងផ្ចិតឆ្លុះ ៖

- ដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ ៖

$$f''(x) = \left(-1+4e^x(e^x+1)^{-2}\right)' = 4e^x(e^x+1)^{-2} - 8e^{2x}(e^x+1)^{-3} = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$f''(x) = 0 \iff 1-e^x = 0 \iff x = 0$ ហើយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមាន $(x<0)$ ទៅអវិជ្ជមាន $(x>0)$ ត្រង់ $x = 0$ ដូច្នេះចំណុច $O(0,0)$ ជាចំណុចរបត់ ។

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(-x)+f(x)$ ៖

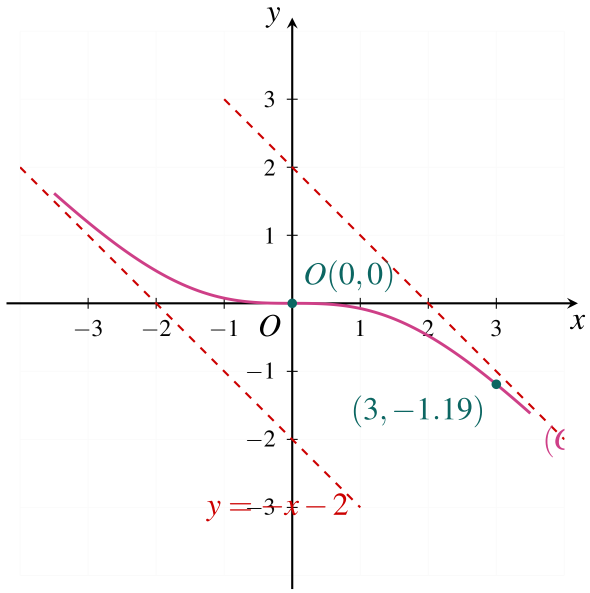
$$f(-x)=x-2+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}=x-2+\frac{4}{1+e^{x}}$$

$$f(-x)+f(x)=(x-2)+(-x-2)+\frac{4+4e^{x}}{1+e^{x}}=-4+4=0=2\cdot 0$$

ដូច្នេះ $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) ។

ឃ. គណនា $f(3)$ សង់ក្រាប និងដោះស្រាយវិសមីការ ៖

- $f(3)=-3-2+\dfrac{4e^{3}}{e^{3}+1}\approx -5+\dfrac{4(20)}{20+1}=-5+\dfrac{80}{21}=-\dfrac{25}{21}\approx -\mathbf{1.19}$ ។



- **ដោះស្រាយវិសមីការ** $\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}\geq x+2$ ៖

វិសមីការសមមូលនឹង ៖

$$-x-2+\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}\geq 0 \iff f(x)\geq 0$$

តាមក្រាប (C) និងតារាងអថេរភាព $f(x)\geq 0$ កាលណាខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងលើ ឬកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ដែលត្រូវនឹង $x\leq 0$ ។

ដូច្នេះសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការគឺ $\boxed{S=(-\infty,0]}$ ។

លំហាត់ទី ២៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=-x-\dfrac{4\ln x}{x}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា $(L): y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង (L) ។

គ. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x) < 0$ បើដឹងថា $x^2 + 4 - 4\ln x > 0$ ចំពោះ $x > 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ បន្ទាត់ (D) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ។ រកកូអរដោនេនៃ A និងសមីការបន្ទាត់ (D) ។

ឃ. សង់ $(L), (D)$ និង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e \approx 2.7, \frac{4}{e} \approx 1.5$) ។ គេតាង $S(a)$ ជាក្រឡាផ្ទៃកំណត់ដោយក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត (L) ចំពោះ $1 \le x \le a$ ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $S(a) = 2$ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូតឈរ ៖

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-x - 4\cdot\frac{\ln x}{x}\right) = 0 - 4(-\infty) = +\infty$ ៖

$x = 0$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) = -\infty - 0 = -\infty$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (L) និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{4\ln x}{x}\right) = 0 \implies$ $(L): y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។
- ពិនិត្យសញ្ញានៃ $f(x) - (-x) = -\dfrac{4\ln x}{x}$ លើ $(0, +\infty)$ ៖
  - បើ $0 < x < 1$ ៖ $\ln x < 0 \implies f(x) - (-x) > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ** (L) ។
  - បើ $x = 1$ ៖ $f(1) - (-1) = 0 \implies (C)$ **កាត់** (L) ត្រង់ចំណុច $(1, -1)$ ។
  - បើ $x > 1$ ៖ $\ln x > 0 \implies f(x) - (-x) < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម** (L) ។

គ. ដេរីវេ តារាងអថេរភាព និងបន្ទាត់ប៉ះ (D) ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = -1 - 4\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = -1 - \frac{4(1-\ln x)}{x^2} = \frac{-x^2 - 4 + 4\ln x}{x^2} = -\frac{x^2 + 4 - 4\ln x}{x^2}$$

- ដោយ $x^2 + 4 - 4\ln x > 0$ និង $x^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ គេបាន ៖

$f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0, +\infty)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

- បន្ទាត់ (D) ស្របនឹង $(L): y=-x$ មានន័យថាមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -1 ៖

$$f'(x_A)=-1 \iff -\frac{x_A^2+4-4\ln x_A}{x_A^2}=-1 \iff 4-4\ln x_A=0 \iff \ln x_A=1 \iff x_A=e$$

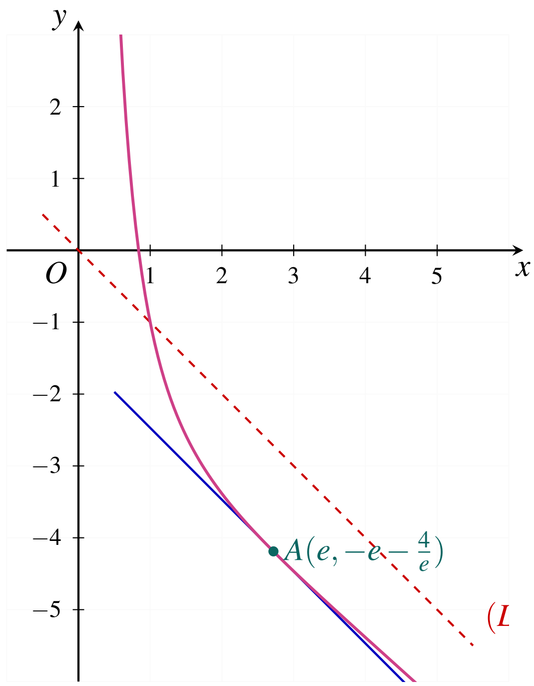
- អរដោនេ ៖ $y_A=f(e)=-e-\frac{4\ln e}{e}=-e-\frac{4}{e}\approx -2.7-1.5=\mathbf{-4.2}$ ៖

$$\boxed{A\left(e,-e-\frac{4}{e}\right)}$$

- សមីការបន្ទាត់ (D) ៖

$$y-y_A=-1(x-x_A) \iff y-\left(-e-\frac{4}{e}\right)=-(x-e) \iff \boxed{y=-x-\frac{4}{e}}$$

ឃ. សង់ក្រាប និងគណនាតម្លៃ a ៖



- គណនាតម្លៃ a ៖
ចំពោះ $x\in[1,a]$ (ដោយ $a>1$) ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោម (L) ៖

$$S(a)=\int_1^a[-x-f(x)]\,dx=\int_1^a\frac{4\ln x}{x}\,dx=\left[2(\ln x)^2\right]_1^a=2(\ln a)^2-0=2(\ln a)^2$$

$$S(a)=2 \iff 2(\ln a)^2=2 \iff (\ln a)^2=1 \iff \ln a=1 \quad (\text{ព្រោះ } a>1) \iff \boxed{a=e}$$

លំហាត់ទី ២៩

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ (d) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ ។ សង់ (d) និង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $\sqrt{e}\approx 1.6, \dfrac{1}{2e}\approx 0.2$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=(0,+\infty)$ ។
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln x\right)=(+\infty)(-\infty)=-\infty \implies$ $\boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0 \implies$ $\boxed{y=0\ (\text{អ័ក្ស } Ox) \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x^2-(\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ ។
- ដោយ $x^3>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$f'(x)=0 \iff 1-2\ln x=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

  – បើ $0<x<\sqrt{e}$ ៖ $1-2\ln x>0 \implies f'(x)>0$ (កើន) ។
  – បើ $x>\sqrt{e}$ ៖ $1-2\ln x<0 \implies f'(x)<0$ (ចុះ) ។

- ដូច្នេះ f មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=\sqrt{e}$ គឺ ៖

$$f(\sqrt{e})=\frac{\ln(e^{1/2})}{(\sqrt{e})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e}}\approx\mathbf{0.184}$$

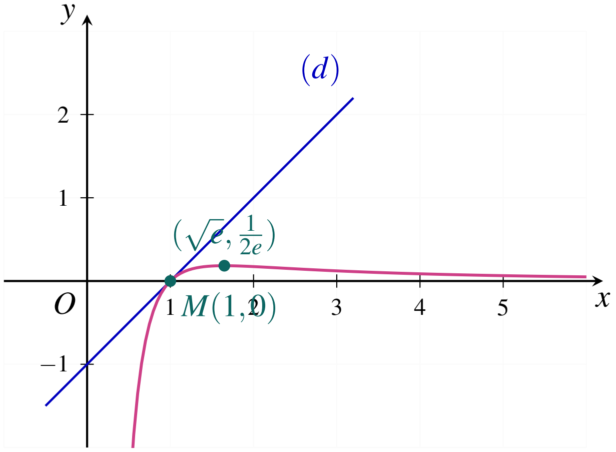
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (d) និងសង់ក្រាប ៖

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(1)=\dfrac{1-2\ln 1}{1^3}=\dfrac{1-0}{1}=1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (d) ត្រង់ $M(1,0)$ ៖

$$y-0=1(x-1) \iff \boxed{y=x-1}$$



លំហាត់ទី ៣០

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \dfrac{2}{e}\approx 0.7$) ។

ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

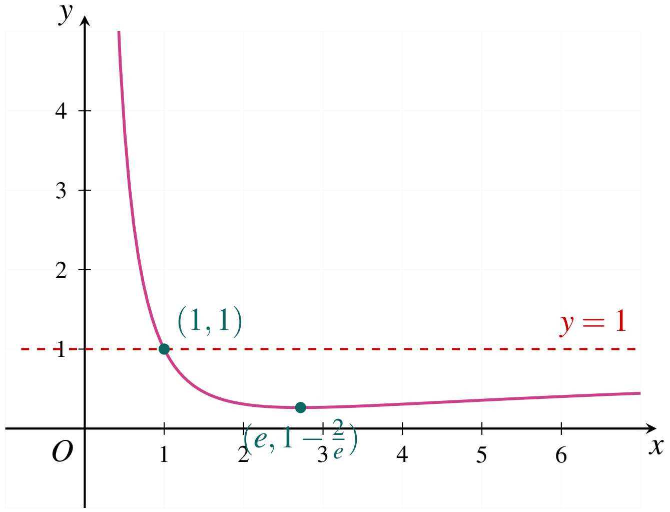
ក. លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \implies$ $\boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \implies$ $\boxed{y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖ $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$ ។ $f'(x)=0 \iff x=e$ ។ អប្បបរមា $f(e)=1-\dfrac{2}{e}\approx 0.26$ ។

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1-\dfrac{2}{e}$	↗	1

គ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖



ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ ៖
ចំពោះ $x \in [1, e]$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ៖

$$S = \int_1^e [1 - f(x)]\,dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx = \left[(\ln x)^2\right]_1^e = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1 - 0 = \mathbf{1}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S = 1 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ៣១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = 2 + \dfrac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e \approx 2.7, e^{0.5} \approx 1.65$) ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1, x = e^{0.5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = (0, +\infty)$ ។
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 + \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \ln x\right) = 2 + (+\infty)(-\infty) = -\infty \implies \boxed{x = 0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 2 + 0 = \mathbf{2} \implies \boxed{y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- $f'(x)=0+\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)(2x)}{x^4}=\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ ។
- ដោយ $x^3>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

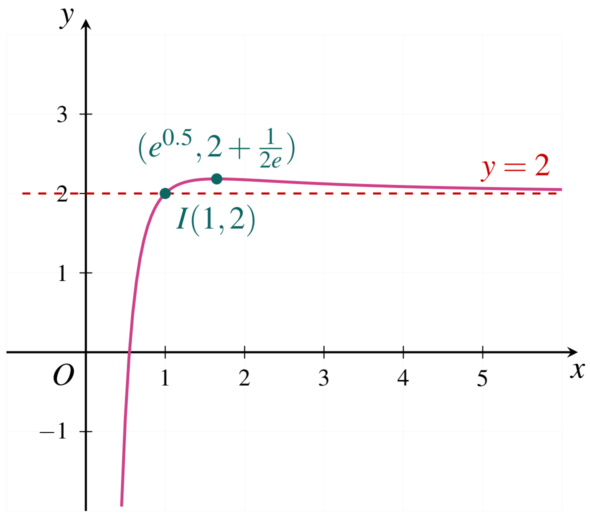
$$f'(x)=0 \iff 1-2\ln x=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=e^{0.5}=\sqrt{e}\approx 1.65$$

  - បើ $0<x<e^{0.5}$ ៖ $f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
  - បើ $x>e^{0.5}$ ៖ $f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
- អតិបរមាធៀប ៖ $f(e^{0.5})=2+\dfrac{0.5}{e}=\mathbf{2+\frac{1}{2e}}\approx 2+0.18=\mathbf{2.18}$ ។

x	0		$e^{0.5}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$2+\dfrac{1}{2e}$	↘	2

គ. ចំណុចប្រសព្វ I និងសង់ក្រាប (C) ៖

- $f(x)=2 \iff 2+\dfrac{\ln x}{x^2}=2 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies \boxed{I(1,2)}$ ។



ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ ៖

ចំពោះ $x\in[1,e^{0.5}]$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $y=2$ ៖

$$S=\int_1^{e^{0.5}}[f(x)-2]\,dx=\int_1^{e^{0.5}}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

អនុវត្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ៖ តាង $u=\ln x \implies du=\dfrac{dx}{x}$ និង $dv=\dfrac{dx}{x^2}\implies v=-\dfrac{1}{x}$ ៖

$$\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}-\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{\ln x+1}{x}$$

$$S=\left[-\frac{\ln x+1}{x}\right]_1^{e^{0.5}}=-\frac{0.5+1}{e^{0.5}}-\left(-\frac{0+1}{1}\right)=1-\frac{1.5}{e^{0.5}}\approx 1-\frac{1.5}{1.65}=1-\frac{10}{11}=\frac{1}{11}\approx \mathbf{0.091}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S=1-\frac{1.5}{\sqrt{e}}\approx 0.09 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ៣២

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I=(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ ។

A. គេឱ្យអនុគមន៍ h កំណត់លើ I ដោយ $h(x)=-x+1-2\ln x$ ។ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ (មិនតម្រូវឱ្យគណនាលីមីតចុងដែន) ។

B. ក. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0^+ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថានៅលើ I, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ។

ឃ. ទាញយកអថេរភាពនៃ f លើ I រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

A. សិក្សាអនុគមន៍ជំនួយ $h(x)$ ៖

- $h(1)=-1+1-2\ln 1=0-0=\mathbf{0}$ ៖ $\boxed{h(1)=0}$ ។
- ដេរីវេ ៖ $h'(x)=-1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-x-2}{x}=-\dfrac{x+2}{x}$ ។
- ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $x+2>0$ និង $x>0 \implies h'(x)<0$ ជានិច្ច ។
  ដូច្នេះ h ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។
- ទាញរកសញ្ញានៃ $h(x)$ ៖
  - បើ $0<x<1$ នោះ $h(x)>h(1)=0 \implies h(x)>0$ ។
  - បើ $x>1$ នោះ $h(x)<h(1)=0 \implies h(x)<0$ ។

B. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

ក. គណនាលីមីត ៖

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+\ln x}{x^2}$ ៖
  ដោយ $x+\ln x\to-\infty$ និង $x^2\to0^+$ នោះ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=0+0=\mathbf{0} \implies \boxed{y=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=\frac{(x+\ln x)'\cdot x^2-(x+\ln x)(x^2)'}{x^4}=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x+\ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+x-2x^2-2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-x+1-2\ln x)}{x^4} = \frac{-x+1-2\ln x}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}$$

គ. សញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

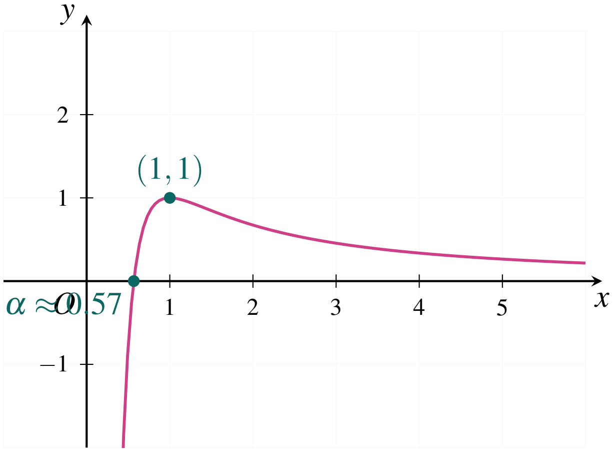
ដោយ $x^3 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in I = (0,+\infty)$ គេទាញបាន ៖

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ លើចន្លោះ I

ឃ. អថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

- $f'(x) = 0 \iff h(x) = 0 \iff x = 1$ ។
- លើ $(0,1)$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ កើនដាច់ខាត ។
- លើ $(1,+\infty)$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ចុះដាច់ខាត ។
- អតិបរមាធៀប ៖ $f(1) = \frac{1+\ln 1}{1^2} = \mathbf{1}$ ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	0



លំហាត់ទី ៣៣

ក. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 + \ln x$ ។

១. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ រួចគណនា $g(1)$ ។

២. ទាញបញ្ជាក់ថា ៖ បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ ហើយបើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1$ ។

៣. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ កាលណា $x \in (0,+\infty)$ ។

ខ. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

①. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$) ។

②. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ។

③. ប្រើលទ្ធផលសំណួរ a សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

④. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង Δ បញ្ជាក់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រួចសង់ Δ និង (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអនុគមន៍ $g(x)=x^2+\ln x$ ៖

①. $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$ ។ ដោយ $x>0 \implies g'(x)>0$ ជានិច្ច ដូច្នេះ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

គណនា $g(1)=1^2+\ln 1=1+0=\mathbf{1}$ ៖ $\boxed{g(1)=1}$ ។

②. ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ៖

- បើ $x\geq 1 \implies g(x)\geq g(1) \iff x^2+\ln x\geq 1$ ។
- បើ $0<x\leq 1 \implies g(x)\leq g(1) \iff x^2+\ln x\leq 1$ ។

③. សញ្ញានៃ $x^2+\ln x-1$ ៖

- បើ $0<x<1$ នោះ $x^2+\ln x-1<0$ (សញ្ញាដក) ។
- បើ $x=1$ នោះ $x^2+\ln x-1=0$ ។
- បើ $x>1$ នោះ $x^2+\ln x-1>0$ (សញ្ញាបូក) ។

ខ. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ ៖

①. **លីមីត ៖**

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0+1-\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=1-(-\infty)=+\infty \implies \boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty+1-0=+\infty$ ។

②. **គណនាដេរីវេ ៖**

$$f'(x)=1+0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\boxed{\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}}$$

③. **សញ្ញា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖** ដោយ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញាភាគយក $x^2+\ln x-1$ ៖

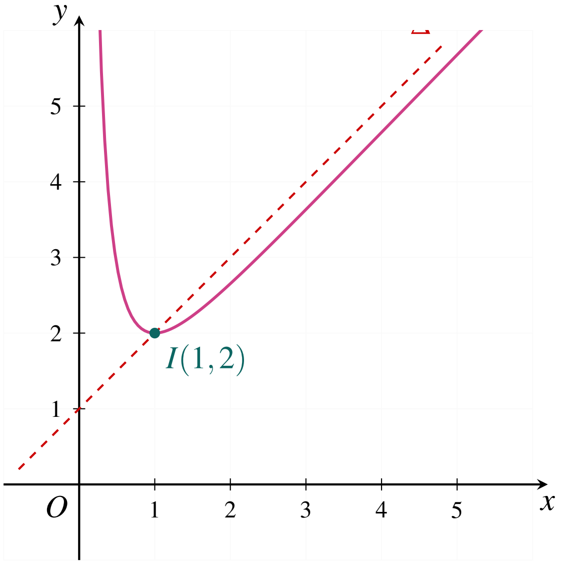
- $f'(x)=0 \iff x=1$ ។
- លើ $(0,1)$ ៖ $f'(x)<0 \implies f$ ចុះដាច់ខាត ។
- លើ $(1,+\infty)$ ៖ $f'(x)>0 \implies f$ កើនដាច់ខាត ។

តម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖ $f(1)=1+1-\frac{\ln 1}{1}=\mathbf{2}$ ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

④. អាស៊ីមតូតទ្រេត Δ ទីតាំងធៀប និងសង់ក្រាប ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\Delta : y = x+1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ ពិនិត្យ $f(x)-(x+1) = -\dfrac{\ln x}{x}$ ៖
  - លើ $(0,1)$ ៖ $\ln x < 0 \Longrightarrow -\dfrac{\ln x}{x} > 0 \Longrightarrow (C)$ **នៅខាងលើ** Δ ។
  - ត្រង់ $x=1$ ៖ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $\boxed{I(1,2)}$ ។
  - លើ $(1,+\infty)$ ៖ $\ln x > 0 \Longrightarrow -\dfrac{\ln x}{x} < 0 \Longrightarrow (C)$ **នៅខាងក្រោម** Δ ។



លំហាត់ទី ៣៤

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x) = -x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1^+ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថាលើ $(1,+\infty)$ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = -x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x>1$, $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ រួចទាញរកទីតាំងធៀបរវាង (C) និង d_1 ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច B លើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នេះ ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 (យក $\ln 3 \approx 1.1$ និងដឹងថាក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x \approx 4.5$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖

- កាលណា $x \to 1^+$ គេបាន $\frac{x+1}{x-1} \to \frac{2}{0^+} = +\infty \implies \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \to +\infty$ ៖

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1+4+(+\infty) = +\infty \implies \boxed{x=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$$

- កាលណា $x \to +\infty$ គេបាន $\frac{x+1}{x-1} \to 1 \implies \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \to 0$ ៖

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty+4+0 = -\infty$$

ខ. គណនាដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- សរសេរ $f(x) = -x+4+\ln(x+1)-\ln(x-1)$ ៖

$$f'(x) = -1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1} = -1+\frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -1-\frac{2}{x^2-1} = \boxed{-\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}}$$

- ដោយសារចំពោះគ្រប់ $x>1$ គេបាន $x^2+1>0$ និង $(x+1)(x-1) = x^2-1>0$ នោះ ៖

$f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (1,+\infty)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $(1,+\infty)$ ។

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត d_1 និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0 \implies \boxed{d_1 : y=-x+4 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$ ។

- ចំពោះគ្រប់ $x>1$ គេមាន $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1+\frac{2}{x-1} > 1$ ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

- ដោយសារ $\frac{x+1}{x-1} > 1 \implies \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \implies f(x) - (-x+4) > 0$ ៖
  ដូច្នេះក្រាប (C) ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**អាស៊ីមតូតទ្រេត d_1 ជានិច្ច ។

ឃ. ចំណុច B និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ៖

- មេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ ៖

$$f'(x_0) = -\frac{5}{3} \iff -\frac{x_0^2+1}{x_0^2-1} = -\frac{5}{3} \iff 3(x_0^2+1) = 5(x_0^2-1)$$

$$3x_0^2+3 = 5x_0^2-5 \iff 2x_0^2 = 8 \iff x_0^2 = 4 \iff x_0 = 2 \quad (\text{ព្រោះ } x_0 > 1)$$

- អរដោនេនៃ B ៖ $y_0 = f(2) = -2+4+\ln\left(\frac{3}{1}\right) = \mathbf{2+\ln 3} \approx 2+1.1 = \mathbf{3.1}$ ៖

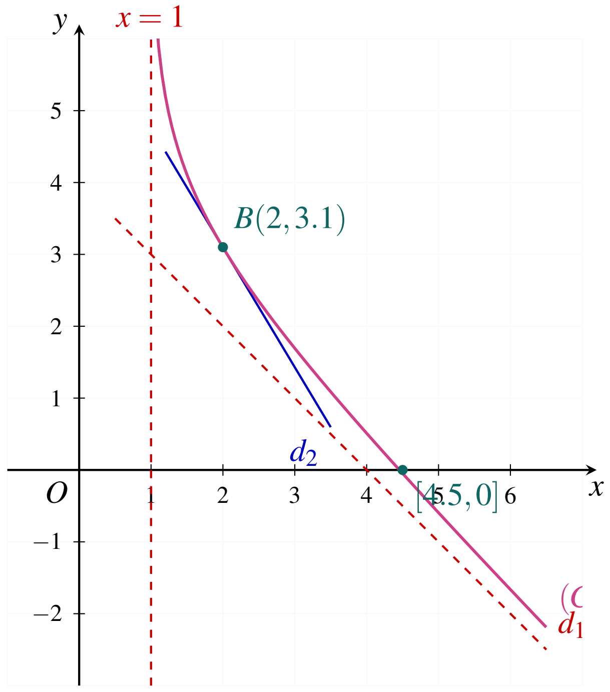
$$\boxed{B(2, 2+\ln 3)}$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ត្រង់ B ៖

$$y-(2+\ln 3) = -\frac{5}{3}(x-2) \iff y = -\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}+2+\ln 3 \iff \boxed{y = -\frac{5}{3}x+\frac{16}{3}+\ln 3}$$

(តម្លៃប្រហែល ៖ $y \approx -1.67x+6.43$) ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ៖



លំហាត់ទី ៣៥

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយ គណនាតម្លៃអប្បបរមានោះ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់អាប់ស៊ីស $x_0=1$ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ។ ប្រើក្រាប (C) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $e^x-mx=0$ មានឫស ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{0}{-\infty}=\mathbf{0}\implies$ $\boxed{y=0\ (\text{អ័ក្ស } Ox)\ \text{ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } -\infty}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (លីមីតគ្រឹះ) ។
- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ ៖

  ដូច្នេះ $\boxed{x=0\ (\text{អ័ក្ស } Oy)\ \text{ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។

ខ. ដេរីវេ តម្លៃអប្បបរមា និងតារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=\dfrac{(e^x)'\cdot x-e^x(x)'}{x^2}=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ ។
- ដោយ $e^x>0$ និង $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq0$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $x-1$ ៖

$$f'(x)=0\iff x-1=0\iff x=1$$

  - លើ $(-\infty,0)$ ៖ $x-1<0\implies f'(x)<0$ (ចុះ) ។
  - លើ $(0,1)$ ៖ $x-1<0\implies f'(x)<0$ (ចុះ) ។
  - លើ $(1,+\infty)$ ៖ $x-1>0\implies f'(x)>0$ (កើន) ។
- លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ អនុគមន៍ចុះពី $+\infty$ ដល់ $x=1$ រួចកើនឡើងទៅ $+\infty$ វិញ ដូច្នេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ ៖

$$f(1)=\frac{e^1}{1}=\mathbf{e}\approx\mathbf{2.72}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

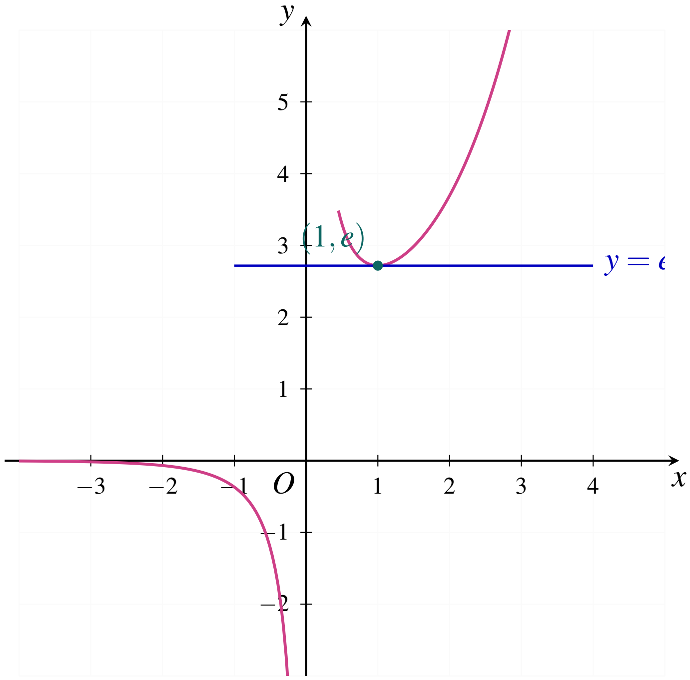
គ. បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0=1$ ៖

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $f'(1)=\dfrac{e^1(1-1)}{1^2}=0$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-f(1)=0(x-1) \iff \boxed{y=e}$ ។

ដោយសារបន្ទាត់នេះមានទម្រង់ $y=$ ថេរ នោះវាជាបន្ទាត់ដេកស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស (Ox) ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងពិភាក្សាឫសសមីការ $e^x-mx=0$ ៖



- **កំណត់តម្លៃ m ៖**

សមីការ $e^x-mx=0$ ៖

– បើ $x=0$ ៖ $e^0-0=1\neq 0$ ដូច្នេះ $x=0$ មិនមែនជាឫសឡើយ ។

– ចំពោះ $x\neq 0$ ៖ $e^x-mx=0 \iff \dfrac{e^x}{x}=m \iff f(x)=m$ ។

ឫសនៃសមីការជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ៖

– ចំពោះ $x<0$ ៖ តម្លៃនៃ $f(x)$ ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $(-\infty,0)$ ដូច្នេះបន្ទាត់ $y=m$ តែងតែកាត់ (C) ត្រង់មួយចំណុចជានិច្ច កាលណា $m<0$ ។

– ចំពោះ $x>0$ ៖ តម្លៃនៃ $f(x)$ ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[e,+\infty)$ ដូច្នេះបន្ទាត់ $y=m$ កាត់ (C) កាលណា $m\geq e$ ។

– ចំពោះ $0\leq m<e$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ មិនកាត់ក្រាប (C) ឡើយ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫសលុះត្រាតែ ៖

$$\boxed{m<0 \quad \text{ឬ} \quad m\geq e \iff m\in(-\infty,0)\cup[e,+\infty)}$$

លំហាត់ទី ៣៦

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងអ័ក្ស (Ox) ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ។ សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ង. ដោយប្រើក្រាប (C) ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(2x+1)e^{-2x}=m$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-2x}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=0+0=\mathbf{0}$ (តាមលីមីតគ្រឹះ $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}=0$) ៖

  ដូច្នេះ $\boxed{y=0 \text{ (អ័ក្ស } Ox) \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- អនុវត្តរូបមន្ត $(uv)'=u'v+uv'$ ៖

$$f'(x)=(2x+1)'\cdot e^{-2x}+(2x+1)(e^{-2x})'=2e^{-2x}+(2x+1)(-2e^{-2x})$$

$$f'(x)=2e^{-2x}[1-(2x+1)]=2e^{-2x}(-2x)=\boxed{-4xe^{-2x}}$$

- ដោយសារ $e^{-2x}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $-4x$ ៖

$$f'(x)=0 \iff -4x=0 \iff x=0$$

  – បើ $x<0$ ៖ $-4x>0 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
  – បើ $x>0$ ៖ $-4x<0 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។

- អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=0$ គឺ ៖

$$f(0)=(2(0)+1)e^0=1\cdot1=\mathbf{1}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

គ. ចំណុចប្រសព្វ A និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)$ ៖

- $f(x)=0 \iff (2x+1)e^{-2x}=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2}$ ៖

  ដូច្នេះចំណុចប្រសព្វនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\boxed{A\left(-\frac{1}{2},0\right)}$ ។

- ដោយ $e^{-2x}>0$ ជានិច្ច នោះសញ្ញា $f(x)$ ដូចសញ្ញា $2x+1$ ៖
  - បើ $x<-\frac{1}{2}$ ៖ $f(x)<0$ (ក្រាបនៅខាងក្រោមអ័ក្ស Ox) ។
  - បើ $x=-\frac{1}{2}$ ៖ $f(x)=0$ ។
  - បើ $x>-\frac{1}{2}$ ៖ $f(x)>0$ (ក្រាបនៅខាងលើអ័ក្ស Ox) ។

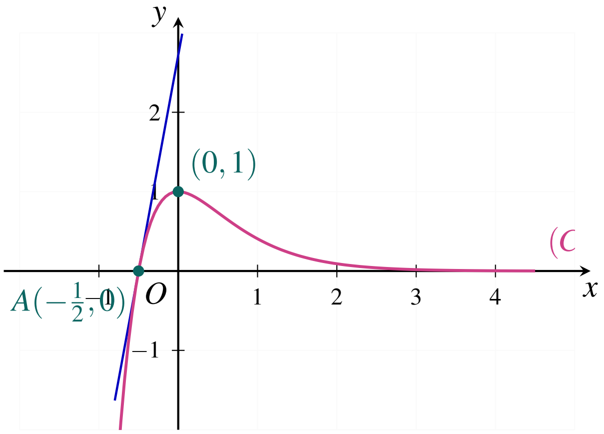
ឃ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) និងសង់ក្រាប (C) ៖

- មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ៖

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2(-1/2)}=2e^{1}=\mathbf{2e}\approx\mathbf{5.44}$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ A ៖

$$y-0=2e\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff \boxed{y=2ex+e}$$



ង. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា ៖
សមីការ $(2x+1)e^{-2x}=m$ មានឫសជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ៖
តាមតារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ៖

- កាលណា $x\in(-\infty,0)$ ៖ $f(x)$ កើនពី $-\infty$ ដល់ 1 ។
- កាលណា $x\in(0,+\infty)$ ៖ $f(x)$ ចុះពី 1 ដល់ 0 (មិនប៉ះ 0) ។

ដូច្នេះ បន្ទាត់ដេក $y=m$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា លុះត្រាតែ m ស្ថិតនៅចន្លោះតម្លៃអប្បបរមាខាងចុង 0 និងតម្លៃអតិបរមា 1 ៖

$$\boxed{0<m<1}$$

លំហាត់ទី ៣៧

គេកំណត់អនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ គេអាចសរសេរ $f(x)=1+\dfrac{1}{e^x-1}$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានដេរីវេចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ គណនា $f'(x)$ សិក្សាទិសដៅអថេរភាព គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែន និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) និងសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរបំប្លែង $f(x)$ និងគណនាលីមីត ៖

- សរសេរ ៖

$$f(x)=\frac{(e^x-1)+1}{e^x-1}=\frac{e^x-1}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}=\boxed{1+\frac{1}{e^x-1}}$$

- កាលណា $x\to+\infty$ គេបាន $e^x\to+\infty \implies \dfrac{1}{e^x-1}\to 0$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1+0=\mathbf{1} \implies \boxed{y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$$

- កាលណា $x\to-\infty$ គេបាន $e^x\to 0 \implies \dfrac{e^x}{e^x-1}\to\dfrac{0}{0-1}=0$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\mathbf{0} \implies \boxed{y=0 \text{ (អ័ក្ស } Ox\text{) ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } -\infty}$$

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ភាគបែង $e^x-1\neq 0$ ដូច្នេះ f មានដេរីវេជានិច្ច ៖

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{e^x-1}\right)'=-\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\boxed{-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}}$$

- ដោយសារ $e^x>0$ និង $(e^x-1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ នោះ ៖

$$f'(x)<0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និងលើ $(0,+\infty)$ ។

- លីមីតត្រង់ 0 ៖
  - កាលណា $x\to 0^-$ គេបាន $e^x-1\to 0^- \implies \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ ។

– កាលណា $x \to 0^+$ គេបាន $e^x - 1 \to 0^+ \implies \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

គ. អាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ $x = 1$ ៖

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$ នោះ $\boxed{x = 0 \text{ (អ័ក្ស } Oy\text{) ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- ត្រង់ $x = 1$ ៖

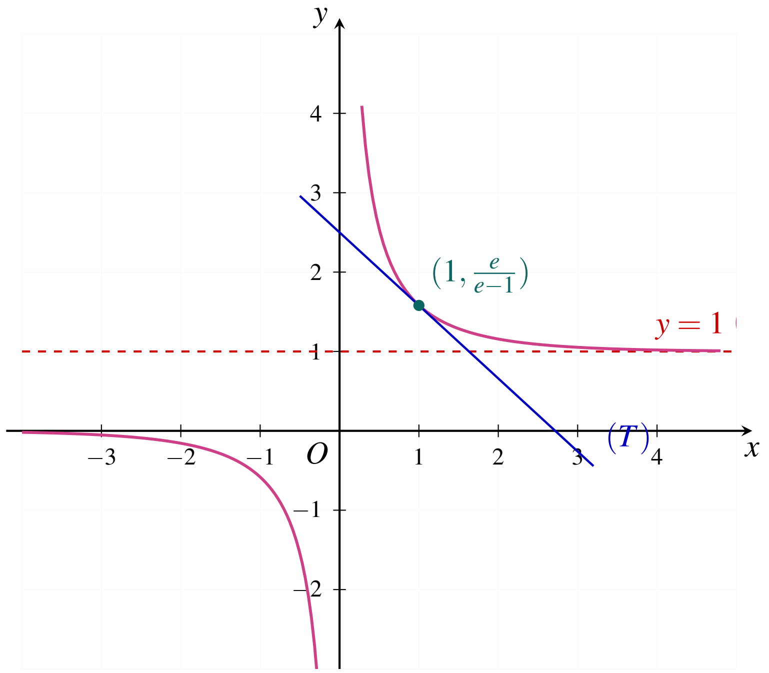
$$y_0 = f(1) = \frac{e}{e-1} \approx \frac{2.718}{1.718} \approx \mathbf{1.58}$$

$$f'(1) = -\frac{e}{(e-1)^2} \approx -\frac{2.718}{(1.718)^2} \approx -\mathbf{0.92}$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖

$$y - \frac{e}{e-1} = -\frac{e}{(e-1)^2}(x-1) \iff \boxed{y = -\frac{e}{(e-1)^2}x + \frac{e^2}{(e-1)^2}}$$

ឃ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖



លំហាត់ទី ៣៨

ក. តាង $g(x)=(x-1)e^x+1$ ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$ ។ គណនា $g'(x)$ គូសតារាងអថេរភាពនៃ g (មិនបាច់គណនាលីមីត) រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(x-2)e^x+x$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

២. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) និងសិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនោះ ។

៣. គណនា $f'(x)$ ប្រើលទ្ធផលផ្នែក a សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៤. បង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយដែលត្រូវគណនាកូអរដោនេ ហើយត្រង់ចំណុចរបត់នេះ បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

៥. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអនុគមន៍ $g(x)=(x-1)e^x+1$ ៖

- ដេរីវេ ៖ $g'(x)=1\cdot e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ។
- ដោយ $e^x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច x ៖

$$g'(x)=0 \iff x=0$$

  - បើ $x<0$ ៖ $g'(x)<0 \implies g$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
  - បើ $x>0$ ៖ $g'(x)>0 \implies g$ ជាអនុគមន៍កើន ។
- អប្បបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=0$ គឺ $g(0)=(0-1)e^0+1=-1+1=\mathbf{0}$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

- ទាញរកសញ្ញា $g(x)$ ៖ ដោយសារតម្លៃអប្បបរមានៃ g គឺ 0 នោះ ៖

$$\boxed{g(x)\geq 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x\in\mathbb{R} \quad (\text{ស្មើ } 0 \iff x=0)}$$

ខ. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=(x-2)e^x+x$ ៖

១. គណនាលីមីត ៖

- កាលណា $x\to-\infty$ គេបាន $(x-2)e^x=xe^x-2e^x\to 0$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0+(-\infty)=-\infty$$

- កាលណា $x \to +\infty$ គេបាន $(x-2)e^x \to +\infty$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

២. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty} (x-2)e^x = 0$ ៖

ដូច្នេះបន្ទាត់ $(\Delta): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។

- ទីតាំងធៀប ៖ ពិនិត្យ $f(x) - x = (x-2)e^x$ ដោយ $e^x > 0$ ៖
  - បើ $x < 2$ ៖ $x - 2 < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម** (Δ) ។
  - បើ $x = 2$ ៖ (C) **កាត់** (Δ) ត្រង់ចំណុច $(2,2)$ ។
  - បើ $x > 2$ ៖ $x - 2 > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ** (Δ) ។

៣. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

$$f'(x) = 1\cdot e^x + (x-2)e^x + 1 = (x-1)e^x + 1 = g(x)$$

តាមលទ្ធផលសំណួរ a គេបាន $f'(x) = g(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ (ស្មើ 0 ត្រង់ចំណុចទោល $x = 0$) ។ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍**កើនដាច់ខាតលើ** $\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

៤. ចំណុចរបត់ និងបន្ទាត់ប៉ះស្របអ័ក្ស Ox ៖

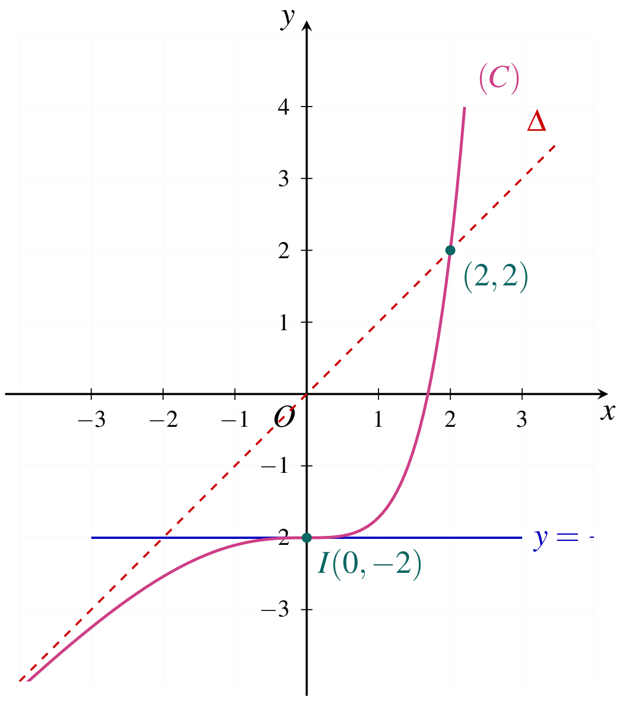
- $f''(x) = g'(x) = xe^x$ ។
- $f''(x) = 0 \iff x = 0$ ហើយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីអវិជ្ជមាន $(x<0)$ ទៅវិជ្ជមាន $(x>0)$ ត្រង់ $x = 0$ ដូច្នេះក្រាប (C) មានចំណុចរបត់ត្រង់ $x = 0$ ៖

$$y_0 = f(0) = (0-2)e^0 + 0 = \mathbf{-2} \implies \boxed{I(0,-2)\text{ ជាចំណុចរបត់}}$$

- មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ចំណុចរបត់គឺ $f'(0) = g(0) = 0$ ដូច្នេះបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ I មានសមីការ ៖

$$y - (-2) = 0(x-0) \iff \boxed{y = -2\text{ ជាបន្ទាត់ដេកស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស}}\,(Ox)$$

៥. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖



លំហាត់ទី ៣៩

កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) តាង $y = x\ln x - 1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

- អនុគមន៍ $y = f(x) = x\ln x - 1$ មានដែនកំណត់ $D = (0,+\infty)$ ។
- ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំណុច $A(1,-1)$ ៖

$$f(1) = 1\cdot\ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 \implies A(1,-1) \in (H)$$

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + uv'$ ៖

$$f'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 0 = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់អាប់ស៊ីស $x_A = 1$ គឺ ៖

$$f'(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = \mathbf{1}$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$ កំណត់ដោយរូបមន្ត ៖

$$y - y_A = f'(x_A)(x - x_A) \iff y - (-1) = 1(x-1)$$

$$y + 1 = x - 1 \iff \boxed{y = x - 2}$$

លំហាត់ទី ៤០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេក នៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ f រួចបង្ហាញថា f មានអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (d) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ ។ សង់ (d) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $\sqrt{e}\approx 1.6, \dfrac{1}{2e}\approx 0.2$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ គណនាលីមីត និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ មានន័យកាលណា $x>0$ ដូច្នេះដែនកំណត់គឺ $D=(0,+\infty)$ ។
- គណនាលីមីតត្រង់ 0^+ ៖

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln x\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ នាំឱ្យ $(+\infty)(-\infty)=-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty \implies \boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy) \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប } (C)}$$

- គណនាលីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ (ចំពោះ $n=2>0$) ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0 \implies \boxed{y=0 \text{ (អ័ក្ស } Ox) \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$$

ខ. គណនាដេរីវេ បង្ហាញតម្លៃអតិបរមា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេតាមរូបមន្ត $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ៖

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x^2-(\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

- ដោយសារ $x>0 \implies x^3>0$ ជានិច្ច នោះសញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើកន្សោម $1-2\ln x$ ៖

$$f'(x)=0 \iff 1-2\ln x=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

– ចំពោះ $0<x<\sqrt{e}$ ៖ $1-2\ln x>0 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើនដាច់ខាត) ។

– ចំពោះ $x > \sqrt{e}$ ៖ $1-2\ln x < 0 \implies f'(x) < 0$ (អនុគមន៍ចុះដាច់ខាត) ។

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមាន $(+)$ ទៅអវិជ្ជមាន $(-)$ ត្រង់ $x=\sqrt{e}$ នាំឱ្យ f មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=\sqrt{e}$ គឺ ៖

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e}} \approx \mathbf{0.184}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

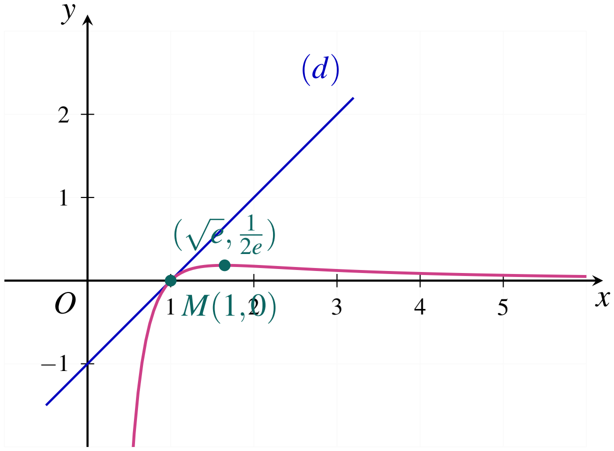
គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (d) និងសង់ក្រាប (C) ៖

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (d) ត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ គឺ ៖

$$f'(1) = \frac{1-2\ln 1}{1^3} = \frac{1-0}{1} = 1$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (d) កំណត់ដោយរូបមន្ត $y-y_M = f'(x_M)(x-x_M)$ ៖

$$y-0 = 1(x-1) \iff \boxed{(d): y = x-1}$$



លំហាត់ទី ៤១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f(x)$ មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកកូអរដោនេចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែល (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ង. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ រួចសង់បន្ទាត់ (T) និងក្រាប (C) ។ ដោយប្រើក្រាប (C) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $\frac{1+2\ln x}{x^2}=m$ មានឫស (យក $\ln 2\approx 0.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=(0,+\infty)$ ។
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty+2(-\infty)=-\infty \implies \boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^2}\right)=0+0=\mathbf{0} \implies \boxed{y=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតម្លៃអតិបរមា ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{(1+2\ln x)'\cdot x^2-(1+2\ln x)(x^2)'}{x^4}=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^2-2x(1+2\ln x)}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2x-4x\ln x}{x^4}=\frac{-4x\ln x}{x^4}=\boxed{-\frac{4\ln x}{x^3}}$$

- ដោយ $x^3>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $-\ln x$ ៖

$$f'(x)=0 \iff \ln x=0 \iff x=1$$

  - បើ $0<x<1$ ៖ $\ln x<0 \implies f'(x)>0$ (កើន) ។
  - បើ $x>1$ ៖ $\ln x>0 \implies f'(x)<0$ (ចុះ) ។
- អតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=1$ គឺ ៖

$$f(1)=\frac{1+2\ln 1}{1^2}=\frac{1+0}{1}=\mathbf{1}$$

គ. តារាងអថេរភាព និងចំណុចរបត់ ៖

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

- ដេរីវេទីពីរ $f''(x)$ ៖

$$f''(x) = -\frac{(4\ln x)'\cdot x^3 - 4\ln x\cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{\frac{4}{x}\cdot x^3 - 12x^2\ln x}{x^6} = -\frac{4x^2(1-3\ln x)}{x^6} = \frac{4(3\ln x - 1)}{x^4}$$

- $f''(x)=0 \iff 3\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \frac{1}{3} \iff x = e^{1/3} = \sqrt[3]{e} \approx 1.44$ ។
- អរដោនេចំណុចរបត់ ៖

$$f(e^{1/3}) = \frac{1+2\left(\frac{1}{3}\right)}{(e^{1/3})^2} = \frac{\frac{5}{3}}{e^{2/3}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3\sqrt[3]{e^2}}} \approx \mathbf{0.86}$$

ដូច្នេះចំណុចរបត់គឺ $\boxed{I\left(e^{1/3}, \frac{5}{3e^{2/3}}\right)}$ ។

ឃ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ចំណុចប្រសព្វនឹងអ័ក្ស Ox ៖

- $f(x)=0 \iff 1+2\ln x = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x_0 = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖

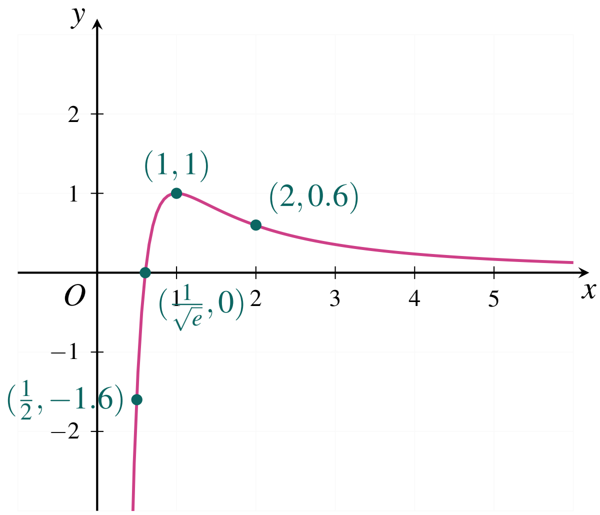
$$f'(e^{-1/2}) = -\frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)}{(e^{-1/2})^3} = \frac{2}{e^{-3/2}} = 2e^{3/2} = 2e\sqrt{e} \approx 2(2.72)(1.65) \approx \mathbf{8.9}$$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖

$$y - 0 = 2e^{3/2}\left(x - e^{-1/2}\right) \iff \boxed{y = 2e^{3/2}x - 2e}$$

ង. គណនាតម្លៃ សង់ក្រាប និងពិភាក្សាឫស ៖

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+2\ln(1/2)}{(1/2)^2} = 4(1-2\ln 2) \approx 4(1-1.4) = \mathbf{-1.6}$ ។
- $f(2) = \frac{1+2\ln 2}{4} \approx \frac{1+1.4}{4} = \mathbf{0.6}$ ។



- **ពិភាក្សាឫសនៃសមីការ $f(x)=m$ ៖**
  ផ្អែកតាមតារាងអថេរភាព និងក្រាប (C) ៖
  - បើ $m>1$ ៖ សមីការ**គ្មានឫស** ។
  - បើ $m=1$ ៖ សមីការមាន**ឫសឌុប** $x=1$ ។
  - បើ $0<m<1$ ៖ សមីការមាន**ឫសពីរផ្សេងគ្នា** ។
  - បើ $m\leq 0$ ៖ សមីការមាន**ឫសតែមួយគត់** ។

  ដូច្នេះសមីការមានឫសលុះត្រាតែ $\boxed{m\leq 1 \iff m\in(-\infty,1]}$ ។

លំហាត់ទី ៤២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់ គណនាលីមីតចុងដែន រួចទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ (ដឹងថា $x(x-1)>0$) និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L: y=-\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) និងសិក្សាទីតាំងធៀប ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) រួចកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=m$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា (យក $\ln 2\approx 0.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ គណនាលីមីតចុងដែន និងទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ ៖

- អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\frac{x-1}{x}>0$ និង $x\neq 0$ ៖
  សញ្ញានៃ $\frac{x-1}{x}$ វិជ្ជមានកាលណា $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ ។
  ដូច្នេះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ ។
- គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែន ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=-\frac{-\infty}{2}+\ln 1=+\infty+0=+\infty$ ។
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=-\frac{+\infty}{2}+\ln 1=-\infty+0=-\infty$ ។
  - កាលណា $x\to 0^-$ គេបាន $\frac{x-1}{x}\to\frac{-1}{0^-}=+\infty \Longrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\to+\infty$ ៖

    $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0+(+\infty)=+\infty \Longrightarrow \boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy\text{) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប } (C)}$$

  - កាលណា $x\to 1^+$ គេបាន $\frac{x-1}{x}\to\frac{0^+}{1}=0^+ \Longrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\to-\infty$ ៖

    $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\frac{1}{2}+(-\infty)=-\infty \Longrightarrow \boxed{x=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប } (C)}$$

ខ. គណនាដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងគូសតារាងអថេរភាព ៖

- សរសេរ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln(x-1)-\ln x$ (ចំពោះ $x>1$ ឬ $x<0$ ដែល $\frac{x-1}{x}>0$) ៖

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}+\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'(x)=\frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)}=\frac{-(x^2-x-2)}{2x(x-1)}=\frac{-(x-2)(x+1)}{2x(x-1)}$$

- ដោយសារ $x(x-1)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ នោះភាគបែង $2x(x-1)>0$ ជានិច្ច ។ ដូច្នេះសញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើកន្សោមភាគយក $-(x-2)(x+1)=-x^2+x+2$ ៖

$$f'(x)=0 \iff -(x-2)(x+1)=0 \iff x=-1 \quad \text{ឬ} \quad x=2$$

  - ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)$ ៖ $f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
  - ចំពោះ $x\in(-1,0)$ ៖ $f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
  - ចំពោះ $x\in(1,2)$ ៖ $f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
  - ចំពោះ $x\in(2,+\infty)$ ៖ $f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។

- តម្លៃបរមាធៀប ៖
  - អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=-\frac{-1}{2}+\ln\left(\frac{-2}{-1}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\ln\mathbf{2}\approx 0.5+0.7=\mathbf{1.2}$ ។
  - អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ $f(2)=-\frac{2}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\mathbf{1}-\ln\mathbf{2}\approx-1-0.7=-\mathbf{1.7}$ ។

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	d	$+$	0	$-$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$		

គ. បង្ហាញអាស៊ីមតូតទ្រេត និងសិក្សាទីតាំងធៀប ៖

- គណនាលីមីតនៃផលដក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\ln 1=0$$

ដូច្នេះបន្ទាត់ $(L): y=-\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $\pm\infty$ ។

- សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង (L) ៖

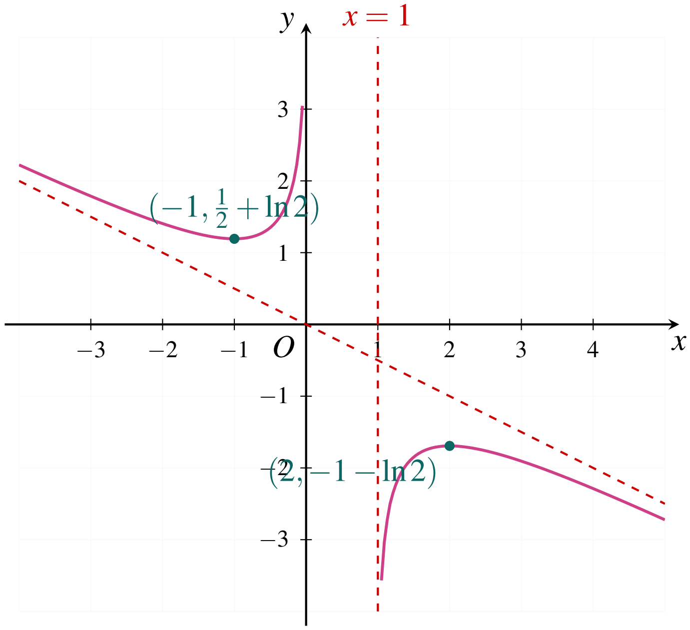
ពិនិត្យសញ្ញានៃ $f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ៖

  - ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ ៖ $\frac{1}{x}>0 \implies 1-\frac{1}{x}<1 \implies \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)<0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (L) ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

– ចំពោះ $x\in(-\infty,0)$ ៖ $\frac{1}{x}<0 \Longrightarrow 1-\frac{1}{x}>1 \Longrightarrow \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)>0 \Longrightarrow (C)$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ (L) ។

ឃ. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) រួចកំណត់តម្លៃ m ៖



- **កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ៖**

  សមីការ $-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=m$ មានឫសជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ។
  ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា លុះត្រាតែបន្ទាត់ $y=m$ កាត់ខ្នែងខាងឆ្វេងនៃក្រាប (C) (ត្រង់ចន្លោះ $x<0$) បានពីរចំណុចផ្សេងគ្នា ។
  ផ្អែកតាមតារាងអថេរភាព លើចន្លោះ $(-\infty,0)$ អនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2\approx 1.2$ ហើយកើនទៅ $+\infty$ ទាំងសងខាង ។
  ដូច្នេះបន្ទាត់ $y=m$ កាត់ក្រាបត្រង់ពីរចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន លុះត្រាតែ ៖

$$\boxed{m>\frac{1}{2}+\ln 2\approx 1.2}$$

លំហាត់ទី ៤៣

ក. អនុគមន៍ $g(x)=2x^2-\ln x+1$ កំណត់ចំពោះ $x>0$ ។ គណនា $g'(x)$ គូសតារាងអថេរភាពនៃ g (ដោយមិនបាច់គណនាលីមីតចុងដែន) រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2x+\frac{\ln x}{x}$ ចំពោះ $x>0$ មានក្រាប (C) តំណាងក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ (ឯកតា 1cm) ។

១. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ រួចទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

២. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y = 2x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹង (D) ។

៤. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) តាងអនុគមន៍ f ។

៥. បង្ហាញថាក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសនៅចន្លោះ $[0.5, 0.6]$ ។ គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C), បន្ទាត់ (T) និង (D) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (គេឱ្យ $\ln 2 = 0.7$ និង $\ln 0.6 = -0.5$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអនុគមន៍ $g(x) = 2x^2 - \ln x + 1$ លើ $(0, +\infty)$ ៖

- ដេរីវេ ៖ $g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$ ។
- ដោយ $x > 0$ នោះ ៖

$$g'(x) = 0 \iff 4x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2}$$

  - បើ $0 < x < \frac{1}{2}$ ៖ $g'(x) < 0 \implies g$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
  - បើ $x > \frac{1}{2}$ ៖ $g'(x) > 0 \implies g$ ជាអនុគមន៍កើន ។

- អប្បបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ គឺ ៖

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} + \ln 2 + 1 = \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 1.5 + 0.7 = \mathbf{2.2} > 0$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{3}{2} + \ln 2$	↗	

- ដោយសារតម្លៃអប្បបរមា $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ គេទាញបាន ៖

$$\boxed{g(x) > 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in (0, +\infty)}$$

ខ. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$ ៖

១. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

$$f'(x) = (2x)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 2 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x(1)}{x^2} = 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{2x^2 - \ln x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}$$

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ដោយសារ $g(x) > 0$ (តាមសំណួរ a) និង $x^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x) > 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in (0, +\infty)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0, +\infty)$ ជានិច្ច ។

២. **គណនាលីមីតចុងដែន និងតារាងអថេរភាព ៖**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x + \frac{\ln x}{x}\right) = 0 + (-\infty) = \boxed{-\infty}$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$) ។
  នាំឱ្យ បន្ទាត់ $\boxed{x = 0}$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty + 0 = \boxed{+\infty}$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$) ។

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

៣. **បង្ហាញអាស៊ីមតូតទ្រេត $(D): y = 2x$ និងសិក្សាទីតាំងធៀប ៖**

- ពិនិត្យផលដក ៖

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(D): y = 2x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x) - 2x = \frac{\ln x}{x}$ មានសញ្ញាដូច $\ln x$ (ព្រោះ $x > 0$) ៖
  - បើ $0 < x < 1 \implies \ln x < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (D) ។
  - បើ $x = 1 \implies f(1) = 2 = y_D(1) \implies (C)$ កាត់បន្ទាត់ (D) ត្រង់ចំណុច $(1, 2)$ ។
  - បើ $x > 1 \implies \ln x > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ (D) ។

៤. **សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ស្របនឹង $(D): y = 2x$ ៖**
បន្ទាត់ $(T) \parallel (D) \iff f'(x_0) = 2$ ៖

$$2 + \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 2 \iff \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 0 \iff 1 - \ln x_0 = 0 \iff x_0 = e$$

អរដោនេចំណុចប៉ះ ៖ $y_0 = f(e) = 2e + \frac{\ln e}{e} = 2e + \frac{1}{e} \approx 2(2.7) + 0.37 = 5.77$ ។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ ៖

$$y - \left(2e + \frac{1}{e}\right) = 2(x - e) \iff \boxed{(T): y = 2x + \frac{1}{e} \approx 2x + 0.37}$$

៥. **បង្ហាញឫសក្នុង $[0.5, 0.6]$ គណនាតម្លៃ និងសង់ក្រាប ៖**

- លើចន្លោះ $[0.5, 0.6]$ អនុគមន៍ f ជាប់ និងកើនដាច់ខាត ៖

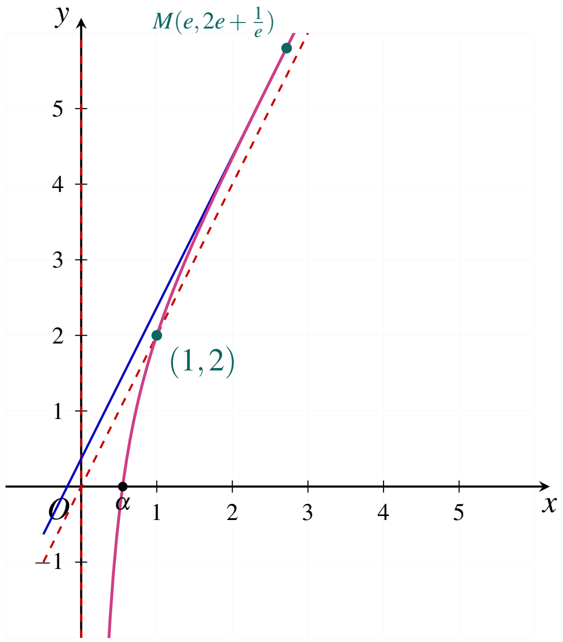
$$f(0.5) = 2(0.5) + \frac{\ln(1/2)}{0.5} = 1 - 2\ln 2 \approx 1 - 2(0.7) = \mathbf{-0.4} < \mathbf{0}$$

$$f(0.6) = 2(0.6) + \frac{\ln 0.6}{0.6} = 1.2 + \frac{-0.5}{0.6} \approx 1.2 - 0.83 = +\mathbf{0.37} > \mathbf{0}$$

ដោយសារ $f(0.5) \cdot f(0.6) < 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីស $\alpha \in [0.5, 0.6]$ ។

- គណនាតម្លៃ ៖

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-0.4}, \quad f(2) = 2(2) + \frac{\ln 2}{2} = 4 + \frac{0.7}{2} = \boxed{4.35}$$



លំហាត់ទី ៤៤

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x + 1}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។ គណនា $f(2)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) (យក $\ln 2 \approx 0.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូតឈរ ៖**

- សរសេរ ៖ $f(x) = x + \dfrac{\ln x + 1}{x}$ ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot(\ln x+1)\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$ ៖

  ដូច្នេះ $\boxed{x = 0 \text{ (អ័ក្ស } Oy) \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។

- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x+1}{x} = 0 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(x^2+\ln x+1)'\cdot x - (x^2+\ln x+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{\left(2x+\frac{1}{x}\right)x - x^2 - \ln x - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+1-x^2-\ln x-1}{x^2} = \boxed{\frac{x^2-\ln x}{x^2}}$$

- ពិនិត្យកន្សោម $x^2 - \ln x$ លើ $(0,+\infty)$ ៖

  តាង $\phi(x) = x^2 - \ln x \implies \phi'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$ ។

  $\phi'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \phi_{\min} = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 > 0$ ។

  ដូច្នេះ $x^2 - \ln x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x) > 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in (0,+\infty)$$

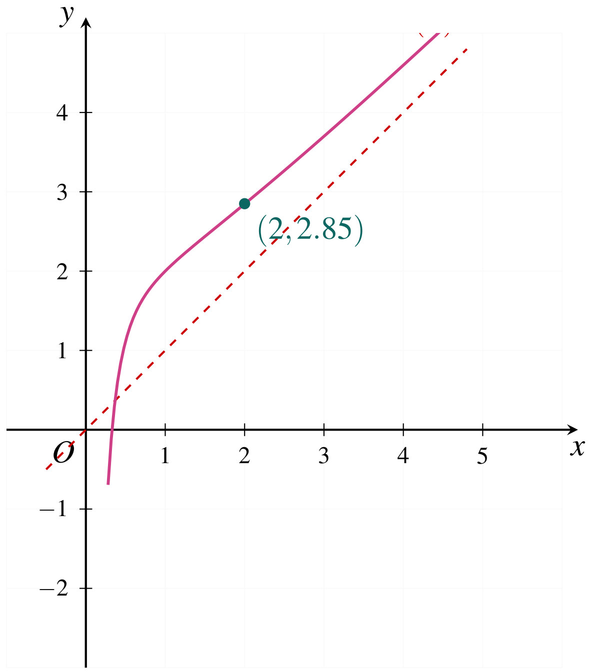
  ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍**កើនដាច់ខាតលើ** $(0,+\infty)$ ។

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (d) និងសង់ក្រាប ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{x}\right) = 0 \implies \boxed{(d): y = x \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។

- គណនា $f(2) = \frac{2^2+\ln 2+1}{2} = \frac{5+0.7}{2} = \mathbf{2.85}$ ។



លំហាត់ទី ៤៥

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \dfrac{2}{e}\approx 0.7$) ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=(0,+\infty)$ ។
- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right)=1-2\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)$$

ដោយកាលណា $x\to 0^+$ គេបាន $\dfrac{1}{x}\to +\infty$ និង $\ln x\to -\infty \implies \dfrac{\ln x}{x}\to -\infty$ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1-2(-\infty)=+\infty \implies \boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy\text{) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប } (C)}$$

- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right)=1-0=\mathbf{1}\implies \boxed{y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$$

ខ. គណនាដេរីវេ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេនៃ $f(x)=1-2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ៖

$$f'(x)=0-2\cdot\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)(x)'}{x^2}=-2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{2(\ln x-1)}{x^2}$$

- ដោយសារ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះសញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើកន្សោម $\ln x-1$ ៖

$$f'(x)=0 \iff \ln x-1=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$$

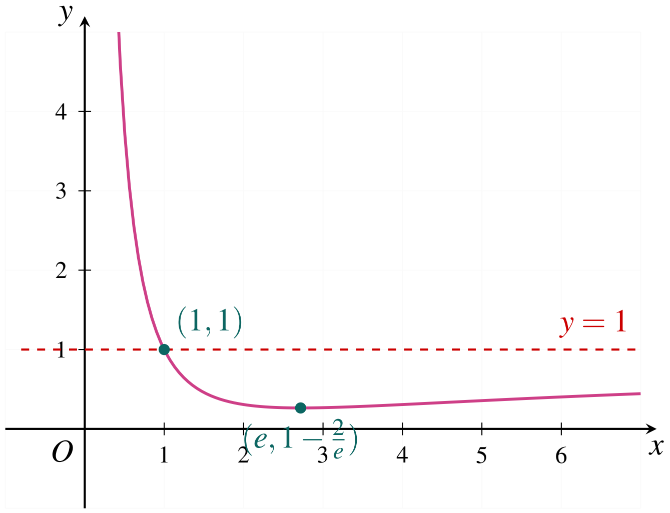
  - បើ $0<x<e$ ៖ $\ln x<1 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះដាច់ខាត) ។
  - បើ $x>e$ ៖ $\ln x>1 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើនដាច់ខាត) ។

- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ ៖

$$f(e)=1-\frac{2\ln e}{e}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{e}}\approx 1-0.74=\mathbf{0.26}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1-\dfrac{2}{e}$	↗	1

គ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖



ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ ៖

ចំពោះ $x \in [1,e]$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតដេក $y=1$ (ព្រោះ $\ln x \geq 0 \implies 1-\frac{2\ln x}{x} \leq 1$) ៖

$$S=\int_1^e [1-f(x)]\,dx=\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx=\left[(\ln x)^2\right]_1^e=(\ln e)^2-(\ln 1)^2=1-0=\mathbf{1}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S=1 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ៤៦

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃ (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $D: y=1$ រួចរកសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A ។

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \frac{2}{e}\approx 0.7, \ln 2\approx 0.7$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=(0,+\infty)$ ។
- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]=1+2(-\infty)=-\infty$$

នាំឱ្យ $\boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy\text{) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប } (C)}$ ។

- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]=1+2(0)=\mathbf{1}$$

នាំឱ្យ $\boxed{y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេនៃ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ៖

$$f'(x)=0+2\cdot\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)(x)'}{x^2}=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

- ដោយសារ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដូចគ្នានឹងសញ្ញានៃ $1-\ln x$ ៖

$$f'(x)=0 \iff 1-\ln x=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$$

  – បើ $0<x<e$ ៖ $1-\ln x>0 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើនដាច់ខាត) ។
  – បើ $x>e$ ៖ $1-\ln x<0 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះដាច់ខាត) ។

- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ ៖

$$f(e)=1+2\left(\frac{\ln e}{e}\right)=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{e}}\approx 1+0.74=\mathbf{1.74}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

គ. ចំណុចប្រសព្វ A និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (C) និងបន្ទាត់ $D: y=1$ ៖

$$f(x)=1 \iff 1+\frac{2\ln x}{x}=1 \iff \frac{2\ln x}{x}=0 \iff \ln x=0 \iff x=1$$

ដូច្នេះកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{A(1,1)}$ ។

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $A(1,1)$ ៖

$$f'(1)=\frac{2(1-\ln 1)}{1^2}=2(1-0)=2$$

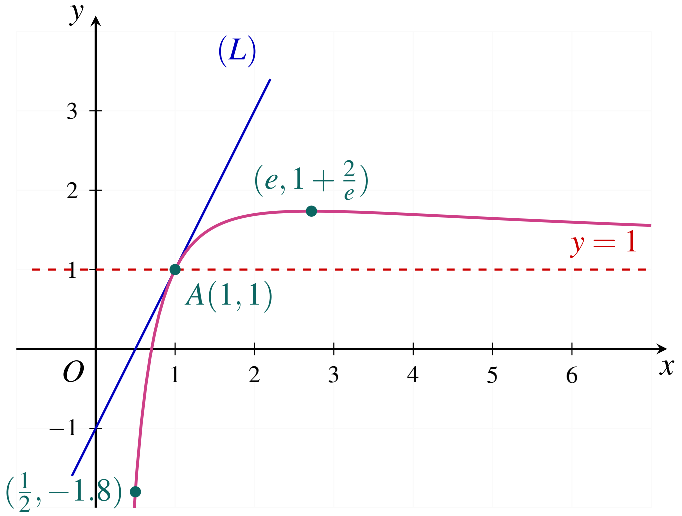
- សមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A ៖

$$y-y_A=f'(x_A)(x-x_A) \iff y-1=2(x-1) \iff \boxed{(L): y=2x-1}$$

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និងសង់បន្ទាត់ (L) ព្រមទាំងក្រាប (C) ៖

- គណនាតម្លៃ $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ៖

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+2\left(\frac{\ln(1/2)}{1/2}\right)=1+4(-\ln 2)=1-4\ln 2\approx 1-4(0.7)=-\mathbf{1.8}$$



លំហាត់ទី ៤៧

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក រួចរកសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e\approx 2.7, \dfrac{2}{e}\approx 0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស និងគណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយ (C) អ័ក្ស Ox បន្ទាត់ $x=1, x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=(0,+\infty)$ ។
- លីមីតត្រង់ 0^+ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2(1-(-\infty))=+\infty$$

នាំឱ្យ $x=0$ (អ័ក្ស Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

- លីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖ តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ៖

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2(1-0)=\mathbf{2}$$

នាំឱ្យ $\boxed{y=2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=2\left(-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}\right)=\frac{2(\ln x-1)}{x^2}$$

- ដោយសារ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$f'(x)=0 \iff \ln x-1=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$$

– បើ $0<x<e$ ៖ $\ln x<1 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
– បើ $x>e$ ៖ $\ln x>1 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។

- តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=e$ គឺ ៖

$$f(e)=2\left(1-\frac{\ln e}{e}\right)=\mathbf{2-\frac{2}{e}}\approx 2-0.74=\mathbf{1.26}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2-\frac{2}{e}$	↗	2

គ. ចំណុចប្រសព្វ M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសប្រសព្វនឹងអាស៊ីមតូតដេក $y=2$ ៖

$$f(x)=2 \iff 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies \boxed{M(1,2)}$$

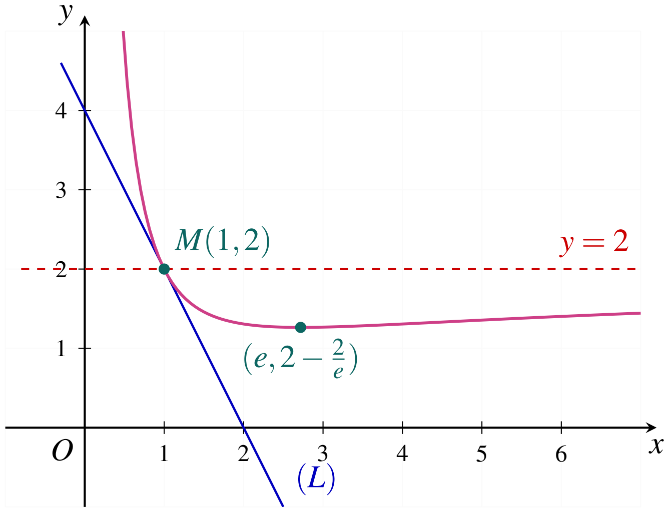
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $M(1,2)$ ៖

$$f'(1)=\frac{2(\ln 1-1)}{1^2}=-2$$

- សមីការបន្ទាត់ (L) ៖

$$y-2=-2(x-1) \iff \boxed{(L): y=-2x+4}$$

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖



ង. កំណត់តម្លៃ k និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

- **កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ៖**

  ផ្អែកតាមតារាងអថេរភាព តម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើ $(0,+\infty)$ គឺ $f(x)\geq 2-\dfrac{2}{e}$ ជានិច្ច ។

  ដូច្នេះសមីការ $f(x)=k$ មានឫសលុះត្រាតែ ៖

  $$\boxed{k\geq 2-\frac{2}{e}\approx 1.26}$$

- **គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយ (C) អ័ក្ស Ox បន្ទាត់ $x=1, x=e$ ៖**

  លើចន្លោះ $[1,e]$ គេបាន $f(x)\geq 2-\dfrac{2}{e}>0$ នាំឱ្យក្រាបស្ថិតនៅខាងលើអ័ក្ស Ox ៖

  $$S=\int_1^e 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=2\int_1^e\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=2\left[x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$$

  $$S=2\left(\left(e-\frac{1}{2}\right)-(1-0)\right)=2\left(e-\frac{3}{2}\right)=\mathbf{2e-3}$$

  ជំនួស $e\approx 2.718$ គេបាន $\boxed{S=2e-3\approx 2.44 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$ ។

លំហាត់ទី ៤៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ផ្ចិតឆ្លុះនោះ ។

ង. សង់ក្រាប (C) (យក $e \approx 2.7, e^{-1} \approx 0.36$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- ដោយសារ $e^x + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះដែនកំណត់គឺ $D = \mathbb{R}$ ។
- កាលណា $x \to -\infty$ គេបាន $e^x \to 0$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -\mathbf{1} \implies \boxed{y = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } -\infty}$$

- កាលណា $x \to +\infty$ គេបាន $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{1} \implies \boxed{y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$$

ខ. ដេរីវេ និងបរមាធៀប ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}$$

- ដោយ $e^x > 0$ និង $(e^x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$f'(x) > 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍**កើនដាច់ខាតលើ** $\mathbb{R}$ ហើយ**គ្មានតម្លៃបរមាធៀប**ឡើយ ។

គ. អនុគមន៍សេស និងផ្ចិតឆ្លុះ ៖

- ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} \implies -x \in \mathbb{R}$ ៖

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

ដូច្នេះ f **ជាអនុគមន៍សេស** នាំឱ្យគល់កូអរដោនេ $\boxed{O(0,0) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះ}}$ នៃក្រាប (C) ។

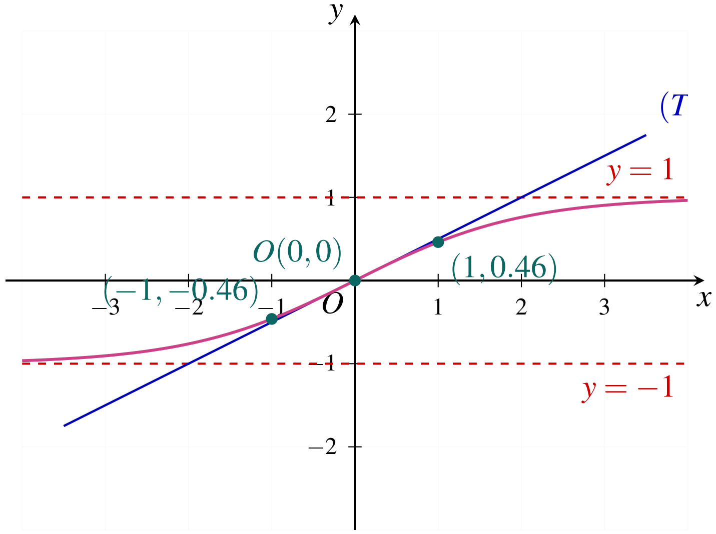
ឃ. តារាងអថេរភាព និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $O(0,0)$ ៖

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	0	1

- មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $O(0,0)$ ៖ $f'(0)=\dfrac{2e^0}{(e^0+1)^2}=\dfrac{2(1)}{(1+1)^2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ $O(0,0)$ ៖

$$y-0=\frac{1}{2}(x-0)\iff \boxed{y=\frac{1}{2}x}$$

ង. **សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖**



លំហាត់ទី ៤៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស និងបញ្ជាក់ផ្ចិតឆ្លុះ ។

ឃ. បន្ទាត់ $(T): y=3$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ M ។ គណនាកូអរដោនេនៃ M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច M ។

ង. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f និងសង់ក្រាប (C) (យក $e\approx 2.7, e^{-1}\approx 0.36$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់ លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖**

- អនុគមន៍មានន័យកាលណា $e^x-1\neq 0\iff e^x\neq 1\iff x\neq 0$ ៖
  ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$ ។
- លីមីតត្រង់ $\pm\infty$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{0+1}{0-1}=-\mathbf{1} \implies$ $\boxed{y=-1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } -\infty}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{1+0}{1-0}=\mathbf{1} \implies$ $\boxed{y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$ ។

- លីមីតត្រង់ 0 ៖
  - $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ ៖

  ដូច្នេះ $\boxed{x=0 \text{ (អ័ក្ស } Oy) \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងបរមាធៀប ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\boxed{-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}}$$

- ដោយ $e^x>0$ និង $(e^x-1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq0$ គេបាន ៖

$$f'(x)<0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(-\infty,0)$ និងលើ $(0,+\infty)$ ហើយគ្មានតម្លៃបរមាធៀបឡើយ ។

គ. អនុគមន៍សេស និងផ្ចិតឆ្លុះ ៖

- ចំពោះគ្រប់ $x\neq0 \implies -x\neq0$ ៖

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}=\frac{1+e^x}{1-e^x}=-\frac{e^x+1}{e^x-1}=-f(x)$$

ដូច្នេះ f ជា**អនុគមន៍សេស** នាំឱ្យគល់កូអរដោនេ $\boxed{O(0,0) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះ}}$ នៃក្រាប (C) ។

ឃ. ចំណុច M និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M ៖

- រក M ៖ $f(x)=3 \iff \dfrac{e^x+1}{e^x-1}=3 \iff e^x+1=3e^x-3 \iff 2e^x=4 \iff e^x=2 \iff x=\ln2$ ៖

  ដូច្នេះកូអរដោនេចំណុច M គឺ $\boxed{M(\ln2,3)}$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖

$$f'(\ln2)=-\frac{2e^{\ln2}}{(e^{\ln2}-1)^2}=-\frac{2(2)}{(2-1)^2}=-4$$

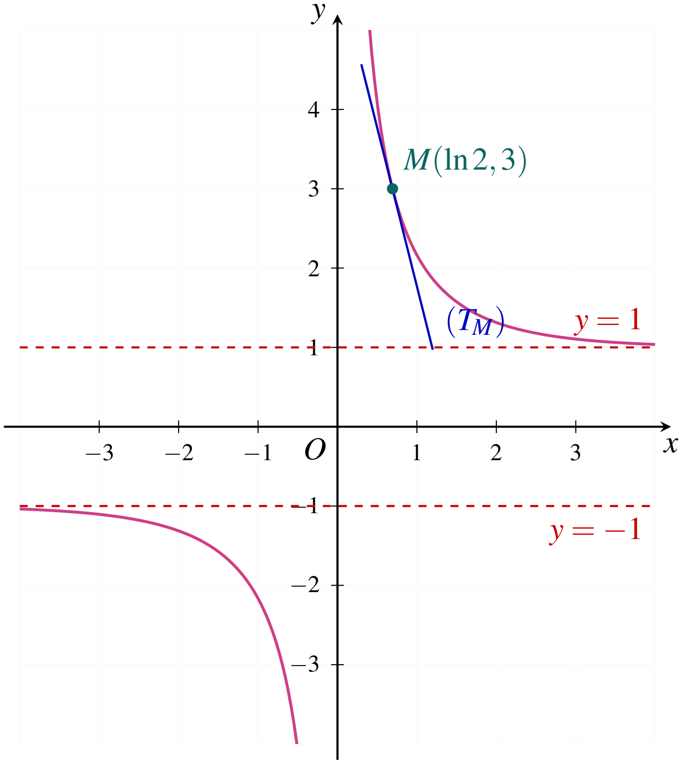
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M(\ln2,3)$ ៖

$$y-3=-4(x-\ln2) \iff \boxed{y=-4x+4\ln2+3}$$

(តម្លៃប្រហែល ៖ $y\approx-4x+5.77$) ។

ង. តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	$\longrightarrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1



លំហាត់ទី ៥០

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែល $y = f(x) = x^2 e^{-x}$ មានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f ។

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងរកសមីការអាស៊ីមតូត ។

គ. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់អាប់ស៊ីស $x = 2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ឃ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

ង. គូសតារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **ដែនកំណត់ ៖** $\boxed{D = \mathbb{R}}$ ។

ខ. **គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូត ៖**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ ។

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \mathbf{0}$ (តាមលីមីតគ្រឹះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$) ៖
  ដូច្នេះ $\boxed{y = 0 \text{ (អ័ក្ស } Ox) \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } +\infty}$ ។

គ. បន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $x = 2$ ៖

- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$ ។
- ត្រង់ $x = 2$ ៖ $f'(2) = 2(2-2)e^{-2} = \mathbf{0}$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) គឺ ៖

$$y - f(2) = 0(x-2) \iff \boxed{y = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0.54}$$

បន្ទាត់នេះមានទម្រង់ $y =$ ថេរ ដូច្នេះវាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស (Ox) ។

ឃ. ដេរីវេ សញ្ញា និងបរមាធៀប ៖

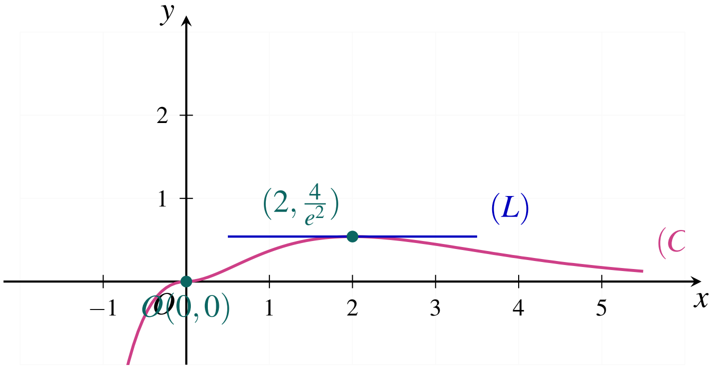
- ដោយ $e^{-x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $x(2-x)$ ៖

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ឬ} \quad x = 2$$

  – បើ $x < 0$ ឬ $x > 2$ ៖ $f'(x) < 0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
  – បើ $0 < x < 2$ ៖ $f'(x) > 0$ (អនុគមន៍កើន) ។
- តម្លៃបរមាធៀប ៖
  – អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $f(0) = 0^2e^0 = \mathbf{0}$ ។
  – អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = \mathbf{\frac{4}{e^2}} \approx \mathbf{0.54}$ ។

ង. តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0



លំហាត់ទី ៥១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x - 2 + e^{1-x}$ តាងដោយក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ D គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត ។

ខ. រកដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងបរមាធៀបនៃ f ។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយបន្ទាត់ (L) កាត់តាមគល់តម្រុយ ហើយស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ឃ. គូសតារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D = \mathbb{R}}$ ។
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 2 + e^{+\infty} = +\infty$ (ព្រោះ $e^{1-x} \to +\infty$) ។
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 2 + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty$ ។
- ពិនិត្យ $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ ៖

  ដូច្នេះបន្ទាត់ $\boxed{(\Delta): y = x - 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។

ខ. ដេរីវេ សញ្ញា និងបរមាធៀប ៖

- $f'(x) = 1 - e^{1-x}$ ។
- $f'(x) = 0 \iff e^{1-x} = 1 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$ ។
  - បើ $x < 1$ ៖ $1 - x > 0 \implies e^{1-x} > 1 \implies f'(x) < 0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
  - បើ $x > 1$ ៖ $1 - x < 0 \implies e^{1-x} < 1 \implies f'(x) > 0$ (អនុគមន៍កើន) ។
- អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ ៖

$$f(1) = 1 - 2 + e^{1-1} = -1 + 1 = \mathbf{0}$$

គ. ទីតាំងធៀបរវាង (C) និងបន្ទាត់ (L) ៖

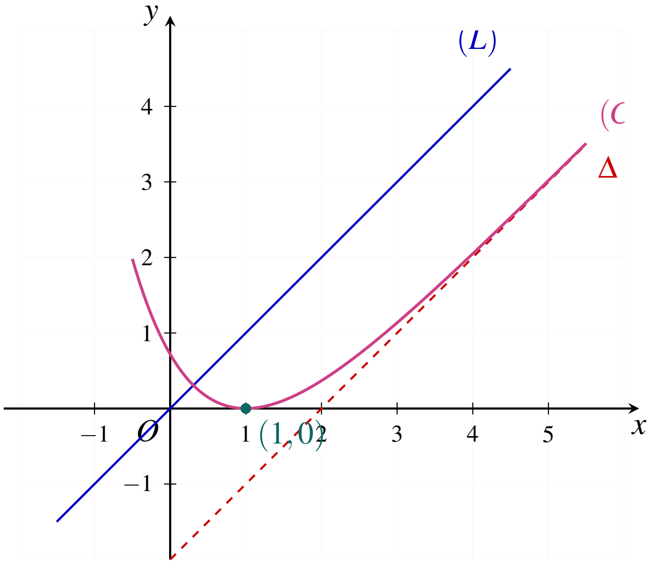
- បន្ទាត់ (L) កាត់តាមគល់ $O(0,0)$ និងស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x - 2$ (មេគុណប្រាប់ទិស $m = 1$) មានសមីការគឺ $\boxed{(L): y = x}$ ។
- ពិនិត្យផលដក $f(x) - x = -2 + e^{1-x}$ ៖

$$f(x) - x = 0 \iff e^{1-x} = 2 \iff 1 - x = \ln 2 \iff x = 1 - \ln 2 \approx 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$$

  - បើ $x < 1 - \ln 2$ ៖ $e^{1-x} > 2 \implies f(x) - x > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ** (L) ។
  - បើ $x = 1 - \ln 2$ ៖ (C) **កាត់** (L) ត្រង់ចំណុច $(1 - \ln 2, 1 - \ln 2)$ ។
  - បើ $x > 1 - \ln 2$ ៖ $e^{1-x} < 2 \implies f(x) - x < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម** (L) ។

ឃ. តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



លំហាត់ទី ៥២

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) កាលណា $x\to-\infty$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀប ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{1+e^x}$ ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) កាលណា $x\to+\infty$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀប ។

ង. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ច. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **គណនាលីមីត ៖**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+2-0=-\infty$ (ព្រោះ $e^x\to 0$) ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+2-4=+\infty$ (ព្រោះ $\dfrac{4e^x}{1+e^x}\to 4$) ។

ខ. **អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_1) ខាង $-\infty$ និងទីតាំងធៀប ៖**

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{1+e^x}\right) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{(d_1): y = x+2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } -\infty}$ ។
- ដោយសារ $-\dfrac{4e^x}{1+e^x} < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម**បន្ទាត់ (d_1) ជានិច្ច ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់កន្សោមនៃ $f(x)$ ៖

$$f(x) = x+2-\frac{4e^x}{1+e^x} = x+2-\frac{4(e^x+1-1)}{1+e^x} = x+2-4+\frac{4}{1+e^x} = \boxed{x-2+\frac{4}{1+e^x}}$$

ឃ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (d_2) ខាង $+\infty$ និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{1+e^x} = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{(d_2): y = x-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។
- ដោយសារ $\dfrac{4}{1+e^x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះក្រាប (C) ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**បន្ទាត់ (d_2) ជានិច្ច ។

ង. អថេរភាព និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $x=0$ ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = 1-\frac{4e^x(1+e^x)-4e^{2x}}{(1+e^x)^2} = 1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2} = \boxed{\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}$$

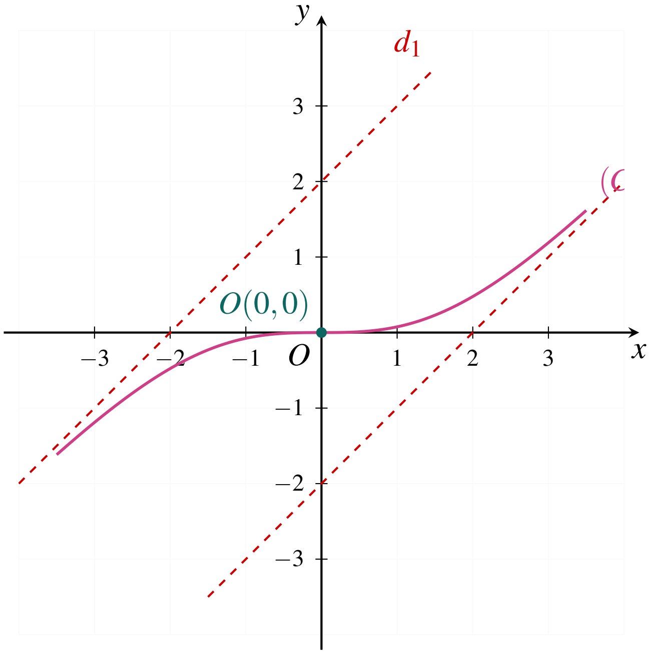
- ដោយសារ $(e^x-1)^2 \geq 0$ និង $(e^x+1)^2 > 0$ នោះ $f'(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ (ស្មើ $0 \iff x=0$) ។
ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍**កើនដាច់ខាតលើ** $\mathbb{R}$ ។
- ត្រង់ $x=0$ ៖ $f(0) = 0+2-\dfrac{4(1)}{1+1} = 2-2 = \mathbf{0}$ និង $f'(0) = 0$ ។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) គឺ ៖

$$y-0 = 0(x-0) \iff \boxed{y = 0 \text{ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស } Ox)}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ច. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ៖

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ



លំហាត់ទី ៥៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$ មានក្រាបក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. ១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)=x-1+\frac{2}{1+e^x}=x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}$ ។

២. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+1$ និង $(d_2): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

៤. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និងបន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស និងសិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ រួចសង់ក្រាប $(C),(d_1),(d_2),(L)$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ១. **ផ្ទៀងផ្ទាត់កន្សោម ៖**

$$f(x)=x-\frac{(e^x+1)-2}{e^x+1}=x-1+\frac{2}{1+e^x}$$

$$f(x)=x-\frac{2e^x-(e^x+1)}{e^x+1}=x-\frac{2e^x}{e^x+1}+1=x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}$$

សមភាពទាំងពីរត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់រួចរាល់ ។

២. **គណនាលីមីត ៖**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)=-\infty+1-0=-\infty$ ។

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{1+e^x}\right) = +\infty - 1 + 0 = +\infty$ ។

ⓒ. អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2e^x}{1+e^x}\right) = 0 \implies \boxed{(d_1): y = x+1 \text{ ខាង } -\infty}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^x} = 0 \implies \boxed{(d_2): y = x-1 \text{ ខាង } +\infty}$ ។

ⓓ. ទីតាំងធៀប ៖

- $f(x)-(x+1) = -\dfrac{2e^x}{1+e^x} < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោម (d_1) ជានិច្ច ។
- $f(x)-(x-1) = \dfrac{2}{1+e^x} > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅខាងលើ (d_2) ជានិច្ច ។

ខ. អនុគមន៍សេស និងអថេរភាព ៖

- $f(-x) = -x - \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x - \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = -x + \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -\left(x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right) = -f(x)$ ៖

  ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស និងមាន $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0}$$

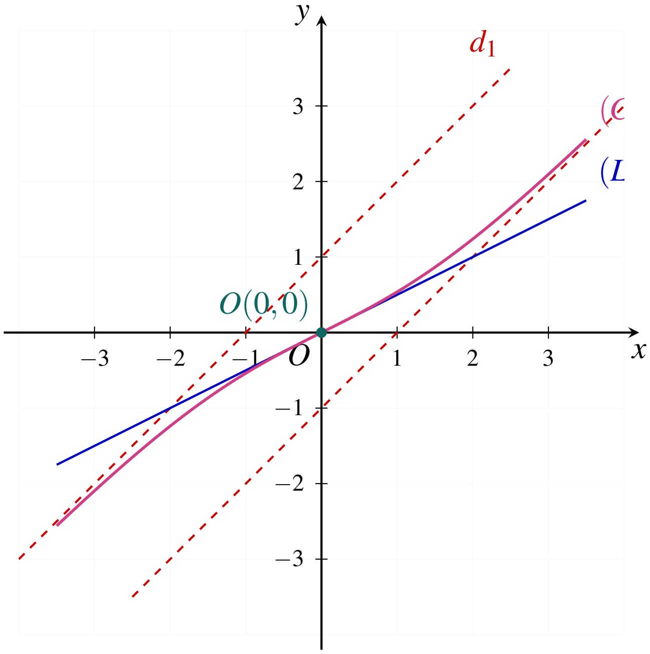
ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

គ. បន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ $x=0$ និងសង់ក្រាប ៖

- $f(0)=0$ និង $f'(0) = \dfrac{e^0+1}{(e^0+1)^2} = \dfrac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ ៖

  សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(L): y = \frac{1}{2}x}$ ។



លំហាត់ទី ៥៤

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1): y=x+2$ និង $(d_2): y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងក្រាប (C) ធៀបនឹង $(d_1),(d_2)$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព គូសតារាងអថេរភាព និងសរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(\ln 2,\ln 2)$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+2-0=-\infty$ (ព្រោះ $e^x\to 0$) ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+2-4=+\infty$ (ព្រោះ $\dfrac{4e^x}{e^x+2}\to 4$) ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)=0 \Longrightarrow$ $\boxed{(d_1): y=x+2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } -\infty}$ ។
- សរសេរ $f(x)=x+2-\dfrac{4(e^x+2-2)}{e^x+2}=x+2-4+\dfrac{8}{e^x+2}=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$ ៖

  $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0 \Longrightarrow$ $\boxed{(d_2): y=x-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។

- ទីតាំងធៀប ៖
  - $f(x)-(x+2)=-\dfrac{4e^x}{e^x+2}<0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម** (d_1) ជានិច្ច ។
  - $f(x)-(x-2)=\dfrac{8}{e^x+2}>0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ** (d_2) ជានិច្ច ។

គ. អថេរភាព និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A(\ln 2, \ln 2)$ ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=1-\frac{4e^x(e^x+2)-4e^x\cdot e^x}{(e^x+2)^2}=1-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x+2)^2-8e^x}{(e^x+2)^2}=\boxed{\frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}}$$

- $f'(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ (ស្មើ $0 \iff e^x=2 \iff x=\ln 2$) ។
  ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍**កើនដាច់ខាត**លើ $\mathbb{R}$ ។
- ត្រង់ $A(\ln 2, \ln 2)$ ៖

$$f(\ln 2)=\ln 2+2-\frac{4(2)}{2+2}=\ln 2+2-2=\ln \mathbf{2}$$

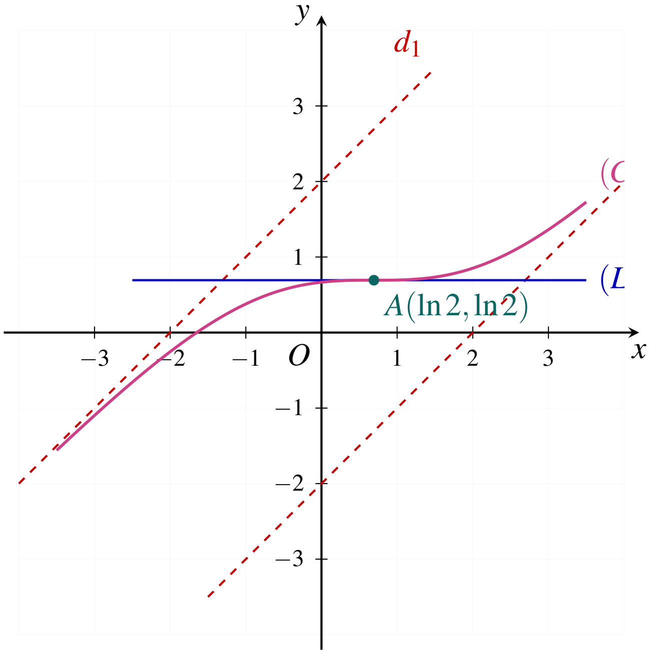
$$f'(\ln 2)=\frac{(2-2)^2}{(2+2)^2}=\mathbf{0}$$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ A គឺ ៖

$$y-\ln 2=0(x-\ln 2) \iff \boxed{y=\ln 2\approx 0.69 \text{ (បន្ទាត់ដេកស្របអ័ក្ស } Ox)}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

ឃ. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(d_1),(d_2)$ និង (L) ៖



លំហាត់ទី ៥៥

A. អនុគមន៍ $h(x) = 1 + e^x(1-x)$ កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។ ដោយពុំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $h(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

B. អនុគមន៍ $y = f(x) = 2 + x(1+e^x)$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ ។
- ខ. បំភ្លឺថា $y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។
- គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A ។
- ឃ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃខ្សែកោង (C) ជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x + 2$ ។
- ង. សង់ក្រាប (C) លើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

ដំណោះស្រាយ

A. **សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $h(x) = 1 + e^x(1-x)$ លើ $\mathbb{R}$ ៖**

- គណនាដេរីវេ $h'(x)$ តាមរូបមន្តផលគុណ ៖

$$h'(x) = 0 + (e^x)'(1-x) + e^x(1-x)' = e^x(1-x) + e^x(-1) = e^x(1-x-1) = \boxed{-xe^x}$$

- ដោយសារ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះសញ្ញានៃ $h'(x)$ ដូចសញ្ញានៃ $-x$ ៖

$$h'(x) = 0 \iff x = 0$$

– បើ $x < 0$ ៖ $-x > 0 \implies h'(x) > 0$ (អនុគមន៍កើន) ។
– បើ $x > 0$ ៖ $-x < 0 \implies h'(x) < 0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។

- អនុគមន៍ h មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=0$ គឺ ៖

$$h(0)=1+e^{0}(1-0)=1+1(1)=\mathbf{2}$$

- លើចន្លោះ $(-\infty,0]$ ៖ h កើនពី 1 (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}(1-x)=0$) ដល់ $2>0$ ដូច្នេះ $h(x)>0$ ជានិច្ច ។
- លើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ៖ h ជាប់ និងចុះដាច់ខាតពី 2 ទៅ $-\infty$ ។
  ដោយ $h(1)=1+e^{1}(0)=1>0$ និង $h(2)=1+e^{2}(-1)=1-e^{2}\approx 1-7.39=-6.39<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានចំនួនពិតតែមួយគត់ $\alpha\in(1,2)$ (តម្លៃប្រហែល $\alpha\approx 1.28$) ដែលធ្វើឱ្យ $h(\alpha)=0$ ។
- សន្និដ្ឋានសញ្ញានៃ $h(x)$ ៖

$$\begin{cases} h(x)>0 & \text{ចំពោះ } x\in(-\infty,\alpha) \\ h(x)=0 & \text{ចំពោះ } x=\alpha\approx 1.28 \\ h(x)<0 & \text{ចំពោះ } x\in(\alpha,+\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	⋮	$-$	
$h(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

B. **សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=2+x(1+e^{x})=x+2+xe^{x}$ ៖**

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2+xe^{x})=-\infty+2+0=\boxed{-\infty}$ (ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$) ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[2+x(1+e^{x})]=2+(+\infty)(+\infty)=\boxed{+\infty}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ៖

ពិនិត្យផលដក ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{d: y=x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

(សម្គាល់ ៖ ក្នុងប្រធានដើមមានការច្រឡំសរសេរខាង $+\infty$ តែតាមការគណនាពិតប្រាកដគឺខាង $-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$) ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ៖

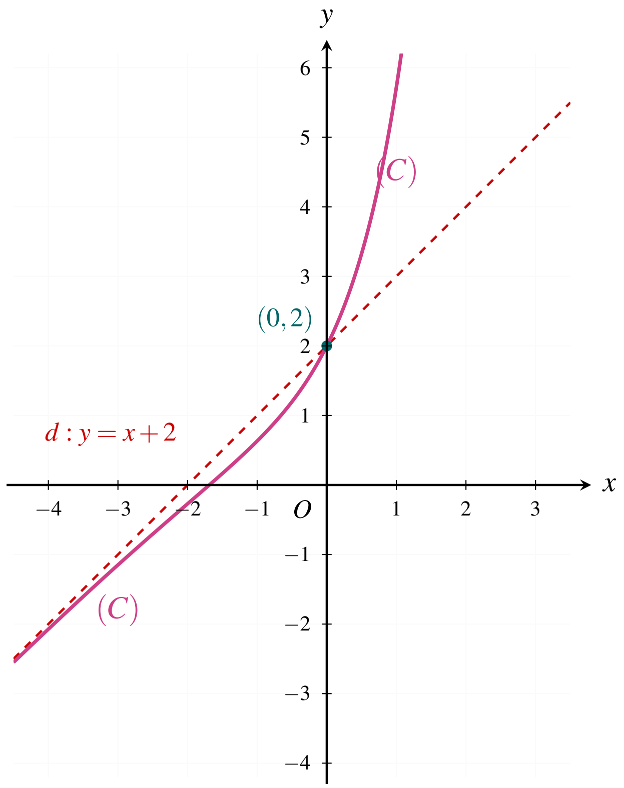
- គណនាដេរីវេ ៖ $f'(x)=[x+2+xe^{x}]'=1+0+(e^{x}+xe^{x})=1+(x+1)e^{x}+1$
  ឬ $f'(x)=2+(x+1)e^{x}$ ។
- ពិនិត្យតម្លៃអប្បបរមានៃ $k(x)=2+(x+1)e^{x}$ ៖
  $k'(x)=(x+2)e^{x}=0 \iff x=-2$ នាំឱ្យ $k(-2)=2-e^{-2}\approx 1.86>0$ ។
  ដូច្នេះ $f'(x)\geq 2-e^{-2}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
  នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ជានិច្ច ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

ឃ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C) ជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $d: y=x+2$ ៖
ពិនិត្យសញ្ញានៃផលដក ៖ $f(x)-(x+2)=xe^x$ ។
ដោយសារ $e^x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះសញ្ញានៃផលដកអាស្រ័យលើ x ៖

- បើ $x<0 \implies f(x)-y_d<0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម**បន្ទាត់ d ។
- បើ $x=0 \implies f(0)-y_d(0)=0 \implies (C)$ កាត់បន្ទាត់ d ត្រង់ចំណុច $(0,2)$ ។
- បើ $x>0 \implies f(x)-y_d>0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**បន្ទាត់ d ។

ង. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត d ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D=\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$d: y=x+2$	$y=x+2$
ប្រសព្វអ័ក្ស (Oy)	$(0,2)$	$(0,2)$
ទីតាំងធៀបជាមួយ d	(C) នៅក្រោម d លើ $(-\infty,0)$	កាត់ d ត្រង់ $(0,2)$

លំហាត់ទី ៥៦

A. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^x-1$ ។ គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

B. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ ។

ក. គណនា $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរទី (A) ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $(D): y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (D) ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដែលស្របនឹង (D) ។

ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C) ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។ (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើ 1cm) ។

ដំណោះស្រាយ

A. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=(1-x)e^x-1$ ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=(1-x)'e^x+(1-x)(e^x)'-0=-e^x+(1-x)e^x=e^x(-1+1-x)=\boxed{-xe^x}$$

- ដោយសារ $e^x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-x$ ៖

$$f'(x)=0 \iff x=0$$

  – បើ $x<0$ ៖ $f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន ។
  – បើ $x>0$ ៖ $f'(x)<0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។

- តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=0$ គឺ ៖

$$f(0)=(1-0)e^0-1=1(1)-1=\mathbf{0}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

- **ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ៖**
ដោយសារតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតនៃ f គឺស្មើសូន្យ នោះគ្រប់តម្លៃទាំងអស់នៃ $f(x)$ សុទ្ធតែតូចជាង ឬស្មើសូន្យ ៖

$$\boxed{f(x)\le 0 \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x\in\mathbb{R} \quad (\text{ស្មើ } 0 \iff x=0)}$$

B. សិក្សាអនុគមន៍ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ លើ $\mathbb{R}$ ៖

ក. គណនាលីមីត ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាពនៃ g ៖

- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-xe^x+2-x)=0-0+2-(-\infty)=\boxed{+\infty}$ ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^x=0,\ \lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)(e^x+1) = (-\infty)(+\infty) = \boxed{-\infty}$ ។
- **ដេរីវេ ៖** $g'(x) = -e^x + (2-x)e^x - 1 = (1-x)e^x - 1 = \boxed{f(x)}$ ។
- **សញ្ញា** $g'(x)$ **៖** តាមសំណួរទី (A) គេបាន $g'(x) = f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ និង $g'(0) = 0$ ។
  ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
- **តារាងអថេរភាពនៃ** g **៖** $(g(0) = (2-0)e^0 + 2 - 0 = 4)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត (D) និងបញ្ជាក់ទីតាំងធៀប ៖

- ផលដក ៖ $g(x) - (2-x) = (2-x)e^x$ ។
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x) - (2-x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x) = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(D): y = 2-x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ ដោយ $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ នោះសញ្ញានៃផលដកអាស្រ័យលើ $2-x$ ៖
  - បើ $x < 2 \implies g(x) - y_D > 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**បន្ទាត់ (D) ។
  - បើ $x = 2 \implies g(2) = 0 = y_D(2) \implies (C)$ កាត់ (D) ត្រង់ចំណុច $(2,0)$ ។
  - បើ $x > 2 \implies g(x) - y_D < 0 \implies (C)$ ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម**បន្ទាត់ (D) ។

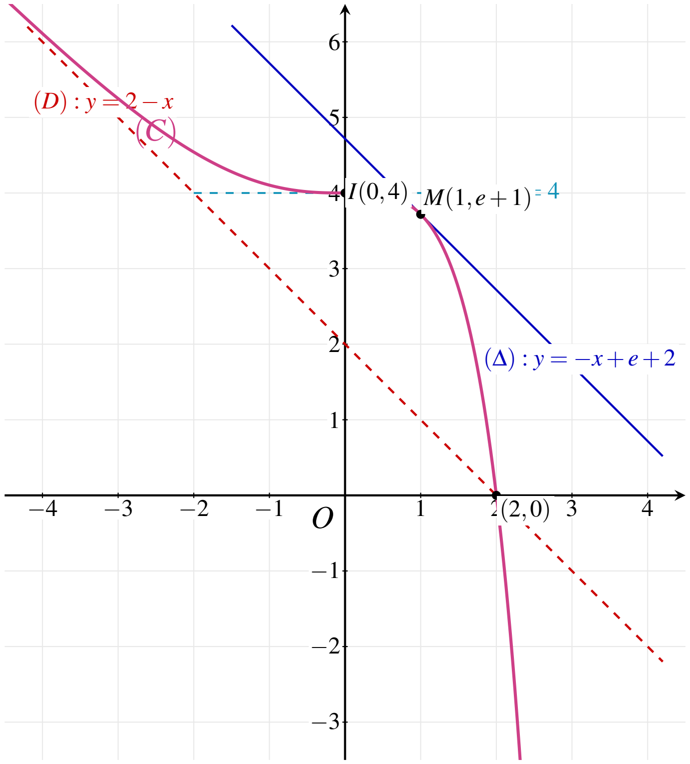
គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ស្របនឹង $(D): y = -x+2$ ៖

បន្ទាត់ $(\Delta) \parallel (D) \iff g'(x_0) = -1 \iff (1-x_0)e^{x_0} - 1 = -1 \iff (1-x_0)e^{x_0} = 0$ ។
ដោយ $e^{x_0} > 0 \implies 1 - x_0 = 0 \iff x_0 = 1$ ។
អរដោនេចំណុចប៉ះ ៖ $y_0 = g(1) = (2-1)e^1 + 2 - 1 = e + 1 \approx 3.72$ ។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ៖ $y = -1(x-1) + e + 1 \iff \boxed{(\Delta): y = -x + e + 2}$ ។

ឃ. កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C) ៖

ដេរីវេទីពីរ ៖ $g''(x) = f'(x) = -xe^x$ ។
$g''(x) = 0 \iff -xe^x = 0 \iff x = 0$ ។
ចំពោះ $x < 0 \implies g''(x) > 0$ (ប៉ោងឡើងលើ) និងចំពោះ $x > 0 \implies g''(x) < 0$ (ផតចុះក្រោម) ។
ដោយ $g''(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x = 0$ នោះចំណុច $\boxed{I(0,4)}$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង (C) ។
(ត្រង់ $I(0,4)$ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក $y = 4$ ព្រោះ $g'(0) = 0$) ។

ង. សង់ខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ (D) និងបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ៖



តារាងសង្ខេបធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេពិត	តម្លៃប្រហែល
ដែនកំណត់	$D_g = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$
អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$	$(D): y = -x + 2$	$y = -x + 2$
ចំណុចរបត់	$I(0,4)$	$(0,4)$
បន្ទាត់ប៉ះដេកត្រង់ I	$y = 4$	$y = 4$
បន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta) \parallel (D)$	$(\Delta): y = -x + e + 2$	$y \approx -x + 4.72$
ចំណុចប៉ះនៃ (Δ)	$M(1, e+1)$	$(1, 3.72)$
ប្រសព្វអ័ក្ស Ox និង (D)	$(2,0)$	$(2,0)$

លំហាត់ទី ៥៧

f ជាអនុគមន៍ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(D): y = 1$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A ។

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ (គេយក $e = 2.7$, $\frac{2}{e} = 0.7$, $\ln 2 = 0.7$)

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ត្រង់ $x \to 0^+$ ៖

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]$$

ដោយ $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ និង $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$ ។

នាំឱ្យ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{x=0}$ (អ័ក្សអរដោនេ $y'Oy$) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

- ត្រង់ $x \to +\infty$ ៖

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]$$

តាមរូបមន្តលីមីតមូលដ្ឋាន $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1+2(0) = 1}$ ។

នាំឱ្យ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in (0,+\infty)$ ៖

$$f'(x) = \left[1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]' = 2\cdot\frac{(\ln x)'\cdot x - \ln x\cdot (x)'}{x^2} = 2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{2(1-\ln x)}{x^2}}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

ដោយ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើកន្សោម $(1-\ln x)$ ៖

  - $f'(x)=0 \iff 1-\ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$ ។
  - $f'(x)>0 \iff 1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff 0<x<e$ (អនុគមន៍កើន) ។
  - $f'(x)<0 \iff 1-\ln x < 0 \iff \ln x > 1 \iff x>e$ (អនុគមន៍ចុះ) ។

ត្រង់ $x=e$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប ៖

$$f(e) = 1+2\left(\frac{\ln e}{e}\right) = 1+\frac{2}{e} \approx 1+0.7 = \mathbf{1.7}$$

- តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

គ. កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ A ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (C) និង $(D): y=1$ ៖

$$f(x)=1 \iff 1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)=1 \iff 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0 \iff \ln x=0 \iff x=1$$

  ជំនួស $x=1$ ចូលសមីការ (D) នាំឱ្យ $y=1$ ។
  ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{A(1,1)}$ ។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(1,1)$ ៖
  មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ ៖

$$f'(1)=\frac{2(1-\ln 1)}{1^2}=\frac{2(1-0)}{1}=2$$

  សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (L) មានទម្រង់ ៖

$$(L): y-y_A=f'(x_A)(x-x_A) \iff y-1=2(x-1) \iff \boxed{y=2x-1}$$

ឃ. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និងសង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) ៖

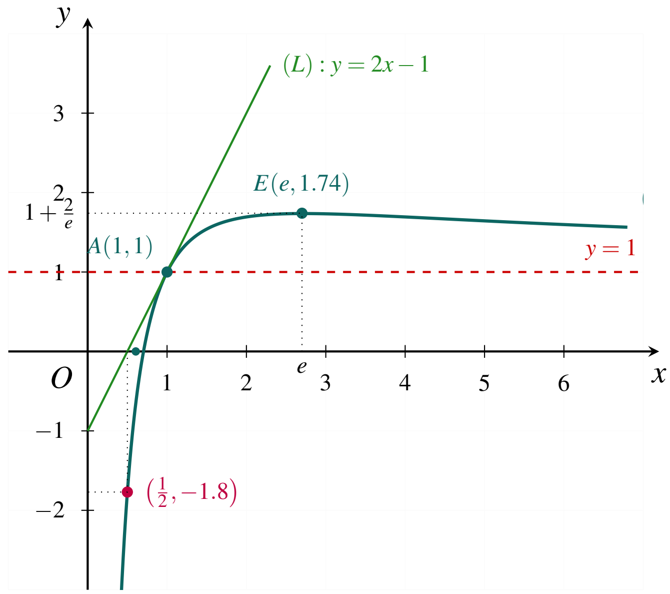
- គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ៖

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+2\left(\frac{\ln(1/2)}{1/2}\right)=1+4(-\ln 2)=1-4\ln 2$$

  ដោយយក $\ln 2\approx 0.7$ យើងបាន ៖

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 1-4(0.7)=1-2.8=\boxed{-1.8}$$

- សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៥៨

f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់អាស៊ីមតូតឈរនិងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (យក $e=2.7,\ \dfrac{2}{e}=0.7$) ។

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឱ្យសមីការ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស ។
គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់ដែលកំណត់ដោយ (C) អ័ក្ស $(x'Ox)$ បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ត្រង់ $x\to 0^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \implies \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ ។
  នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty} \implies \boxed{x=0}$ (អ័ក្ស $y'Oy$) ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x\to +\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2(1-0)=2}$ ។
  នាំឱ្យ បន្ទាត់ $\boxed{y=2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ សិក្សាសញ្ញា និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ ចំពោះ $x>0$ ៖

$$f'(x)=2\left(-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}\right)=\boxed{\frac{2(\ln x-1)}{x^2}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ សញ្ញានៃ $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $\ln x-1$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$ ។
  - $f'(x)<0 \iff 0<x<e$ (f ចុះ) ៖ $f'(x)>0 \iff x>e$ (f កើន) ។

  ត្រង់ $x=e$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖

$$f(e)=2\left(1-\frac{1}{e}\right)=2-\frac{2}{e}\approx 2-0.7=\mathbf{1.3}$$

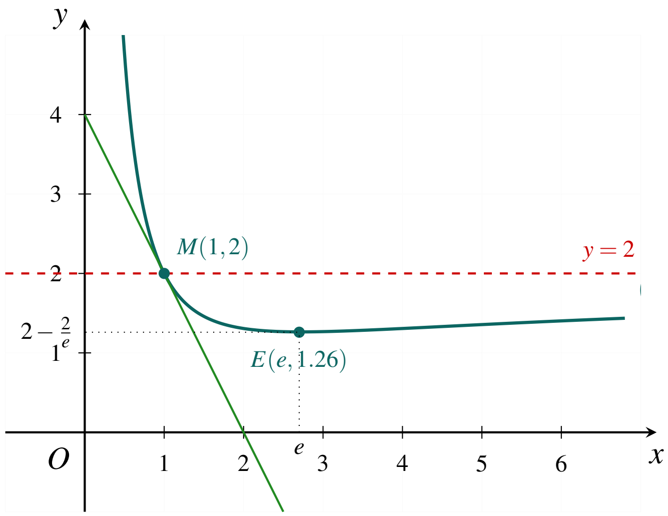
- តារាងអថេរភាព ៖

x	0			e		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$2-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	2

គ. ចំណុចប្រសព្វ M និងបន្ទាត់ប៉ះ (L) ត្រង់ M ៖

- សមីការអាប់ស៊ីស $f(x)=2 \iff 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2 \iff \ln x=0 \iff x=1$ ។
  ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{M(1,2)}$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស $f'(1)=\frac{2(0-1)}{1}=-2$ ។
  សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $(L): y-2=-2(x-1) \iff \boxed{y=-2x+4}$ ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) ៖



ង. ពិភាក្សាឫសតាមតម្លៃ k និងគណនាផ្ទៃក្រឡា S ៖

- ចំនួនឫសនៃសមីការ $f(x)=k$ តាមក្រាប (C) ៖
  - បើ $k<2-\frac{2}{e}$ ៖ សមីការគ្មានឫស ។
  - បើ $k=2-\frac{2}{e}$ ៖ សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x=e$ ។
  - បើ $2-\frac{2}{e}<k<2$ ៖ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។
  - បើ $k\geq 2$ ៖ សមីការមានឫសតែមួយគត់ ។

  ដូចនេះ សមីការមានឫសលុះត្រាតែ $\boxed{k\geq 2-\dfrac{2}{e}\approx 1.26}$ ។
- គណនាផ្ទៃក្រឡា S លើចន្លោះ $[1,e]$ ៖
  លើ $[1,e]$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើអ័ក្ស (Ox) ព្រោះ $f(x)\geq 2-\frac{2}{e}>0$ ៖

$$S=\int_1^e 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=2\int_1^e dx-2\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=2[x]_1^e-\left[\ln^2 x\right]_1^e$$

$$S=2(e-1)-(\ln^2 e-\ln^2 1)=2e-2-1=\boxed{2e-3\approx 2.4 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$$

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី ៥៩

f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\dfrac{\ln x}{x^3}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\sqrt[3]{e}$ ។ គណនា $f(\sqrt[3]{e})$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ (យក $e=2.7$, $\sqrt[3]{e}=1.4$, $\dfrac{1}{3e}=0.12$) ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $1-\dfrac{\ln x}{x^3}>k$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ត្រង់ $x\to 0^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3=0^+ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln x}{x^3}\right)=+\infty$ ។
  នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty} \Longrightarrow \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x\to+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0 \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1-0=1}$ ។
  នាំឱ្យ បន្ទាត់ $\boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

ខ. តម្លៃអប្បបរមា និងតារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{(x^3)^2}=-\frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}=\boxed{\frac{3\ln x-1}{x^4}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ដោយ $x^4>0$ សញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $3\ln x-1$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff 3\ln x-1=0 \iff \ln x=\frac{1}{3} \iff x=e^{1/3}=\sqrt[3]{e}$ ។
  - $f'(x)<0 \iff 0<x<\sqrt[3]{e}$ (f ចុះ) ៖ $f'(x)>0 \iff x>\sqrt[3]{e}$ (f កើន) ។

  ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\sqrt[3]{e}$ ៖

$$f(\sqrt[3]{e})=1-\frac{\ln(e^{1/3})}{(e^{1/3})^3}=1-\frac{1/3}{e}=\boxed{1-\frac{1}{3e}\approx 1-0.12=0.88}$$

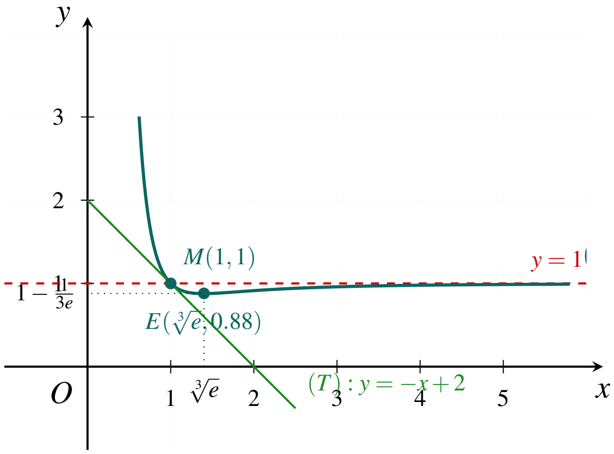
- តារាងអថេរភាព ៖

x	0		$\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1-\frac{1}{3e}$	↗	1

គ. ចំណុចប្រសព្វ M និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ M ៖

- សមីការអាប់ស៊ីស $f(x)=1 \iff 1-\frac{\ln x}{x^3}=1 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies \boxed{M(1,1)}$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស $f'(1)=\frac{3\ln 1-1}{1^4}=-1$ ។
  សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $(T): y-1=-1(x-1) \iff \boxed{y=-x+2}$ ។

ឃ. សង់បន្ទាត់ (T) ក្រាប (C) និងកំណត់តម្លៃ k ៖



ដោយសារតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃ $f(x)$ លើ $(0,+\infty)$ គឺ $f(\sqrt[3]{e})=1-\frac{1}{3e}$ នាំឱ្យ ៖

$$f(x)>k \quad \forall x>0 \iff \boxed{k<1-\frac{1}{3e}\approx 0.88}$$

លំហាត់ទី ៦០

f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x-1-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ និង (C) ជាក្រាបនៃ f ។

ក. ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ។

ខ. គណនា $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ រួចរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[2,+\infty)$ ។

ង. គណនាក្រឡាផ្ទៃ A ដែលនៅចន្លោះខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ $L: y=x-1$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $2\le x\le 4$ (គេឱ្យ $\ln 2=0.7$ និង $\ln 3=1.1$) ។

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

ក. ទិសដៅអថេរភាពនៃ f ៖

- ដែនកំណត់ ៖ ចំពោះ $x \in (1,+\infty)$ កន្សោម $1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ ជានិច្ច ។
- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x) = 1 - 2\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{1-\frac{1}{x}} = 1 - 2\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = 1 - \frac{2}{x(x-1)} = \boxed{\frac{x^2-x-2}{x(x-1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ចំពោះ $x>1$ យើងមាន $x(x-1)>0$ និង $x+1>0$ ដូច្នេះសញ្ញា $f'(x)$ អាស្រ័យលើ $x-2$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff x-2=0 \iff x=2$ ។
  - $f'(x)<0 \iff 1<x<2 \implies f$ ចុះលើចន្លោះ $(1,2)$ ។
  - $f'(x)>0 \iff x>2 \implies f$ កើនលើចន្លោះ $(2,+\infty)$ ។

  ត្រង់ $x=2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖

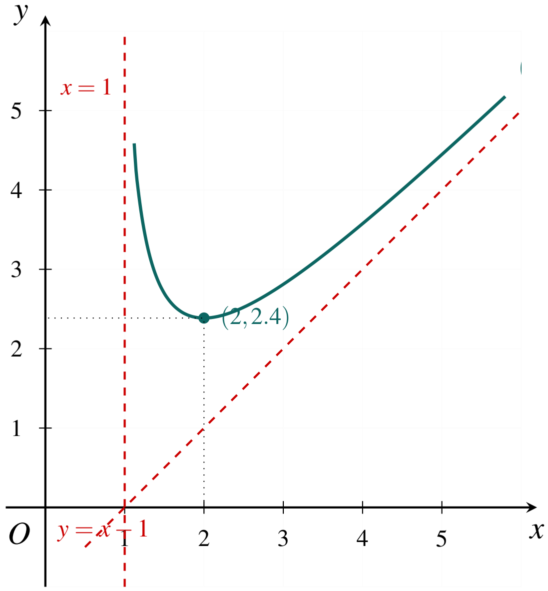
$$f(2) = 2-1-2\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1-2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{1+2\ln 2 \approx 1+2(0.7) = 2.4}$$

ខ. គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ កាលណា $x\to 1^+$ នោះ $1-\frac{1}{x}\to 0^+ \implies \ln(1-1/x)\to -\infty$ ។
  នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0-2(-\infty) = +\infty \implies \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ កាលណា $x\to+\infty$ នោះ $\frac{1}{x}\to 0 \implies \ln(1-1/x)\to \ln 1 = 0$ ។
  ពិនិត្យផលដក ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] = 0$ ។
  នាំឱ្យ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

គ. តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1+2\ln 2$	↗	$+\infty$



ឃ. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់លើ $[2,+\infty)$ ៖**
លើចន្លោះ $[2,+\infty)$ អនុគមន៍ f ជាប់ និងកើនដាច់ខាត ដោយមាន $f(2)=1+2\ln 2\approx 2.4$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។
ដោយសារ $3\in[2.4,+\infty)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x)=3$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha\in[2,+\infty)$ ។

ង. **គណនាក្រឡាផ្ទៃ A ៖**

- លើចន្លោះ $[2,4]$ យើងមាន $1-\frac{1}{x}<1 \implies \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)<0$ នាំឱ្យ ៖

$$f(x)-(x-1)=-2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>0$$

ដូច្នេះ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $L: y=x-1$ ជានិច្ច ។

- ក្រឡាផ្ទៃ A កំណត់ដោយ ៖

$$A=\int_2^4 [f(x)-(x-1)]\,dx=2\int_2^4 [\ln x-\ln(x-1)]\,dx$$

- ដោយសារ $\int \ln t\,dt=t\ln t-t$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
A&=2\left[x\ln x-x-(x-1)\ln(x-1)+(x-1)\right]_2^4\\
&=2\left[x\ln x-(x-1)\ln(x-1)-1\right]_2^4\\
&=2\Big[(4\ln 4-3\ln 3-1)-(2\ln 2-1\ln 1-1)\Big]\\
&=2\Big[8\ln 2-3\ln 3-1-2\ln 2+1\Big]\\
&=2(6\ln 2-3\ln 3)=12\ln 2-6\ln 3
\end{aligned}$$

- ជំនួសតម្លៃ $\ln 2=0.7$ និង $\ln 3=1.1$ ៖

$$A=12(0.7)-6(1.1)=8.4-6.6=\boxed{1.8 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$$

មេរៀនទី ៤ ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី ៦១

f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x \in \mathbb{D} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ ដោយ $y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty, 0, 1$ និង $+\infty$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C) ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ និងខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (Δ) ។

គ. គណនា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. គណនា $f(-1)$ និង $f(2)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់របស់វា ។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $-\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = m$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ ៖

- ត្រង់ $\pm\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{x-1}{x}\right| = 1 \implies \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$ ។
  នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ និង $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ ។
- ត្រង់ $x \to 0^-$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^-}\left|\frac{x-1}{x}\right| = +\infty \implies \boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty} \implies \boxed{x = 0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x \to 1^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 1^+}\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0^+ \implies \boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty} \implies \boxed{x = 1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(\Delta): y = -\frac{x}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ទាំងខាង $-\infty$ និងខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ ពិនិត្យសញ្ញានៃ $f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right) = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$ ៖
  - ចំពោះ $x \in (-\infty, 0)$ ៖ $1 - \frac{1}{x} > 1 \implies \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0 \implies$ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងលើ $(\blacksquare)$ ។
  - ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ ៖ $0 < 1 - \frac{1}{x} < 1 \implies \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0 \implies$ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងក្រោម $(\blacksquare)$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{D}$ ៖

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = \boxed{\frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ដោយ $x(x-1) > 0$ លើ $\mathbb{D}$ សញ្ញា $f'(x)$ អាស្រ័យលើ $-(x+1)(x-2)$ ៖

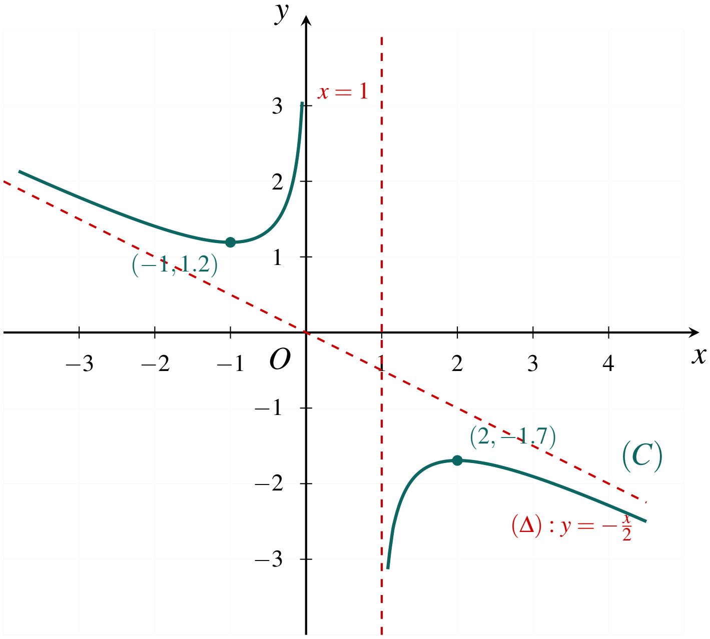
- $f'(x)=0 \iff x=-1$ ឬ $x=2$ ។
- លើ $(-\infty,-1)$ ៖ $f'(x)<0$ (f ចុះ) ៖ លើ $(-1,0)$ ៖ $f'(x)>0$ (f កើន) ។
- លើ $(1,2)$ ៖ $f'(x)>0$ (f កើន) ៖ លើ $(2,+\infty)$ ៖ $f'(x)<0$ (f ចុះ) ។

តម្លៃបរមា ៖ $f(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2\approx 1.2$ (អប្បបរមាធៀប) ៖ $f(2)=-1-\ln 2\approx -1.7$ (អតិបរមាធៀប) ។

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖		‖	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

ឃ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងកំណត់តម្លៃ m ៖



- កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ៖
ឫសអវិជ្ជមានជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (C) លើ $(-\infty,0)$ និងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ។
តាមក្រាប បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ខ្សែង $(-\infty,0)$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នាលុះត្រាតែ ៖

$$m>\frac{1}{2}+\ln 2\approx 1.2$$

លំហាត់ទី ៦២

f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = -x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ និងបន្ទាត់ $d_2 : y = -x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ បង្ហាញថាគល់តម្រុយ O ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ ។ ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{4e^x}{e^x+1} \geq x+2$ តាមក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖

- ត្រង់ $x \to -\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - 2 + 0 = +\infty}$ ។
- ត្រង់ $x \to +\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4e^x}{e^x+1} = 4 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty - 2 + 4 = -\infty}$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- ខាង $-\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (-x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+1} = 0$ ។
ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{d_1 : y = -x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។
- ខាង $+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4e^x}{e^x+1} - 4\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{e^x+1} = 0$ ។
ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{d_2 : y = -x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

គ. គណនា $f'(x)$ តារាងអថេរភាព និងផ្ចិតឆ្លុះ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៖

$$f'(x) = -1 + \frac{4e^x(e^x+1) - 4e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = -1 + \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \leq 0$$

$f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$ ។ ដូចនេះ f ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

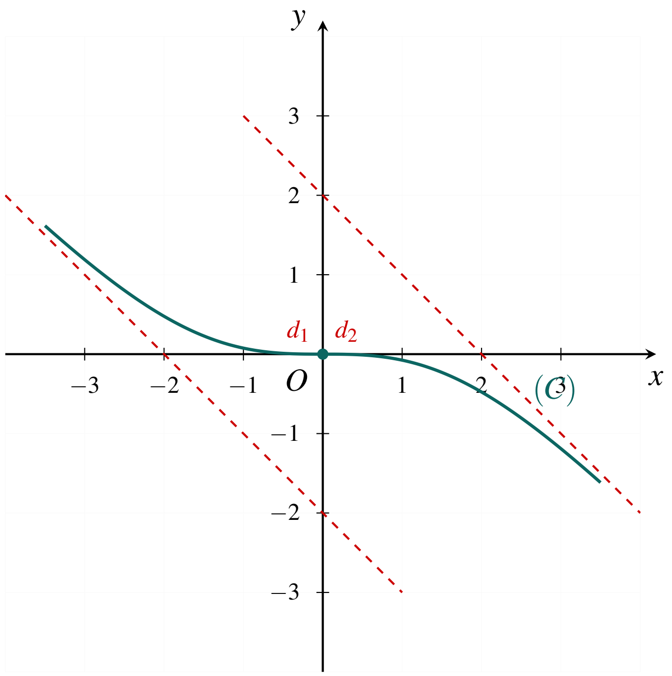
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- បង្ហាញថា $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៖

$$f(-x) + f(x) = \left(x - 2 + \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) + \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{e^x+1}\right) = -4 + \frac{4}{e^x+1} + \frac{4e^x}{e^x+1} = -4 + 4 = 0 = 2(0)$$

ដូចនេះ គល់តម្រុយ $\boxed{O(0,0)}$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងដោះស្រាយវិសមីការ ៖



- ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{4e^x}{e^x+1} \geq x+2 \iff f(x) \geq 0$ ៖
  តាមក្រាប (C) ខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងលើអ័ក្ស (Ox) កាលណា $x \leq 0$ ។
  ដូចនេះ សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការគឺ $\boxed{x \in (-\infty, 0]}$ ។

លំហាត់ទី ៦៣

f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = -x - \dfrac{4\ln x}{x}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុច A លើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ស្របនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនោះ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយ (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x = 1, x = a$ $(a > 1)$ ។ កំណត់ a ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាស្មើ 2 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D = (0, +\infty)}$ ។
- ត្រង់ $x \to 0^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\frac{4\ln x}{x}\right) = +\infty \implies \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty} \implies \boxed{x = 0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

- ត្រង់ $x \to +\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{4\ln x}{x}) = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(L) : y = -x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ៖

$$f'(x) = -1 - 4\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}\right) = \boxed{\frac{-x^2 - 4(1-\ln x)}{x^2} = \frac{-x^2 + 4\ln x - 4}{x^2}}$$

- តារាងអថេរភាព ៖ អនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតពី $+\infty$ ដល់ $-\infty$ លើ $(0, +\infty)$ ៖

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad -$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow -\infty$

គ. ចំណុច A និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹង (L) ៖

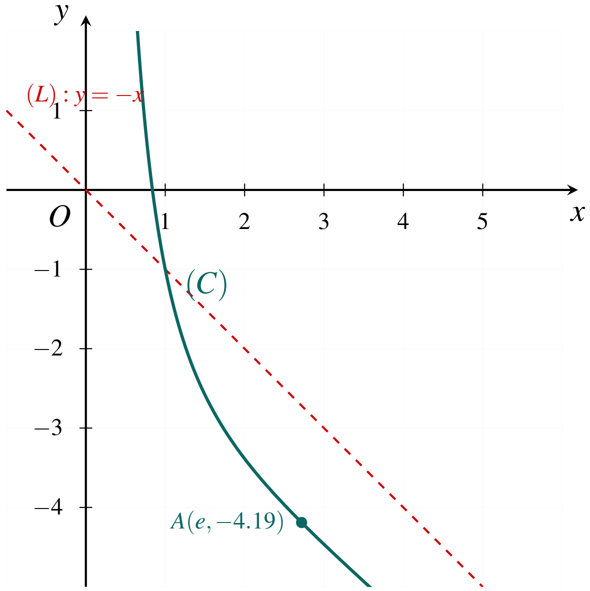
- បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹង $(L) : y = -x$ មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -1 ៖

$$f'(x) = -1 \iff -1 - 4\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = -1 \iff 1 - \ln x = 0 \iff x = e$$

ត្រង់ $x = e$ យើងបាន $y_A = f(e) = -e - \frac{4\ln e}{e} = -e - \frac{4}{e} \approx -2.7 - 1.48 = -4.18$ ។
ដូចនេះ ចំណុចប៉ះគឺ $\boxed{A\left(e, -e - \frac{4}{e}\right)}$ ។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - (-e - \frac{4}{e}) = -1(x - e) \iff \boxed{y = -x - \frac{4}{e}}$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖



- គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(a)$ លើ $[1,a]$ $(a>1)$ ៖
  លើ $[1,a]$ បន្ទាត់ (L) ស្ថិតនៅខាងលើ (C) ព្រោះ $(-x)-f(x)=\frac{4\ln x}{x}>0$ ៖

$$S(a)=\int_1^a[(-x)-f(x)]\,dx=\int_1^a\frac{4\ln x}{x}\,dx=\left[2\ln^2 x\right]_1^a=\boxed{2\ln^2 a \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$$

- កំណត់ a ដើម្បីឱ្យ $S(a)=2$ ៖

$$2\ln^2 a=2 \iff \ln^2 a=1 \iff \ln a=1 \quad (\text{ព្រោះ } a>1) \iff \boxed{a=e}$$

លំហាត់ទី ៦៤

f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រកដែនកំណត់ គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ និងរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចប្រសព្វរវាង (C) នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដែនកំណត់ លីមីត និងសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $\boxed{D=(0,+\infty)}$ ។
- ត្រង់ $x\to 0^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty} \Longrightarrow \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x\to+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0 \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0} \Longrightarrow \boxed{y=0}$ (អ័ក្ស Ox) ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\boxed{\frac{1-2\ln x}{x^3}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ដោយ $x^3>0$ សញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $1-2\ln x$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff 1-2\ln x=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=\sqrt{e}$ ។
  - $f'(x)>0 \iff 0<x<\sqrt{e}$ (f កើន) ៖ $f'(x)<0 \iff x>\sqrt{e}$ (f ចុះ) ។

  តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\sqrt{e}$ គឺ $f(\sqrt{e})=\frac{1/2}{e}=\boxed{\frac{1}{2e}\approx 0.18}$ ។

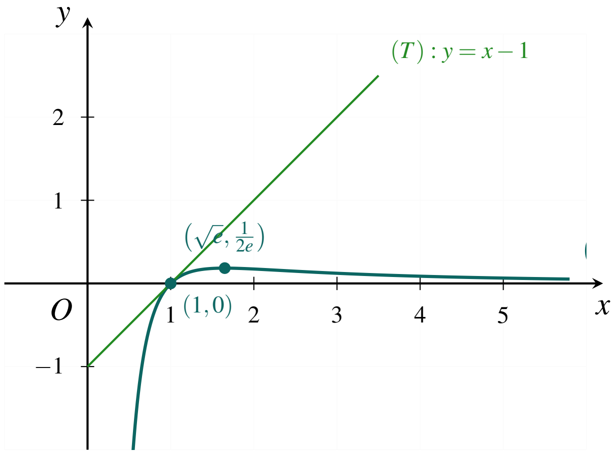
- តារាងអថេរភាព ៖

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

គ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ប្រសព្វនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖

- ប្រសព្វនឹង (Ox) ៖ $f(x)=0 \iff \ln x=0 \iff x=1 \implies M(1,0)$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(1)=\frac{1-2\ln 1}{1^3}=1$ ។
  សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $(T): y-0=1(x-1) \iff \boxed{y=x-1}$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖



លំហាត់ទី ៦៥

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-1+2e^{-x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 នៃក្រាប (C) ។ បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ រកសមីការបន្ទាត់ L_2 ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

គ. សង់បន្ទាត់ L_1, L_2 នៅក្នុងតម្រុយអរដោនេតែមួយ (គេឱ្យ $\ln 2 = 0.7$) ។

ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 ក្រាប (C) បន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត អាស៊ីមតូតទ្រេត និងតម្លៃអប្បបរមា ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}$ ។
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 1 + 2(+\infty) = +\infty$ (ព្រោះ $e^{-x}\to+\infty$) ។
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 1 + 0 = +\infty$ (ព្រោះ $e^{-x}\to 0$) ។
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0 \implies \boxed{(L_1): y = x-1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង } +\infty}$ ។
- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = 1-2e^{-x}$ ។

$$f'(x)=0 \iff 2e^{-x}=1 \iff e^{-x}=\frac{1}{2} \iff -x=-\ln 2 \iff x=\ln 2$$

  - បើ $x<\ln 2$ ៖ $e^{-x}>\frac{1}{2} \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
  - បើ $x>\ln 2$ ៖ $e^{-x}<\frac{1}{2} \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
- ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=\ln 2$ គឺ ៖

$$f(\ln 2) = \ln 2 - 1 + 2e^{-\ln 2} = \ln 2 - 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \mathbf{2} \approx \mathbf{0.7}$$

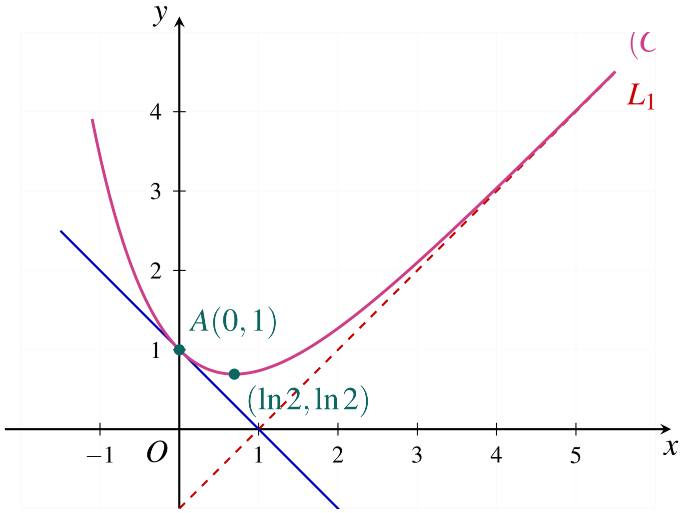
ខ. តារាងអថេរភាព និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ L_2 ៖

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

- ត្រង់ $x=0$ ៖ $y_0 = f(0) = 0-1+2e^0 = -1+2 = \mathbf{1} \implies A(0,1)$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(0) = 1-2e^0 = 1-2 = -\mathbf{1}$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ L_2 ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ គឺ ៖

$$y-1 = -1(x-0) \iff \boxed{(L_2): y = -x+1}$$

គ. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត L_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ L_2 ៖



ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ ៖

- លើចន្លោះ $[0,1]$ ខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $L_1: y = x-1$ ព្រោះ $f(x)-(x-1) = 2e^{-x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។
- ក្រឡាផ្ទៃដែលត្រូវគណនាគឺ ៖

$$S = \int_0^1 [f(x)-(x-1)]\,dx = \int_0^1 2e^{-x}\,dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1} - (-2e^0) = 2 - \frac{2}{e}$$

- ដោយយក $e \approx 2.7$ នាំឱ្យ $\frac{2}{e} \approx 0.74$ ៖

$$S = 2 - \frac{2}{e} \approx 2 - 0.74 = \boxed{1.26 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$$

លំហាត់ទី ៦៦

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = 1 - \frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (គេឱ្យ $e = 2.7, \frac{2}{e} = 0.7$) ។

ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = e$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ត្រង់ $x \to 0^+$ ៖ $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty} \Longrightarrow \boxed{x = 0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

- ត្រង់ $x \to +\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1} \implies \boxed{y=1}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ៖

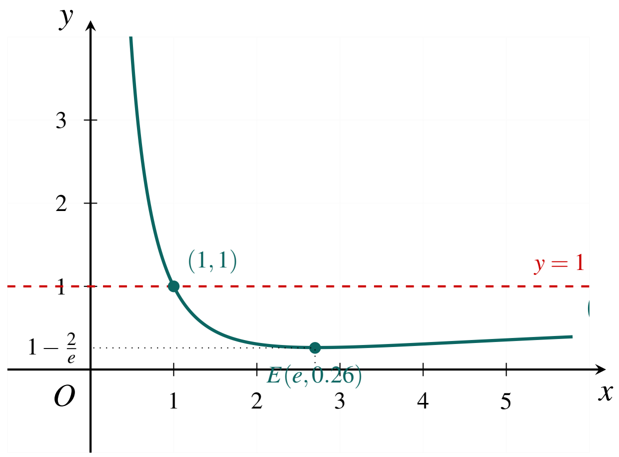
$$f'(x) = -2\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}\right) = \boxed{\frac{2(\ln x - 1)}{x^2}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ដោយ $x^2 > 0$ សញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $\ln x - 1$ ៖
  - $f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$ ។
  - $f'(x) < 0 \iff 0 < x < e$ (f ចុះ) ៖ $f'(x) > 0 \iff x > e$ (f កើន) ។

  តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = e$ គឺ $f(e) = 1 - \frac{2}{e} \approx 1 - 0.7 = \mathbf{0.3}$ (ឬ 0.26) ។
- តារាងអថេរភាព ៖

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1-\frac{2}{e}$	↗	1

គ. សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត ៖



ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ S ៖

- លើចន្លោះ $[1,e]$ បន្ទាត់អាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ស្ថិតនៅខាងលើក្រាប (C) ព្រោះ $1 - f(x) = \frac{2\ln x}{x} \geq 0$ ៖

$$S = \int_1^e [1 - f(x)]\,dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx = \left[\ln^2 x\right]_1^e = \ln^2 e - \ln^2 1 = \boxed{1 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$$

លំហាត់ទី ៦៧

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to0^+} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ (គេឱ្យ $e=2.7, e^{0.5}=1.65$) ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយ (C) អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e^{0.5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត និងសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ត្រង់ $x\to0^+$ ៖ $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty} \Longrightarrow \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x\to+\infty$ ៖ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=2} \Longrightarrow \boxed{y=2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\boxed{\frac{1-2\ln x}{x^3}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ដោយ $x^3>0$ សញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $1-2\ln x$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff 1-2\ln x=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=e^{1/2}=\sqrt{e}\approx1.65$ ។
  - $f'(x)>0 \iff 0<x<\sqrt{e}$ (f កើន) ៖ $f'(x)<0 \iff x>\sqrt{e}$ (f ចុះ) ។

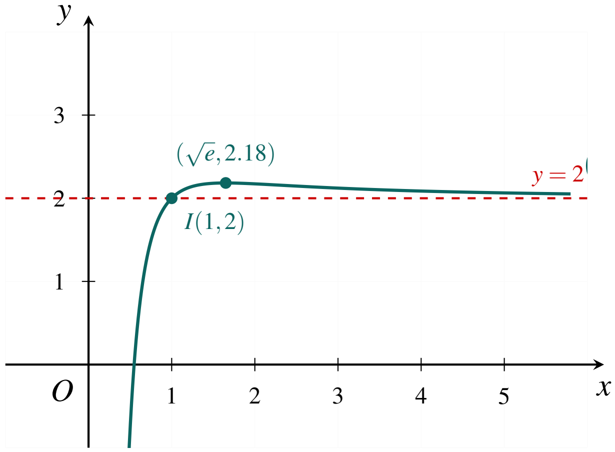
  តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\sqrt{e}$ គឺ $f(\sqrt{e})=2+\frac{1/2}{e}=\boxed{2+\frac{1}{2e}\approx2.18}$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$2+\frac{1}{2e}$	↘ 2

គ. ចំណុចប្រសព្វនឹងអាស៊ីមតូតដេក និងសង់ក្រាប (C) ៖

- ប្រសព្វនឹង $y=2$ ៖ $f(x)=2 \iff \frac{\ln x}{x^2}=0 \iff \ln x=0 \iff x=1 \Longrightarrow \boxed{I(1,2)}$ ។
- សង់ក្រាប (C) ៖



ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ S ៖

- លើចន្លោះ $[1, e^{0.5}]$ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅខាងលើអាស៊ីមតូតដេក $y = 2$ ព្រោះ $\frac{\ln x}{x^2} \geq 0$ ៖

$$S = \int_1^{e^{0.5}} [f(x) - 2]\, dx = \int_1^{e^{0.5}} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

តាង $u = \ln x \implies du = \frac{dx}{x}$ និង $dv = \frac{dx}{x^2} \implies v = -\frac{1}{x}$ ៖

$$S = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{e^{0.5}} - \int_1^{e^{0.5}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{\ln x + 1}{x}\right]_1^{e^{0.5}}$$

$$S = -\frac{0.5+1}{e^{0.5}} - \left(-\frac{0+1}{1}\right) = 1 - \frac{1.5}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1.5}{1.65} \approx \boxed{0.09 \text{ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ}}$$

លំហាត់ទី ៦៨

f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 4 - x - e^{-x}$ និងមានក្រាប (C) ។

A. ក. រក $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C) ។

គ. តើខ្សែកោង (C) នៅលើ ឬក្រោមបន្ទាត់ (D) ? ចូរបញ្ជាក់ ។

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x, $f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 1}{e^x}$ ។

ង. រក $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$) ។

B. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។

ខ. A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ A ។

គ. បង្ហាញថា $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ (ឬ $[-2, 0]$) ។

ដំណោះស្រាយ

A. ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4-x-e^{-x}) = 4-(+\infty)-0 = \boxed{-\infty}$$

(ព្រោះកាលណា $x\to+\infty$ នោះ $-x\to-\infty$ និង $e^{-x}\to 0$) ។

ខ. **បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C) ៖**
ពិនិត្យផលដក ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)] = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(D): y=-x+4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។

គ. **បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (D) ៖**
ផលដក ៖ $f(x)-y_D=-e^{-x}$ ។
ដោយសារ $e^{-x}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $-e^{-x}<0$ ជានិច្ច ។
ដូចនេះ ខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (D) ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ឃ. **ផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្ត $f(x)$ ៖**
ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដោយសារ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ គេបាន ៖

$$f(x)=4-x-e^{-x}=4-x-\frac{1}{e^x}=\boxed{\frac{4e^x-xe^x-1}{e^x}}$$

(សម្គាល់ ៖ ក្នុងប្រធានដើមមានការច្រឡំវាយអក្សរជា -2 លើភាគយក តែទម្រង់ពិតប្រាកដត្រូវតែជា -1) ។

ង. រក $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ៖
តាមសំណួរ (d) យើងមាន ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x-xe^x-1}{e^x}$$

ដោយ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ និង $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ នាំឱ្យភាគយកខិតទៅ $4(0)-0-1=-1<0$ ហើយភាគបែងខិតជិត 0^+ ៖

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

B. ក. **គណនា $f'(x)$ សិក្សាអថេរភាព និងតម្លៃអតិបរមា ៖**

- ដេរីវេ ៖ $f'(x)=[4-x-e^{-x}]'=-1-(-e^{-x})=\boxed{-1+e^{-x}}$ ។
- សញ្ញា $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=0 \iff e^{-x}=1 \iff -x=0 \iff x=0$$

  – បើ $x<0 \implies -x>0 \implies e^{-x}>1 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
  – បើ $x>0 \implies -x<0 \implies e^{-x}<1 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។
- អតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x=0$ គឺ ៖

$$f(0)=4-0-e^0=4-1=\mathbf{3}$$

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

ខ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច A $(x_A = 0)$ ៖

- កូអរដោនេចំណុចប៉ះ ៖ $y_A = f(0) = 3 \implies A(0,3)$ ។
- មេគុណប្រាប់ទិស ៖ $f'(0) = -1 + e^0 = 0$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - 3 = 0(x-0) \iff \boxed{y = 3}$ (បន្ទាត់ប៉ះដេក) ។

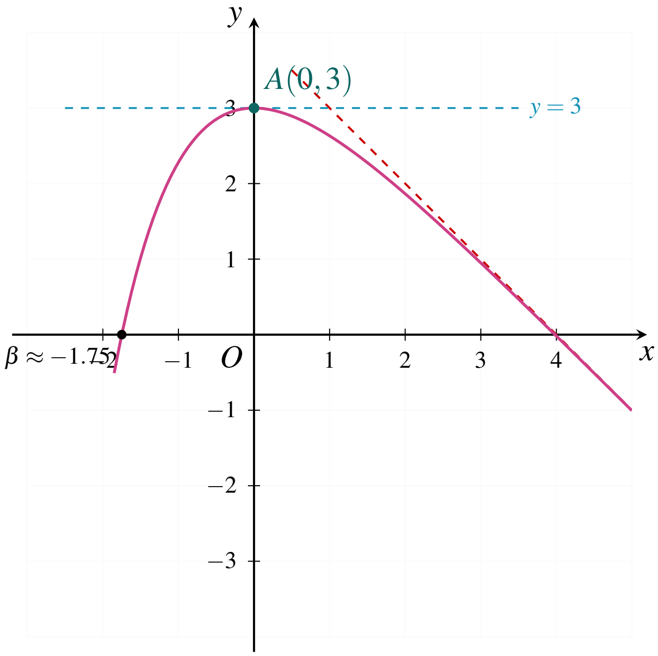
គ. បង្ហាញថា $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ β ៖

- លើចន្លោះ $(-\infty, 0]$ អនុគមន៍ f ជាប់ និងកើនដាច់ខាតពី $-\infty$ ទៅ 3 ។
- ដោយសារ $0 \in (-\infty, 3]$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\beta \in (-\infty, 0)$ ។
- ពិនិត្យតម្លៃ ៖

$$f(0) = 3 > 0, \quad f(-1) = 4 - (-1) - e^1 = 5 - e \approx 5 - 2.72 = 2.28 > 0$$

$$f(-2) = 4 - (-2) - e^2 = 6 - e^2 \approx 6 - 7.39 = -1.39 < 0$$

ដោយ $f(-2) \cdot f(0) < 0$ (និង $f(-2) \cdot f(-1) < 0$) នោះឫសតែមួយគត់ $\beta \approx -1.75$ ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[-2, -1] \subset [-2, 0]$ ។
(សម្គាល់ ៖ ប្រធានដើមដាក់ $[-1, 0]$ តែតាមតម្លៃជាក់ស្តែង $f(-1) > 0$ ដូចនេះចន្លោះដែលមានការប្តូរសញ្ញាគឺ $[-2, -1]$ ឬ $[-2, 0]$)* ។



លំហាត់ទី ៦៩

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I =]0, +\infty[$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x+\ln x}{x^2}$ ។

A. h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $h(x) = -x+1-2\ln x$ ។ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ដោយមិនបាច់គណនាលីមីតនៃ $h(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ឡើយ ។

B. ក. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថានៅលើ I, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ។

ឃ. ទាញរកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I និងសង់ក្រាប (C) នៃ $f(x)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

A. សិក្សាអនុគមន៍ជំនួយ $h(x)$ ៖

- គណនា $h(1)$ ៖

$$h(1) = -1+1-2\ln 1 = \boxed{0}$$

- ដេរីវេនៃ $h(x)$ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ៖

$$h'(x) = -1-\frac{2}{x} = \frac{-x-2}{x} < 0 \quad (\text{ព្រោះ } x>0 \implies -x-2<0)$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ h ចុះដាច់ខាតលើ $I = (0, +\infty)$ ។

- ទាញរកសញ្ញានៃ $h(x)$ ៖
  - បើ $0 < x < 1 \implies h(x) > h(1) = 0$ (វិជ្ជមាន) ។
  - បើ $x > 1 \implies h(x) < h(1) = 0$ (អវិជ្ជមាន) ។

B. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)$ និងសង់ក្រាប ៖

ក. គណនាលីមីត ៖

- ត្រង់ $x \to 0^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\ln x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty} \implies \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x \to +\infty$ ៖ $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0+0 = 0} \implies \boxed{y=0}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ៖

$$f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - (x+\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x^2+x-2x^2-2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-x+1-2\ln x)}{x^4} = \boxed{\frac{h(x)}{x^3}}$$

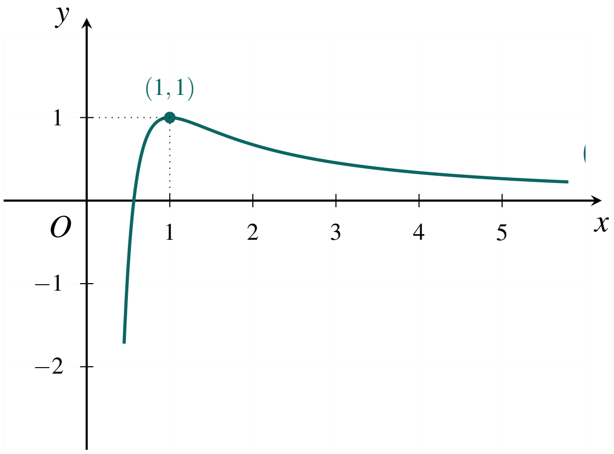
គ. សញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

ដោយសារ $x^3 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in I$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដូចសញ្ញានៃ $h(x)$ ទាំងស្រុង ៖

- $f'(x) > 0 \iff 0 < x < 1$ (អនុគមន៍ f កើន) ។
- $f'(1) = 0$ ត្រង់ $x = 1$ ។
- $f'(x) < 0 \iff x > 1$ (អនុគមន៍ f ចុះ) ។

ឃ. **តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) ៖**
តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = \frac{1+\ln 1}{1^2} = 1$ ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0



លំហាត់ទី ៧០

A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 + \ln x$ ។

ក. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ និងគណនា $g(1)$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ ហើយបើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1$ ។

គ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ ចំពោះ $x \in (0,+\infty)$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) ។

ខ. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$ ។

គ. ប្រើលទ្ធផលផ្នែក A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀប និងបញ្ជាក់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាង (C) និង (Δ) រួចសង់ (Δ) និង (C) ។

ដំណោះស្រាយ

A. សិក្សាអនុគមន៍ $g(x)$ ៖

ក. ដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0 \quad (\text{ព្រោះ } x>0)$$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។
គណនា $g(1) = 1^2 + \ln 1 = 1 + 0 = \boxed{1}$ ។

ខ. ដោយសារ g កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ៖

- បើ $x \geq 1 \implies g(x) \geq g(1) \implies \boxed{x^2+\ln x \geq 1}$ ។
- បើ $0 < x \leq 1 \implies g(x) \leq g(1) \implies \boxed{x^2+\ln x \leq 1}$ ។

គ. សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x - 1 = g(x)-1$ ៖

- បើ $0<x<1 \implies x^2+\ln x-1<0$ (អវិជ្ជមាន) ។
- បើ $x=1 \implies x^2+\ln x-1=0$ ។
- បើ $x>1 \implies x^2+\ln x-1>0$ (វិជ្ជមាន) ។

B. សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

ក. លីមីតនៃអនុគមន៍ f ៖

- ត្រង់ $x\to 0^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \implies \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty} \implies \boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
- ត្រង់ $x\to+\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ៖

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \boxed{\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}}$$

គ. សញ្ញា $f'(x)$ និងតារាងអថេរភាព ៖
ដោយសារ $x^2>0$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ ដូចសញ្ញានៃ $x^2+\ln x-1$ (តាមផ្នែក A) ៖

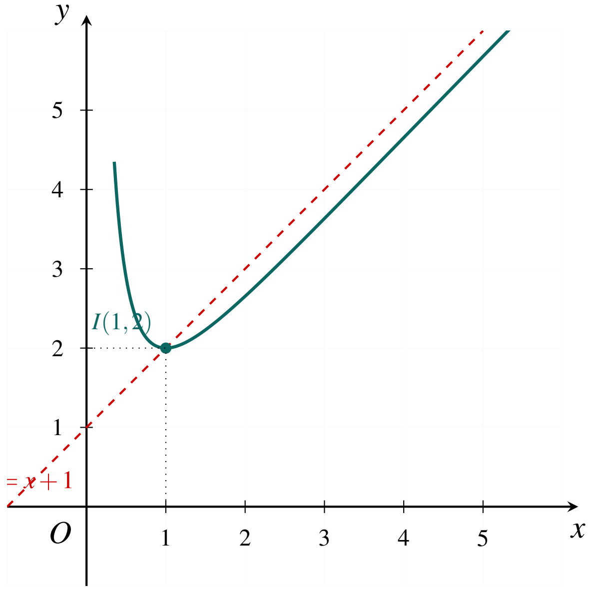
- $f'(x)<0 \iff 0<x<1$ (f ចុះ) ៖ $f'(x)>0 \iff x>1$ (f កើន) ។

តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1) = 1+1-\frac{\ln 1}{1} = \boxed{2}$ ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

ឃ. អាស៊ីមតូតទ្រេត ទីតាំងធៀប និងសង់ក្រាប ៖

- ពិនិត្យផលដក ៖ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(\Delta): y = x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ សញ្ញានៃ $f(x)-(x+1) = -\frac{\ln x}{x}$ ៖
  - លើ $(0,1)$ ៖ $\ln x < 0 \implies -\frac{\ln x}{x} > 0 \implies$ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងលើ (Δ) ។
  - លើ $(1,+\infty)$ ៖ $\ln x > 0 \implies -\frac{\ln x}{x} < 0 \implies$ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងក្រោម (Δ) ។
- ចំណុចប្រសព្វ ៖ $-\frac{\ln x}{x} = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \implies \boxed{I(1,2)}$ ។



លំហាត់ទី ៧១

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty, -2, 2$ និង $+\infty$ ។ បញ្ជាក់អំពីអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **គណនាលីមីត និងរកអាស៊ីមតូត ៖**

- លីមីតត្រង់ $\pm\infty$ ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2} = \mathbf{2} \implies \boxed{y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង } \pm\infty}$$

- លីមីតត្រង់ $x = 2$ ៖

– $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$ ។
– $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{x=2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។

- លីមីតត្រង់ $x=-2$ ៖

– $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$ ។
– $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{x=-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$ ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- អនុវត្តរូបមន្តដេរីវេផលចែក ៖

$$f'(x)=\frac{(2x^2)'(x^2-4)-2x^2(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{4x(x^2-4)-2x^2(2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-16x-4x^3}{(x^2-4)^2}=\boxed{\frac{-16x}{(x^2-4)^2}}$$

- ដោយសារ $(x^2-4)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ នោះសញ្ញា $f'(x)$ ដូចសញ្ញា $-16x$ ៖

$$f'(x)=0 \iff -16x=0 \iff x=0$$

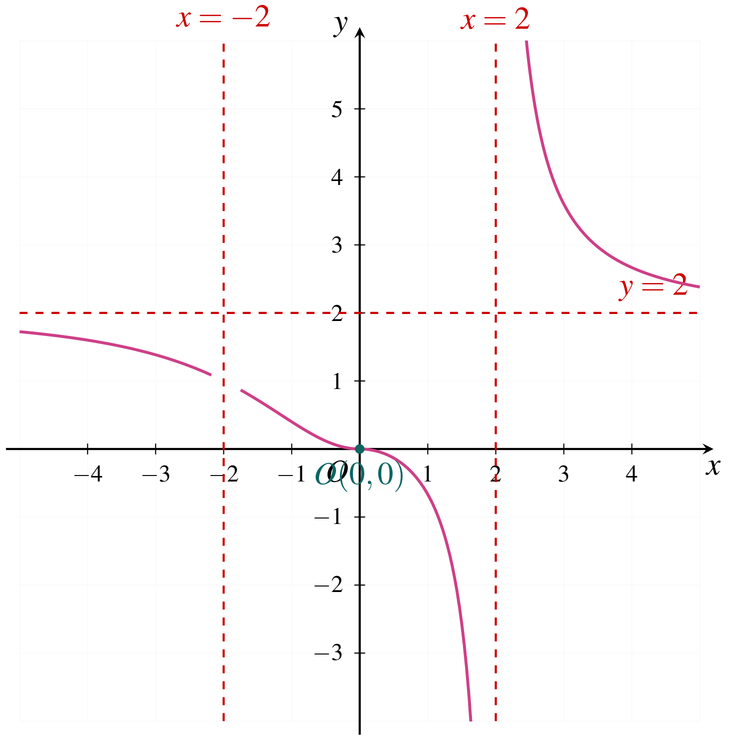
– បើ $x<0$ $(x\neq -2)$ ៖ $-16x>0 \implies f'(x)>0$ (អនុគមន៍កើន) ។
– បើ $x>0$ $(x\neq 2)$ ៖ $-16x<0 \implies f'(x)<0$ (អនុគមន៍ចុះ) ។

- តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ ៖

$$f(0)=\frac{2(0)^2}{0^2-4}=\mathbf{0}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2

គ. សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី ៧២

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+\dfrac{1-3e^x}{1+e^x}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $d_1: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ត្រង់ $-\infty$ និងសិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង d_1 ។

ខ. គណនាលីមីត f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $d_2: y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ត្រង់ $+\infty$ និងសិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង d_2 ។

គ. ១. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

២. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត d_1, d_2 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ទម្រង់នៃ $f(x)$, លីមីត និងអាស៊ីមតូត d_1 ខាង $-\infty$ ៖

- បង្ហាញទម្រង់ ៖

$$f(x)=x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}=x+\frac{1+e^x-4e^x}{1+e^x}=\boxed{x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}}$$

- គណនាលីមីត ៖ កាលណា $x\to-\infty$ នោះ $e^x\to 0$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$ ។

- អាស៊ីមតូត d_1 ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{1+e^x}\right) = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{d_1 : y = x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x+1) = -\frac{4e^x}{1+e^x} < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។
  ដូចនេះ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $\mathbf{d_1}$ ជានិច្ច ។

ខ. លីមីត និងអាស៊ីមតូត d_2 ខាង $+\infty$ ៖

- សរសេរ ៖ $f(x) = x + \frac{-3(1+e^x)+4}{1+e^x} = x-3+\frac{4}{1+e^x}$ ។
  កាលណា $x \to +\infty$ នោះ $\frac{4}{1+e^x} \to 0$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ ។
- អាស៊ីមតូត d_2 ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{1+e^x} = 0$ ។
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{d_2 : y = x-3}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។
- ទីតាំងធៀប ៖ $f(x)-(x-3) = \frac{4}{1+e^x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។
  ដូចនេះ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $\mathbf{d_2}$ ជានិច្ច ។

គ. គណនាដេរីវេ តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប ៖

១. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៖

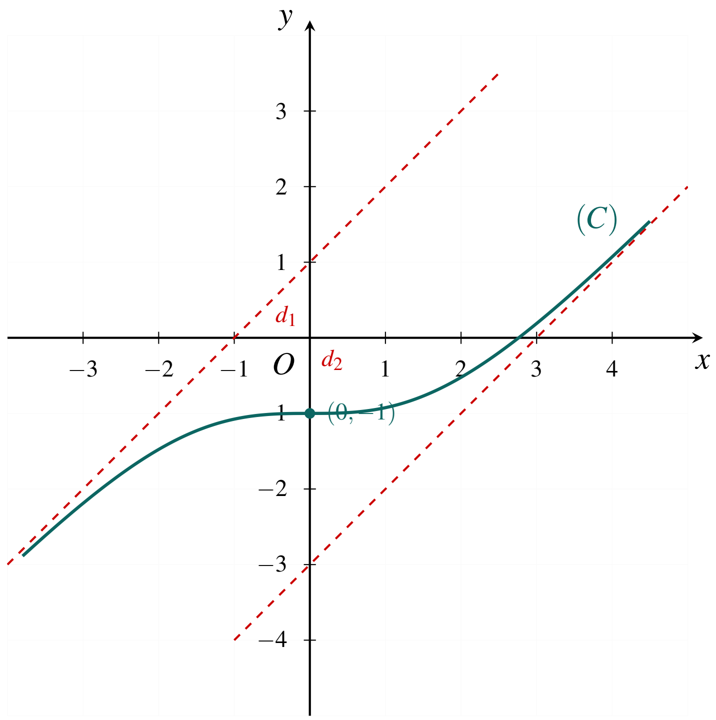
$$f'(x) = \left[x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}\right]' = 1-\frac{4e^x(1+e^x)-4e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = 1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(1+e^x)^2} = \boxed{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}$$

២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ៖

ដោយសារ $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ និង $f'(x) = 0 \iff x = 0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
ត្រង់ $x = 0 \implies f(0) = 0+1-\frac{4}{2} = -1$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



លំហាត់ទី ៧៣

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និងត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1,+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃ f គឺ $f'(x)=\frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. ១. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ត្រង់ $+\infty$ ។

២. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in(1,+\infty)$ គេមាន $\frac{x+1}{x-1}>1$ រួចទាញរកទីតាំងធៀបនៃ (C) ធៀបនឹង d_1 ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នោះ ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 (យក $\ln 3\approx 1.1$ និងចំណុចកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស $(4.5,0)$) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត ៖

- ត្រង់ $x\to 1^+$ ៖ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty} \Longrightarrow \boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

- ត្រង់ $x \to +\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x > 1$ ៖

$$f'(x) = -1 + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = -1 + \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = -1 - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \boxed{-\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}}$$

- សញ្ញា $f'(x)$ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x > 1$ គេមាន $x^2+1 > 0$ និង $(x+1)(x-1) > 0$ នាំឱ្យ $f'(x) < 0$ ជានិច្ច ។ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(1, +\infty)$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\quad -$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow -\infty$

គ. អាស៊ីមតូតទ្រេត និងទីតាំងធៀប ៖

① ពិនិត្យផលដក ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ ។
ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{d_1 : y = -x+4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

② ដោយសារ $x > 1 \implies x+1 > x-1 > 0 \implies \dfrac{x+1}{x-1} > 1$ នាំឱ្យ $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$ ។
ដូចនេះ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $\mathbf{d_1}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (1, +\infty)$ ។

ឃ. ចំណុចប៉ះ និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ៖

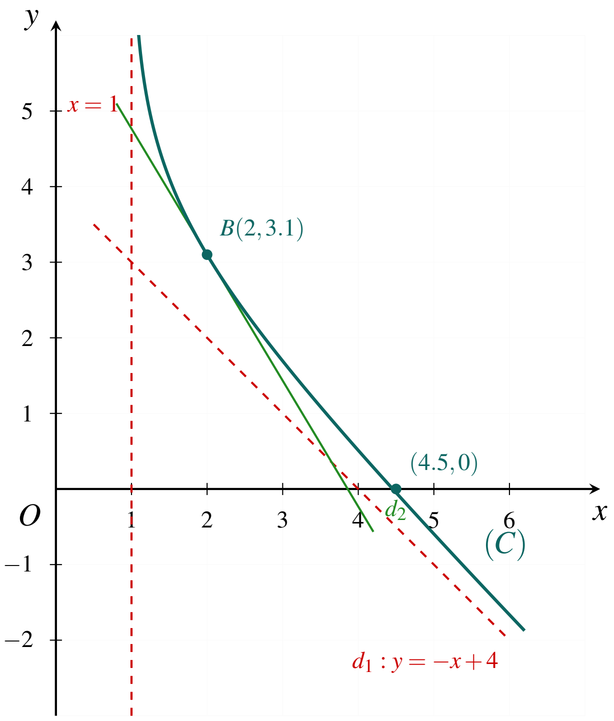
- រកអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប៉ះ ៖

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \iff \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{5}{3} \iff 3x^2+3 = 5x^2-5 \iff 2x^2 = 8 \iff x = 2 \quad (\text{ព្រោះ } x > 1)$$

ត្រង់ $x = 2 \implies y = f(2) = -2+4+\ln\left(\frac{3}{1}\right) = 2+\ln 3 \approx 2+1.1 = 3.1$ ។
ដូចនេះ ចំណុចប៉ះគឺ $\boxed{B(2, 2+\ln 3)}$ ។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - (2+\ln 3) = -\frac{5}{3}(x-2) \iff \boxed{d_2 : y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3} + \ln 3}$ ។

ង. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖



លំហាត់ទី ៧៤

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$ ហើយមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ក. ១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

២. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_1 : y = x + 2$ ។

ខ. ១. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$ ។

២. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. ១. បញ្ជាក់លក្ខណៈនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹង (C) ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $x = \ln 3$ ។

២. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

ឃ. ១. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹង (C) ត្រង់ $x = 0$ មានសមីការ $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ ។

២. ដោយសន្មត់ថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. លីមីត និងទីតាំងធៀបនឹង d_1 ៖

១. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ ។

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = 4 \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ ។

២. ពិនិត្យផលដក ៖ $f(x)-(x+2)=-\frac{4e^x}{e^x+3}<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
ដូចនេះ $(\mathbf{C})$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $\mathbf{d_1}$ ជានិច្ច ។

ខ. ដេរីវេ និងតារាងអថេរភាព ៖

១. ដេរីវេ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៖

$$f'(x)=1-\frac{4e^x(e^x+3)-4e^x\cdot e^x}{(e^x+3)^2}=1-\frac{12e^x}{(e^x+3)^2}=\frac{(e^x+3)^2-12e^x}{(e^x+3)^2}=\boxed{\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2}$$

២. សិក្សាអថេរភាព ៖ ដោយសារ $f'(x)\geq 0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង $f'(x)=0\iff x=\ln 3$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 3$	↗	$+\infty$

គ. បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ត្រង់ I និងទីតាំងធៀប ៖

១. ត្រង់ $x=\ln 3$ គេបាន $f(\ln 3)=\ln 3+2-\frac{4(3)}{3+3}=\ln 3$ និង $f'(\ln 3)=0$ ។
ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ $\boxed{d_2:y=\ln 3}$ **ជាបន្ទាត់ដេក**ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

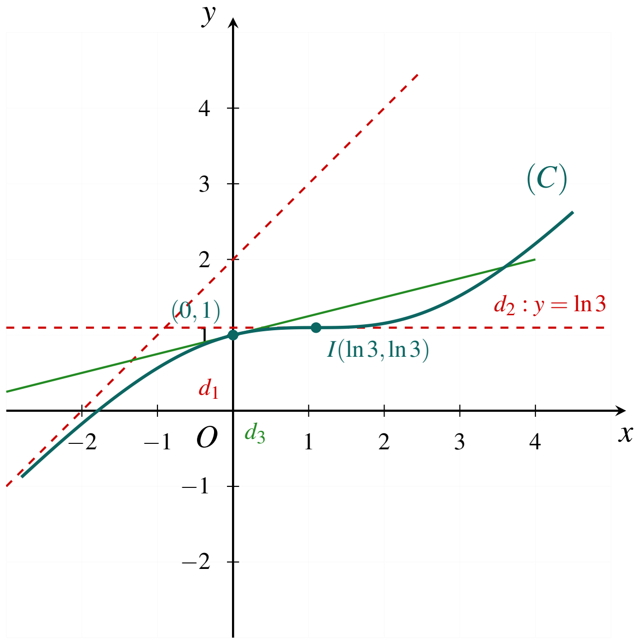
២. ដោយសារ $I(\ln 3,\ln 3)$ ជាចំណុចរបត់ ក្រាប (C) កាត់បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ត្រង់ I ដោយ ៖

- ចំពោះ $x<\ln 3$ ៖ (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោម d_2 ។
- ចំពោះ $x>\ln 3$ ៖ (C) ស្ថិតនៅខាងលើ d_2 ។

ឃ. បន្ទាត់ប៉ះ d_3 និងសង់ក្រាប ៖

១. ត្រង់ $x=0$ ៖ $f(0)=0+2-\frac{4}{4}=1$ និង $f'(0)=\left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2=\frac{1}{4}$ ។
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y-1=\frac{1}{4}(x-0)\iff\boxed{d_3:y=\frac{1}{4}x+1}$ ។

២. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖



លំហាត់ទី ៧៥

មន្ត្រីរាជការម្នាក់មានអាយុ 30 ឆ្នាំបានយកប្រាក់ចំនួន 1000\$ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 11% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ពេលចូលនិវត្តន៍អាយុ 60 ឆ្នាំ តើគាត់បានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើធនាគារទូទាត់ប្រាក់ជាបន្តបន្ទាប់?

ដំណោះស្រាយ

- **ទិន្នន័យនៃប្រធាន ៖**
  - ប្រាក់ដើមផ្ញើដំបូង ៖ $P = 1000\$$
  - អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ ៖ $r = 11\% = 0.11$
  - រយៈពេលផ្ញើប្រាក់ ពីអាយុ 30 ដល់ 60 ឆ្នាំ ៖ $t = 60 - 30 = 30$ ឆ្នាំ
- **រូបមន្តគណនាការប្រាក់សមាសជាបន្តបន្ទាប់ (Continuous Compounding) ៖**

$$A = P \cdot e^{rt}$$

ដែល A ជាប្រាក់សរុបទាំងអស់ទទួលបានពេលបញ្ចប់កាលកំណត់។

- **គណនាតម្លៃជាក់ស្តែង ៖**

$$A = 1000 \cdot e^{0.11\times 30} = 1000 \cdot e^{3.3}$$

ដោយ $e^{3.3} \approx 27.11263892$ គេបាន ៖

$$A \approx 1000 \times 27.11263892 = 27\,112.63892 \text{ ដុល្លារ} \approx 27\,112.64 \text{ ដុល្លារ}$$

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន ៖ ពេលចូលនិវត្តន៍នៅអាយុ 60 ឆ្នាំ មន្ត្រីរាជការរូបនោះនឹងទទួលបានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួន ៖

$A \approx 27\,112.64$ ដុល្លារ

លំហាត់ទី ៧៦

នៅទីក្រុងមួយកាលពី ២០ ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 60000 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 150000 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះ។

ដំណោះស្រាយ

- **ទិន្នន័យនៃប្រធាន ៖**
  - ចំនួនប្រជាជនកាលពី ២០ ឆ្នាំមុន (យកជាពេលដើម $t=0$) ៖ $P_0 = 60000$ នាក់
  - ចំនួនប្រជាជនបច្ចុប្បន្ន (ត្រូវនឹង $t = 20$ ឆ្នាំ) ៖ $P(20) = 150000$ នាក់
- **របៀបទី ១ ៖ តាមម៉ូដែលកំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលបន្តបន្ទាប់** $P(t) = P_0 e^{kt}$

  $$P(20) = P_0 e^{20k} \iff 60000e^{20k} = 150000$$

  សម្រួលអង្គទាំងពីរ ៖

  $$e^{20k} = \frac{150000}{60000} = \frac{5}{2} = 2.5$$

  បំពាក់លោការីតនេពែរលើអង្គទាំងពីរ ៖

  $$20k = \ln(2.5) \implies k = \frac{\ln(2.5)}{20}$$

  ដោយ $\ln(2.5) \approx 0.91629$ គេបាន ៖

  $$k \approx \frac{0.91629}{20} \approx 0.04581 = \mathbf{4.58\%} \text{ ក្នុងមួយឆ្នាំ}$$

- **របៀបទី ២ ៖ តាមម៉ូដែលកំណើនប្រចាំឆ្នាំដាច់ដោយឡែក** $P(t) = P_0(1+r)^t$

  $$60000(1+r)^{20} = 150000 \iff (1+r)^{20} = 2.5$$

  នាំឱ្យ ៖

  $$1 + r = (2.5)^{\frac{1}{20}} \approx 1.04689 \implies r \approx 0.04689 = \mathbf{4.69\%} \text{ ក្នុងមួយឆ្នាំ}$$

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន ៖ អត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះគឺ ៖

$k \approx 4.58\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ (ម៉ូដែលអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល) ឬ $r \approx 4.69\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ (ម៉ូដែលប្រចាំឆ្នាំ)

លំហាត់កិច្ចការផ្ទះ សិក្សាអនុគមន៍ថ្នាក់ទី១២

ប្រធានលំហាត់ ៖

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-8x+11}{x^2-6x+9}$ ។ គេតាង (C) ជាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. រកដែនកំណត់ D_f នៃអនុគមន៍ f ។

២. រកលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់នូវសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

៣. ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x-3)^3}$ ។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៤. ខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្ស (Ox) ត្រង់ពីរចំណុច A និង B និងកាត់អ័ក្ស (Oy) ត្រង់ C ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ $(T_1),(T_2)$ និង (T_3) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច A,B និង C ។

៥. ចូរសង់ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ $(T_1),(T_2)$ និង (T_3) ក្នុងតម្រុយរួមគ្នា ។

ដំណោះស្រាយលម្អិត

១. រកដែនកំណត់ D_f នៃអនុគមន៍ f ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-8x+11}{x^2-6x+9}$ មានន័យលុះត្រាតែភាគបែងខុសពីសូន្យ ៖

$$x^2-6x+9\neq 0 \iff (x-3)^2\neq 0 \iff x-3\neq 0 \implies x\neq 3$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ ។

២. រកលីមីត និងទាញបញ្ជាក់នូវសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ៖

• លីមីតត្រង់ $\pm\infty$ ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-8x+11}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) នៅខាង $\pm\infty$ ។

• លីមីតត្រង់ $x\to 3$ ៖

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+11}{(x-3)^2}$$

ដោយ $\lim_{x\to 3}(x^2-8x+11)=3^2-8(3)+11=-4<0$ និង $\lim_{x\to 3}(x-3)^2=0^+$ នោះ ៖

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to 3} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

៣. ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x-3)^3}$ ៖

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2-8x+11}{(x-3)^2}$ មានទម្រង់ $\dfrac{u}{v}$ ដែល $u=x^2-8x+11$ និង $v=(x-3)^2$ ។

នាំឱ្យ $u'=2x-8=2(x-4)$ និង $v'=2(x-3)$ ។

តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{(2x-8)(x-3)^2-(x^2-8x+11)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}\\
&=\frac{(x-3)\left[(2x-8)(x-3)-2(x^2-8x+11)\right]}{(x-3)^4}\\
&=\frac{2x^2-6x-8x+24-2x^2+16x-22}{(x-3)^3}\\
&=\frac{2x+2}{(x-3)^3}=\frac{2(x+1)}{(x-3)^3}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x-3)^3}$ ពិតប្រាកដមែនចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ ។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ៖

- ឱ្យ $f'(x)=0 \iff \dfrac{2(x+1)}{(x-3)^3}=0 \iff 2(x+1)=0 \implies x=-1$ ។
- សញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យនឹងផលគុណ $(x+1)(x-3)$ ព្រោះ $(x-3)^4>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\neq 3$ ៖
  - ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)$ ៖ $f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន ។
  - ចំពោះ $x\in(-1,3)$ ៖ $f'(x)<0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។
  - ចំពោះ $x\in(3,+\infty)$ ៖ $f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន ។
- ត្រង់ $x=-1$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាន នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប ៖

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-8(-1)+11}{(-1-3)^2}=\frac{1+8+11}{16}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$$

- តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

៤. ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C ៖

• ចំណុចប្រសព្វរវាង (C) នឹងអ័ក្ស (Ox) $(y=0)$ ៖

$$f(x)=0 \iff \frac{x^2-8x+11}{(x-3)^2}=0 \iff x^2-8x+11=0$$

$\Delta'=(-4)^2-1(11)=16-11=5>0 \implies x=4\pm\sqrt{5}$ (យកទាំងពីរព្រោះខុសពី 3) ។

ដូចនេះ $A(4-\sqrt{5},0)$ និង $B(4+\sqrt{5},0)$ ។

• ចំណុចប្រសព្វរវាង (C) នឹងអ័ក្ស (Oy) $(x=0)$ ៖

$$f(0)=\frac{0^2-8(0)+11}{(0-3)^2}=\frac{11}{9}$$

ដូចនេះ $C\left(0,\frac{11}{9}\right)$ ។

ខ. សមីការបន្ទាត់ $(T_1),(T_2)$ និង (T_3) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ៖
រូបមន្តទូទៅ ៖ $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ ។

• ត្រង់ចំណុច $A(4-\sqrt{5},0)$ ៖ $x_0=4-\sqrt{5}$
$x_0+1=5-\sqrt{5}$ និង $x_0-3=1-\sqrt{5}$ ។
$(1-\sqrt{5})^3=1-3\sqrt{5}+3(5)-5\sqrt{5}=16-8\sqrt{5}=8(2-\sqrt{5})$ ។

$$f'(4-\sqrt{5})=\frac{2(5-\sqrt{5})}{8(2-\sqrt{5})}=\frac{5-\sqrt{5}}{4(2-\sqrt{5})}=\frac{(5-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{4(4-5)}=-\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$$

ដូចនេះ $(T_1): y=-\frac{5+3\sqrt{5}}{4}(x-4+\sqrt{5})$ ឬ $y=-\frac{5+3\sqrt{5}}{4}x+\frac{5+7\sqrt{5}}{4}$ ។

• ត្រង់ចំណុច $B(4+\sqrt{5},0)$ ៖ $x_0=4+\sqrt{5}$
$x_0+1=5+\sqrt{5}$ និង $x_0-3=1+\sqrt{5}$ ។
$(1+\sqrt{5})^3=16+8\sqrt{5}=8(2+\sqrt{5})$ ។

$$f'(4+\sqrt{5})=\frac{2(5+\sqrt{5})}{8(2+\sqrt{5})}=\frac{5+\sqrt{5}}{4(2+\sqrt{5})}=\frac{(5+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{4(4-5)}=\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

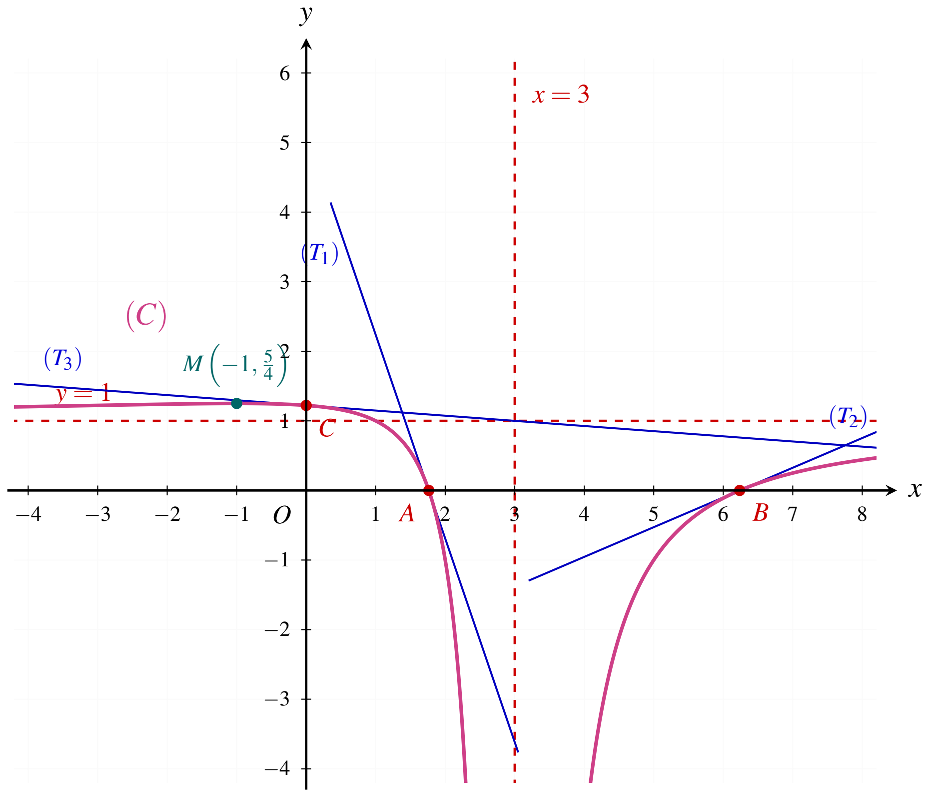
ដូចនេះ $(T_2): y=\frac{3\sqrt{5}-5}{4}(x-4-\sqrt{5})$ ឬ $y=\frac{3\sqrt{5}-5}{4}x+\frac{5-7\sqrt{5}}{4}$ ។

• ត្រង់ចំណុច $C\left(0,\frac{11}{9}\right)$ ៖ $x_0=0$

$$f'(0)=\frac{2(0+1)}{(0-3)^3}=-\frac{2}{27}$$

ដូចនេះ $(T_3): y=-\frac{2}{27}x+\frac{11}{9}$ ។

៥. សង់ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ $(T_1), (T_2)$ និង (T_3) ក្នុងតម្រុយរួមគ្នា ៖



តារាងតម្លៃពិសេស និងធាតុសំខាន់ៗនៃក្រាប (C) ៖

ធាតុសំខាន់ៗ	សមីការ / កូអរដោនេ	តម្លៃប្រហែល
អាស៊ីមតូតដេក	$y = 1$	$y = 1$
អាស៊ីមតូតឈរ	$x = 3$	$x = 3$
ចំណុចអតិបរមាធៀប M	$M\left(-1, \frac{5}{4}\right)$	$(-1, 1.25)$
ប្រសព្វអ័ក្ស (Ox) ត្រង់ A	$A(4-\sqrt{5}, 0)$	$(1.764, 0)$
ប្រសព្វអ័ក្ស (Ox) ត្រង់ B	$B(4+\sqrt{5}, 0)$	$(6.236, 0)$
ប្រសព្វអ័ក្ស (Oy) ត្រង់ C	$C\left(0, \frac{11}{9}\right)$	$(0, 1.222)$
បន្ទាត់ប៉ះ (T_1) ត្រង់ A	$y = -\frac{5+3\sqrt{5}}{4}(x-4+\sqrt{5})$	$y \approx -2.927x + 5.163$
បន្ទាត់ប៉ះ (T_2) ត្រង់ B	$y = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}(x-4-\sqrt{5})$	$y \approx 0.427x - 2.663$
បន្ទាត់ប៉ះ (T_3) ត្រង់ C	$y = -\frac{2}{27}x + \frac{11}{9}$	$y \approx -0.074x + 1.222$

ឧបសម្ព័ន្ធ

ក ៖ តារាងរូបមន្តដេរីវេ (Table of Derivatives)

១. រូបមន្តប្រមាណវិធីលើដេរីវេ (Derivative Operations)

ចំពោះអនុគមន៍ $u=u(x)$, $v=v(x)$ ដែលមានដេរីវេ និងចំនួនថេរ $k,c\in\mathbb{R}$ ៖

- $(c)'=0$
- $(u\pm v)'=u'\pm v'$
- $(k\cdot u)'=k\cdot u'$
- $(u\cdot v)'=u'v+uv'$
- $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}\quad(v\neq 0)$
- $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$
- $(f\circ g)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$
- $(u^n)'=nu'u^{n-1}\quad(n\in\mathbb{R}^*)$

២. និយមន័យ និងអត្ថន័យសំខាន់ៗនៃដេរីវេ (Meaning of Derivatives)

1. និយមន័យចំនួនដេរីវេត្រង់ x_0 ៖ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
2. ដេរីវេឆ្វេង និងដេរីវេស្ដាំត្រង់ x_0 ៖ $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

   f មានដេរីវេត្រង់ $x_0 \iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$។
3. អត្ថន័យធរណីមាត្រ ៖ មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ x_0 គឺ $m=f'(x_0)=\tan\alpha$។
4. អត្ថន័យរូបវិទ្យា (ចលនាត្រង់) ៖ ល្បឿនខណៈ $v(t)=s'(t)$ និង សំទុះខណៈ $a(t)=v'(t)=s''(t)$។
5. អត្ថន័យសេដ្ឋកិច្ច ៖ ថ្លៃដើម $C'(x)$, ចំណូល $R'(x)$, ចំណេញ $P'(x)=R'(x)-C'(x)$។

៣. តារាងរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បឋម និងអនុគមន៍បណ្ដាក់

អនុគមន៍បឋម $y=f(x)$	ដេរីវេ $y'=f'(x)$	ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u=u(x)$
$y=c$ (c ជាចំនួនថេរ)	$y'=0$	---
$y=x$	$y'=1$	$y=u \Longrightarrow y'=u'$
$y=x^n\ (n\in\mathbb{R}^*)$	$y'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$
$y=\sqrt{x}\ (x>0)$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\quad (u>0)$
$y=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}\quad (u\neq 0)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$(e^u)'=u'e^u$
$y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$	$(a^u)'=u'a^u\ln a$
$y=\ln x\ (x>0)$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}\quad (u>0)$
$y=\ln\lvert x\rvert\ (x\neq 0)$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln\lvert u\rvert)'=\dfrac{u'}{u}\quad (u\neq 0)$
$y=\log_a x\ (x>0,a>0,a\neq 1)$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}\quad (u>0)$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$(\sin u)'=u'\cos u$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'\sin u$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)'=u'(1+\tan^2 u)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y=\cot x$	$y'=-(1+\cot^2 x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)'=-u'(1+\cot^2 u)=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

៤. រូបមន្តកាត់ដេរីវេសម្រាប់អនុគមន៍សនិទាន (Shortcuts for Rational Functions)

1. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Longrightarrow y'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

2. $y=ax+b+\dfrac{c}{px+q} \Longrightarrow y'=a-\dfrac{cp}{(px+q)^2}$

3. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q} \Longrightarrow y'=\dfrac{apx^2+2aqx+(bq-cp)}{(px+q)^2}$

4. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} \Longrightarrow y'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}}{(px^2+qx+r)^2}=\dfrac{(aq-bp)x^2+2(ar-cp)x+(br-cq)}{(px^2+qx+r)^2}$

ខ ៖ តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលគ្រឹះ (Primitives & Integrals)

១. តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវគ្រឹះនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u(x)$

ល.រ	ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍អថេរ x	ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u(x)$
1	$\int 0\,dx = C$	$\int 0\,du = C$
2	$\int k\,dx = kx + C \quad (k$ ថេរ$)$	$\int k\cdot u'\,dx = ku + C$
3	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
4	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + C \quad (u \neq 0)$
5	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx = 2\sqrt{u} + C \quad (u > 0)$
6	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int u'e^u\,dx = e^u + C$
7	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\int u'a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
8	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int u'\sin u\,dx = -\cos u + C$
9	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int u'\cos u\,dx = \sin u + C$
10	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \tan u + C$
11	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$	$\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\cot u + C$

២. រូបមន្តព្រីមីទីវទម្រង់លីនេអ៊ែរ $ax+b$ $(a \neq 0)$

- $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
- $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + C$
- $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
- $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
- $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

៣. រូបមន្តព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍សនិទានពិសេស ($a>0$)

a. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

b. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

c. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

d. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

e. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

f. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

៤. រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក (Integration by Parts)

បើ $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេជាប់ គេបានរូបមន្ត ៖

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \quad \text{ឬ} \quad \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

ក្បួនអាទិភាពជ្រើសរើស u តាមវិធាន **L-I-A-T-E** ៖

L	I	A	T	E
$\ln x, \log_a x$	arcsin, arctan	x^n, ពហុធា	$\sin x, \cos x$	e^x, a^x

៥. កម្មវិធីអាំងតេក្រាលក្នុងការគណនាផ្ទៃក្រឡា និងមាឌធរណីមាត្រ

1. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $(C): y=f(x)$ និងអ័ក្ស Ox លើ $[a,b]$ ៖
$S=\int_a^b |f(x)|\,dx \quad$ (បើ $f(x)\geq 0 \implies S=\int_a^b f(x)\,dx$)

2. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ (C_1) និង (C_2) លើ $[a,b]$ ៖
$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

3. មាឌសូលីដបរិវត្តន៍បង្កើតដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស Ox លើ $[a,b]$ ៖
$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \quad$ ឬករណីពីរខ្សែកោង ៖ $V=\pi\int_a^b \left|[f(x)]^2-[g(x)]^2\right|\,dx$

គ ៖ លីមីតនៃអនុគមន៍ និងវិធីសាស្ត្រគណនារាងមិនកំណត់

១. ប្រភេទរាងមិនកំណត់ទាំង ៧ (The 7 Indeterminate Forms)

ក្នុងគណិតវិទ្យាវិភាគ មានរាងមិនកំណត់ចំនួន ៧ ដែលទាមទារឱ្យមានការបំប្លែងកន្សោមមុននឹងគណនាតម្លៃលីមីត ៖

$$\left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [0\times\infty], \quad [+\infty-\infty], \quad [1^{\infty}], \quad [0^{0}], \quad [\infty^{0}]$$

២. វិធីសាស្ត្រគន្លឹះដោះស្រាយរាងមិនកំណត់នីមួយៗ

រាងមិនកំណត់	វិធីសាស្ត្រគន្លឹះ	ការពន្យល់ និងបច្ចេកទេស
$\left[\frac{0}{0}\right]$	• ដាក់ជាផលគុណកត្តា • គុណកន្សោមឆ្លាស់ (រ៉ាឌីកាល់) • ប្រើរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ • ប្រើវិធានឡូពីតាល់	$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)}$ រួចសម្រួលកត្តារួម $(x-a)$ ចោល។ បើមានរ៉ាឌីកាល់ គុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=A-B$។
$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	• ទាញតួដឺក្រេខ្ពស់បំផុត • ចែកភាគយកនិងភាគបែង • ប្រើវិធានឡូពីតាល់	ទាញអថេរដែលមានស្វ័យគុណធំបំផុតនៅភាគយក និងភាគបែងជាកត្តារួម រួចសម្រួលចោល។ ប្រើលក្ខណ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x^n}=0\ (n>0)$។
$[0\times\infty]$	• បំប្លែងទៅរាង $\left[\frac{0}{0}\right]$ ឬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	សរសេរ $f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ឬ $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ រួចដោះស្រាយតាមក្បួន $\left[\frac{0}{0}\right]$ ឬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$។
$[+\infty-\infty]$	• គុណកន្សោមឆ្លាស់ • ទាញតួធំបំផុតជាកត្តា • តម្រូវភាគបែងរួម	បើជាកន្សោមមានរ៉ាឌីកាល់ គុណនិងចែកនឹងកន្សោមឆ្លាស់។ បើជាកន្សោមពហុធា ទាញតួដែលមានស្វ័យគុណខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម។
$[1^{\infty}], [0^{0}], [\infty^{0}]$	• ប្រើលោការីតនេពែរ • រូបមន្ត $y=e^{\ln y}$	តាង $L=\lim f(x)^{g(x)} \implies \ln L=\lim[g(x)\ln f(x)]$ ដែលនាំឱ្យលីមីតធ្លាក់ចូលរាង $[0\times\infty]$ រួចទាញយក $L=e^{\ln L}$។

៣. វិធានឡូពីតាល់ (L'Hôpital's Rule)

បើ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\left[\frac{0}{0}\right]$ ឬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ហើយ f និង g មានដេរីវេលើចន្លោះបើកដែលមានផ្ទុក x_0 ដោយ $g'(x)\neq 0$ នោះ ៖

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

សម្គាល់ ៖ វិធាននេះក៏នៅតែពិតចំពោះ $x\to\pm\infty$ ផងដែរ។ ប្រសិនបើលទ្ធផលដេរីវេលើកទីមួយនៅតែជាប់រាងមិនកំណត់ $\left[\frac{0}{0}\right]$ ឬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ គេអាចបន្តអនុវត្តវិធានឡូពីតាល់ដេរីវេលើកទីពីរបាន។

៤. លីមីតគ្រឹះនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីតនេពែរ

a. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

c. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

d. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0, a\neq 1)$

f. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad (n>0)$

g. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \quad (n>0)$

h. $\lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0 \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

i. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad (n>0)$

j. $\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x=0 \quad (n>0)$

៥. លីមីតគ្រឹះនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \iff \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \iff \lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

f. $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$

ឃ ៖ ជំហានទាំងស្រុងនៃការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (ភាគ ១)

ជំហានគ្រឹះទាំង ៨ ក្នុងការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ៖

ជំហាន	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាព និងរូបមន្តសំខាន់ៗ
ជំហានទី ១	ដែនកំណត់ (D)	• រកសំណុំតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យកន្សោម $f(x)$ មានន័យ។ • ប្រភាគសនិទាន $\frac{P(x)}{Q(x)}$ មានន័យកាលណា $Q(x)\neq 0$។ • អនុគមន៍លោការីត $\ln(u)$ មានន័យកាលណា $u>0$។ • អនុគមន៍អសនិទាន $\sqrt{u}$ មានន័យកាលណា $u\geq 0$។
ជំហានទី ២	ទិសដៅអថេរភាព	• គណនាដេរីវេទីមួយ $f'(x)$ ដោយប្រើរូបមន្តដេរីវេត្រឹមត្រូវ។ • ដោះស្រាយសមីការ $f'(x)=0$ ដើម្បីរកចំណុចស្ថានីយ។ • សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះនីមួយៗនៃដែនកំណត់ ៖ --- បើ $f'(x)>0$ លើ $I \Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I $(\nearrow)$។ --- បើ $f'(x)<0$ លើ $I \Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I $(\searrow)$។
ជំហានទី ៣	តម្លៃបរមាធៀប	• បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x_0 \Longrightarrow f$ មាន**អតិបរមាធៀប** $M=f(x_0)$។ • បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x_0 \Longrightarrow f$ មាន**អប្បបរមាធៀប** $m=f(x_0)$។ • ករណី $f'(x_0)=0$ ហើយ $f''(x_0)<0 \Longrightarrow$ អតិបរមាធៀប។ • ករណី $f'(x_0)=0$ ហើយ $f''(x_0)>0 \Longrightarrow$ អប្បបរមាធៀប។
ជំហានទី ៤	លីមីតត្រង់ចុងដែន និងអាស៊ីមតូត	• **អាស៊ីមតូតឈរ ៖** បើ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Longrightarrow (L): x=x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។ • **អាស៊ីមតូតដេក ៖** បើ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=y_0 \Longrightarrow (D): y=y_0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។ • **អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖** បើ $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \Longrightarrow (\Delta): y=ax+b$ $(a\neq 0)$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។ គេអាចរក a,b ដោយចែកពហុធា ឬ $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ និង $b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$។

ឃ ៖ ជំហានទាំងស្រុងនៃការសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (ភាគ ២)

ជំហាន	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាព និងរូបមន្តសំខាន់ៗ
ជំហានទី ៥	តារាងអថេរភាព	• រៀបចំជួរដេកចំនួន ៣ ៖ ជួរ x, ជួរ $f'(x)$, និងជួរ $f(x)$។ • បញ្ចូលដែនកំណត់, ឫសនៃ $f'(x)=0$, សញ្ញា f', និងព្រួញបង្ហាញទិសដៅអថេរភាព (f កើន $\nearrow$, f ចុះ $\searrow$) ព្រមទាំងតម្លៃលីមីត និងតម្លៃបរមាធៀប។ • គូសបន្ទាត់ឈរពីរជាន់ ($\|$) ចំពោះតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍គ្មានន័យ។
ជំហានទី ៦	ភាពប៉ោង ផត និងចំណុចរបត់	• គណនាដេរីវេទីពីរ $f''(x)$។ • បើ $f''(x)>0 \implies$ ក្រាបមានភាព**ផត** (ងើបឡើងលើ $\cup$)។ • បើ $f''(x)<0 \implies$ ក្រាបមានភាព**ប៉ោង** (កោងចុះក្រោម $\cap$)។ • បើ $f''(x_0)=0$ ហើយ $f''(x)$ ប្ដូរសញ្ញាពេលឆ្លងកាត់ $x_0 \implies I(x_0, f(x_0))$ ជា**ចំណុចរបត់**នៃខ្សែកោង។
ជំហានទី ៧	ផ្ចិតឆ្លុះ និងអ័ក្សឆ្លុះ	• $I(a,b)$ ជា**ផ្ចិតឆ្លុះ**នៃក្រាប (C) លុះត្រាតែ $\forall x \in D \implies 2a-x \in D$ និង ៖ $f(2a-x)+f(x)=2b$ • បន្ទាត់ $(d): x=a$ ជា**អ័ក្សឆ្លុះ**នៃក្រាប (C) លុះត្រាតែ $\forall x \in D \implies 2a-x \in D$ និង ៖ $f(2a-x)=f(x)$
ជំហានទី ៨	ចំណុចពិសេស និងការសង់ក្រាប	• រកចំណុចប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស Ox $(y=0)$ និងអ័ក្ស Oy $(x=0)$។ • សង់តម្រុយអរតូណរម៉េ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ឱ្យមានមាត្រដ្ឋានច្បាស់លាស់។ • គូសបន្ទាត់អាស៊ីមតូត (បន្ទាត់ដាច់ៗ), ចំណុចបរមា, ចំណុចរបត់, និងចំណុចជំនួយ។ • គូសខ្សែកោង (C) ភ្ជាប់ចំណុចទាំងអស់ដោយរលូន ស្របតាមទិសដៅក្នុងតារាងអថេរភាព។

ខ ៖ ធរណីមាត្រវិភាគ និងបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (Tangents & Analytic Geometry)

១. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ប្រក្រតីនៃខ្សែកោង $(C): y = f(x)$

1. សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M_0(x_0, y_0)$ ៖ $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (ដោយ $y_0 = f(x_0)$)
   មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ x_0 គឺ $m = f'(x_0) = \tan\alpha$។
2. សមីការបន្ទាត់ប្រក្រតី (កែងនឹងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M_0) ៖ $(N): y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$ $(f'(x_0) \neq 0)$
3. បន្ទាត់ប៉ះចេញពីចំណុចក្រៅ $A(x_A, y_A)$ ៖ ដោះស្រាយសមីការ $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$ ទាញរក x_0។
4. បន្ទាត់ប៉ះស្រប ឬកែងនឹងបន្ទាត់ $(d): y = ax + b$ ៖
   - បើ $(T) \parallel (d) \implies f'(x_0) = a$
   - បើ $(T) \perp (d) \implies f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$

២. ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ និងបន្ទាត់ $(d): y = ax + b$

ដើម្បីសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) គេត្រូវពិនិត្យសញ្ញានៃផលដក $D(x) = f(x) - (ax + b)$ ៖

- បើ $D(x) > 0$ ចំពោះ $x \in I \implies$ ខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**បន្ទាត់ (d) លើចន្លោះ I។
- បើ $D(x) < 0$ ចំពោះ $x \in I \implies$ ខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅ**ខាងក្រោម**បន្ទាត់ (d) លើចន្លោះ I។
- បើ $D(x) = 0$ ត្រង់ $x = x_1 \implies$ ខ្សែកោង (C) **កាត់**បន្ទាត់ (d) ត្រង់ចំណុច $M_1(x_1, f(x_1))$។

៣. រូបមន្តធរណីមាត្រវិភាគក្នុងប្លង់អរតូណរមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ចំពោះចំណុច $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ និងបន្ទាត់ $(\Delta): Ax + By + C = 0$ ៖

a. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B ៖
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

b. ចំណុចកណ្តាល I នៃ $[AB]$ ៖
$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

c. ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ ទៅ (Δ) ៖
$d(M_0, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

d. មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ (AB) ៖
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $(x_A \neq x_B)$

e. សមីការបន្ទាត់កាត់តាម A មាន m ៖
$(d): y - y_A = m(x - x_A)$

f. មុំ θ រវាងពីរបន្ទាត់មានមេគុណ m_1, m_2 ៖
$\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ $(m_1 m_2 \neq -1)$

ច ៖ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ និងតារាងតម្លៃមុំពិសេស

១. រូបមន្តត្រីកោណមាត្រគ្រឹះ

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi)$
- $\tan x \cdot \cot x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

២. រូបមន្តផលបូក ផលដក មុំឌុប កន្លះមុំ និងបំប្លែងផលគុណ/ផលបូក

a. ផលបូក-ផលដក ៖ $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a, \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

b. មុំឌុប ៖ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

c. កន្លះមុំ (បញ្ចុះដឺក្រេ) ៖ $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}, \quad \tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

d. បំប្លែងផលបូកទៅផលគុណ ៖ $\sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2}, \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

៣. តារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

មុំជាដឺក្រេ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
មុំជារ៉ាដ្យង់ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

៤. សញ្ញាតាមការ៉ង់ទាំង ៤ (Signs by Quadrants) ៖ **I** $(\sin, \cos, \tan, \cot > 0)$; **II** $(\sin > 0$, ផ្សេងទៀត $< 0)$; **III** $(\tan, \cot > 0$, ផ្សេងទៀត $< 0)$; **IV** $(\cos > 0$, ផ្សេងទៀត $< 0)$

ឯកសារយោង

1. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

2. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

3. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** ៖ សៀវភៅគ្រូ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

4. **នាយកដ្ឋានជានាគុណភាពអប់រំ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) គណិតវិទ្យា (២០១៤-២០២៥), ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា។

5. **នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹតការ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, រាជធានីភ្នំពេញ។

6. **Stewart, James** (2016) ៖ *Calculus: Early Transcendentals* (8th Edition), Cengage Learning, Boston, USA.

7. **Thomas, George B., Weir, Maurice D., & Hass, Joel** (2018) ៖ *Thomas' Calculus* (14th Edition), Pearson Education, New York, USA.

8. **Larson, Ron, & Edwards, Bruce** (2018) ៖ *Calculus* (11th Edition), Cengage Learning, USA.

9. **Spivak, Michael** (2008) ៖ *Calculus* (4th Edition), Publish or Perish, Houston, Texas.