# អាំងតេក្រាល

INTEGRATION -- GRADE 12

ថ្នាក់ទី ១២ • GRADE 12

## ទ្រឹស្តីសង្ខេប • វិធីសាស្ត្រគណនា • លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងប្រឡងសិស្សពូកែ

### រូបមន្តគ្រឹះសំខាន់ៗនៃអាំងតេក្រាល • CORE FORMULAS

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + c \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

អ្នករៀបរៀង ៖ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០២៦

# គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យ

| | |
|---|---|
| គណៈកម្មការរៀបរៀង | លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី |
| | លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន |
| ត្រួតពិនិត្យខ្លឹមសារ | លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន |
| រៀបចំខ្លឹមសារ | លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី |
| រចនាគម្រប និងទំព័រ | លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី |
| រូបភាព និងតារាង | លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី |
| កែសម្រួលអក្ខរាវិរុទ្ធ | លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី |
| គណៈកម្មការពិនិត្យចុងក្រោយ | លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី |
| | លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន |

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ក្នុងការស្វ័យសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

**ព័ត៌មានសៀវភៅ**

កំណែសាកល្បង © ២០២៦

# អាំងតេក្រាល ថ្នាក់ទី១២

**INTEGRATION - GRADE 12**

រៀបរៀងដោយ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

សម្រាប់បោះពុម្ពផ្សាយ៖ **បណ្ណាគារអង្គរ**

# សេចក្តីឧទ្ទិស

សៀវភៅ «**អាំងតេក្រាល ថ្នាក់ទី១២**» នេះ
សូមឧទ្ទិសជូនចំពោះ៖

ភរិយាជាទីស្រឡាញ់

**ង៉ែត សុគន្ធា**

និង

កូនស្រីជាទីស្រឡាញ់

**ខែម សោភា**

ដែលជាកម្លាំងចិត្ត និងជាប្រភពនៃសុភមង្គលដ៏កក់ក្តៅ
ក្នុងដំណើរជីវិត និងការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្ញុំបាទជានិច្ចនិរន្តរ៍។

**លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

# អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យា គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដ៏មានសារៈសំខាន់បំផុត ក្នុងការអភិវឌ្ឍការគិតបែបសមហេតុផល វិភាគស៊ីជម្រៅ និងការដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ បច្ចេកវិទ្យា និងជីវភាពរស់នៅជាក់ស្តែង។ ក្នុងចំណោមប្រធានបទគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ «**អាំងតេក្រាល**» គឺជាស្នូលដ៏សំខាន់បំផុតនៃគណិតវិភាគ (Calculus) ដែលសិស្សានុសិស្សគ្រប់រូបត្រូវតែក្តាប់ឱ្យបានច្បាស់លាស់ ទាំងទ្រឹស្តី ទាំងវិធីសាស្ត្រគណនា និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង សម្រាប់ត្រៀមខ្លួនប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

សៀវភៅ «**អាំងតេក្រាល ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងហ្មត់ចត់ និងសម្បូរបែប ផ្អែកលើកម្មវិធីសិក្សាផ្លូវការនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដោយបែងចែកខ្លឹមសារជា ៤ មេរៀនចម្បងៗ៖

- **មេរៀនទី១ ៖ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់** — ពន្យល់ពីនិយមន័យព្រីមីទីវ ព្រីមីទីវទូទៅ និយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ រូបមន្តគ្រឹះ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ស្វ័យគុណ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ វិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរ វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន និងលំហាត់អនុវត្តន៍ចម្រុះ។
- **មេរៀនទី២ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់** — ផ្តោតលើនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់តាមផលបូក Riemann អត្ថន័យធរណីមាត្រ ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតវិភាគ លក្ខណៈគន្លឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម ព្រមទាំងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ និងដោយផ្នែក។
- **មេរៀនទី៣ ៖ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់** — បង្ហាញពីវិធីសាស្ត្រគណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ និងផ្ទៃក្រឡាធៀបនឹងអ័ក្សអ័រដោណេ អមដោយគំនូសក្រាប TikZ យ៉ាងច្បាស់លាស់។
- **មេរៀនទី៤ ៖ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ** — សិក្សាលើការគណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដោយវិធីសាស្ត្រថាស (Disk Method) វិធីសាស្ត្រក្រវិល (Washer Method) និងរូបមន្តគណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង ព្រមទាំងលំហាត់សរុបជំពូកសម្រាប់វាស់ស្ទង់សមត្ថភាព។

សៀវភៅនេះត្រូវបានរចនាឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ មានរូបភាពគំនូសក្រាហ្វិកគណិតវិទ្យា TikZ យ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមក្បួនខ្នាត។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមគ្គុទេសក៍ និងជាកម្រងឯកសារជំនួយស្មារតីដ៏មានតម្លៃបំផុតសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្អូនៗសិស្សានុសិស្សក្នុងការបង្រៀននិងរៀន។ ទោះបីជាមានការខិតខំប្រឹងប្រែងយ៉ាងណាក្តី ក៏សៀវភៅនេះប្រាកដជាមិនអាចជៀសផុតពីកំហុសអចេតនាណាមួយឡើយ។ ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិរិះគន់ស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកអានដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

**លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

# សេចក្តីដឹងគុណ

ជាបឋម ខ្ញុំបាទ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី** សូមលំឱនកាយវាចាចិត្ត ថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុត ជូនចំពោះលោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ គឺមាតា និងបិតារបស់ខ្ញុំ ដែលលោកទាំងពីរបានពលិកម្មគ្រប់បែបយ៉ាង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ និងអប់រំទូន្មានប្រៀនប្រដៅខ្ញុំបាទតាំងពីកុមារភាព រហូតធ្វើឱ្យខ្ញុំអាចឈរយ៉ាងរឹងមាំនៅលើវិថីជីវិតមួយនេះ។ បើគ្មានការលះបង់ និងសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏មហាសាលពីលោកទាំងពីរទេ នោះខ្ញុំបាទក៏ប្រហែលជាគ្មានថ្ងៃនេះឡើយ។

ជាបន្តបន្ទាប់ ខ្ញុំបាទសូមសម្តែងនូវសេចក្តីគោរពដឹងគុណយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រ ជូនចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ តាំងពីកម្រិតបឋមសិក្សា រហូតដល់ថ្នាក់សាកលវិទ្យាល័យ ដែលបានខិតខំចំណាយកម្លាំងកាយចិត្ត ក្នុងការផ្ទេរនូវចំណេះដឹង និងបណ្តុះបណ្តាលរូបខ្ញុំឱ្យក្លាយជាធនធានមនុស្សមួយរូបប្រកបដោយសមត្ថភាព។ រាល់ដំបូន្មានដែលទទួលបានពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ គឺជាប្រទីបបំភ្លឺផ្លូវដែលតែងតែចង្អុលបង្ហាញឱ្យខ្ញុំបាទដើរលើកន្លងដ៏ត្រឹមត្រូវ។

ជាពិសេសលើសពីនេះទៅទៀត ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងផ្ញើជូននូវសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏ធំធេងមិនអាចកាត់ថ្លៃបាន ជូនចំពោះភរិយាជាទីស្រឡាញ់របស់ខ្ញុំ គឺលោកស្រី **ង៉ែត សុគន្ធា** ព្រមទាំងកូនស្រីជាទីស្រឡាញ់ **ខែម សោភា** ដែលតែងតែនៅក្បែរ ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ មើលថែទាំ លើកទឹកចិត្ត និងលះបង់គ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យខ្ញុំបាទមានពេលវេលាពេញលេញក្នុងការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងសៀវភៅមួយក្បាលនេះឡើងរហូតទទួលបានជោគជ័យ។

សៀវភៅ «**អាំងតេក្រាល ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ មិនអាចលេចចេញជារូបរាងឡើងបានឡើយ ប្រសិនបើគ្មានការលើកទឹកចិត្តពីមនុស្សជាច្រើនជុំវិញខ្លួនខ្ញុំ។ ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់មិត្តភក្តិ បងប្អូន និងសហការីទាំងអស់ ដែលតែងតែផ្តល់មតិយោបល់ ជួយកែសម្រួល និងជួយជំរុញទឹកចិត្តខ្ញុំនៅក្នុងដំណើរការនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះជាភាសា LaTeX។
ជាចុងបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមប្រសិទ្ធពរជ័យ សិរីសួស្តី ជ័យមង្គល ជូនដល់លោកអ្នកមានគុណ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ភរិយា កូនស្រី ព្រមទាំងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមប្រកបដោយសុខភាពល្អបរិបូរណ៍ ប្រាជ្ញាភ្លឺថ្លា ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និងសម្រេចបាននូវរាល់បំណងប្រាថ្នាក្នុងជីវិតជានិរន្តរ៍។

ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

**លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

# តារាងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

| និមិត្តសញ្ញា | អត្ថន័យ | អានថា / ការប្រើប្រាស់ |
|---|---|---|
| $f(x), g(x)$ | អនុគមន៍ជាប់ (ក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល) | អាំងតេក្រង់ (Integrand) កំណត់លើចន្លោះ $I$ |
| $F(x), G(x)$ | ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x), g(x)$ | អនុគមន៍ដើម ($F'(x) = f(x)$ គ្រប់ $x \in I$) |
| $c$ ឬ $C$ | ចំនួនថេរអាំងតេក្រាល | ថេរអាំងតេក្រាលបំពាន ($c \in \mathbb{R}$) |
| $dx, du, dt$ | ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអថេរ $x, u, t$ | $du = u'(x)\,dx$ (ក្នុងវិធីប្តូរអថេរ) |
| $\int f(x)\,dx$ | អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ | $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ |
| $\int_a^b f(x)\,dx$ | អាំងតេក្រាលកំណត់នៃ $f(x)$ ពី $a$ ទៅ $b$ | $a$ ជាព្រំដែនក្រោម, $b$ ជាព្រំដែនលើ |
| $\Big[F(x)\Big]_a^b$ | តម្លៃព្រីមីទីវត្រង់ព្រំដែន $a$ និង $b$ | $F(b) - F(a)$ (រូបមន្ត Newton--Leibniz) |
| $\int u\,dv$ | អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក | $uv - \int v\,du$ (វិធាន ILATE) |
| $\Delta x$ | ជំហានបែងចែកចន្លោះ $[a,b]$ | $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ (ប្រវែងចន្លោះរងនីមួយៗ) |
| $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ | ផលបូករីម៉ាន (Riemann Sum) | $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$ |
| $S$ | ផ្ទៃក្រឡានៃដែនប្លង់ | $S = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ ឬ $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ |
| $V_x$ | មាឌសូលីតបរិវត្តវិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ | $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ |
| $V_y$ | មាឌសូលីតបរិវត្តវិលជុំវិញអ័ក្ស $Oy$ | $V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2\,dy$ |
| $L$ | ប្រវែងធ្នូនាមនៃខ្សែកោង (Arc length) | $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ |
| $f_{\text{avg}}$ | តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ $f$ លើ $[a,b]$ | $f_{\text{avg}} = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ |
| $W$ | ការងារដែលបង្កើតដោយកម្លាំង $F(x)$ | $W = \int_a^b F(x)\,dx$ (កម្លាំងប្រែប្រួល) |
| $\mathbb{R}, \mathbb{N}^*$ | សំណុំចំនួនពិត និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន | $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$ |
| $[a,b],\ (a,b)$ | ចន្លោះបិទ និងចន្លោះបើក | $a \le x \le b,\ a < x < b$ |

# មាតិកា

**ខ្លឹមសារ** **ទំព័រ**


**មេរៀនទី ១ : ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ . . . 9**

១ ព្រីមីទីវ . . . 9

២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ . . . 15

៣ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ . . . 16

៤ អាំតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល . . . 18

៥ អាំតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ . . . 19

៦ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នាំឱ្យកើតអនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ . . . 20

៧ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស . . . 22

៨ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក . . . 24

៩ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន . . . 26

១០ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ . . . 28

១១ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន . . . 29

សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ១ . . . 31

លំហាត់អនុវត្តន៍ . . . 42

**មេរៀនទី ២ : អាំងតេក្រាលកំណត់ . . . 65**

១ សេចក្តីផ្តើម និងគំនិតគ្រឹះ . . . 65

២ និយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់ . . . 66

៣ ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតវិភាគ . . . 67

៤ លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ . . . 68

៥ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ . . . 71

៦ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក . . . 72

សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ២ . . . 73

លំហាត់អនុវត្តន៍ . . . 84

**មេរៀនទី ៣ : ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ . . . 103**

១ គណនាផ្ទៃក្រឡាតាមវិធីបែកជាចតុកោណកែង (Riemann Sums) . . . 103

២ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស . . . 105

៣ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ . . . 108

៤ ផ្ទៃក្រឡាគណនាធៀបនឹងអ័ក្សអ័រដោណេ $(Oy)$ . . . 109

សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ៣ . . . 110

លំហាត់អនុវត្តន៍ . . . 120

**មេរៀនទី ៤ : មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ . . . 145**

១ មាឌសូលីតបរិវត្ត . . . 145

២ ការគណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង (Arc Length) . . . 149

សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ៤ . . . 151

លំហាត់អនុវត្តន៍ . . . 160

លំហាត់ជំពូក . . . 174

**ផ្នែកដំណោះស្រាយ . . . 189**

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ១ . . . 189

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ២ . . . 203

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ៣ . . . 213

ដំណោះស្រាយ មេរៀនទី ៤ . . . 223

**ឧបសម្ព័ន្ធ ៖ តារាងរូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រគន្លឹះគណនាអាំងតេក្រាល . . . 237**

ក ៖ តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលគ្រឹះ (Table of Integrals) . . . 237

ខ ៖ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលគន្លឹះ (Integration Techniques) . . . 240

គ ៖ លក្ខណៈ និងទ្រឹស្តីបទនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ (Theorems of Definite Integrals) . . . 242

ឃ ៖ រូបមន្តធរណីមាត្រ និងរូបវិទ្យាអនុវត្ត (Applications of Integrals) . . . 244

**ឯកសារយោង . . . 248**

# មេរៀនទី ១
# ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

## ១ ព្រីមីទីវ

### ១.១ សញ្ញាណ និងនិយមន័យ

**ឧទាហរណ៍ជាក់ស្ដែងក្នុងរូបវិទ្យា៖**

គេទម្លាក់វត្ថុមួយពីទីខ្ពស់មកដី។ នៅខណៈពេល $t_0 = 0$ វត្ថុមានល្បឿន $v(0) = 0$ ។ ក្រោមចលនាធ្លាក់សេរីនៅខណៈពេល $t$ ល្បឿននៃអង្គធាតុគឺ $v(t) = gt$ ដែល $g$ ជាសំទុះទំនាញដី $(g \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2})$ ។
ដើម្បីរកចម្ងាយចរ $s(t)$ នៅខណៈពេល $t$ គេដឹងថា $v(t) = s'(t) = gt$ ។
គេឃើញថា $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ព្រោះ $s'(t) = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = gt = v(t)$ ។
អនុគមន៍ $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ នេះហៅថា **ព្រីមីទីវ (Primitive)** ឬ **អនុគមន៍ដើម (Antiderivative)** នៃអនុគមន៍ល្បឿន $v(t) = gt$ ។

**និយមន័យ ១ : ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍**

អនុគមន៍ $F(x)$ ហៅថាជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើដែនកំណត់ $D$ លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន៖

$$F'(x) = f(x)$$

**លំហាត់គំរូ ១**

ក. គេមានអនុគមន៍ $F(x)=x^3-x^2+x$ និង $f(x)=3x^2-2x+1$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

ក. គណនាដេរីវេនៃ $F(x)$ លើ $\mathbb{R}$៖

$$F'(x)=(x^3-x^2+x)'=3x^2-2x+1=f(x)$$

ដោយ $F'(x)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. ដោយ $(\sin x)'=\cos x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ គឺ៖

$$F(x)=\sin x+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

ជាពិសេស បើជ្រើសរើស $c=0$ នោះ $F(x)=\sin x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)=\cos x$ ។

## លំហាត់គំរូ ២

បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)=\sin^2 x-2$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\sin 2x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

អនុគមន៍ $F(x)=\sin^2 x-2$ មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$៖

$$F'(x)=(\sin^2 x-2)'=2\sin x\cdot(\sin x)'-0=2\sin x\cos x=\sin 2x=f(x)$$

ដោយ $F'(x)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដូចនេះអនុគមន៍ $F(x)=\sin^2 x-2$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\sin 2x$ ។

## លំហាត់គំរូ ៣

អនុគមន៍ $F$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $F(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

អនុវត្តរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ $(uv)' = u'v + uv'$ លើចន្លោះ $(0, +\infty)$៖

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[(x+1)e^{-\frac{1}{x}}\right]' \\ &= (x+1)'e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= 1\cdot e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = f(x) \end{aligned}$$

ដោយ $F'(x) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ ដូចនេះ $F$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f$ ។

**លំហាត់គំរូ ៤**

បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $F(x) = e^{x+1} - 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \quad , \quad f(x) = e^{x+1} - 2 + x$

ខ. $F(x) = (x^4+4)^3 + 3 \quad , \quad f(x) = 12x^3(x^4+4)^2$

គ. $F(x) = \frac{3}{5}(e^x - 3)^5 + 3 \quad , \quad f(x) = 3e^x(e^x-3)^4$

ឃ. $F(x) = \ln(e^{2x} - 2x) + \sqrt{2} \quad , \quad f(x) = \dfrac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}-2x}$

ង. $F(x) = \sin x \cos x \quad , \quad f(x) = \cos 2x$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

ក. $F'(x) = \left(e^{x+1} - 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right)' = e^{x+1} - 0 - 2 + x = e^{x+1} - 2 + x = f(x)$ ។
ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. អនុវត្តរូបមន្ត $(u^n)' = nu'u^{n-1}$៖
$F'(x) = \left[(x^4+4)^3+3\right]' = 3(x^4+4)'(x^4+4)^2 + 0 = 3(4x^3)(x^4+4)^2 = 12x^3(x^4+4)^2 = f(x)$ ។
ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

គ. $F'(x)=\left[\frac{3}{5}(e^x-3)^5+3\right]'=\frac{3}{5}\cdot 5(e^x-3)'(e^x-3)^4+0=3e^x(e^x-3)^4=f(x)$ ។
ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ឃ. អនុវត្តរូបមន្ត $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ (ដោយ $e^{2x}-2x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$)៖
$F'(x)=\left[\ln(e^{2x}-2x)+\sqrt{2}\right]'=\frac{(e^{2x}-2x)'}{e^{2x}-2x}+0=\frac{2e^{2x}-2}{e^{2x}-2x}=\frac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}-2x}=f(x)$ ។
ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ង. ដោយ $F(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ គេបាន៖
$F'(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'=\frac{1}{2}\cdot(2\cos 2x)=\cos 2x=f(x)$ ។
ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

**ជាទូទៅ ១**

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវដ៏ទៃទៀតនៃ $f(x)$ នោះ $G(x)=F(x)+c$ ដែល $c$ ជាចំនួនថេរ ។

## លំហាត់គំរូ ៥

រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ បើគេដឹងថា $F(3)=2$ ។

### ដំណោះស្រាយ

ព្រីមីទីវទូទៅនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ គឺ៖

$$F(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

ដោយគេដឹងថា $F(3)=2$ គេបាន៖

$$\frac{3^3}{3}+c=2 \iff 9+c=2 \implies c=-7$$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវដែលត្រូវរកគឺ $F(x)=\frac{x^3}{3}-7$ ។

## លំហាត់គំរូ ៦

ក. ប្រើដេរីវេបង្ហាញថាអនុគមន៍ $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ដែលត្រូវកំណត់ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ គឺជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែរ។

### ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេនៃ $G(x)$៖

$$G'(x)=\left(\frac{3}{2}x^2+4x\right)'=3x+4$$

ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $f(x)=3x+4$ ។

ខ. គណនាដេរីវេនៃ $F(x)$៖

$$F'(x)=\left[\frac{1}{6}(3x+4)^2\right]'=\frac{1}{6}\cdot 2(3x+4)\cdot(3x+4)'=\frac{1}{3}(3x+4)\cdot 3=3x+4=f(x)$$

ដោយ $F'(x)=f(x)$ ដូចនេះ $F(x)$ ក៏ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=3x+4$ ដែរ។
(វិធីម្យ៉ាងទៀត៖ ពន្លាត $F(x)=\frac{1}{6}(9x^2+24x+16)=\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{8}{3}=G(x)+\frac{8}{3}$ ដែលខុសគ្នាត្រឹមចំនួនថេរ $c=\frac{8}{3}$)។

## លំហាត់គំរូ ៧

បង្ហាញថា អនុគមន៍ $F(x)=\frac{x^2}{x^2+5x}$ និង $G(x)=-\frac{5}{x+5}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តែមួយ ។

### ដំណោះស្រាយ

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ទាំងពីរគឺ $D=\mathbb{R}\setminus\{-5,0\}$ ។

**វិធីទី១ ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗ**

$$F(x)=\frac{x^2}{x(x+5)}=\frac{x}{x+5}$$

$$\Longrightarrow F'(x)=\left(\frac{x}{x+5}\right)'=\frac{1\cdot(x+5)-x\cdot 1}{(x+5)^2}=\frac{5}{(x+5)^2}$$

$$G'(x)=\left(-\frac{5}{x+5}\right)'=-5\left(-\frac{1}{(x+5)^2}\right)=\frac{5}{(x+5)^2}$$

ដោយ $F'(x)=G'(x)=\dfrac{5}{(x+5)^2}$ ដូចនេះ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5}{(x+5)^2}$ តែមួយ។

**វិធីទី២ ៖ គណនាផលដក** $F(x)-G(x)$

$$F(x)-G(x)=\frac{x}{x+5}-\left(-\frac{5}{x+5}\right)=\frac{x+5}{x+5}=1 \quad (\text{ចំនួនថេរ})$$

ដោយផលដកនៃអនុគមន៍ទាំងពីរស្មើនឹងចំនួនថេរ នាំឱ្យ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍តែមួយ។

## លំហាត់គំរូ ៨

ក. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=2x+1$ បើគេដឹងថា $F(2)=6$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ បើគេដឹងថា $F(1)=-\dfrac{1}{2}$ ។

គ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=1+\sin x$ បើគេដឹងថា $F(0)=3$ ។

ឃ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ បើគេដឹងថា $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ ។

ង. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ បើគេដឹងថា $F(4)=-2$ ។

ច. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2+1$ បើគេដឹងថាក្រាបនៃ $F$ កាត់តាមចំណុច $A\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$ ។

ឆ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ បើគេដឹងថាក្រាបនៃ $F$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ ។

ជ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-e^x$ បើគេដឹងថាក្រាបនៃ $F$ កាត់តាមចំណុច $A(0,1)$ ។

### ដំណោះស្រាយ

ក. $F(x)=\displaystyle\int(2x+1)\,dx=x^2+x+c$

ដោយ $F(2)=6 \Longrightarrow 2^2+2+c=6 \Longleftrightarrow 6+c=6 \Longrightarrow c=0$

ដូចនេះ $F(x)=x^2+x$ ។

ខ. $F(x)=\displaystyle\int-\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\frac{1}{x+1}+c$

ដោយ $F(1)=-\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{1+1}+c=-\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}+c=-\frac{1}{2} \Longrightarrow c=-1$

ដូចនេះ $F(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$ ។

គ. $F(x)=\displaystyle\int(1+\sin x)\,dx=x-\cos x+c$

ដោយ $F(0)=3 \implies 0-\cos 0+c=3 \iff -1+c=3 \implies c=4$
ដូចនេះ $F(x)=x-\cos x+4$ ។

ឃ. $F(x)=\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$
ដោយ $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \implies -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)+c=1 \iff -1+c=1 \implies c=2$
ដូចនេះ $F(x)=-\cot x+2$ ។

ង. $F(x)=\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c$
ដោយ $F(4)=-2 \implies 2\sqrt{4}+c=-2 \iff 4+c=-2 \implies c=-6$
ដូចនេះ $F(x)=2\sqrt{x}-6$ ។

ច. ក្រាបនៃ $F$ កាត់តាម $A\left(1,\frac{\pi}{3}\right) \iff F(1)=\frac{\pi}{3}$
$F(x)=\int (x^2+1)\,dx=\frac{x^3}{3}+x+c$
$F(1)=\frac{\pi}{3} \implies \frac{1}{3}+1+c=\frac{\pi}{3} \iff \frac{4}{3}+c=\frac{\pi}{3} \implies c=\frac{\pi-4}{3}$
ដូចនេះ $F(x)=\frac{x^3}{3}+x+\frac{\pi-4}{3}$ ។

ឆ. ក្រាបនៃ $F$ កាត់តាម $A\left(\frac{\pi}{4},0\right) \iff F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$
$F(x)=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$
$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \implies \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+c=0 \iff 1+c=0 \implies c=-1$
ដូចនេះ $F(x)=\tan x-1$ ។

ជ. ក្រាបនៃ $F$ កាត់តាម $A(0,1) \iff F(0)=1$
$F(x)=\int (x^2-e^x)\,dx=\frac{x^3}{3}-e^x+c$
$F(0)=1 \implies 0-e^0+c=1 \iff -1+c=1 \implies c=2$
ដូចនេះ $F(x)=\frac{x^3}{3}-e^x+2$ ។

# ២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

**ជាទូទៅ ២**

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល $c$ ជាចំនួនថេរ ។

**ជាទូទៅ ៣ : សម្គាល់**

$\int f(x)dx$ អានថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)dx$ ដែល

- $\int$ ជានិមិត្តសញ្ញាអាំតេក្រាល
- $f(x)$ ជាអនុគមន៍
- $dx$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអថេរ $x$ ។

**លំហាត់គំរូ ៩**

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I = \int (4x^3 + 3x^2)\,dx$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

អនុវត្តលក្ខណៈលីនេអ៊ែរនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ គេបាន៖

$$I = \int (4x^3 + 3x^2)\,dx = 4\int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx = 4\left(\frac{x^4}{4}\right) + 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + c = x^4 + x^3 + c$$

ដែល $c$ ជាចំនួនថេរពិត $(c \in \mathbb{R})$ ។

## ៣ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

**ជាទូទៅ ៤**

ចំពោះគ្រប់ $k \in \mathbb{R}$ ដែល $k \neq 0$ និង $c \in \mathbb{R}$ គេបាន

- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kdx = kx + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ដែល $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$

## ប្រតិបត្តិ ១

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int (7x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3)dx$

ខ. $\int (7x^6 + 5x^4 - 4x^3 + 8)dx$

គ. $\int \left(2x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right) dx$

ឃ. $\int (x^2 - 2\sqrt{x})dx$

ង. $\int (4x^3 - 5x^2 + 3x + 2)dx$

ច. $\int \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x}\right) dx$

ឆ. $\int \left(2\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}\right) dx$

ជ. $\int (x^2 - 1)\sqrt{x}dx$

ឈ. $\int x^3(3x - 1)dx$

ញ. $\int \frac{4x^4 - 3x^5 + 1}{x^4}dx$

ដ. $\int (2x - 1)\sqrt{x}dx$

### ចម្លើយខ្លី

ក. $x^7 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x + c$

ខ. $x^7 + x^5 - x^4 + 8x + c$

គ. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + 2x + c$

ឃ. $\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$

ង. $x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

ច. $-\frac{1}{4x^2} + \frac{2}{x} + 2x\sqrt{x} + c$

ឆ. $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \sqrt{2}x + c$

ជ. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

ឈ. $\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + c$

ញ. $4x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x^3} + c$

ដ. $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

# ៤ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

**ជាទូទៅ ៥**

- $\int e^x dx = e^x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ ដែល $x \neq 0$

**ប្រតិបត្តិ ២**

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int \left(2e^x - \frac{3}{x}\right) dx$

ខ. $\int \left(2e^x + \frac{6}{x}\right) dx$

គ. $\int \left(\frac{e^x}{2} + \frac{1}{x}\right) dx$

ឃ. $\int \left(e^x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx$

ង. $\int \left(\frac{3}{2x} - \frac{2}{x^2} + 9\sqrt{x}\right) dx$

ច. $\int \left(e^{x+1} + x\sqrt{x}\right) dx$

ឆ. $\int \left(\frac{e^x}{4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{x}\right) dx$

ជ. $\int \left(\frac{6 - 3x - 2xe^x}{x}\right) dx$

ឈ. $\int \left(\frac{3x^2 - 2x - 1 + xe^x}{x}\right) dx$

ញ. $\int \left(\frac{3x + x^2(e^x - 1)}{x^2}\right) dx$

ដ. $\int \left(\frac{\sqrt{x}(1 - xe^x + 1)}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx$

ឋ. $\int \left(e^{x-2} + \frac{1}{3x} + \ln 2017\right) dx$

**ចម្លើយខ្លី**

ក. $2e^x - 3\ln|x| + c$

ខ. $2e^x + 6\ln|x| + c$

គ. $\frac{1}{2}e^x + \ln|x| + c$

ឃ. $e^x - \frac{2}{x} - \ln|x| + c$

ង. $\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{2}{x} + 6x\sqrt{x} + c$

ច. $e^{x+1} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$

ឆ. $\frac{1}{4}e^x + 3\sqrt[3]{x^2} + 3\ln|x| + c$

ជ. $6\ln|x| - 3x - 2e^x + c$

ឈ. $\frac{3}{2}x^2 - 2x - \ln|x| + e^x + c$

ញ. $3\ln|x| + e^x - x + c$

ដ. $2\ln|x| - e^x + c$

ឋ. $e^{x-2} + \frac{1}{3}\ln|x| + x\ln 2017 + c$

# ៥ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

**ជាទូទៅ ៦**

- $\int \sin x dx = -\cos x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x dx = \sin x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int (1+\tan^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$
- $\int (1+cot^2 x)dx = \int \frac{1}{\sin x^2 x}dx = -\cot x + c$

**ប្រតិបត្តិ ៣**

គណនាអាំតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int (2\cos x + x)dx$

ខ. $\int (\sin x + 2)dx$

គ. $\int (3\sin x - 5\cos x)dx$

ឃ. $\int \left(\frac{5}{2\sin^2 x} + x - 2\right) dx$

ង. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{x}{2} - 1\right) dx$

ច. $\int (7\sin x - 3\cos x)dx$

ឆ. $\int \left(\frac{2}{3}\cos x + \sqrt{2}\sin x\right) dx$

ជ. $\int (1 - \cos x)dx$

ឈ. $\int (2\cos x - 3\sin x)dx$

ញ. $\int (\cos x + \sin x + x)dx$

ដ. $\int \tan^2 x dx$

ឋ. $\int \cot^2 x dx$

ឌ. $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

ឍ. $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx$

ណ. $\int \left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) dx$

ត. $\int \left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) dx$

ថ. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sin^2 x} - 5\right) dx$

**ចម្លើយខ្លី**

ក. $2\sin x + \frac{x^2}{2} + c$

ខ. $-\cos x + 2x + c$

គ. $-3\cos x - 5\sin x + c$

ឃ. $-\frac{5}{2}\cot x + \frac{x^2}{2} - 2x + c$

ង. $3\tan x - \frac{x^2}{4} - x + c$

ច. $-7\cos x - 3\sin x + c$

ឆ. $\frac{2}{3}\sin x - \sqrt{2}\cos x + c$

ជ. $x - \sin x + c$

ឈ. $2\sin x + 3\cos x + c$

ញ. $\sin x - \cos x + \frac{x^2}{2} + c$

ដ. $\tan x - x + c$

ឋ. $-\cot x - x + c$

ឌ. $\tan x - \cot x + c$

ឍ. $-3\cot x + 2\tan x + c$

ណ. $-\cot x + x + c$

ត. $\tan x + x + c$

ថ. $\tan x - 4\cot x - 5x + c$

# ៦ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នាំឱ្យកើតអនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ

**ជាទូទៅ ៧**

ចំពោះ $a>0$ និងចំនួនថេរ $c\in\mathbb{R}$ គេបានរូបមន្តគ្រឹះ៖

- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+c$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$

ជាទូទៅ បើ $u=u(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ គេបាន៖

- $\displaystyle\int\frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}}dx=\arcsin\left(\frac{u(x)}{a}\right)+c$
- $\displaystyle\int\frac{u'(x)}{a^2+u^2(x)}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u(x)}{a}\right)+c$

**លំហាត់គំរូ ១០**

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

ខ. $J=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4}$

គ. $K=\displaystyle\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

ឃ. $L=\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

**ដំណោះស្រាយ**

ក. អនុវត្តរូបមន្ត $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$ ជាមួយ $a=3$៖

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

ខ. អនុវត្តរូបមន្ត $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$ ជាមួយ $a=2$៖

$$J=\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

គ. ដោយ $(e^x)' = e^x$ និង $e^{2x} = (e^x)^2$ គេបាន៖

$$K = \int \frac{(e^x)'}{1+(e^x)^2}dx = \arctan(e^x)+c$$

ឃ. ដោយ $(x^2)' = 2x \implies x\,dx = \frac{1}{2}(x^2)'\,dx$ និង $x^4 = (x^2)^2$ គេបាន៖

$$L = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x^2)+c$$

## ប្រតិបត្តិ ៤

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

ខ. $\int \frac{dx}{x^2+9}$

គ. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$

ឃ. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

ង. $\int \frac{2x}{x^4+1}dx$

ច. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx$

**ចម្លើយខ្លី**

ក. $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

ខ. $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c$

គ. $\frac{1}{5}\arcsin\left(\frac{5x}{4}\right)+c$

ឃ. $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)+c$

ង. $\arctan(x^2)+c$

ច. $\arcsin\left(\frac{\sin x}{2}\right)+c$

# ៧ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួសគេត្រូវ៖

ក. តាង $t = f(x) \Longrightarrow dt = f'(x)dx$

ខ. ជំនួស $f(x)$ ដោយ $t$ និង $f'(x)dx$ ដោយ $dt$

គ. រកចម្លើយអាំងតេក្រាល

ឃ. ជំនួស $t$ ដោយ $f(x)$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយអាំងតេក្រាលចុងក្រោយជាអនុគមន៍នៃ $x$ ។

**ជាទូទៅ ៨**

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $c$ គេបាន

- $\int kf'(x)dx = kf(x)+c$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c$
- $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ (n \neq -1)$
- $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$
- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = -\frac{1}{f(x)}+c$
- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = -\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c\ ,\ (n \neq 1)$
- $\int f'(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x)+c$
- $\int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x)+c$
- $\int \left(1+\tan^2 f(x)\right)f'(x)dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \tan f(x)+c$
- $\int \left(1+\cot^2 f(x)\right)f'(x)dx = \int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}dx = -\cot f(x)+c$

## ប្រតិបត្តិ ៥

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int \sin(3x+8)dx$

ខ. $\int x\left(x^2+1\right)^5 dx$

គ. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

ឃ. $\int (5x+6)^{2017}dx$

ង. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

ច. $\int e^x(e^x-1)^5 dx$

ឆ. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

ជ. $\int x\cos x^2 dx$

ឈ. $\int \frac{2x}{(x^2-\ln 3)^9}dx$

ញ. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

ដ. $\int x^2\sin x^3 dx$

ឋ. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

ឌ. $\int (\cos x)(1+\sin x)^9 dx$

ឍ. $\int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^4}dx$

ណ. $\int 2(x-2)\cos(x^2-4x)dx$

### ចម្លើយខ្លី

ក. $-\frac{1}{3}\cos(3x+8)+c$

ខ. $\frac{1}{12}(x^2+1)^6+c$

គ. $\ln(x^2+1)+c$

ឃ. $\frac{(5x+6)^{2018}}{10090}+c$

ង. $\ln(x^2+1)+c$

ច. $\frac{1}{6}(e^x-1)^6+c$

ឆ. $\frac{1}{2}\ln^2 x+c$

ជ. $\frac{1}{2}\sin x^2+c$

ឈ. $-\frac{1}{8(x^2-\ln 3)^8}+c$

ញ. $-2\cos\sqrt{x}+c$

ដ. $-\frac{1}{3}\cos x^3+c$

ឋ. $2\sqrt{1+\sin x}+c$

ឌ. $\frac{1}{10}(1+\sin x)^{10}+c$

ឍ. $-\frac{1}{3(x+\sin x)^3}+c$

ណ. $\sin(x^2-4x)+c$

# ៨ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេឲ្យអនុគមន៍ពីរ $u$ និង $v$ ដែលមានដេរីវេ $u'$ និង $v'$ គេបាន

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v+v'u\\ uv &= \int (uv)'dx\\ &= \int u'dx+\int uv'dx\\ &= \int vdu+\int udv \quad ,u'dx=du,v'dx=dv\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \int udv = uv-\int vdu$ ហៅថារូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។

**ជាទូទៅ ៩ : សម្គាល់**

ចំពោះរូបមន្ត $\int udv = uv-\int vdu$

- $P(x).\begin{cases}\cos(ax+b)\\ \sin(ax+b)\\ e^{ax+b}\end{cases}$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា

  នោះគេតាង $u=P(x)$ និង $dv=\begin{cases}\cos(ax+b)\\ \sin(ax+b)\\ e^{ax+b}\end{cases} .dx$ ។

- បើ $P(x).[\ln(ax+b)]$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា

  នោះគេតាង $u=\ln(ax+b)$ និង $dv=P(x)dx$ ។

## ប្រតិបត្តិ ៦

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int \ln x dx$

ខ. $\int xe^x dx$

គ. $\int x^2e^x dx$

ឃ. $\int (3x+2)e^x dx$

ង. $\int (1-2x)\cos 2x dx$

ច. $\int (x-1)\sin x dx$

ឆ. $\int (2x-3)\ln x dx$

ជ. $\int x\sqrt{x+1} dx$

ឈ. $\int \frac{2x}{\sqrt{x-2}} dx$

ញ. $\int x^2\sin x dx$

ដ. $\int x^2\cos x dx$

ឋ. $\int x\sin^2 x dx$

ឌ. $\int e^x\sin x dx$

ឍ. $\int e^x\cos x dx$

ណ. $\int x\cos^2 x dx$

### ចម្លើយខ្លី

ក. $x\ln x - x + c$

ខ. $(x-1)e^x + c$

គ. $(x^2-2x+2)e^x + c$

ឃ. $(3x-1)e^x + c$

ង. $\frac{1-2x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

ច. $(1-x)\cos x + \sin x + c$

ឆ. $(x^2-3x)\ln x - \frac{x^2}{2} + 3x + c$

ជ. $\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + c$

ឈ. $\frac{4}{3}(x+4)\sqrt{x-2} + c$

ញ. $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + c$

ដ. $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + c$

ឋ. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + c$

ឌ. $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$

ឍ. $\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$

ណ. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c$

# ៩ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន

**ជាទូទៅ ១០**

គេអាចបំបែកប្រភាគ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាប្រភាគងាយតាមករណី $Q(x)$ ដូចខាងក្រោម៖

ក. ករណី $Q(x)=(ax+b)(cx+d)(ex+f)......$

$\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}+\frac{A_3}{ex+f}+.....$ ដែល $A_1,A_2,A_3,.....$ ជាចំនួនពិតថេរត្រូវកំណត់ ។

ខ. ករណី $Q(x)=(ax+b)^n$

$\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+.....+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$ ដែល $A_1,A_2,A_3,.....$ ជាចំនួនពិតថេរត្រូវកំណត់ ។

គ. ករណី $Q(x)$ មានកត្តាដឺក្រេទី២ មិនអាចបំបែកបាន $(ax^2+bx+c)$ ដែល $\Delta=b^2-4ac<0$

$\frac{P(x)}{(dx+e)(ax^2+bx+c)}=A(x)+\frac{A_1}{dx+e}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ ដែល $A_1,B,C$ ជាចំនួនពិតថេរត្រូវកំណត់ ។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើរដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាចំនួនពិតថេរ
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)=0$
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធា ។

**លំហាត់គំរូ ១១**

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

បំបែកជាប្រភាគងាយ៖ $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

តម្រូវភាគបែងរួម៖ $x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)$

ផ្ទឹមមេគុណ៖ $\begin{cases}A+B=0\\-B+C=1\\A-C=1\end{cases}\implies A=1,B=-1,C=0$

គេបាន៖

$$I=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c=\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right|+c$$

## ប្រតិបត្តិ ៧

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$

ខ. $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$

គ. $\int \frac{x+2}{x^2-2x}dx$

ឃ. $\int \frac{x-1}{2x-3}dx$

ង. $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$

ច. $\int \frac{1}{x^2+3x-4}dx$

ឆ. $\int \frac{3}{x^2-4}dx$

ជ. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

ឈ. $\int \frac{x^2+2}{x^2+2x+1}dx$

ញ. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+2x-3}dx$

ដ. $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$

ឋ. $\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$

### ចម្លើយខ្លី

ក. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c$

ខ. $6\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}+c$

គ. $\ln\frac{(x-2)^2}{|x|}+c$

ឃ. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x-3|+c$

ង. $\ln|(x-1)(x-2)|+c$

ច. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+c$

ឆ. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

ជ. $\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+\frac{1}{x}+c$

ឈ. $x-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+c$

ញ. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{29}{4}\ln|x+3|+c$

ដ. $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

ឋ. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

# ១០ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

## ១០.១ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលផលគុណនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

**ជាទូទៅ ១១**

- ពាង $\int \sin ax.\cos bxdx$ គេត្រូវប្រើរូបមន្ត $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
- ពាង $\int \cos ax.\cos bxdx$ គេត្រូវប្រើរូបមន្ត $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$
- ពាង $\int \sin ax.\sin bxdx$ គេត្រូវប្រើរូបមន្ត $\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

**ជាទូទៅ ១២**

- $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
- $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

## ១០.២ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sin^m x.\cos^n xdx$

**ជាទូទៅ ១៣**

ក. ករណីនិទស្សន្តគូមួយ និងមួយសេស: គេត្រូវតាង $U$ ស្មើគោលមួយណាដែលមាន និទស្សន្តគូ ហើយប្រើរូបមន្តគ្រឹះ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ និង $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

ខ. ករណីនិទស្សន្តសេសទាំងពីរ: គេត្រូវតាង $U$ ស្មើគោលមួយណាដែលមាន និទស្សន្តធំជាងគេ ហើយប្រើរូបមន្តគ្រឹះ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ និង $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

គ. ករណីនិទស្សន្តគូទាំងពីរ: គេត្រូវប្រើរូបមន្តមុំឌុប: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ និង $\sin x.\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ ។

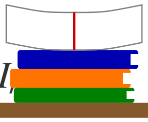
## ១០.៣ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sin^n xdx$ និង $\int \cos$

**ជាទូទៅ ១៤**

ក. ករណីនិទស្សន្ត $n$ សេស គេត្រូវប្រើរូបមន្តគ្រឹះ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ និង $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

ខ. ករណីនិទស្សន្ត $n$ គូ គេត្រូវប្រើរូបមន្តបំឌុប $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ , $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ និង $\sin x.\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$ ។

## ១០.៤ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានរាង $I_n = \int \tan^n xdx$ និង $I_n = \int \cot^n xdx$



គេត្រូវសរសេរ $\tan^n x = \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x-1) = \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x) - \tan^{n-2} x$

គេបាន $I_n = \int \tan^n xdx = \int [\tan^{n-2} x(1+\tan^2 x) - \tan^{n-2} x]dx = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ រួចអនុវត្តន៍ដដែលចំពោះ $I_{n-2}, \dots$ ។ យើងត្រូវប្រើវិធីសាស្ត្រដដែលចំពោះ $I_n = \int \cot^n xdx$ ។

**ជាទូទៅ ១៥**

- $\int \tan^n x(\tan x)' dx = \dfrac{\tan^{n+1} x}{n+1} + c$
- $\int \cot^n x(\cot x)' dx = \dfrac{\cot^{n+1} x}{n+1} + c$

# ១១ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន

**ជាទូទៅ ១៦**

ក. $\int \dfrac{\alpha x+\lambda}{ax+b} dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\dfrac{\alpha x+\lambda}{ax+b} = A + \dfrac{B}{ax+b}$

ខ. $\int \dfrac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)^2} dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\dfrac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)^2} = \dfrac{A}{ax+b} + \dfrac{B}{(ax+b)^2}$

គ. $\int \dfrac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{ax+b} dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{ax+b} = Ax + B + \dfrac{C}{ax+b}$

ឃ. $\int \dfrac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{(ax+b)^2} dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{(ax+b)^2} = A + \dfrac{B}{ax+b} + \dfrac{C}{(ax+b)^2}$

ង. $\int \dfrac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)} dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)} = A + \dfrac{B}{ax+b} + \dfrac{C}{cx+d}$

ប. $\int \frac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)}dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\frac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$

ឆ. $\int \frac{k}{(ax+b)(cx+d)}dx$ សរសេរប្រភាគជារាង $\frac{k}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$

ជ. $\int \frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)}dx$ សរសេរប្រភាគជារាង
$\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\lambda}{ax+b} = Ax+B+\frac{C}{ax+b}+\frac{D}{cx+d}$ ។

# សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ១

**ការណែនាំ៖** ចូរជ្រើសរើសចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ ឬ ឃ ចំពោះសំណួរនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. អនុគមន៍ $F$ ហៅថាជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f$ លើចន្លោះ $I$ លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ $x \in I$៖

ក. $F'(x) = f(x)$
ខ. $f'(x) = F(x)$
គ. $F(x) = f'(x)$
ឃ. $F'(x) = f'(x)$

២. បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $I$ នោះសំណុំព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ៖

ក. $F(x) \cdot C$
ខ. $F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$
គ. $F'(x) + C$
ឃ. $C - F(x)$

៣. កន្សោមដេរីវេនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\left(\int f(x)\,dx\right)'$ ស្មើនឹង៖

ក. $f'(x)$
ខ. $f(x) + C$
គ. $f(x)$
ឃ. $F(x)$

៤. ចំពោះ $k \neq 0$ ជាចំនួនថេរ រូបមន្ត $\int kf(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $k\int f(x)\,dx$
ខ. $\frac{1}{k}\int f(x)\,dx$
គ. $kx\int f(x)\,dx$
ឃ. $k + \int f(x)\,dx$

៥. រូបមន្តលីនេអ៊ែរ $\int [f(x) - g(x)]\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$
ខ. $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
គ. $\frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$
ឃ. $f(x) - g(x) + C$

៦. អាំងតេក្រាលនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\int d(F(x))$ ស្មើនឹង៖

ក. $F'(x) + C$
ខ. $f(x)$
គ. $F(x) + C$
ឃ. $d(f(x))$

៧. ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ថេរ $f(x) = 5$ គឺ៖

ក. $5x + C$
ខ. $5 + C$
គ. $0$
ឃ. $\frac{5x^2}{2} + C$

៨. ព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x) = 2x$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $F(1) = 4$ គឺ៖

ក. $F(x) = x^2 + 1$
ខ. $F(x) = x^2 + 2$
គ. $F(x) = x^2 + 3$
ឃ. $F(x) = x^2 + 4$

៩. បើ $F(x) = \sin(2x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះ $f(x)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\cos(2x)$ ខ. $2\cos(2x)$ គ. $-2\cos(2x)$ ឃ. $-\frac{1}{2}\cos(2x)$

១០. បើ $F(x) = e^{3x}$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះ $f(x)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}e^{3x}$ ខ. $e^{3x}$ គ. $3e^{3x}$ ឃ. $3xe^{3x}$

១១. អនុគមន៍ខាងក្រោមណាខ្លះដែល **មិនមែន** ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 2x$ ?

ក. $F(x) = x^2 + 5$ ខ. $F(x) = x^2 - 7$ គ. $F(x) = x^2$ ឃ. $F(x) = 2x^2 + 1$

១២. បើ $F_1(x)$ និង $F_2(x)$ ជាព្រីមីទីវពីរនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $I$ នោះ $F_1(x) - F_2(x)$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $C$ (ចំនួនថេរ)
គ. $f(x)$ ឃ. $2f(x)$

១៣. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x) = 3x^2 - 2x$ ដោយដឹងថា $F(0) = 5$ ៖

ក. $F(x) = x^3 - x^2 + 5$ ខ. $F(x) = x^3 - x^2 - 5$
គ. $F(x) = 6x - 2 + 5$ ឃ. $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$

១៤. បើ $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះ $f(x)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{x^2+1}$ ខ. $\frac{2x}{x^2+1}$ គ. $\frac{x}{x^2+1}$ ឃ. $2x(x^2+1)$

១៥. កន្សោមអាំងតេក្រាល $\int f'(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $f'(x) + C$ ខ. $f''(x) + C$ គ. $f(x) + C$ ឃ. $\frac{f(x)^2}{2} + C$

១៦. ចំពោះ $n \neq -1$ រូបមន្ត $\int x^n\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ខ. $nx^{n-1} + C$ គ. $\frac{x^n}{n} + C$ ឃ. $\frac{x^{n-1}}{n-1} + C$

១៧. អាំងតេក្រាល $\int x^4\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $4x^3 + C$ ខ. $\frac{x^5}{5} + C$ គ. $5x^5 + C$ ឃ. $\frac{x^4}{4} + C$

១៨. អាំងតេក្រាល $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $12x - 4 + C$ ខ. $3x^3 - 2x^2 + 3x + C$
គ. $2x^3 - 2x^2 + 3x + C$ ឃ. $2x^3 - 4x^2 + 3x + C$

១៩. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ ចំពោះ $x \neq 0$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{x} + C$ ខ. $\ln(x^2) + C$ គ. $-\frac{2}{x^3} + C$ ឃ. $-\frac{1}{x} + C$

២០. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x^3}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{1}{2x^2}+C$ ខ. $-\frac{1}{3x^2}+C$ គ. $\frac{1}{2x^2}+C$ ឃ. $-\frac{3}{x^4}+C$

២១. អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{x}dx$ $(x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+C$ ខ. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ គ. $\frac{3}{2}x\sqrt{x}+C$ ឃ. $\frac{1}{3}x\sqrt{x}+C$

២២. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $(x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\sqrt{x}+C$ ខ. $\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$ គ. $2\sqrt{x}+C$ ឃ. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+C$

២៣. អាំងតេក្រាល $\int \sqrt[3]{x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}x\sqrt[3]{x}+C$ ខ. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+C$ គ. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+C$ ឃ. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

២៤. អាំងតេក្រាល $\int (2x+1)^3 dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{(2x+1)^4}{8}+C$ ខ. $\frac{(2x+1)^4}{4}+C$ គ. $6(2x+1)^2+C$ ឃ. $\frac{(2x+1)^4}{2}+C$

២៥. រូបមន្តទូទៅ $\int (ax+b)^n dx$ $(a\neq 0, n\neq -1)$ គឺ៖

ក. $\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$ ខ. $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$

គ. $\frac{a(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$ ឃ. $a(n+1)(ax+b)^{n+1}+C$

២៦. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{(3x-1)^2}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3(3x-1)}+C$ ខ. $-\frac{1}{3x-1}+C$

គ. $-\frac{1}{3(3x-1)}+C$ ឃ. $-\frac{3}{(3x-1)^3}+C$

២៧. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\sqrt{2x+3}+C$ ខ. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}+C$ គ. $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+C$ ឃ. $\sqrt{2x+3}+C$

២៨. អាំងតេក្រាល $\int (x-1)(x+1)dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x^3}{3}-x+C$ ខ. $x^3-x+C$ គ. $\frac{x^3}{3}+x+C$ ឃ. $2x+C$

២៩. អាំងតេក្រាល $\int \frac{x^2-2x}{x}dx\ (x\neq 0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $x^2-2x+C$ ខ. $\frac{x^2}{2}-2x+C$ គ. $\frac{x^2}{2}-2+C$ ឃ. $x-2+C$

៣០. អាំងតេក្រាល $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x^3}{3}+2x+\frac{1}{x}+C$ ខ. $\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+C$

គ. $\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+C$ ឃ. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$

៣១. អាំងតេក្រាល $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx\ (x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$ ខ. $\frac{3}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$

គ. $x\sqrt{x}+\sqrt{x}+C$ ឃ. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

៣២. អាំងតេក្រាល $\int (4x-3)^2 dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{(4x-3)^3}{12}+C$ ខ. $\frac{(4x-3)^3}{3}+C$ គ. $\frac{(4x-3)^3}{4}+C$ ឃ. $8(4x-3)+C$

៣៣. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{(1-x)^3}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{1}{2(1-x)^2}+C$ ខ. $\frac{1}{2(1-x)^2}+C$ គ. $\frac{1}{4(1-x)^4}+C$ ឃ. $-\frac{1}{3(1-x)^2}+C$

៣៤. អាំងតេក្រាល $\int x\sqrt{x}dx\ (x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{5}{2}x^2\sqrt{x}+C$ ខ. $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x}+C$ គ. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ ឃ. $\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}+C$

៣៥. អាំងតេក្រាល $\int \left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$ ខ. $3x\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

គ. $\frac{9}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$ ឃ. $2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

៣៦. អាំងតេក្រាល $\int e^x dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e^x+C$ ខ. $e^{x+1}+C$ គ. $xe^{x-1}+C$ ឃ. $\frac{e^x}{x}+C$

៣៧. អាំងតេក្រាល $\int e^{4x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $4e^{4x}+C$ ខ. $\frac{1}{4}e^{4x}+C$ គ. $e^{4x}+C$ ឃ. $\frac{e^{4x+1}}{4x+1}+C$

៣៨. អាំងតេក្រាល $\int e^{-3x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-3e^{-3x}+C$ ខ. $3e^{-3x}+C$ គ. $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$ ឃ. $\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

៣៩. រូបមន្តទូទៅ $\int e^{ax+b}dx$ $(a\neq 0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $ae^{ax+b}+C$ ខ. $e^{ax+b}+C$ គ. $\frac{1}{b}e^{ax+b}+C$ ឃ. $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

៤០. អាំងតេក្រាល $\int 3^x dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{3^x}{\ln 3}+C$ ខ. $3^x\ln 3+C$ គ. $\frac{3^{x+1}}{x+1}+C$ ឃ. $x3^{x-1}+C$

៤១. រូបមន្ត $\int a^x dx$ $(a>0, a\neq 1)$ ស្មើនឹង៖

ក. $a^x\ln a+C$ ខ. $\frac{a^x}{\ln a}+C$ គ. $\frac{a^{x+1}}{x+1}+C$ ឃ. $a^x+C$

៤២. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x}dx$ ចំពោះ $x\neq 0$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{1}{x^2}+C$ ខ. $\ln x+C$ គ. $\ln|x|+C$ ឃ. $e^x+C$

៤៣. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{2x-5}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln|2x-5|+C$ ខ. $2\ln|2x-5|+C$

គ. $-\frac{1}{(2x-5)^2}+C$ ឃ. $\frac{1}{2}\ln|2x-5|+C$

៤៤. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{1-x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\ln|1-x|+C$ ខ. $\ln|1-x|+C$ គ. $\frac{1}{(1-x)^2}+C$ ឃ. $\ln|x-1|+C$

៤៥. រូបមន្តទូទៅ $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{u(x)}+C$ ខ. $\ln|u(x)|+C$ គ. $\frac{u'(x)^2}{2}+C$ ឃ. $\ln|u'(x)|+C$

៤៦. អាំងតេក្រាល $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{x^2+3}+C$ ខ. $2\ln(x^2+3)+C$ គ. $\ln(x^2+3)+C$ ឃ. $\frac{x^2}{x^2+3}+C$

៤៧. អាំងតេក្រាល $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{e^x+2}+C$ ខ. $e^x\ln(e^x+2)+C$ គ. $\frac{e^x}{(e^x+2)^2}+C$ ឃ. $\ln(e^x+2)+C$

៤៨. អាំងតេក្រាល $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-2}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln|x^3+x-2|+C$ ខ. $3\ln|x^3+x-2|+C$

គ. $\frac{1}{x^3+x-2}+C$ ឃ. $\frac{(3x^2+1)^2}{2}+C$

៤៩. អាំងតេក្រាល $\int (e^x-e^{-x})dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e^x-e^{-x}+C$ ខ. $e^x+e^{-x}+C$ គ. $-e^x-e^{-x}+C$ ឃ. $2e^x+C$

៥០. អាំងតេក្រាល $\int (e^x+1)^2dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e^{2x}+2e^x+x+C$ ខ. $\frac{(e^x+1)^3}{3}+C$

គ. $\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$ ឃ. $\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+x+C$

៥១. អាំងតេក្រាល $\int \cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\sin x+C$ ខ. $\sin x+C$ គ. $-\cos x+C$ ឃ. $\frac{\cos^2 x}{2}+C$

៥២. អាំងតេក្រាល $\int \sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\cos x+C$ ខ. $\cos x+C$ គ. $-\sin x+C$ ឃ. $\frac{\sin^2 x}{2}+C$

៥៣. អាំងតេក្រាល $\int \cos(3x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $3\sin(3x)+C$ ខ. $-\frac{1}{3}\sin(3x)+C$ គ. $\frac{1}{3}\sin(3x)+C$ ឃ. $-\sin(3x)+C$

៥៤. អាំងតេក្រាល $\int \sin(2x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}\cos(2x)+C$ ខ. $2\cos(2x)+C$ គ. $-2\cos(2x)+C$ ឃ. $-\frac{1}{2}\cos(2x)+C$

៥៥. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\tan x+C$ ខ. $-\tan x+C$ គ. $\cot x+C$ ឃ. $-\cot x+C$

៥៦. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\cot x+C$ ខ. $-\cot x+C$ គ. $\tan x+C$ ឃ. $-\tan x+C$

៥៧. អាំងតេក្រាល $\int \tan^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\tan x+x+C$ ខ. $\frac{\tan^3 x}{3}+C$ គ. $\tan x-x+C$ ឃ. $-\cot x-x+C$

៥៨. អាំងតេក្រាល $\int \cot^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\cot x - x + C$ ខ. $-\cot x + x + C$ គ. $\frac{\cot^3 x}{3} + C$ ឃ. $-\cot x - x + C$

៥៩. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\cos^2(4x)}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{4}\tan(4x) + C$ ខ. $4\tan(4x) + C$ គ. $-\frac{1}{4}\tan(4x) + C$ ឃ. $\tan(4x) + C$

៦០. អាំងតេក្រាល $\int \cos^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$ ខ. $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

គ. $\frac{\cos^3 x}{3} + C$ ឃ. $x + \frac{\sin(2x)}{2} + C$

៦១. អាំងតេក្រាល $\int \sin^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$ ខ. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

គ. $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$ ឃ. $-\frac{\cos(2x)}{4} + C$

៦២. អាំងតេក្រាល $\int 2\sin x \cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\cos(2x) + C$ ខ. $\frac{1}{2}\cos(2x) + C$ គ. $2\cos(2x) + C$ ឃ. $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

៦៣. រូបមន្តទូទៅ $\int \cos(ax+b)\,dx\ (a \neq 0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ ខ. $-\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ គ. $a\sin(ax+b) + C$ ឃ. $\sin(ax+b) + C$

៦៤. រូបមន្តទូទៅ $\int \sin(ax+b)\,dx\ (a \neq 0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ ខ. $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ គ. $-a\cos(ax+b) + C$ ឃ. $-\cos(ax+b) + C$

៦៥. អាំងតេក្រាល $\int \tan x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln|\sin x| + C$ ខ. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$ គ. $-\ln|\cos x| + C$ ឃ. $\ln|\cos x| + C$

៦៦. អាំងតេក្រាល $\int \cot x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\ln|\sin x| + C$ ខ. $-\frac{1}{\sin^2 x} + C$ គ. $\ln|\cos x| + C$ ឃ. $\ln|\sin x| + C$

៦៧. អាំងតេក្រាល $\int \sin(3x)\cos(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{\cos(4x)}{8}-\frac{\cos(2x)}{4}+C$

ខ. $\frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{4}+C$

គ. $-\frac{\cos(4x)}{4}-\frac{\cos(2x)}{2}+C$

ឃ. $-\frac{\sin(4x)}{8}-\frac{\sin(2x)}{4}+C$

៦៨. អាំងតេក្រាល $\int \cos(3x)\cos(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{\sin(4x)}{8}-\frac{\sin(2x)}{4}+C$

ខ. $\frac{\sin(4x)}{8}+\frac{\sin(2x)}{4}+C$

គ. $\frac{\sin(4x)}{4}+\frac{\sin(2x)}{2}+C$

ឃ. $\frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{4}+C$

៦៩. អាំងតេក្រាល $\int \sin(4x)\sin(2x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\sin(2x)}{2}-\frac{\sin(6x)}{6}+C$

ខ. $-\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{\sin(6x)}{12}+C$

គ. $\frac{\sin(2x)}{4}-\frac{\sin(6x)}{12}+C$

ឃ. $\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{\cos(6x)}{12}+C$

៧០. អាំងតេក្រាល $\int (\sin x+\cos x)^2\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $x+\frac{1}{2}\cos(2x)+C$

ខ. $\frac{(\sin x+\cos x)^3}{3}+C$

គ. $x-\cos(2x)+C$

ឃ. $x-\frac{1}{2}\cos(2x)+C$

៧១. តាមវិធីប្តូរអថេរ តាង $u=u(x)$ នោះ $\int f(u(x))u'(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\int f(u)\,du$

ខ. $\int f'(u)\,du$

គ. $f(u)u'(x)+C$

ឃ. $\int uf(u)\,du$

៧២. អាំងតេក្រាល $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{(x^2+1)^5}{10}+C$

ខ. $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$

គ. $(x^2+1)^5+C$

ឃ. $8x(x^2+1)^3+C$

៧៣. អាំងតេក្រាល $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5}+C$

ខ. $\frac{1}{2}(x^2+5)\sqrt{x^2+5}+C$

គ. $\frac{1}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5}+C$

ឃ. $(x^2+5)\sqrt{x^2+5}+C$

៧៤. អាំងតេក្រាល $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\sqrt{x^2+4}+C$

ខ. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}+C$

គ. $\ln\sqrt{x^2+4}+C$

ឃ. $\sqrt{x^2+4}+C$

៧៥. អាំងតេក្រាល $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$ ខ. $\frac{1}{2(x^2+1)}+C$ គ. $-\frac{1}{x^2+1}+C$ ឃ. $\ln(x^2+1)+C$

៧៦. អាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln x}{x}dx\ (x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln(\ln x)+C$ ខ. $\frac{\ln^2 x}{2}+C$ គ. $\frac{1}{x^2}+C$ ឃ. $\ln^2 x+C$

៧៧. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x\ln x}dx\ (x>1)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{\ln^2 x}+C$ ខ. $\ln x+C$ គ. $\ln(\ln x)+C$ ឃ. $-\frac{1}{\ln x}+C$

៧៨. អាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx\ (x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\ln^4 x}{x}+C$ ខ. $3\frac{\ln^2 x}{x}+C$ គ. $\frac{\ln^3 x}{3}+C$ ឃ. $\frac{\ln^4 x}{4}+C$

៧៩. អាំងតេក្រាល $\int \sin^3 x\cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\sin^4 x}{4}+C$ ខ. $-\frac{\sin^4 x}{4}+C$ គ. $\frac{\cos^4 x}{4}+C$ ឃ. $3\sin^2 x+C$

៨០. អាំងតេក្រាល $\int \cos^5 x\sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\cos^6 x}{6}+C$ ខ. $-\frac{\cos^6 x}{6}+C$ គ. $-\frac{\sin^6 x}{6}+C$ ឃ. $\frac{\sin^6 x}{6}+C$

៨១. អាំងតេក្រាល $\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\tan^2 x+C$ ខ. $\frac{\tan^3 x}{3}+C$ គ. $\frac{\tan^2 x}{2}+C$ ឃ. $\ln|\cos x|+C$

៨២. អាំងតេក្រាល $\int xe^{x^2}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e^{x^2}+C$ ខ. $2e^{x^2}+C$ គ. $\frac{x^2}{2}e^{x^2}+C$ ឃ. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

៨៣. អាំងតេក្រាល $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx\ (x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $2e^{\sqrt{x}}+C$ ខ. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}+C$ គ. $e^{\sqrt{x}}+C$ ឃ. $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+C$

៨៤. អាំងតេក្រាល $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2\sin^2 x}+C$ ខ. $-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$ គ. $-\frac{1}{3\sin^2 x}+C$ ឃ. $\ln|\sin x|+C$

៨៥. អាំងតេក្រាល $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{e^x+1}+C$ ខ. $\ln(e^x+1)+C$ គ. $-\frac{1}{e^x+1}+C$ ឃ. $-\frac{e^x}{e^x+1}+C$

៨៦. រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគឺ៖

ក. $\int u\,dv = uv + \int v\,du$ ខ. $\int u\,dv = u'v - \int uv'\,dx$

គ. $\int u\,dv = \frac{uv}{2} - \int v\,du$ ឃ. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

៨៧. អាំងតេក្រាល $\int xe^x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $(x-1)e^x+C$ ខ. $(x+1)e^x+C$ គ. $xe^x-e^x$ ឃ. $\frac{x^2}{2}e^x+C$

៨៨. អាំងតេក្រាល $\int xe^{2x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2x+1}{4}e^{2x}+C$ ខ. $\frac{2x-1}{4}e^{2x}+C$

គ. $(x-1)e^{2x}+C$ ឃ. $\frac{x^2}{2}e^{2x}+C$

៨៩. អាំងតេក្រាល $\int x\cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $x\sin x-\cos x+C$ ខ. $-x\sin x+\cos x+C$

គ. $x\sin x+\cos x+C$ ឃ. $\frac{x^2}{2}\sin x+C$

៩០. អាំងតេក្រាល $\int x\sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $x\cos x-\sin x+C$ ខ. $-x\cos x-\sin x+C$

គ. $x\cos x+\sin x+C$ ឃ. $-x\cos x+\sin x+C$

៩១. អាំងតេក្រាល $\int \ln x\,dx$ $(x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $x\ln x-x+C$ ខ. $x\ln x+x+C$ គ. $\frac{1}{x}+C$ ឃ. $\frac{\ln^2 x}{2}+C$

៩២. អាំងតេក្រាល $\int x\ln x\,dx$ $(x>0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{2}+C$ ខ. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

គ. $x^2\ln x-x^2+C$ ឃ. $\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$

៩៣. អាំងតេក្រាល $\int (2x+3)e^x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $(2x+3)e^x+C$ ខ. $(2x+5)e^x+C$

គ. $(2x+1)e^x+C$ ឃ. $2e^x+C$

៩៤. អាំងតេក្រាល $\int x^2e^x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $(x^2+2x+2)e^x+C$

ខ. $(x^2-2x-2)e^x+C$

គ. $\frac{x^3}{3}e^x+C$

ឃ. $(x^2-2x+2)e^x+C$

៩៥. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx\ (|x|>1)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

ខ. $\ln|x^2-1|+C$

គ. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$

ឃ. $-\frac{1}{x}+C$

៩៦. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

ខ. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

គ. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$

ឃ. $\ln|x^2-9|+C$

៩៧. អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln|(x-1)(x-2)|+C$

ខ. $\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$

គ. $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

ឃ. $-\frac{1}{(x-1)(x-2)}+C$

៩៨. អាំងតេក្រាល $\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2x-\ln|x+1|+C$

ខ. $x+2\ln|x+1|+C$

គ. $\ln|x+1|+C$

ឃ. $2x+\ln|x+1|+C$

៩៩. អាំងតេក្រាល $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$

ខ. $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x-1|+C$

គ. $x^2+x+\ln|x-1|+C$

ឃ. $\frac{x^3}{3(x-1)}+C$

១០០. អាំងតេក្រាល $\int x\sqrt{x+1}\,dx\ (x\geq -1)$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+C$

ខ. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

គ. $\frac{1}{5}(x+1)^5-\frac{1}{3}(x+1)^3+C$

ឃ. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

# លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int 10x\sqrt{5x^2+2}dx$

ខ. $\int \frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$

គ. $\int -6x(1-2x^2)^3dx$

ឃ. $\int 3\sqrt{x}(9+2\sqrt{x^3})^4dx$

ង. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}dx$

ច. $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ឆ. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}dx$

ជ. $\int x\sqrt{3+4x^2}dx$

ឈ. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-1)^2}dx$

ញ. $\int \frac{x^3}{(1-x^4)^4}dx$

ដ. $\int 3e^{3x}\sqrt{1+e^{3x}}dx$

ឋ. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}dx$

ឌ. $\int \frac{e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^3}dx$

ឍ. $\int 10x^2(x^3+1)^4dx$

ណ. $\int (x^3+2)(x^4+8x-3)^5dx$

ត. $\int 2x^3\sqrt{(x^4+5)^3}dx$

ថ. $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx$

ទ. $\int \cos x\sqrt{4+3\sin x}dx$

ធ. $\int \frac{1-\sin x}{\sqrt[3]{x+\cos x}}dx$

ន. $\int \sin\frac{1}{2}x.\cos^3\frac{1}{2}xdx$

ប. $\int \frac{x\cos x+\sin x}{\sqrt{1+x\sin x}}dx$

ផ. $\int \frac{(\sqrt{\sqrt{x}+1})}{\sqrt{x}}dx$

## ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ១ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

២. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int \sin 2x.\cos 3xdx$

ខ. $\int \sin 4x.\cos 6xdx$

គ. $\int \sin 7x.\cos 5xdx$

ឃ. $\int \sin 9x.\cos 4xdx$

ង. $\int \cos 2x.\cos xdx$

ច. $\int \cos 3x.\cos 5xdx$

ឆ. $\int \cos 7x.\cos 3xdx$

ជ. $\int \sin 5x.\sin 8xdx$

ឈ. $\int \cos 8x.\cos 10xdx$

ញ. $\int \sin^2 x.\cos^3 xdx$

ដ. $\int \sin 6x.\sin 2xdx$

ឋ. $\int \sin^4 x.\cos^3 xdx$

ឌ. $\int \sin^6 x.\cos^5 xdx$

ឍ. $\int \cos^4 x.\cos^3 xdx$

ណ. $\int \sin^4 x.\cos^5 xdx$

ត. $\int \sin^8 x.\cos^5 xdx$

ថ. $\int \cos^6 x.\sin^5 xdx$

ទ. $\int \sin^5 x.\cos^4 xdx$

ធ. $\int \cos^2 x.\sin^3 xdx$

ន. $\int \cos^8 x.\sin^5 xdx$

ប. $\int \sin^3 x.\cos^6 xdx$

ផ. $\int \cos^3 x.\sin^6 xdx$

ព. $\int \sin^5 x.\cos^7 xdx$

ភ. $\int \sin^2 x.\cos^2 xdx$

ម. $\int \sin^3 x.\cos^5 xdx$

យ. $\int \sin^3 x.\cos^7 xdx$

រ. $\int \cos^2 x.\sin^4 xdx$

ល. $\int \sin^3 x.\cos^7 xdx$

វ. $\int \cos^3 x.\sin^7 xdx$

ស. $\int \tan^2 xdx$

ហ. $\int \tan^3 xdx$

ឡ. $\int \cot^2 xdx$

អ. $\int \tan^4 xdx$

## ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ១ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

៣. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int \frac{4x-3}{x+2}dx$

ខ. $\int \frac{3x+2}{x-4}dx$

គ. $\int \frac{x+1}{3x-2}dx$

ឃ. $\int \frac{5x-3}{2x+1}dx$

ង. $\int \frac{2x+3}{(x-3)^2}dx$

ច. $\int \frac{x-3}{(3x-2)^2}dx$

ឆ. $\int \frac{2x-5}{(3x-2)^2}dx$

ជ. $\int \frac{x}{(2x-1)^2}dx$

ឈ. $\int \frac{x^2+x+1}{x+2}dx$

ញ. $\int \frac{x^2+2}{3x+2}dx$

ដ. $\int \frac{x^2-3x+5}{2x+1}dx$

ឋ. $\int \frac{2x^2-x+3}{x-3}dx$

ឌ. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+2)^2}dx$

ឍ. $\int \frac{x^2-3x+4}{(2x+3)^2}dx$

ណ. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}dx$

ត. $\int \frac{x^2}{x^2-5x+6}dx$

ថ. $\int \frac{x^2+4}{x^2-4}dx$

ទ. $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}dx$

ធ. $\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx$

ន. $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}dx$

ប. $\int \frac{3}{(2x+3)(3x+4)}dx$

## ដំណោះស្រាយ

៤. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,4\}$ ។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-4}$ ដែល $A,B$ និង $C$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៥. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B,C$ និង $D$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{(x-1)^3}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{x+3}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៦. គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល $A,B$ និង $C$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៧. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-10x-5}{(x-1)^2(x+2)}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x-1)^2}$ ចំពោះ $\forall x\neq\{-2,1\}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I(x)=\displaystyle\int f(x)dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=-4$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៨. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x \neq \{-1,3\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៩. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4x^2-7x+5}{x-2x^2+x^3}$ ។

ក. រកតម្លៃ $A,B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{1-x}+\dfrac{C}{(1-x)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $k(x)=\int f(x)dx$ បើដឹងថាក្រាបតាង $y=k(x)$ កាត់តាមចំណុច $M(2,2)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

១០. ក. គណនាអាំងតេក្រាល $I(x)=\int\left(\frac{e^x}{1-e^x}\right)dx$ ។

ខ. រកចំនួនពិត $A$ និង $B$ ដើម្បីឲ្យ $\frac{e^x}{1-e^x}=A+\frac{B}{1-e^x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

គ. ទាញរកអាំងតេក្រាល $J(x)=\int\left(\frac{1}{1-e^x}\right)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

១១. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}dx$

ខ. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$

គ. $\int \frac{x^2}{x^2-4x+3}dx$

## ដំណោះស្រាយ

# មេរៀនទី ២

# អាំងតេក្រាលកំណត់

## ១ សេចក្ដីផ្ដើម និងគំនិតគ្រឹះ

**ឧទាហរណ៍ជាក់ស្ដែងក្នុងរូបវិទ្យា (សៀវភៅពុម្ពទំព័រ ៣១)៖**
អង្គធាតុមួយផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $v(t)=3t^2+5$ (គិតជា $\mathrm{m/mn}$ ឬម៉ែត្រក្នុងមួយនាទី) នៅខណៈពេល $t$ នាទី។ គេដឹងថាអនុគមន៍ចម្ងាយចរ $s(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ល្បឿន $v(t)$ គឺ៖

$$s(t)=\int v(t)\,dt=t^3+5t+c \quad (c \text{ ជាចំនួនថេរ})$$

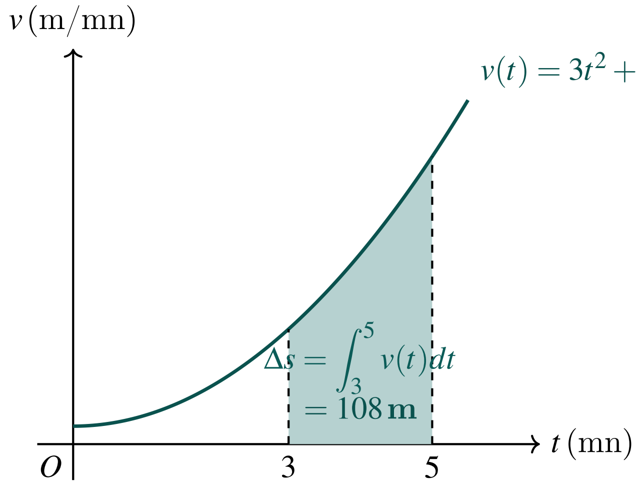
- នៅខណៈពេល $t=3\,\mathrm{mn}$ ៖ $s(3)=3^3+5(3)+c=27+15+c=42+c$
- នៅខណៈពេល $t=5\,\mathrm{mn}$ ៖ $s(5)=5^3+5(5)+c=125+25+c=150+c$

ដូចនេះ កំណើនចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅចន្លោះខណៈ $t=3\,\mathrm{mn}$ និង $t=5\,\mathrm{mn}$ គឺ៖

$$\Delta s=s(5)-s(3)=(150+c)-(42+c)=150-42=108\,\mathrm{m}$$

**ការសង្កេតសំខាន់៖** ចំនួនថេរ $c$ ត្រូវបានលុបបំបាត់ចោលទាំងស្រុងក្នុងផលដកនេះ!
ផលដក $s(5)-s(3)$ នេះ ហៅថា **អាំងតេក្រាលកំណត់ពី** $3$ **ទៅ** $5$ **នៃ** $v(t)$ ហើយកំណត់សរសេរដោយ៖

$$\int_3^5 v(t)\,dt=\int_3^5 (3t^2+5)\,dt=\left[t^3+5t\right]_3^5=108\,\mathrm{m}$$




## ២ និយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់

**និយមន័យ ១ : អាំងតេក្រាលកំណត់**

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $[a,b]$ នោះអាំងតេក្រាលកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ពី $a$ ទៅ $b$ គឺជាកំណើននៃអនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(b)-F(a)$ ដែលកំណត់សរសេរដោយៈ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

ដែលៈ

- $a$ ហៅថា **កម្រិតក្រោម** (Lower limit)
- $b$ ហៅថា **កម្រិតលើ** (Upper limit)
- $f(x)$ ហៅថា **កន្សោមក្រោមអាំងតេក្រាល** (Integrand)
- $x$ ហៅថា **អថេរអាំងតេក្រាល** ហើយ $dx$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអថេរ $x$ ។

**ជាទូទៅ ១ : សម្គាល់**

- ផលដក $F(b)-F(a)$ មិនទាក់ទងនឹងចំនួនថេរ $c$ ឡើយ ព្រោះ $(G(b)+c)-(G(a)+c)=G(b)-G(a)$ ។
- តម្លៃនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ គឺជាចំនួនពិតមួយ ដែលមិនអាស្រ័យនឹងអថេរអាំងតេក្រាលឡើយ ពោលគឺៈ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$$

**លំហាត់គំរូ ១**

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $I=\int_1^3(3x^2-2x+1)\,dx$

ខ. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

គ. $K=\int_0^1 e^{2x}\,dx$

**ដំណោះស្រាយ**

ក. $I=\int_1^3(3x^2-2x+1)\,dx=\left[x^3-x^2+x\right]_1^3=(27-9+3)-(1-1+1)=21-1=20$

ខ. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin 0=1-0=1$

គ. $K=\int_0^1 e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^0=\frac{e^2-1}{2}$

## ៣ ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតវិភាគ

**ទ្រឹស្តីបទ ១ : ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះទី១**

បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះអនុគមន៍ $F$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$ ដោយ៖

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

មានដេរីវេលើ $[a,b]$ ហើយ $F'(x)=f(x)$ ពោលគឺ៖

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)$$

**ជាទូទៅ ២ : រូបមន្ត Leibniz**

បើ $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ នោះ៖

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right]=f(v(x))\cdot v'(x)-f(u(x))\cdot u'(x)$$

**លំហាត់គំរូ ២**

រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $F(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,dt$

ខ. $G(x)=\int_0^{x^2} \sin(t)\,dt$

**ដំណោះស្រាយ**

ក. តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតវិភាគផ្នែកទី ១ $(\frac{d}{dx}[\int_a^x f(t)dt]=f(x))$ គេបាន៖

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,dt\right]=\sqrt{1+x^3}$$

ខ. អនុវត្តរូបមន្ត Leibniz សម្រាប់ព្រំដែនជាអនុគមន៍បណ្ដាក់ $v(x)=x^2 \implies v'(x)=2x$ គេបាន៖

$$G'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2} \sin(t)\,dt\right]=\sin(x^2)\cdot(x^2)'=2x\sin(x^2)$$

## ៤ លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

**ជាទូទៅ ៣ : លក្ខណៈគ្រឹះ**

ចំពោះគ្រប់អនុគមន៍ $f,g$ ជាប់លើចន្លោះសមស្រប និងចំនួនថេរ $k\in\mathbb{R}$ គេបាន៖

១. $\int_a^a f(x)\,dx=0$

២. $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

៣. $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

៤. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

៥. **ទំនាក់ទំនង Chasles៖** ចំពោះគ្រប់ $c\in[a,b]$ គេបាន៖

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

៦. **លក្ខណៈវិសមភាព៖**

- បើ $f(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ (ដែល $a < b$) នោះ $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- បើ $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- បើ $m \leq f(x) \leq M$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ នោះ៖

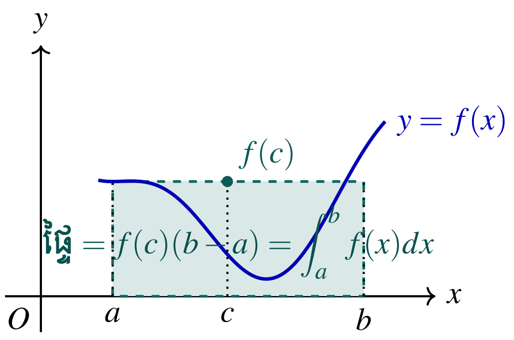
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

## ទ្រឹស្តីបទ ២ : ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះមានចំនួនពិត $c \in [a,b]$ យ៉ាងតិចមួយដែល៖

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

តម្លៃ $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ហៅថា **តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍** $f$ លើ $[a,b]$ ។




## ជាទូទៅ ៤ : លក្ខណៈនៃអនុគមន៍គូ និងអនុគមន៍សេស

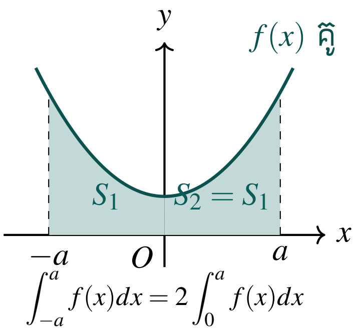
បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើចន្លោះឆ្លុះ $[-a,a]$ (ដែល $a > 0$) នោះ៖

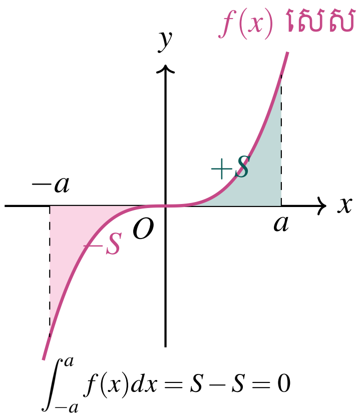
- បើ $f$ ជាអនុគមន៍គូ $(f(-x) = f(x))$ នោះ៖

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

- បើ $f$ ជាអនុគមន៍សេស $(f(-x) = -f(x))$ នោះ៖

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$




**លំហាត់គំរូ ៣**

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \cos x\, dx$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

ពិនិត្យអនុគមន៍ក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល $f(x) = x^3 \cos x$ លើដែន $\mathbb{R}$៖

$$f(-x) = (-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos x = -f(x)$$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស។
ដោយចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ជាចន្លោះស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងគល់ $O$ (ចន្លោះឆ្លុះ $[-a, a]$) តាមលក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សេស គេទាញបាន៖

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \cos x\, dx = 0$$

# ៥ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ

## ជាទូទៅ ៥ : វិធានប្តូរអថេរ

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx$ គេអនុវត្ត ៣ ជំហាន៖

ជំហានទី ១ ៖ តាងអថេរថ្មី $u=u(x) \implies du=u'(x)\,dx$

ជំហានទី ២ ៖ ផ្លាស់ប្តូរកម្រិតព្រំដែន៖ ចំពោះ $x=a \implies u=u(a)$ និង $x=b \implies u=u(b)$

ជំហានទី ៣ ៖ ជំនួសចូល និងគណនា៖ $\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

## លំហាត់គំរូ ៤

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^2 2x(x^2+1)^3\,dx$ ។

### ដំណោះស្រាយ

តាង $u=x^2+1 \implies du=2x\,dx$ ។ ប្តូរកម្រិតព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=1$ និង $x=2 \implies u=5$ ។

គេបាន៖ $I=\int_1^5 u^3\,du=\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^5=\frac{5^4-1^4}{4}=\frac{624}{4}=156$

## ប្រតិបត្តិ ១

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរ៖

ក. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

គ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

ខ. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

ឃ. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

### ចម្លើយខ្លី

ក. $\frac{1}{3}$

គ. $\frac{1}{4}$

ខ. $\frac{1}{3}$

ឃ. $\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

# ៦ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក

## ទ្រឹស្តីបទ ៣ : រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក

បើ $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេជាប់លើ $[a,b]$ នោះ៖

$$\int_a^b u\,dv = \left[u\cdot v\right]_a^b - \int_a^b v\,du$$

## គោលការណ៍ជ្រើសរើស $u$ តាមវិធាន ILATE

ជាទូទៅ គេជ្រើសរើស $u$ តាមលំដាប់អាទិភាព៖

១. **I** (Inverse trig) ៖ $\arcsin x, \arctan x$

២. **L** (Logarithmic) ៖ $\ln x, \log_a x$

៣. **A** (Algebraic) ៖ $x^n, ax+b$

៤. **T** (Trigonometric) ៖ $\sin x, \cos x$

៥. **E** (Exponential) ៖ $e^x, a^x$

កន្សោមដែលនៅសល់ត្រូវតាងដោយ $dv$ ។

## លំហាត់គំរូ ៥

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^e x\ln x\,dx$ ។

### ដំណោះស្រាយ

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x\,dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក៖

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$I = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}$$

# សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ២

**ការណែនាំ៖** ចូរជ្រើសរើសចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ ឬ ឃ ចំពោះសំណួរនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $[a,b]$ នោះតាមនិយមន័យ $\int_a^b f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $F(b)-F(a)$
ខ. $F(a)-F(b)$
គ. $F'(b)-F'(a)$
ឃ. $f(b)-f(a)$

២. តម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_a^a f(x)\,dx$ ដែលមានព្រំដែនក្រោមស្មើព្រំដែនលើ គឺ៖

ក. $1$
ខ. $0$
គ. $f(a)$
ឃ. $F(a)$

៣. កាលណាគេត្រឡប់ព្រំដែននៃអាំងតេក្រាល $\int_a^b f(x)\,dx$ នោះគេបាន៖

ក. $\int_b^a f(x)\,dx$
ខ. $\dfrac{1}{\int_b^a f(x)\,dx}$
គ. $-\int_b^a f(x)\,dx$
ឃ. $\int_a^b -f(x)\,dx = 0$

៤. ទំនាក់ទំនង Chasles សម្រាប់អាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\int_c^b f(x)\,dx$
ខ. $\int_b^a f(x)\,dx$
គ. $\int_a^c f(x)\,dx$
ឃ. $\int_a^b f(x)\,dx$

៥. ចំពោះ $k$ ជាចំនួនថេរ រូបមន្ត $\int_a^b kf(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $k\int_a^b f(x)\,dx$
ខ. $\dfrac{1}{k}\int_a^b f(x)\,dx$
គ. $k(b-a)\int_a^b f(x)\,dx$
ឃ. $k+\int_a^b f(x)\,dx$

៦. លក្ខណៈលីនេអ៊ែរ $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$
ខ. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
គ. $[f(b)+g(b)]-[f(a)+g(a)]$
ឃ. $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$

៧. បើ $f(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$ ដោយ $a\leq b$ នោះគេបាន៖

ក. $\int_a^b f(x)\,dx\leq 0$ ខ. $\int_a^b f(x)\,dx<0$ គ. $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$ ឃ. $\int_a^b f(x)\,dx=0$

៨. បើ $f(x)\leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$ ដោយ $a\leq b$ នោះគេបាន៖

ក. $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$ ខ. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

គ. $\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx$ ឃ. $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

៩. អាំងតេក្រាលនៃចំនួនថេរ $k$ លើចន្លោះ $[a,b]$ គឺ $\int_a^b k\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $k(b-a)$ ខ. $k(a-b)$ គ. $k$ ឃ. $\frac{k}{b-a}$

១០. តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ជាប់ $f$ លើចន្លោះ $[a,b]$ កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

ក. $\mu=(b-a)\int_a^b f(x)\,dx$ ខ. $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

គ. $\mu=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ឃ. $\mu=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

១១. បើគេដឹងថា $\int_1^3 f(x)\,dx=5$ នោះតម្លៃនៃ $\int_3^1 f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $5$ ខ. $\frac{1}{5}$ គ. $-5$ ឃ. $0$

១២. បើ $\int_0^2 f(x)\,dx=3$ និង $\int_2^5 f(x)\,dx=4$ នោះ $\int_0^5 f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $12$ គ. $-1$ ឃ. $7$

១៣. បើ $\int_1^4 f(x)\,dx=8$ និង $\int_1^2 f(x)\,dx=3$ នោះ $\int_2^4 f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $5$ ខ. $11$ គ. $-5$ ឃ. $\frac{8}{3}$

១៤. បើ $\int_0^3 f(x)\,dx=6$ នោះតម្លៃនៃ $\int_0^3 [2f(x)+1]\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $13$ ខ. $15$ គ. $12$ ឃ. $18$

១៥. បើ $\int_1^2 f(x)\,dx=2$ និង $\int_1^2 g(x)\,dx=-1$ នោះ $\int_1^2 [3f(x)-4g(x)]\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2$ ខ. $7$ គ. $10$ ឃ. $12$

១៦. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$ ស្មើនឹង៖

ក. $f'(x)$ ខ. $F(x)$ គ. $f(x)-f(a)$ ឃ. $f(x)$

១៧. តម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_2^2 (5x^3-7x+1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $1$ គ. $27$ ឃ. $-1$

១៨. តម្លៃនៃ $\int_1^5 4\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $20$ ខ. $16$ គ. $4$ ឃ. $12$

១៩. បើ $\int_0^k 2x\,dx = 9$ ដោយ $k>0$ នោះតម្លៃនៃ $k$ គឺ៖

ក. $k=9$ ខ. $k=\frac{9}{2}$ គ. $k=3$ ឃ. $k=\sqrt{3}$

២០. បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើ $[a,b]$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $m \le f(x) \le M$ នោះគេបានវិសមភាព៖

ក. $m \le \int_a^b f(x)\,dx \le M$ ខ. $\frac{m}{b-a} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{M}{b-a}$

គ. $m(a-b) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ ឃ. $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

២១. តម្លៃនៃ $\int_0^1 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $1$ គ. $2$ ឃ. $\frac{1}{3}$

២២. តម្លៃនៃ $\int_0^2 x^2\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $4$ ខ. $\frac{8}{3}$ គ. $\frac{4}{3}$ ឃ. $8$

២៣. តម្លៃនៃ $\int_1^2 (3x^2-2x+1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $7$ ខ. $6$ គ. $5$ ឃ. $4$

២៤. តម្លៃនៃ $\int_0^1 (4x^3+1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $3$ គ. $4$ ឃ. $2$

២៥. តម្លៃនៃ $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $-\frac{1}{2}$ គ. $1$ ឃ. $\frac{3}{4}$

២៦. តម្លៃនៃ $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $2$ គ. $4$ ឃ. $\frac{1}{2}$

២៧. តម្លៃនៃ $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $4$ ខ. $\frac{8}{3}$ គ. $\frac{16}{3}$ ឃ. $8$

២៨. តម្លៃនៃ $\int_1^3 (2x-1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $4$ ខ. $8$ គ. $5$ ឃ. $6$

២៩. តម្លៃនៃ $\int_0^1 (x+1)^3\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{15}{4}$ ខ. $4$ គ. $\frac{7}{4}$ ឃ. $\frac{15}{2}$

៣០. តម្លៃនៃ $\int_0^2 (2x-3)^2\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{26}{3}$ ខ. $\frac{14}{3}$ គ. $\frac{28}{3}$ ឃ. $6$

៣១. តម្លៃនៃ $\int_0^1 e^x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e$ ខ. $e+1$ គ. $e-1$ ឃ. $1$

៣២. តម្លៃនៃ $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $2$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\frac{3}{2}$

៣៣. តម្លៃនៃ $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1-\frac{1}{e}$ ខ. $\frac{1}{e}-1$ គ. $\frac{1}{e}$ ឃ. $1+\frac{1}{e}$

៣៤. តម្លៃនៃ $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e$ ខ. $1$ គ. $0$ ឃ. $\ln 2$

៣៥. តម្លៃនៃ $\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ ខ. $2\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ គ. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ ឃ. $\frac{1}{2}\ln 5$

៣៦. តម្លៃនៃ $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\ln 3$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\ln 2$

៣៧. តម្លៃនៃ $\int_0^{\ln 3} (e^x+1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2+\ln 3$ ខ. $3+\ln 3$ គ. $2-\ln 3$ ឃ. $4$

៣៨. តម្លៃនៃ $\int_1^3 \frac{x^2+1}{x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $4-\ln 3$ ខ. $4+\ln 3$ គ. $8+\ln 3$ ឃ. $\frac{9}{2}+\ln 3$

៣៩. តម្លៃនៃ $\int_0^1 (e^x-1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e-1$ ខ. $e$ គ. $e-2$ ឃ. $1$

៤០. តម្លៃនៃ $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 2+\frac{1}{2}$ ខ. $1-\ln 2$ គ. $\ln 2$ ឃ. $\ln 2-\frac{1}{2}$

៤១. តម្លៃនៃ $\int_0^2 (x^2-4)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{16}{3}$ ខ. $\frac{16}{3}$ គ. $-\frac{8}{3}$ ឃ. $-8$

៤២. តម្លៃនៃ $\int_1^2 (x+2)^2\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{19}{3}$ ខ. $\frac{37}{3}$ គ. $12$ ឃ. $\frac{28}{3}$

៤៣. តម្លៃនៃ $\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\sqrt{3}+\frac{1}{3}$ ខ. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ គ. $\sqrt{3}-\frac{1}{3}$ ឃ. $\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$

៤៤. តម្លៃនៃ $\int_1^4 (1+\sqrt{x})\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $7$ ខ. $\frac{17}{3}$ គ. $8$ ឃ. $\frac{23}{3}$

៤៥. តម្លៃនៃ $\int_0^1 2^x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{\ln 2}$ ខ. $\ln 2$ គ. $\frac{2}{\ln 2}$ ឃ. $1$

៤៦. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $1$ គ. $-1$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៤៧. តម្លៃនៃ $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $1$ គ. $2$ ឃ. $-2$

៤៨. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $-1$ គ. $2$ ឃ. $1$

៤៩. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $1$ គ. $2$ ឃ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

៥០. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{1}{3}$ គ. $-\frac{1}{3}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៥១. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\pi}{4}$ ខ. $\sqrt{2}$ គ. $1$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៥២. តម្លៃនៃ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $-1$ គ. $\sqrt{2}$ ឃ. $1$

៥៣. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1-\frac{\pi}{4}$ ខ. $1+\frac{\pi}{4}$ គ. $\frac{\pi}{4}$ ឃ. $\frac{1}{3}$

៥៤. តម្លៃនៃ $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2$ ខ. $0$ គ. $-2$ ឃ. $1$

៥៥. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\pi}{2}$ ខ. $\pi$ គ. $\frac{\pi}{4}$ ឃ. $1$

៥៦. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\pi}{2}$ ខ. $1$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\frac{\pi}{4}$

៥៧. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

៥៨. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 0 ឃ. $\sqrt{2}$

៥៩. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(2x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $\frac{1}{4}$ គ. $\frac{3}{4}$ ឃ. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

៦០. តម្លៃនៃ $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\pi$ ខ. $\frac{\pi}{4}$ គ. 1 ឃ. $\frac{\pi}{2}$

៦១. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\cos^2(2x)}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. 1 គ. 2 ឃ. $\frac{1}{4}$

៦២. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\pi}{4}$ ខ. 1 គ. 2 ឃ. $\frac{1}{2}$

៦៣. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. $-1$ គ. 1 ឃ. 2

៦៤. តម្លៃនៃ $\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. $-2$ ឃ. 2

៦៥. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}\ln 2$ ខ. $\ln 2$ គ. $-\ln 2$ ឃ. 1

៦៦. តាមវិធីប្តូរអថេរ តាង $u=u(x)$ នោះរូបមន្តប្តូរព្រំដែន $\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\int_a^b f(u)\,du$ ខ. $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

គ. $\int_{u(b)}^{u(a)} f(u)\,du$ ឃ. $\int_a^b f'(u)\,du$

៦៧. តម្លៃនៃ $\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{15}{2}$ ខ. 4 គ. $\frac{15}{4}$ ឃ. $\frac{7}{4}$

៦៨. តម្លៃនៃ $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ ខ. $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$

គ. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ ឃ. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

៦៩. តម្លៃនៃ $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}\ln 2$ ខ. $\ln 2$ គ. $2\ln 2$ ឃ. $\frac{1}{4}\ln 2$

៧០. តម្លៃនៃ $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $-\frac{1}{2}$ ឃ. $\frac{3}{4}$

៧១. តម្លៃនៃ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $2$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\frac{1}{4}$

៧២. តម្លៃនៃ $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $\frac{2}{3}$ ឃ. $\frac{1}{3}$

៧៣. តម្លៃនៃ $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 2$ ខ. $1$ គ. $2$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៧៤. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{1}{3}$ គ. $\frac{2}{3}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៧៥. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}$ ខ. $1$ គ. $\frac{1}{4}$ ឃ. $-\frac{1}{4}$

៧៦. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $2$ គ. $\frac{1}{4}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៧៧. តម្លៃនៃ $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{e-1}{2}$ ខ. $e-1$ គ. $\frac{e+1}{2}$ ឃ. $\frac{e}{2}$

៧៨. តម្លៃនៃ $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e^2-e$ ខ. $2(e^2-e)$ គ. $2(e^2+e)$ ឃ. $\frac{e^2-e}{2}$

៧៩. តម្លៃនៃ $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 3$ ខ. $\ln 2$ គ. $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ឃ. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

៨០. តម្លៃនៃ $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 2$ ខ. $\frac{1}{2}\ln 2$ គ. $3\ln 2$ ឃ. $\frac{1}{3}\ln 2$

៨១. រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែកគឺ៖

ក. $\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du$ ខ. $\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b+\int_a^b v\,du$

គ. $\int_a^b u\,dv=uv-\int_a^b v\,du$ ឃ. $\int_a^b u\,dv=[u'v]_a^b-\int_a^b uv'\,dx$

៨២. តម្លៃនៃ $\int_0^1 xe^x dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $1$ គ. $e-1$ ឃ. $e$

៨៣. តម្លៃនៃ $\int_0^1 (x+1)e^x dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2e$ ខ. $e-1$ គ. $e$ ឃ. $e+1$

៨៤. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\pi}{2}$ ខ. $\frac{\pi}{2}+1$ គ. $1$ ឃ. $\frac{\pi}{2}-1$

៨៥. តម្លៃនៃ $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\pi$ ខ. $2\pi$ គ. $0$ ឃ. $-\pi$

៨៦. តម្លៃនៃ $\int_1^{e} \ln x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $1$ គ. $e-1$ ឃ. $e$

៨៧. តម្លៃនៃ $\int_1^{e} x\ln x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{e^2-1}{4}$ ខ. $\frac{e^2}{2}$ គ. $\frac{e^2+1}{4}$ ឃ. $\frac{e^2+1}{2}$

៨៨. តម្លៃនៃ $\int_0^{\ln 2} xe^{2x}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\ln 2-\frac{1}{2}$
ខ. $\ln 2-\frac{3}{4}$
គ. $2\ln 2-1$
ឃ. $2\ln 2-\frac{3}{4}$

៨៩. តម្លៃនៃ $\int_0^1 x^2e^x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $e-2$
ខ. $e+2$
គ. $2e-1$
ឃ. $e-1$

៩០. តម្លៃនៃ $\int_1^2 (2x-1)\ln x\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\ln 2-1$
ខ. $2\ln 2-\frac{1}{2}$
គ. $\ln 2-\frac{1}{2}$
ឃ. $2\ln 2+\frac{1}{2}$

៩១. តម្លៃនៃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{\pi}{2}$
ខ. $\pi$
គ. $\frac{\pi}{4}$
ឃ. $-\frac{\pi}{4}$

៩២. តម្លៃនៃ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $1+\frac{2}{e}$
ខ. $\frac{1}{e}$
គ. $1-\frac{1}{e}$
ឃ. $1-\frac{2}{e}$

៩៣. បើ $f$ ជាអនុគមន៍សេស និងជាប់លើចន្លោះស៊ីមេទ្រី $[-a,a]$ នោះ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$
ខ. $2\int_0^a f(x)\,dx$
គ. $af(a)$
ឃ. $2a$

៩៤. បើ $f$ ជាអនុគមន៍គូ និងជាប់លើចន្លោះស៊ីមេទ្រី $[-a,a]$ នោះ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$
ខ. $2\int_0^a f(x)\,dx$
គ. $\int_0^a f(x)\,dx$
ឃ. $a[f(a)+f(-a)]$

៩៥. តម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $8$
ខ. $4$
គ. $0$
ឃ. $16$

៩៦. តម្លៃនៃ $\int_{-1}^{1} (x^5-3x^3+7x)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $5$
ខ. $7$
គ. $2$
ឃ. $0$

៩៧. តម្លៃនៃ $\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{8}{3}$
ខ. $\frac{4}{3}$
គ. $0$
ឃ. $\frac{2}{3}$

៩៨. តម្លៃនៃ $\int_{-1}^{1}(x^3+x^2)\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $\frac{4}{3}$ ឃ. $2$

៩៩. តម្លៃនៃ $\int_{2}^{3}\frac{1}{x^2-1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ខ. $\frac{1}{2}\ln 3$ គ. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ឃ. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

១០០. តម្លៃនៃ $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{x+1}\,dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $2-\ln 2$ ខ. $3+\ln 2$ គ. $1+\ln 2$ ឃ. $2+\ln 2$

# លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$

ខ. $\int_1^1 \frac{f(x)}{3}\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

២. គេមាន $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[1,5]$ ហើយ $\int_1^2 f(x)\,dx = -4$ , $\int_2^5 f(x)\,dx = 6$ , $\int_1^5 g(x)\,dx = 8$ ។ គណនា៖

ក. $\int_1^5 f(x)\,dx$

ខ. $\int_5^1 [-4f(x)]\,dx$

គ. $\int_1^5 [4f(x) - 2g(x)]\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

៣. ចូរគណនាតម្លៃនៃ $k$ បើគេដឹងថា $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = 2$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៤. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int_{1}^{1}(3x^2+1)\,dx$

ខ. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-3\right)dx$

គ. $\int_{4}^{9}\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

ឃ. $\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,dx$

ង. $\int_{2}^{4}\sqrt[3]{x-2}\,dx$

ច. $\int_{-4}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$

ឆ. $\int_{1}^{5}\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

ជ. $\int_{1}^{3}5x(x^2-7)^3\,dx$

ឈ. $\int_{0}^{2}3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

ញ. $\int_{1}^{2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$

ដ. $\int_{1}^{4}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$

ឋ. $\int_{0}^{1}(3x^2-2x)^2\,dx$

ឌ. $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

៥. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងសនិទានខាងក្រោម៖

ក. $\int_1^2 3e^{4x}\,dx$

ខ. $\int_0^1 4x^3 e^{2x^4}\,dx$

គ. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

ឃ. $\int_1^3 3e^{2x}(e^{-2x}-1)\,dx$

ង. $\int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$

## ដំណោះស្រាយ

## ៦. អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច៖

សហគ្រាសមួយទទួលបានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមពីការលក់ផលិតផលប្រើប្រាស់ចំនួន $t$ គ្រឿង។ បើអត្រានៃចំណូលបន្ថែមកំណត់ដោយអនុគមន៍ $R'(t) = 180 + 0.2t$ (គិតជាពាន់រៀល) ក្នុងមួយគ្រឿង។

ចូររកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30 ទៅ 40 គ្រឿង។

### ដំណោះស្រាយ

៧. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរ៖

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}dx$

ខ. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x-2}dx$

គ. $\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}dx$

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx$

ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

## ដំណោះស្រាយ

៨. គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក៖

ក. $\int_0^1 xe^x\,dx$ ឃ. $\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$ ឆ. $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

ខ. $\int_1^e \ln x\,dx$ ង. $\int_1^e x^2\ln x\,dx$ ជ. $\int_0^1 \arctan x\,dx$

គ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ ច. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ ឈ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

៩. **លំហាត់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប (BacII Practice) ៖**

ក. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ និង $J = \int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx$ ។

- គណនា $I + J$
- គណនា $I - J$ ដោយប្រើវិធីប្តូរអថេរ
- ទាញរកតម្លៃនៃ $I$ និង $J$ ។

ខ. គេមានស្វ៊ីត $(I_n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ ។

- គណនា $I_0$ និង $I_1$
- បង្ហាញទំនាក់ទំនងរវាង $I_n$ និង $I_{n-1}$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក
- ទាញរកតម្លៃនៃ $I_3$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

# ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់

## ១ គណនាផ្ទៃក្រឡាតាមវិធីចែកជាចតុកោណកែង (Riemann Sums)

ការគណនាផ្ទៃក្រឡានៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង គឺជាប្រភពដើមនៃការបង្កើតទ្រឹស្តីអាំងតេក្រាល។ ដើម្បីគណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ក្រោមខ្សែកោង គេចែកដែននោះជាចតុកោណកែងតូចៗជាច្រើន រួចគណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

### ១.១ ចតុកោណកែងក្នុង (Inscribed Rectangles)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើ $[0,1]$ កំណត់ដោយ $y = f(x) = x^2 + 1$ និងមានក្រាប $C$ ។ ចែកចន្លោះ $[0,1]$ ជា $n = 4$ ចន្លោះស្មើគ្នា៖

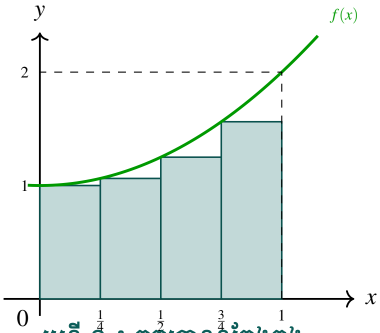
- ចំណុចចែក៖ $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ ទទឹង៖ $\Delta x = \frac{1}{4}$
- បណ្តោយយកតាមចុងខាងឆ្វេង៖ $f(x_0), \ldots, f(x_3)$

ផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងក្នុង៖

$$\mathscr{A}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$$

$$= \left[1 + \frac{17}{16} + \frac{20}{16} + \frac{25}{16}\right] \cdot \frac{1}{4}$$

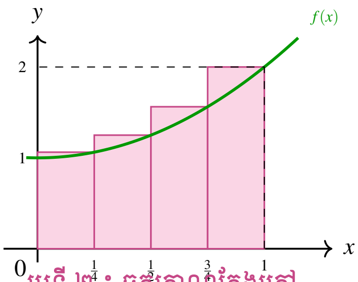
$$= \frac{78}{64} = 1.21875 \quad \text{(តម្លៃប្រហែលខ្វះ)}$$




រូបទី ១ ៖ ចតុកោណកែងក្នុង

## ១.២ ចតុកោណកែងក្រៅ (Circumscribed Rectangles)

គណនា តាម ផលបូក ផ្ទៃក្រឡា ចតុកោណកែង ស្ថិតនៅ**ខាងលើ**ក្រាប $C$ ដោយយកបណ្ដោយតាមតម្លៃអនុគមន៍នៅចុងខាងស្ដាំ $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ ៖

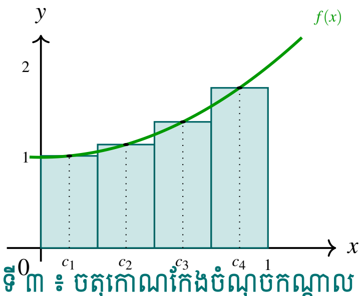


រូបទី ២ ៖ ចតុកោណកែងក្រៅ

$$\mathscr{A}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x = \left[\frac{17}{16}+\frac{20}{16}+\frac{25}{16}+2\right]\cdot\frac{1}{4} = \frac{94}{64} = 1.46875 \quad (\text{តម្លៃប្រហែលលើស})$$

## ១.៣ ចតុកោណកែងចំណុចកណ្ដាល (Midpoint Rectangles)

គេជ្រើសរើស $c_1, c_2, c_3, c_4$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃចន្លោះនីមួយៗ៖
$c_1 = \frac{1}{8}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, $c_3 = \frac{5}{8}$, $c_4 = \frac{7}{8}$។
ផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងទាំងបួនគឺ៖



រូបទី ៣ ៖ ចតុកោណកែងចំណុចកណ្ដាល

$$\mathscr{A}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(c_i)\Delta x = \left(\frac{65}{64}+\frac{73}{64}+\frac{89}{64}+\frac{113}{64}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{340}{256} = 1.328125$$

## ១.៤ លីមីតនៃផលបូក Riemann និងនិយមន័យផ្ទៃក្រឡា

កាលណាគេបង្កើនចំនួនចតុកោណកែង $n \to +\infty$ នោះទទឹង $\Delta x \to 0$ ហើយផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងខិតជិតតម្លៃពិតប្រាកដមួយ គឺ៖

$$\mathscr{A} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3} \approx 1.3333$$

យើងឃើញថា៖ $1.21875 < 1.328125 < \frac{4}{3} < 1.46875$ ពិតជាត្រឹមត្រូវមែនទែន។

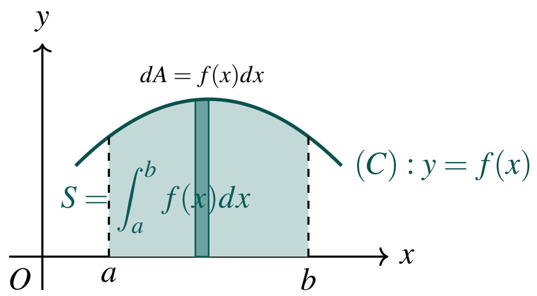
# ២ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

## ២.១ ករណីអនុគមន៍វិជ្ជមាន $(f(x) \geq 0)$

**ទ្រឹស្តីបទ ១**

បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់ និងមិនអវិជ្ជមាន $(f(x) \geq 0)$ លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា $S$ នៃដែនប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $(C): y = f(x)$ អ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ $(y=0)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=a$ , $x=b$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

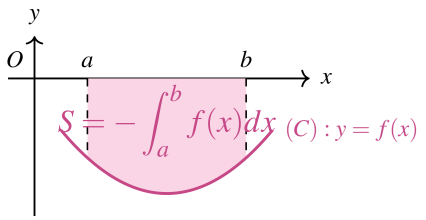


## ២.២ ករណីអនុគមន៍អវិជ្ជមាន $(f(x) \leq 0)$

**ទ្រឹស្តីបទ ២**

បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់ និងអវិជ្ជមាន $(f(x) \leq 0)$ លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា $S$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $(C): y = f(x)$ អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = a$ , $x = b$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [-f(x)]\,dx \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

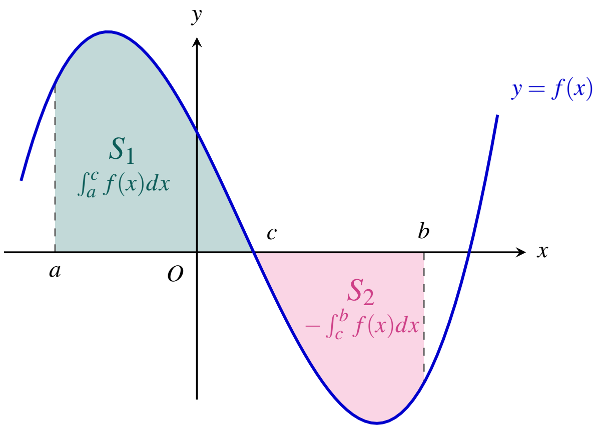



## ២.៣ ករណីអនុគមន៍ប្តូរសញ្ញាលើចន្លោះ $[a,b]$

**ជាទូទៅ ១**

បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើ $[a,b]$ ហើយប្តូរសញ្ញាដោយកាត់អ័ក្ស $Ox$ ត្រង់ចំណុច $c \in (a,b)$ នោះផ្ទៃក្រឡាសរុបគឺ៖

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = S_1 + S_2$$



**លំហាត់គំរូ ១**

[លំហាត់គំរូសៀវភៅពុម្ពទំព័រ ៤៤] គណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=4-x^2$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2,3]$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

សមីការអាប់ស៊ីសប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(y=0)$ ៖

$$4-x^2=0 \iff x^2=4 \iff x=-2 \quad \text{ឬ} \quad x=2$$

ពិនិត្យសញ្ញានៃ $y=4-x^2$ លើចន្លោះ $[-2,3]$ ៖

- លើចន្លោះ $[-2,2]$ ៖ $y=4-x^2\geq 0$ ក្រាបស្ថិតនៅពីលើអ័ក្ស $Ox$
- លើចន្លោះ $[2,3]$ ៖ $y=4-x^2\leq 0$ ក្រាបស្ថិតនៅពីក្រោមអ័ក្ស $Ox$

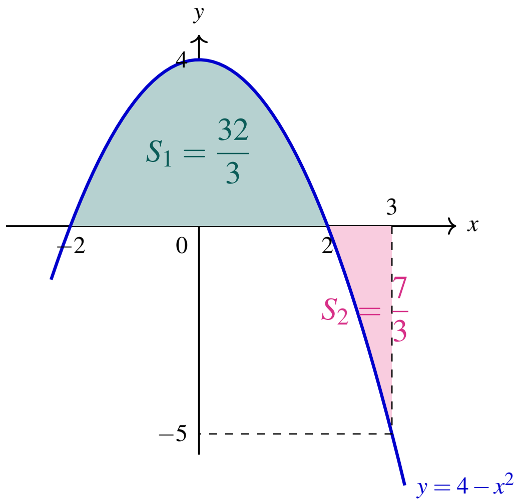
ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាសរុបគឺ៖

$$S=\int_{-2}^{3}|4-x^2|\,dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx-\int_{2}^{3}(4-x^2)\,dx=S_1+S_2$$

- $S_1=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}$
- $S_2=-\int_{2}^{3}(4-x^2)\,dx=\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{3}=(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)=-3+\frac{16}{3}=\frac{7}{3}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាសរុបគឺ៖

$$S=S_1+S_2=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{39}{3}=13 \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

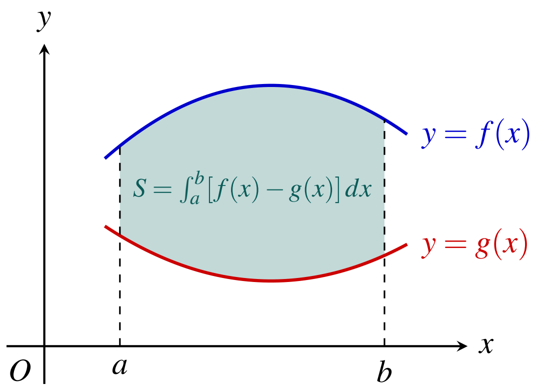


# ៣ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

**ទ្រឹស្តីបទ ៣**

បើអនុគមន៍ $f$ និង $g$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា $S$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $(C_1): y=f(x)$ ក្រាប $(C_2): y=g(x)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=a$ , $x=b$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$




**លំហាត់គំរូ ២**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

សមីការអាប់ស៊ីសប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់៖

$$x^2=x+2 \iff x^2-x-2=0 \iff (x+1)(x-2)=0 \iff x=-1 \quad \text{ឬ} \quad x=2$$

លើចន្លោះ $[-1,2]$ គេបានបន្ទាត់ $y=x+2$ ស្ថិតនៅពីលើប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ (ពោលគឺ $x+2\geq x^2$)។
ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាគឺ៖

$$S=\int_{-1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2} \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

# ៤ ផ្ទៃក្រឡាគណនាធៀបនឹងអ័ក្សអ័រដោណេ $(Oy)$

**ជាទូទៅ ២**

បើដែនប្លង់ត្រូវបានខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $x = f(y)$ និង $x = g(y)$ ដែល $f(y) \geq g(y)$ លើចន្លោះ $[c,d]$ (លើអ័ក្ស $Oy$) នោះផ្ទៃក្រឡាត្រូវបានកំណត់ដោយៈ

$$S = \int_c^d \left[f(y) - g(y)\right] dy \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

**លំហាត់គំរូ ៣**

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលដេក $x = y^2$ និងបន្ទាត់ $x = y + 2$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

សមីការអ័រដោណេប្រសព្វៈ $y^2 = y + 2 \iff y^2 - y - 2 = 0 \iff y = -1$ ឬ $y = 2$ ។
ចំពោះ $y \in [-1,2]$ គេបានបន្ទាត់ $x = y + 2$ ស្ថិតនៅខាងស្តាំប៉ារ៉ាបូល $x = y^2$ (ពោលគឺ $y + 2 \geq y^2$)។
ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាគឺៈ

$$S = \int_{-1}^2 [(y+2) - y^2]\, dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

# សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ៣

**ការណែនាំ៖** ចូរជ្រើសរើសចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ ឬ ឃ ចំពោះសំណួរនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. ក្នុងវិធីសាស្ត្រ Riemann បើគេចែកចន្លោះ $[a,b]$ ជា $n$ ចន្លោះស្មើគ្នា នោះទទឹងនៃចន្លោះនីមួយៗ $\Delta x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\dfrac{b-a}{n}$ ខ. $\dfrac{a-b}{n}$ គ. $\dfrac{b+a}{n}$ ឃ. $\dfrac{n}{b-a}$

២. ផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងក្នុង (Inscribed Rectangles) ត្រូវបានគណនាដោយយកកម្ពស់ជា៖

ក. តម្លៃអតិបរមានៃ $f$ លើចន្លោះនីមួយៗ ខ. តម្លៃអប្បបរមានៃ $f$ លើចន្លោះនីមួយៗ
គ. តម្លៃត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃចន្លោះនីមួយៗ ឃ. មធ្យមនព្វន្តនៃព្រំដែនសងខាង

៣. ផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងក្រៅ (Circumscribed Rectangles) ត្រូវបានគណនាដោយយកកម្ពស់ជា៖

ក. តម្លៃអប្បបរមានៃ $f$ លើចន្លោះនីមួយៗ ខ. តម្លៃត្រង់ចំណុចចុងខាងឆ្វេង
គ. តម្លៃអតិបរមានៃ $f$ លើចន្លោះនីមួយៗ ឃ. តម្លៃត្រង់ចំណុចកណ្តាល

៤. ចំពោះអនុគមន៍កើន $f$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ចតុកោណកែងក្នុងយកកម្ពស់តាមតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់៖

ក. ចំណុចចុងខាងស្តាំ $x_i$ ខ. ចំណុចកណ្តាល $c_i$
គ. ចំណុចចៃដន្យ ឃ. ចំណុចចុងខាងឆ្វេង $x_{i-1}$

៥. បើគេចែកចន្លោះ $[0,1]$ ជា $n=4$ ចន្លោះស្មើគ្នា នោះប្រវែង $\Delta x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\dfrac{1}{4}$ ខ. $\dfrac{1}{2}$ គ. $4$ ឃ. $\dfrac{1}{8}$

៦. ផ្ទៃក្រឡាពិតប្រាកដ $S$ នៃដែនប្លង់ក្រោមក្រាប $y=f(x)\geq 0$ លើ $[a,b]$ ត្រូវបានកំណត់ដោយលីមីត៖

ក. $S=\lim\limits_{n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ ខ. $S=\lim\limits_{n\to +\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$
គ. $S=\lim\limits_{\Delta x\to 1}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$ ឃ. $S=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$

៧. ចំពោះអនុគមន៍កើនលើ $[a,b]$ ទំនាក់ទំនងរវាងផលបូកទាំងបីគឺ៖

ក. ផលបូកក្រៅ $\leq$ ផលបូកកណ្តាល $\leq$ ផលបូកក្នុង ខ. ផលបូកកណ្តាល $\leq$ ផលបូកក្នុង $\leq$ ផលបូកក្រៅ
គ. ផលបូកក្នុង $\leq$ ផលបូកកណ្តាល $\leq$ ផលបូកក្រៅ ឃ. ផលបូកក្នុង $=$ ផលបូកក្រៅ

៨. កាលណាគេបង្កើនចំនួនចតុកោណកែង $n\to +\infty$ នោះទទឹង $\Delta x$ នឹង៖

ក. ខិតជិត $+\infty$ ខ. ខិតជិត $1$ គ. មិនប្រែប្រួល ឃ. ខិតជិត $0$

៩. បើ $f(x)=x+1$ លើចន្លោះ $[0,2]$ ដោយចែកជា $n=2$ ចន្លោះស្មើគ្នា នោះផលបូកក្នុង (ឆ្វេង) ស្មើនឹង៖

ក. 3 ខ. 4 គ. 5 ឃ. 2

១០. តាមទិន្នន័យនៃសំណួរខាងលើ ផលបូកក្រៅ (ស្តាំ) ស្មើនឹង៖

ក. 3 ខ. 5 គ. 4 ឃ. 6

១១. តម្លៃពិតប្រាកដនៃផ្ទៃក្រឡាសម្រាប់ $f(x)=x+1$ លើ $[0,2]$ តាមអាំងតេក្រាល $\int_0^2 (x+1)\,dx$ គឺ៖

ក. 3 ខ. 5 គ. 4 ឃ. $\frac{7}{2}$

១២. កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាល $c_i$ លើចន្លោះ $[x_{i-1},x_i]$ គឺ៖

ក. $x_i-x_{i-1}$ ខ. $x_{i-1}+\Delta x$ គ. $\frac{x_{i-1}\cdot x_i}{2}$ ឃ. $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

១៣. ផលបូក Riemann ត្រូវបានបង្កើតឡើងដំបូងដោយគណិតវិទូជាតិ៖

ក. អាល្លឺម៉ង់ (Bernhard Riemann) ខ. អង់គ្លេស (Isaac Newton)

គ. បារាំង (Augustin Cauchy) ឃ. ស្វីស (Leonhard Euler)

១៤. ឯកតានៃផ្ទៃក្រឡាដែលបានគណនាតាមអាំងតេក្រាល ត្រូវបានសរសេរជាទូទៅថា៖

ក. ឯកតាប្រវែង (Unit length) ខ. ឯកតាផ្ទៃ (Square units)

គ. ឯកតាមាឌ (Cubic units) ឃ. រ៉ាដ្យង់ (Radian)

១៥. បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់និងវិជ្ជមានលើ $[a,b]$ នោះក្រាបតាង $(C)$ ស្ថិតនៅ៖

ក. ពីក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ ខ. ពីឆ្វេងអ័ក្សអ័រដោណេ $Oy$

គ. ពីលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ ឃ. កាត់អ័ក្ស $Ox$ ត្រង់គ្រប់ចំណុច

១៦. បើ $f(x)\geq 0$ លើ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា $S$ ខណ្ឌដោយក្រាប $(C)$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=a,x=b$ គឺ៖

ក. $S=\int_a^b f(x)\,dx$ ខ. $S=-\int_a^b f(x)\,dx$

គ. $S=\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ ឃ. $S=2\int_a^b f(x)\,dx$

១៧. បើ $f(x)\leq 0$ លើ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា $S$ ខណ្ឌដោយក្រាប $(C)$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=a,x=b$ គឺ៖

ក. $S=\int_a^b f(x)\,dx$ ខ. $S=-\int_a^b f(x)\,dx$

គ. $S=\int_a^b -xf(x)\,dx$ ឃ. $S=\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$

១៨. ជារួម ចំពោះអនុគមន៍ជាប់ $f$ ណាមួយលើ $[a,b]$ ផ្ទៃក្រឡា $S$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

ក. $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ខ. $S=\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

គ. $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$ ឃ. $S=\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx$

១៩. បើ $f(x)\geq 0$ លើ $[a,c]$ និង $f(x)\leq 0$ លើ $[c,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡាសរុប $S$ ស្មើនឹង៖

ក. $S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ ខ. $S=\int_a^b f(x)\,dx$

គ. $S=\int_c^b f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx$ ឃ. $S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx$

២០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=0, x=3$ ស្មើនឹង៖

ក. $9$ ខ. $3$ គ. $27$ ឃ. $\frac{9}{2}$

២១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=2x$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ $x=1, x=4$ ស្មើនឹង៖

ក. $15$ ខ. $16$ គ. $8$ ឃ. $12$

២២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=4-x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-2,2]$ ស្មើនឹង៖

ក. $16$ ខ. $\frac{32}{3}$ គ. $\frac{16}{3}$ ឃ. $\frac{64}{3}$

២៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=-x^2$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ $x=0, x=2$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\frac{8}{3}$ ខ. $4$ គ. $\frac{8}{3}$ ឃ. $\frac{4}{3}$

២៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^3$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-1,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $\frac{1}{4}$ គ. $1$ ឃ. $\frac{1}{2}$

២៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\sin x$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0,\pi]$ ស្មើនឹង៖

ក. $2$ ខ. $0$ គ. $1$ ឃ. $\pi$

២៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\cos x$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0,\pi]$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $2$ គ. $1$ ឃ. $4$

២៧. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=e^x$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ $x=0, x=1$ ស្មើនឹង៖

ក. $e$ ខ. $e+1$ គ. $e-1$ ឃ. $1$

២៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយអ៊ីពែរបូល $y=\frac{1}{x}$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ $x=1, x=e$ ស្មើនឹង៖

ក. $e$ ខ. $\ln 2$ គ. $\frac{1}{e}$ ឃ. $1$

២៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\sqrt{x}$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ $x=0, x=4$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{16}{3}$ ខ. $\frac{8}{3}$ គ. $4$ ឃ. $8$

៣០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2-1$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-1,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}$ ខ. $\frac{4}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៣១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=3x^2$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[1,2]$ ស្មើនឹង៖

ក. $8$ ខ. $6$ គ. $7$ ឃ. $9$

៣២. ផ្ទៃក្រឡានៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=1-x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ គឺ៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៣៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2-4x$ និងអ័ក្ស $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{64}{3}$ ខ. $\frac{16}{3}$ គ. $16$ ឃ. $\frac{32}{3}$

៣៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x(x-2)$ និងអ័ក្ស $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៣៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=e^{-x}$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0,\ln 2]$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $\ln 2$ ឃ. $2$

៣៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\frac{1}{x+1}$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\ln 3$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\ln 2$

៣៧. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\cos x$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ស្មើនឹង៖

ក. $2$ ខ. $1$ គ. $0$ ឃ. $\pi$

៣៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=2-x$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0,2]$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $2$ គ. $4$ ឃ. $\frac{3}{2}$

៣៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=3\sqrt{x}$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[1,4]$ ស្មើនឹង៖

ក. $16$ ខ. $12$ គ. $14$ ឃ. $15$

៤០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2-2x$ និងអ័ក្ស $Ox$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $[0,3]$ គឺ៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{8}{3}$ គ. $0$ ឃ. $4$

៤១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y = x^3 - x$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-1, 1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $0$ គ. $\frac{1}{4}$ ឃ. $1$

៤២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y = 2^x$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0, 1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln 2$ ខ. $\frac{1}{\ln 2}$ គ. $\frac{2}{\ln 2}$ ឃ. $1$

៤៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y = \frac{1}{x^2}$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[1, 3]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $1$ ឃ. $\frac{4}{3}$

៤៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y = 6x - 3x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $6$ ខ. $8$ គ. $3$ ឃ. $4$

៤៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $y = 4 - x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2, 3]$ (លំហាត់គំរូសៀវភៅពុម្ពទំព័រ ៤៤) គឺ៖

ក. $13$ ខ. $\frac{32}{3}$ គ. $\frac{39}{3} = 13$ ឃ. $15$

៤៦. បើ $f(x) \geq g(x)$ លើ $[a, b]$ នោះផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរ និងបន្ទាត់ $x = a, x = b$ គឺ៖

ក. $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$ ខ. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

គ. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$ ឃ. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

៤៧. ជារួម ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $y = f(x)$ និង $y = g(x)$ លើ $[a, b]$ កំណត់ដោយ៖

ក. $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ ខ. $\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|$

គ. $\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx$ ឃ. $\int_a^b \sqrt{|f(x) - g(x)|}\,dx$

៤៨. ផ្ទៃក្រឡានៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ និងបន្ទាត់ $y = x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $\frac{1}{4}$ ឃ. $\frac{1}{6}$

៤៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ និងបន្ទាត់ $y = x + 2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{9}{2}$ ខ. $\frac{7}{2}$ គ. $4$ ឃ. $5$

៥០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលពីរ $y = 4 - x^2$ និង $y = x^2 - 4$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{32}{3}$ ខ. $\frac{64}{3}$ គ. $16$ ឃ. $\frac{16}{3}$

៥១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ និងបន្ទាត់ដេក $y=4$ ស្មើនឹង៖

ក. $16$ ខ. $\frac{16}{3}$ គ. $\frac{32}{3}$ ឃ. $\frac{64}{3}$

៥២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\sqrt{x}$ និងបន្ទាត់ $y=x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $\frac{1}{4}$ ឃ. $\frac{1}{6}$

៥៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ និងបន្ទាត់ $y=2x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៥៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^3$ និងបន្ទាត់ $y=x$ លើចន្លោះ $[0,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $\frac{1}{4}$ គ. $\frac{1}{3}$ ឃ. $\frac{1}{6}$

៥៥. ផ្ទៃក្រឡាសរុបខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^3$ និងបន្ទាត់ $y=x$ លើចន្លោះ $[-1,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $\frac{1}{4}$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $1$

៥៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $y=\sin x$ និង $y=\cos x$ លើចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\sqrt{2}$ ខ. $1$ គ. $\sqrt{2}+1$ ឃ. $\sqrt{2}-1$

៥៧. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $y=\sin x$ និង $y=\cos x$ លើចន្លោះ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ ស្មើនឹង៖

ក. $2\sqrt{2}$ ខ. $\sqrt{2}$ គ. $2$ ឃ. $4$

៥៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=e^x$ និងបន្ទាត់ $y=1$ លើចន្លោះ $[0,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $e-1$ ខ. $e-2$ គ. $e$ ឃ. $1$

៥៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=2-x^2$ និងបន្ទាត់ $y=x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{7}{2}$ ខ. $4$ គ. $\frac{9}{2}$ ឃ. $5$

៦០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2-2x$ និង $y=-x^2+4$ ស្មើនឹង៖

ក. $8$ ខ. $\frac{27}{2}$ គ. $10$ ឃ. $9$

៦១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2+1$ និងបន្ទាត់ $y=2x+1$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៦២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2$ និង $y=\sqrt{x}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{6}$ ខ. $\frac{1}{3}$ គ. $\frac{2}{3}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៦៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ និង $y=8-x^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{32}{3}$ ខ. $16$ គ. $\frac{64}{3}$ ឃ. $\frac{128}{3}$

៦៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=3-x^2$ និងបន្ទាត់ដេក $y=-1$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{16}{3}$ ខ. $8$ គ. $12$ ឃ. $\frac{32}{3}$

៦៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2-4x+3$ និង $y=-x^2+2x+3$ ស្មើនឹង៖

ក. $9$ ខ. $\frac{9}{2}$ គ. $6$ ឃ. $12$

៦៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^3$ និងបន្ទាត់ $y=4x$ ក្នុងកាដ្រង់ទី ១ $(x\geq 0)$ ស្មើនឹង៖

ក. $2$ ខ. $4$ គ. $8$ ឃ. $6$

៦៧. ផ្ទៃក្រឡាសរុបខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^3$ និងបន្ទាត់ $y=4x$ ស្មើនឹង៖

ក. $4$ ខ. $16$ គ. $8$ ឃ. $12$

៦៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=e^x$ និង $y=e^{-x}$ លើចន្លោះ $[0,\ln 2]$ ស្មើនឹង៖

ក. $1$ ខ. $\frac{3}{2}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៦៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\frac{4}{x}$ និងបន្ទាត់ $y=5-x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{15}{2}-8\ln 2$ ខ. $\frac{15}{2}-4\ln 2$ គ. $\frac{9}{2}-4\ln 2$ ឃ. $15-8\ln 2$

៧០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ និង $y=2-x^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{8}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{16}{3}$

៧១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2-1$ និង $y=1-x^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{8}{3}$ ខ. $\frac{4}{3}$ គ. $4$ ឃ. $\frac{16}{3}$

៧២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=2x^2$ និង $y=x^2+4$ ស្មើនឹង៖

ក. $16$ ខ. $\frac{64}{3}$ គ. $\frac{32}{3}$ ឃ. $\frac{16}{3}$

៧៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\sqrt{x}$ និងបន្ទាត់ $y=\frac{x}{2}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}$ ខ. $2$ គ. $1$ ឃ. $\frac{4}{3}$

៧៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2+2$ និង $y=4-x^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{8}{3}$ ខ. $\frac{4}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{16}{3}$

៧៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^4$ និង $y=x^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{15}$ ខ. $\frac{4}{15}$ គ. $\frac{1}{15}$ ឃ. $\frac{8}{15}$

៧៦. បើ $x=f(y)\geq g(y)$ លើ $[c,d]$ (លើអ័ក្ស $Oy$) នោះផ្ទៃក្រឡាត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

ក. $S=\int_c^d [g(y)-f(y)]\,dy$ ខ. $S=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy$

គ. $S=\int_c^d f(y)g(y)\,dy$ ឃ. $S=\pi\int_c^d [f(y)-g(y)]^2\,dy$

៧៧. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលដេក $x=y^2$, អ័ក្ស $Oy$ និងបន្ទាត់ $y=0, y=2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{8}{3}$ ខ. $4$ គ. $\frac{4}{3}$ ឃ. $8$

៧៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលដេក $x=y^2$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=4$ ស្មើនឹង៖

ក. $16$ ខ. $\frac{32}{3}$ គ. $\frac{16}{3}$ ឃ. $\frac{64}{3}$

៧៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលដេក $x=y^2$ និងបន្ទាត់ $x=y+2$ ស្មើនឹង៖

ក. $4$ ខ. $\frac{7}{2}$ គ. $\frac{9}{2}$ ឃ. $5$

៨០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x=2y-y^2$ និងអ័ក្ស $Oy$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}$ ខ. $2$ គ. $1$ ឃ. $\frac{4}{3}$

៨១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x=\sqrt{y}$, អ័ក្ស $Oy$ លើចន្លោះ $y\in[1,4]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{14}{3}$ ខ. $\frac{16}{3}$ គ. $4$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៨២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x=e^y$, អ័ក្ស $Oy$ លើចន្លោះ $y\in[0,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $e$ ខ. $e-1$ គ. $e+1$ ឃ. $1$

៨៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x=\frac{1}{y}$, អ័ក្ស $Oy$ លើចន្លោះ $y\in[1,e]$ ស្មើនឹង៖

ក. $e$ ខ. $\frac{1}{e}$ គ. $1$ ឃ. $\ln 2$

៨៤. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x=y^3$, អ័ក្ស $Oy$ លើចន្លោះ $y\in[0,2]$ ស្មើនឹង៖

ក. $8$ ខ. $2$ គ. $16$ ឃ. $4$

៨៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $x = y^2$ និងបន្ទាត់ $x = 2y$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៨៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x = y^2 - 1$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 3$ ស្មើនឹង៖

ក. $16$ ខ. $\frac{32}{3}$ គ. $\frac{16}{3}$ ឃ. $\frac{64}{3}$

៨៧. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x = 4 - y^2$ និងអ័ក្ស $Oy$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{16}{3}$ ខ. $8$ គ. $\frac{32}{3}$ ឃ. $\frac{64}{3}$

៨៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលដេក $x = y^2$ និង $x = 8 - y^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{32}{3}$ ខ. $16$ គ. $\frac{128}{3}$ ឃ. $\frac{64}{3}$

៨៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x = y^2 - 2y$ និងអ័ក្ស $Oy$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{4}{3}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $2$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៩០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $x = y^2$ និង $x = \sqrt{y}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{6}$ ខ. $\frac{1}{3}$ គ. $\frac{2}{3}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៩១. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y = -x^2 + 2x + 3$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{32}{3}$ ខ. $\frac{16}{3}$ គ. $9$ ឃ. $12$

៩២. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y = x^2 - 3x + 2$ និងអ័ក្ស $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{3}$ ខ. $\frac{1}{6}$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\frac{5}{6}$

៩៣. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y = x^3 - 3x$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0, \sqrt{3}]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{9}{2}$ ខ. $\frac{3}{2}$ គ. $\frac{9}{4}$ ឃ. $3$

៩៤. ផ្ទៃក្រឡាសរុបខណ្ឌដោយក្រាប $y = x^3 - 3x$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ស្មើនឹង៖

ក. $0$ ខ. $\frac{9}{4}$ គ. $9$ ឃ. $\frac{9}{2}$

៩៥. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y = e^{2x} - 1$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0, 1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{e^2 - 3}{2}$ ខ. $\frac{e^2 - 1}{2}$ គ. $e^2 - 2$ ឃ. $\frac{e^2 + 1}{2}$

៩៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$, បន្ទាត់ប៉ះ $y=2x-1$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើ $[0,1]$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{6}$ ខ. $\frac{1}{12}$ គ. $\frac{1}{4}$ ឃ. $\frac{1}{3}$

៩៧. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=\frac{1}{x+2}$, អ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[0,1]$ ស្មើនឹង៖

ក. $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ខ. $\ln 3$ គ. $\ln 2$ ឃ. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

៩៨. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y=2-x^2$ និងបន្ទាត់ $y=x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{7}{2}$ ខ. $4$ គ. $5$ ឃ. $\frac{9}{2}$

៩៩. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប $y=x^2-4x+5$ និងបន្ទាត់ $y=5-x$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{9}{2}$ ខ. $\frac{7}{2}$ គ. $4$ ឃ. $6$

១០០. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលពីរ $y=x^2$ និង $y=2x-x^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{2}{3}$ ខ. $\frac{1}{6}$ គ. $1$ ឃ. $\frac{1}{3}$

# លំហាត់អនុវត្តន៍

១. ដោយប្រើនិយមន័យ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int_0^2 3x\,dx$

ខ. $\int_2^4 4x\,dx$

គ. $\int_0^2 x^2\,dx$

ឃ. $\int_0^2 (x^2-5x)\,dx$

ង. $\int_1^2 x^2\,dx$

ច. $\int_0^3 (2x+1)\,dx$

ឆ. $\int_0^1 x^3\,dx$

ជ. $\int_1^3 (3x^2-2x)\,dx$

ឈ. $\int_0^2 (4-x^2)\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

២. គណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាង $y=f(x)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែល៖

ក. $f(x)=9-x^2$ ដែល $[a,b]=[-3,2]$ និង $n=5$

ខ. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ដែល $[a,b]=[-1,3]$ និង $n=4$

គ. $f(x)=\sqrt{x}$ ដែល $[a,b]=[0,4]$ និង $n=4$

ឃ. $f(x)=x^2+1$ ដែល $[a,b]=[0,3]$ និង $n=6$

## ដំណោះស្រាយ

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះដែលឱ្យ៖

ក. $f(x)=x^2$ ដែល $x\in[1,3]$

ខ. $f(x)=x^2+2x-3$ ដែល $x\in[1,3]$

គ. $f(x)=2-x^3$ ដែល $x\in[-3,-2]$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ ដែល $x\in[0,2]$

ង. $f(x)=4-x^2$ ដែល $x\in[-2,2]$

ច. $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ដែល $x\in[0,2]$

ឆ. $f(x)=\cos x$ ដែល $x\in[0,\pi]$

ជ. $f(x)=e^x-1$ ដែល $x\in[0,2]$

## ដំណោះស្រាយ

៤. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ទាំងពីរ៖

ក. $f(x)=x^2+2$ និង $g(x)=x$ ចំពោះ $x\in[2,5]$

ខ. $f(x)=x^2$ និង $g(x)=x^3$ ចំពោះ $x\in[0,1]$

គ. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ និង $g(x)=3x+2$ ចំពោះ $x\in[0,2]$

ឃ. $f(x)=e^{x-1}$ និង $g(x)=x$ ចំពោះ $x\in[1,4]$

ង. $f(x)=4-x^2$ និង $g(x)=x+2$

ច. $f(x)=x^3$ និង $g(x)=4x$

## ដំណោះស្រាយ

៥. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអ័រដោណេ $(Oy)$ ៖

ក. $x = y^2$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 4$

ខ. $x = \sqrt{y}$ និងបន្ទាត់ដេក $y = 1, y = 4$

គ. $x = y^2 - 2y$ និងអ័ក្ស $Oy$

ឃ. $x = e^y$ អ័ក្ស $Oy$ និងបន្ទាត់ដេក $y = 0, y = 1$

## ដំណោះស្រាយ

៦. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $x = y^2$ និង $y = x - 2$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៧. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ និង $g(x)=x^4$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៨. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin^3 x$ និង $g(x)=\cos^3 x$ លើចន្លោះ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៩. តាង $C$ ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=e^{2x}-1$ និង $l$ ជាបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $P(1,e)$ ៖

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $l$

ខ. រកផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ ដែលខណ្ឌដោយក្រាប $C$ បន្ទាត់ $l$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

## ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ៣ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់

១០. គេមានប៉ារ៉ាបូល $(P): y = -x^2 + 4$ និងបន្ទាត់ $(D): y = mx$ (ដែល $m > 0$) ៖

ក. កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $(D)$ ចែកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្ស $Ox$ ជាពីរផ្នែកមានផ្ទៃស្មើគ្នា។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកនីមួយៗនោះ។

## ដំណោះស្រាយ

១១. **អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច (Consumer and Producer Surplus) ៖**
នៅក្នុងទីផ្សារទំនិញមួយ អនុគមន៍តម្រូវការគឺ $P = D(x) = 100 - 0.5x$ និងអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់គឺ $P = S(x) = 10 + 0.5x$ (គិតជាពាន់រៀល) ដែល $x$ ជាបរិមាណទំនិញ (គិតជាឯកតា)។

ក. រកចំណុចលំនឹងទីផ្សារ $(x_0, P_0)$

ខ. គណនាអតិរេកអ្នកប្រើប្រាស់ (Consumer Surplus) ៖ $CS = \int_0^{x_0} [D(x) - P_0]\, dx$

គ. គណនាអតិរេកអ្នកផលិត (Producer Surplus) ៖ $PS = \int_0^{x_0} [P_0 - S(x)]\, dx$

## ដំណោះស្រាយ

**១២. លំហាត់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប (BacII Practice) ៖**

ក. គេមានប៉ារ៉ាបូល $(P): y=-x^2+2x+3$ ។

- រកចំណុចប្រសព្វរវាង $(P)$ និងអ័ក្សទាំងពីរ
- គណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ ។

ខ. គេមានខ្សែកោងពីរ $(C_1): y=x^2-3x+2$ និង $(C_2): y=-x^2+x+2$ ។

- រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង $(C_1)$ និង $(C_2)$
- គណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរ។

គ. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x-1)e^x$ មានក្រាបតាង $(C)$ ៖

- រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ ទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$
- គណនាផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $(C)$ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=2$ ។

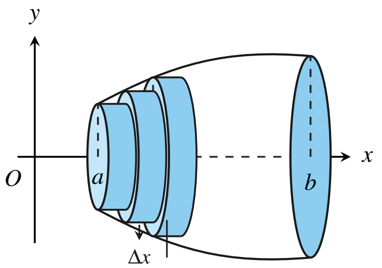
## ដំណោះស្រាយ

# មេរៀនទី ៤ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ

## ១ មាឌសូលីតបរិវត្ត

### ១.១ សញ្ញាណគ្រឹះ និងការបែងចែកជាស៊ីឡាំងស្តើង

**សញ្ញាណនៃសូលីតបរិវត្ត៖** (សៀវភៅពុម្ពទំព័រ ៥០-៥១)
គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។ រង្វិលនៃផ្ទៃ $\Gamma$ ខណ្ឌដោយក្រាប $f$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសចន្លោះ $x = a$ និង $x = b$ ជុំវិញអ័ក្ស $x'Ox$ បង្កើតបានជា**សូលីតបរិវត្ត**មួយ។



មាឌស៊ីឡាំងមុខកាត់
$V = \pi[f(x_k)]^2\Delta x$

**ការបែងចែករកមាឌ៖**

- ចែក $[a,b]$ ជា $n$ ចំណែកទទឹង $\Delta x$ ស្មើៗគ្នា។
- ផ្ទៃជាសមុខកាត់៖ $\mathscr{A}(x_k) = \pi[f(x_k)]^2$
- មាឌស៊ីឡាំងស្តើង៖ $\Delta V_k = \pi[f(x_k)]^2\Delta x$
- មាឌសរុប៖ $V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k)]^2\Delta x$

កាលណា $n \to +\infty \implies \Delta x \to 0$ គេបាន**មាឌសូលីតបរិវត្ត៖**

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k)]^2\Delta x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

**ចំណាំ៖** រូបមន្តខាងលើបង្ហាញថាមាឌសូលីតបរិវត្ត គឺស្មើនឹងផលបូកអាំងតេក្រាលនៃផ្ទៃក្រឡាជាសមុខកាត់ $\mathscr{A}(x) = \pi[f(x)]^2$ ពី $x = a$ ដល់ $x = b$ ៖

$$V = \int_a^b \mathscr{A}(x)\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

# ១.២ វិធីសាស្ត្របន្ទះមូល (The Disk Method)

## ទ្រឹស្តីបទ ១ : រូបមន្តវិធីសាស្ត្របន្ទះមូល ( The Disk Method )

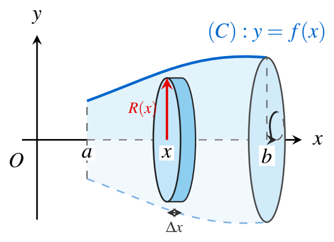
a. **រង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$៖** បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមិនអវិជ្ជមានលើ $[a,b]$ នោះមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $(C): y = f(x)$ អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = a$ , $x = b$ គឺ៖

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx \quad \text{(ឯកតាមាឌ)}$$

b. **រង្វិលជុំវិញអ័ក្សអ័រដោណេ $Oy$៖** បើ $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមិនអវិជ្ជមានលើ $[c,d]$ នោះមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Oy$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $x = g(y)$ អ័ក្ស $Oy$ និងបន្ទាត់ដេក $y = c$ , $y = d$ គឺ៖

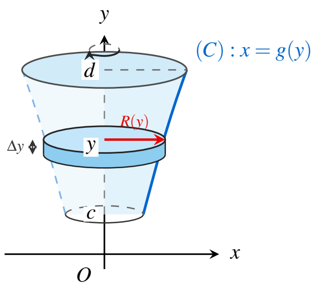
$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy \quad \text{(ឯកតាមាឌ)}$$

a. រង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$




$\mathscr{A}(x) = \pi[f(x)]^2 \implies V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

b. រង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Oy$




$\mathscr{A}(y) = \pi[g(y)]^2 \implies V_{Oy} = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

## លំហាត់គំរូ ១

គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $y = \sqrt{x}$ អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 4$ ។

### ដំណោះស្រាយ

កម្រិតព្រំដែនគឺពី $x = 0$ ដល់ $x = 4$ ។
តាមរូបមន្តវិធីសាស្ត្របន្ទះមូល៖

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\left(\frac{16}{2} - 0\right) = 8\pi \quad \text{(ឯកតាមាឌ)}$$

**លំហាត់គំរូ ២**

[រូបមន្តមាឌស្វ៊ែរ] ស្រាយបញ្ជាក់ថាមាឌនៃស្វ៊ែរកាំ $R$ គឺ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

ស្វ៊ែរកាំ $R$ កើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃកន្លះរង្វង់ខាងលើ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ លើចន្លោះ $[-R, R]$ ។
គេបាន៖

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, dx$$

ដោយអនុគមន៍ $f(x) = R^2 - x^2$ ជាអនុគមន៍គូ៖

$$V = 2\pi \int_{0}^{R} (R^2 - x^2) \, dx = 2\pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi \left( \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

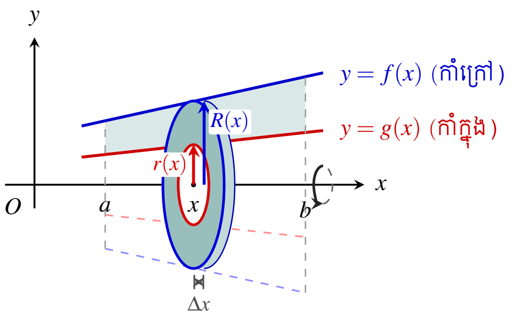
ដូចនេះ មាឌស្វ៊ែរកាំ $R$ គឺ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ។

## ១.៣ វិធីសាស្ត្រវ៉ាស្ស៊ែរ (The Washer Method)

**ទ្រឹស្តីបទ ២ : វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$**

បើ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ លើចន្លោះ $[a, b]$ នោះមាឌ $V$ នៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $(C_1) : y = f(x)$ និង $(C_2) : y = g(x)$ ចន្លោះ $x = a$ និង $x = b$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$V = \pi \int_a^b \left( [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx \quad \text{(ឯកតាមាឌ)}$$

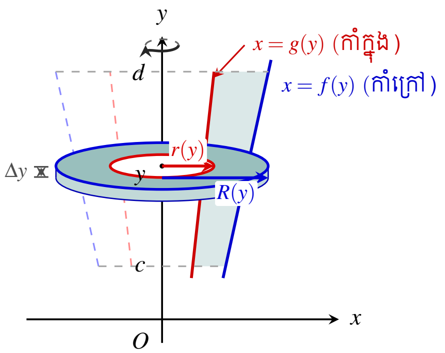



ផ្ទៃក្រឡាក្រវិល $A(x) = \pi[R^2(x) - r^2(x)] \implies V = \pi \int_a^b \left( [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$

## ទ្រឹស្តីបទ ៣ : វិលជុំវិញអ័ក្ស $Oy$

បើ $f(y) \geq g(y) \geq 0$ លើចន្លោះ $[c, d]$ នោះមាឌ $V$ នៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Oy$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $x = f(y)$ និង $x = g(y)$ ចន្លោះ $y = c$ និង $y = d$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$V = \pi \int_c^d \left( [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right) dy \quad (\text{ឯកតាមាឌ})$$




ផ្ទៃក្រឡាក្រវិល $A(y) = \pi[R^2(y) - r^2(y)] \implies V = \pi \int_c^d \left( [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right) dy$

## លំហាត់គំរូ ៣

គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ និងបន្ទាត់ $y = 2x$ ។

### ដំណោះស្រាយ

រកអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ៖ $x^2 = 2x \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ឬ $x = 2$ ។
លើចន្លោះ $[0, 2]$ គេបាន $2x \geq x^2 \geq 0$ ។
តាមរូបមន្តវិធីសាស្ត្រក្រវិល៖

$$V = \pi \int_0^2 \left( (2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

$$V = \pi \left[ \frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 32\pi \left( \frac{5-3}{15} \right) = \frac{64\pi}{15} \quad (\text{ឯកតាមាឌ})$$

# ២ ការគណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង (Arc Length)

## ២.១ ការទាញយករូបមន្តតាមត្រីកោណឌីផេរ៉ង់ស្យែល

**សញ្ញាណនៃប្រវែងធ្នូ៖** (សៀវភៅពុម្ពទំព័រ ៥៧)

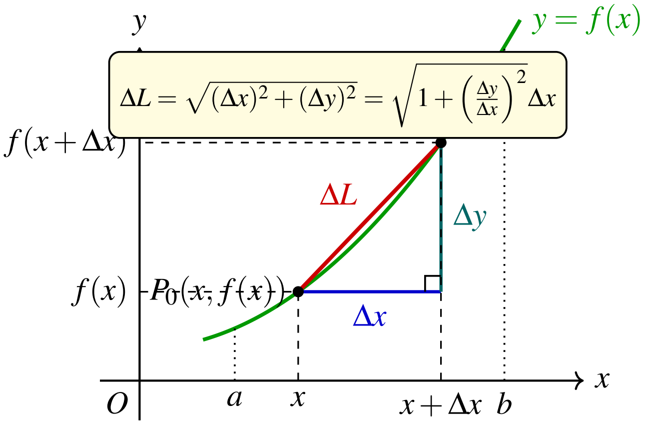
គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ និងមានដេរីវេលើ $[a,b]$ ហើយមានក្រាប $C$ ។
គេចែកចន្លោះ $[a,b]$ ជា $n$ ចំណែក រួចយកចំណុច $P_0(x,f(x))$ និង $P_1(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ ៖

- កំណើនលើអ័ក្សឈរ៖ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$
- ប្រវែងអង្កត់ធ្នូ $P_0P_1$ គឺ៖ $\Delta L = P_0P_1 = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$
- កាលណា $\Delta x \to 0$ នោះ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ហើយឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រវែងធ្នូគឺ៖

$$dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

ផលបូកនៃប្រវែងធ្នូទាំងអស់ខិតទៅរកប្រវែងធ្នូពិតប្រាកដ $L$ នៃក្រាប $C$ ចន្លោះ $x=a$ និង $x=b$ ៖

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$



## ២.២ រូបមន្តទូទៅ

**ទ្រឹស្តីបទ ៤ : រូបមន្តប្រវែងធ្នូ**

១. បើខ្សែកោងមានសមីការ $y=f(x)$ ដែល $f'$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះប្រវែងធ្នូ $L$ ពី $x=a$ ដល់ $x=b$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\quad (\text{ឯកតាប្រវែង})$$

២. បើខ្សែកោងមានសមីការ $x=g(y)$ ដែល $g'$ ជាប់លើចន្លោះ $[c,d]$ នោះប្រវែងធ្នូ $L$ ពី $y=c$ ដល់ $y=d$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\quad (\text{ឯកតាប្រវែង})$$

**លំហាត់គំរូ ៤**

[លំហាត់គំរូសៀវភៅពុម្ពទំព័រ ៥៧] គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-1$ នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

ដេរីវេនៃអនុគមន៍៖

$$y'=f'(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\sqrt{x}$$

គេបាន៖

$$1+(y')^2=1+(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2=1+8x$$

តាមរូបមន្តប្រវែងធ្នូ៖

$$L=\int_0^1\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+8x}\,dx=\frac{1}{8}\int_0^1(1+8x)^{\frac{1}{2}}(1+8x)'\,dx$$

$$L=\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(1+8x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{12}\left[9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{1}{12}(27-1)=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}\quad (\text{ឯកតាប្រវែង})$$

# សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) — មេរៀនទី ៤

**ការណែនាំ៖** ចូរជ្រើសរើសចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ ឬ ឃ ចំពោះសំណួរនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. រូបមន្តគណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $y=f(x)$ អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=a, x=b$ គឺ៖

ក. $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ ខ. $V=2\pi\int_a^b f(x)\,dx$

គ. $V=\pi\int_a^b f(x)\,dx$ ឃ. $V=\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

២. ក្នុងវិធីសាស្ត្រថាស (Disk Method) ផ្ទៃមុខកាត់កាត់កែងនឹងអ័ក្ស $Ox$ ត្រង់ចំណុច $x$ មានរាងជាថាសរង្វង់ដែលមានក្រឡាផ្ទៃ៖

ក. $\mathscr{A}(x)=2\pi f(x)$ ខ. $\mathscr{A}(x)=\pi[f(x)]^2$

គ. $\mathscr{A}(x)=\pi f(x)$ ឃ. $\mathscr{A}(x)=[f(x)]^2$

៣. មាឌនៃបន្ទះស៊ីឡាំងស្តើង (Element of volume) កម្រាស់ $\Delta x$ ក្នុងវិធីសាស្ត្រថាសគឺ៖

ក. $\Delta V=2\pi f(x)\Delta x$ ខ. $\Delta V=\pi f(x)\Delta x$

គ. $\Delta V=\pi[f(x)]^2\Delta x$ ឃ. $\Delta V=[f(x)]^2\Delta x$

៤. បើដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបពីរ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ (ដែល $f(x)\geq g(x)\geq 0$) វិលជុំវិញ $Ox$ នោះមាឌសូលីតគណនាតាមវិធីសាស្ត្រចិញ្ចៀន (Washer Method) គឺ៖

ក. $V=\pi\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx$ ខ. $V=\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\,dx$

គ. $V=2\pi\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$ ឃ. $V=\pi\int_a^b ([f(x)]^2-[g(x)]^2)\,dx$

៥. ឯកតានៃមាឌសូលីតបរិវត្តដែលគណនាតាមអាំងតេក្រាលជាទូទៅត្រូវបានតាងដោយ៖

ក. ឯកតាមាឌ (Cubic units) ខ. ឯកតាផ្ទៃ (Square units)

គ. ឯកតាប្រវែង (Unit length) ឃ. រ៉ាដ្យង់ (Radian)

៦. បើដែនប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x=g(y)$ អ័ក្ស $Oy$ និងបន្ទាត់ដេក $y=c, y=d$ វិលជុំវិញអ័ក្ស $Oy$ នោះមាឌសូលីតគឺ៖

ក. $V=2\pi\int_c^d g(y)\,dy$ ខ. $V=\pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy$

គ. $V=\pi\int_c^d g(y)\,dy$ ឃ. $V=\int_c^d [g(y)]^2\,dy$

៧. រូបមន្តគណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ពី $x=a$ ដល់ $x=b$ គឺ៖

ក. $L=\int_a^b \sqrt{1-[f'(x)]^2}\,dx$ ខ. $L=\int_a^b [1+f'(x)]\,dx$

គ. $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ ឃ. $L=\int_a^b \sqrt{1+[f(x)]^2}\,dx$

៨. ជាតុប្រវែងធ្នូឌីផេរ៉ង់ស្យែល (Differential of arc length) $ds$ នៃខ្សែកោង $y=f(x)$ ស្មើនឹង៖

ក. $ds=(1+y')\,dx$
ខ. $ds=\sqrt{1-(y')^2}\,dx$
គ. $ds=[1+(y')^2]\,dx$
ឃ. $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

៩. បើខ្សែកោងមានសមីការ $x=g(y)$ ពី $y=c$ ដល់ $y=d$ នោះប្រវែងធ្នូ $L$ ស្មើនឹង៖

ក. $L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$
ខ. $L=\int_c^d[1+g'(y)]\,dy$
គ. $L=\pi\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$
ឃ. $L=\int_c^d\sqrt{1-[g'(y)]^2}\,dy$

១០. ត្រីកោណកែងមួយមានបាតប្រវែង $h$ លើអ័ក្ស $Ox$ និងកម្ពស់ $r$ ។ កាលណាវិលជុំវិញ $Ox$ បង្កើតបានជាកោនដែលមានមាឌ៖

ក. $V=\pi r^2h$
ខ. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
គ. $V=\frac{2}{3}\pi r^2h$
ឃ. $V=\frac{4}{3}\pi r^2h$

១១. ចតុកោណកែងមួយមានវិមាត្រ $r$ និង $h$ កាលណារង្វិលជុំវិញជ្រុងមួយប្រវែង $h$ បង្កើតបានជា៖

ក. កោនមាឌ $\frac{1}{3}\pi r^2h$
ខ. ស្វ៊ែរមាឌ $\frac{4}{3}\pi r^3$
គ. ស៊ីឡាំងត្រង់មាឌ $\pi r^2h$
ឃ. ចង្ក្រានកាត់

១២. កន្លះរង្វង់ $y=\sqrt{R^2-x^2}$ លើចន្លោះ $[-R,R]$ កាលណាវិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ បង្កើតបានជាស្វ៊ែរដែលមានមាឌ៖

ក. $V=2\pi R^3$
ខ. $V=\pi R^3$
គ. $V=\frac{2}{3}\pi R^3$
ឃ. $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

១៣. បើអនុគមន៍ $f(x)=k$ (ថេរវិជ្ជមាន) លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌសូលីតបរិវត្តជុំវិញ $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $V=\pi k^2(b-a)$
ខ. $V=\pi k(b-a)$
គ. $V=2\pi k^2(b-a)$
ឃ. $V=\pi k^2$

១៤. បើអនុគមន៍ $f(x)\leq 0$ លើ $[a,b]$ នោះមាឌសូលីតបរិវត្តជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ គឺ៖

ក. $V=-\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$
ខ. $V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$
គ. $V=0$
ឃ. $V=-\pi\int_a^b f(x)\,dx$

១៥. លីមីតនៃផលបូក Riemann $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi[f(x_k)]^2\Delta x$ តំណាងឱ្យ៖

ក. ផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ក្រោមក្រាប
ខ. ប្រវែងធ្នូននៃខ្សែកោង
គ. មាឌសូលីតបរិវត្តជុំវិញអ័ក្ស $Ox$
ឃ. បរិមាត្រនៃដែនប្លង់

១៦. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃបន្ទាត់ $y=x$ លើចន្លោះ $[0,2]$ គឺ៖

ក. $\frac{4\pi}{3}$
ខ. $4\pi$
គ. $\frac{16\pi}{3}$
ឃ. $\frac{8\pi}{3}$

១៧. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ លើចន្លោះ $[0,1]$ គឺ៖

ក. $\frac{\pi}{5}$
ខ. $\frac{\pi}{3}$
គ. $\frac{2\pi}{5}$
ឃ. $\frac{\pi}{4}$

១៨. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃខ្សែកោង $y=\sqrt{x}$ លើចន្លោះ $[0,4]$ គឺ៖
ក. $4\pi$ ខ. $8\pi$ គ. $16\pi$ ឃ. $2\pi$

១៩. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃខ្សែកោង $y=\sqrt{x}$ លើចន្លោះ $[1,9]$ គឺ៖
ក. $20\pi$ ខ. $80\pi$ គ. $40\pi$ ឃ. $10\pi$

២០. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃខ្សែកោង $y=x^3$ លើចន្លោះ $[0,1]$ គឺ៖
ក. $\frac{\pi}{4}$ ខ. $\frac{\pi}{6}$ គ. $\frac{2\pi}{7}$ ឃ. $\frac{\pi}{7}$

២១. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃបន្ទាត់ $y=2x$ លើចន្លោះ $[0,3]$ គឺ៖
ក. $36\pi$ ខ. $18\pi$ គ. $12\pi$ ឃ. $54\pi$

២២. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃខ្សែកោង $y=\sqrt{2x+1}$ លើចន្លោះ $[0,4]$ គឺ៖
ក. $10\pi$ ខ. $20\pi$ គ. $16\pi$ ឃ. $24\pi$

២៣. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=e^x$ លើចន្លោះ $[0,1]$ គឺ៖
ក. $\pi(e^2-1)$ ខ. $\frac{\pi}{2}(e-1)$
គ. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ ឃ. $\pi(e-1)$

២៤. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=e^{-x}$ លើចន្លោះ $[0,\ln 2]$ គឺ៖
ក. $\frac{\pi}{4}$ ខ. $\frac{\pi}{2}$ គ. $\frac{3\pi}{4}$ ឃ. $\frac{3\pi}{8}$

២៥. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=\sin x$ លើចន្លោះ $[0,\pi]$ គឺ៖
ក. $\frac{\pi^2}{2}$ ខ. $\pi^2$ គ. $2\pi$ ឃ. $\frac{\pi}{2}$

២៦. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=\cos x$ លើចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ គឺ៖
ក. $\frac{\pi^2}{2}$ ខ. $\frac{\pi^2}{4}$ គ. $\pi$ ឃ. $\frac{\pi}{4}$

២៧. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=\frac{1}{x}$ លើចន្លោះ $[1,3]$ គឺ៖
ក. $\frac{\pi}{3}$ ខ. $\pi\ln 3$ គ. $\frac{2\pi}{3}$ ឃ. $\frac{4\pi}{3}$

២៨. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ លើចន្លោះ $[1,4]$ គឺ៖
ក. $\pi\ln 2$ ខ. $4\pi$ គ. $3\pi$ ឃ. $2\pi\ln 2$

២៩. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃបន្ទាត់ $y=3-x$ លើចន្លោះ $[0,3]$ គឺ៖
ក. $9\pi$ ខ. $27\pi$ គ. $3\pi$ ឃ. $\frac{9\pi}{2}$

៣០. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=\sqrt{4-x^2}$ លើចន្លោះ $[0,2]$ គឺ៖
ក. $\frac{8\pi}{3}$ ខ. $\frac{16\pi}{3}$ គ. $\frac{32\pi}{3}$ ឃ. $4\pi$

៣១. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃកន្លះរង្វង់ $y=\sqrt{9-x^2}$ លើចន្លោះ $[-3,3]$ គឺ៖

ក. $18\pi$ ខ. $72\pi$ គ. $36\pi$ ឃ. $54\pi$

៣២. មាឌស្វ៊ែរកាំ $r$ ដែលកើតពីរង្វិលកន្លះរង្វង់ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ ស្មើនឹង៖

ក. $\pi r^3$ ខ. $2\pi r^3$ គ. $\frac{2}{3}\pi r^3$ ឃ. $\frac{4}{3}\pi r^3$

៣៣. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $y=2x-x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ គឺ៖

ក. $\frac{16\pi}{15}$ ខ. $\frac{8\pi}{15}$ គ. $\frac{4\pi}{3}$ ឃ. $\frac{32\pi}{15}$

៣៤. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $y=1-x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ គឺ៖

ក. $\frac{8\pi}{15}$ ខ. $\frac{16\pi}{15}$ គ. $\frac{4\pi}{15}$ ឃ. $\frac{2\pi}{3}$

៣៥. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $y=4-x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ គឺ៖

ក. $\frac{256\pi}{15}$ ខ. $\frac{128\pi}{15}$ គ. $\frac{512\pi}{15}$ ឃ. $\frac{64\pi}{5}$

៣៦. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{\pi}{15}$ ខ. $\frac{4\pi}{15}$ គ. $\frac{\pi}{30}$ ឃ. $\frac{2\pi}{15}$

៣៧. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}$ និង $y=x$ គឺ៖

ក. $\frac{\pi}{6}$ ខ. $\frac{\pi}{3}$ គ. $\frac{\pi}{2}$ ឃ. $\frac{\pi}{12}$

៣៨. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{\pi}{10}$ ខ. $\frac{3\pi}{10}$ គ. $\frac{7\pi}{10}$ ឃ. $\frac{2\pi}{5}$

៣៩. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=2x$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{32\pi}{15}$ ខ. $\frac{16\pi}{15}$ គ. $\frac{64\pi}{15}$ ឃ. $\frac{8\pi}{5}$

៤០. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=4$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{128\pi}{5}$ ខ. $\frac{64\pi}{5}$ គ. $\frac{512\pi}{15}$ ឃ. $\frac{256\pi}{5}$

៤១. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=2,\ y=\sqrt{x}$ និង $x=0$ គឺ៖

ក. $8\pi$ ខ. $4\pi$ គ. $16\pi$ ឃ. $12\pi$

៤២. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x+2$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{36\pi}{5}$ ខ. $\frac{72\pi}{5}$ គ. $\frac{108\pi}{5}$ ឃ. $\frac{144\pi}{5}$

៤៣. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=3x$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{81\pi}{5}$ ខ. $\frac{243\pi}{5}$ គ. $\frac{162\pi}{5}$ ឃ. $\frac{54\pi}{5}$

៤៤. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{8x}$ និង $y=x^2$ គឺ៖

ក. $\frac{24\pi}{5}$ ខ. $\frac{32\pi}{5}$ គ. $\frac{16\pi}{5}$ ឃ. $\frac{48\pi}{5}$

៤៥. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=e^x$ និង $y=1$ លើ $[0,1]$ គឺ៖

ក. $\frac{\pi}{2}(e^2-3)$ ខ. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$
គ. $\pi(e^2-2)$ ឃ. $\pi(e-1)^2$

៤៦. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនក្រោម $y=\sec x$ លើ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ គឺ៖

ក. $\frac{\pi}{2}$ ខ. $\pi$ គ. $2\pi$ ឃ. $\frac{\pi^2}{4}$

៤៧. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sec x$ និង $y=1$ លើ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ គឺ៖

ក. $\pi(1-\pi)$ ខ. $\frac{\pi}{2}$
គ. $\frac{\pi(4-\pi)}{4}$ ឃ. $\pi-1$

៤៨. មាឌសូលីតដែលកើតពីរង្វិលដែនក្រោម $y=\frac{1}{x}$ ពី $x=1$ ដល់ $x=a$ $(a\to+\infty)$ ជុំវិញ $Ox$ គឺ៖

ក. $+\infty$ ខ. $\frac{\pi}{2}$ គ. $2\pi$ ឃ. $\pi$

៤៩. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^2+1$ និង $y=1$ លើ $[0,1]$ គឺ៖

ក. $\frac{11\pi}{15}$ ខ. $\frac{7\pi}{15}$ គ. $\frac{13\pi}{15}$ ឃ. $\frac{8\pi}{15}$

៥០. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=2\sqrt{x}$ និង $y=x$ គឺ៖

ក. $\frac{16\pi}{3}$ ខ. $\frac{32\pi}{3}$ គ. $\frac{64\pi}{3}$ ឃ. $8\pi$

៥១. សូលីតដែលកើតពីរង្វិលរង្វង់ $x^2+y^2=a^2$ ជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ គឺជា៖

ក. ស៊ីឡាំងត្រង់ ខ. កោនបរិវត្ត
គ. ស្វ៊ែរកាំ $a$ ដែលមានមាឌ $\frac{4}{3}\pi a^3$ ឃ. តូរុស (Torus)

៥២. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\cos x$ និង $y=\sin x$ លើ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ គឺ៖

ក. $\pi$ ខ. $\frac{\pi}{4}$ គ. $\frac{\pi^2}{4}$ ឃ. $\frac{\pi}{2}$

៥៣. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនក្រោម $y=\sqrt{x}$ លើចន្លោះ $[1,4]$ គឺ៖

ក. $\frac{15\pi}{2}$ ខ. $\frac{17\pi}{2}$ គ. $8\pi$ ឃ. $7\pi$

៥៤. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=2-x^2$ និង $y=1$ គឺ៖

ក. $\frac{28\pi}{15}$ ខ. $\frac{56\pi}{15}$ គ. $\frac{14\pi}{15}$ ឃ. $\frac{42\pi}{15}$

៥៥. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x-1}$, $x=5$ និង $y=0$ គឺ៖

ក. $4\pi$ ខ. $16\pi$ គ. $8\pi$ ឃ. $12\pi$

៥៦. រូបមន្តគណនាមាឌសូលីតបរិវត្តជុំវិញអ័ក្ស $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $x=g(y)$ លើចន្លោះ $[c,d]$ គឺ៖

ក. $V=\int_c^d [g(y)]^2\,dy$ ខ. $V=\pi\int_c^d g(y)\,dy$
គ. $V=2\pi\int_c^d yg(y)\,dy$ ឃ. $V=\pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy$

៥៧. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^2, y=4, x=0$ (កាជ្រុងទី១) គឺ៖

ក. $8\pi$ ខ. $16\pi$ គ. $4\pi$ ឃ. $\frac{32\pi}{5}$

៥៨. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^2, y=1, x=0$ គឺ៖

ក. $\pi$ ខ. $\frac{\pi}{2}$ គ. $\frac{\pi}{4}$ ឃ. $\frac{\pi}{5}$

៥៩. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}, y=2, x=0$ គឺ៖

ក. $\frac{16\pi}{5}$ ខ. $\frac{64\pi}{5}$ គ. $\frac{32\pi}{5}$ ឃ. $8\pi$

៦០. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=2x, y=4, x=0$ គឺ៖

ក. $\frac{8\pi}{3}$ ខ. $\frac{32\pi}{3}$ គ. $8\pi$ ឃ. $\frac{16\pi}{3}$

៦១. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^3, y=8, x=0$ គឺ៖

ក. $\frac{96\pi}{5}$ ខ. $\frac{48\pi}{5}$ គ. $\frac{32\pi}{3}$ ឃ. $16\pi$

៦២. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $x=\sqrt{4-y^2}$ និង $x=0$ គឺ៖

ក. $\frac{16\pi}{3}$ ខ. $\frac{32\pi}{3}$ គ. $16\pi$ ឃ. $8\pi$

៦៣. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\ln x, y=0, y=1, x=0$ គឺ៖

ក. $\pi(e^2-1)$ ខ. $\pi(e-1)$
គ. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ ឃ. $\frac{\pi}{2}(e-1)$

៦៤. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\frac{1}{x}, y=1, y=2, x=0$ គឺ៖

ក. $\pi\ln 2$ ខ. $\pi$ គ. $\frac{\pi}{4}$ ឃ. $\frac{\pi}{2}$

៦៥. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $x=y^2$ និង $x=y$ គឺ៖

ក. $\frac{2\pi}{15}$ ខ. $\frac{\pi}{15}$ គ. $\frac{4\pi}{15}$ ឃ. $\frac{\pi}{6}$

៦៦. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $x=y^2$ និង $x=2y$ គឺ៖

ក. $\frac{32\pi}{15}$ ខ. $\frac{64\pi}{15}$ គ. $\frac{16\pi}{15}$ ឃ. $4\pi$

៦៧. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}, x=4, y=0$ គឺ៖

ក. $\frac{64\pi}{5}$ ខ. $32\pi$ គ. $\frac{128\pi}{5}$ ឃ. $\frac{256\pi}{5}$

៦៨. មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^2$ និង $y=2x$ គឺ៖

ក. $\frac{16\pi}{3}$ ខ. $4\pi$ គ. $\frac{4\pi}{3}$ ឃ. $\frac{8\pi}{3}$

៦៩. កាលណាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $x=f(y)$ វិលជុំវិញ $Oy$ មុខកាត់កាត់កែងនឹង $Oy$ គឺជា៖

ក. ថាសរង្វង់ដែលមានកាំ $R=f(y)$ ខ. ការ៉េដែលមានជ្រុង $f(y)$
គ. ត្រីកោណសម័ង្ស ឃ. ពងក្រពើ

៧០. តាង $V_x$ ជាមាឌកើតពីរង្វិល $y=x^2$ លើ $[0,1]$ជុំវិញ $Ox$ ហើយ $V_y$ កើតពីរង្វិលដែនដដែលជុំវិញ $Oy$ ។ នោះ $V_x+V_y$ ស្មើ៖

ក. $\frac{\pi}{2}$ ខ. $\frac{7\pi}{10}$ គ. $\pi$ ឃ. $\frac{3\pi}{5}$

៧១. រូបមន្តប្រវែងធ្នូននៃខ្សែកោង $y=f(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ គឺ៖

ក. $L=\int_a^b \sqrt{1-[f'(x)]^2}\,dx$ ខ. $L=\int_a^b [1+(f'(x))^2]\,dx$

គ. $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ ឃ. $L=\int_a^b \sqrt{1+f(x)}\,dx$

៧២. ប្រវែងធ្នូនៃបន្ទាត់ត្រង់ $y=mx+c$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ស្មើនឹង៖

ក. $(b-a)\sqrt{1-m^2}$ ខ. $(b-a)(1+m)$ គ. $m(b-a)$ ឃ. $(b-a)\sqrt{1+m^2}$

៧៣. ប្រវែងធ្នូនៃបន្ទាត់ $y=\frac{4}{3}x$ ពី $x=0$ ដល់ $x=3$ គឺ៖

ក. 5 ខ. 4 គ. 3 ឃ. $\frac{5}{3}$

៧៤. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ពី $x=0$ ដល់ $x=3$ គឺ៖

ក. $\frac{7}{3}$ ខ. $\frac{14}{3}$ គ. $\frac{16}{3}$ ឃ. $\frac{8}{3}$

៧៥. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ ពី $x=0$ ដល់ $x=3$ គឺ៖

ក. 9 ខ. 10 គ. 12 ឃ. 15

៧៦. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\ln(\cos x)$ ពី $x=0$ ដល់ $x=\frac{\pi}{4}$ គឺ៖

ក. $\ln 2$ ខ. $\sqrt{2}-1$ គ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ឃ. $\ln(\sqrt{2}+1)$

៧៧. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\ln(\sin x)$ ពី $x=\frac{\pi}{4}$ ដល់ $x=\frac{\pi}{2}$ គឺ៖

ក. $\ln(\sqrt{2}+1)$ ខ. $\ln(\sqrt{2}-1)$ គ. $\ln 2$ ឃ. $\frac{\pi}{4}$

៧៨. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ ពី $x=1$ ដល់ $x=2$ គឺ៖

ក. $\frac{5}{4}$ ខ. $\frac{17}{12}$ គ. $\frac{19}{12}$ ឃ. $\frac{3}{2}$

៧៩. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$ ពី $x=1$ ដល់ $x=2$ គឺ៖

ក. $\frac{15}{16}$ ខ. $\frac{19}{16}$ គ. $\frac{21}{16}$ ឃ. $\frac{23}{16}$

៨០. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែច្រវ៉ាក់កាតេណារ (Catenary) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ពី $x=0$ ដល់ $x=\ln 2$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. 1 គ. $\frac{5}{4}$ ឃ. $\frac{3}{4}$

៨១. ប្រវែងធ្នូនៃកន្លះរង្វង់ខាងលើ $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ពី $x=-R$ ដល់ $x=R$ គឺ៖

ក. $\pi R$ ខ. $2\pi R$ គ. $\frac{\pi R}{2}$ ឃ. $\pi R^2$

៨២. បរិមាត្រវង្វង់កាំ $R$ គឺ $C=2\pi R$ ។ នោះប្រវែងធ្នូនៃមួយភាគបួនរង្វង់ (Quadrant) គឺ៖

ក. $\pi R$ ខ. $\frac{\pi R}{2}$ គ. $\frac{\pi R}{4}$ ឃ. $2\pi R$

៨៣. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ពី $x=-1$ ដល់ $x=1$ គឺ៖

ក. $e+\frac{1}{e}$ ខ. $2e$ គ. $e-\frac{1}{e}$ ឃ. $\frac{e-1}{2}$

៨៤. ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $x=\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}$ ពី $y=1$ ដល់ $y=4$ គឺ៖

ក. $\frac{7}{3}$ ខ. $\frac{8}{3}$ គ. $\frac{16}{3}$ ឃ. $\frac{14}{3}$

៨៥. បើ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះខ្សែកោងជាអង្កត់ដេក ហើយប្រវែងធ្នូរបស់វាគឺ៖

ក. $b-a$ ខ. $(b-a)^2$ គ. $0$ ឃ. $\sqrt{b-a}$

៨៦. សូលីតប៉ារ៉ាបូឡូអ៊ីតកើតពីរង្វិល $y=\sqrt{x}$ លើ $[0,h]$ ជុំវិញ $Ox$ មានកាំបាត $R=\sqrt{h}$ ។ មាឌរបស់វាគឺ៖

ក. $V=\pi R^2h$ ខ. $V=\frac{1}{2}\pi R^2h$

គ. $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ ឃ. $V=\frac{2}{3}\pi R^2h$

៨៧. រង្វិលនៃបន្ទាត់ $y=\frac{r}{h}x$ លើ $[0,h]$ ជុំវិញ $Ox$ បង្កើតបានជាកោនត្រង់ដែលមានមាឌ៖

ក. $V=\pi r^2h$ ខ. $V=\frac{2}{3}\pi r^2h$

គ. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ ឃ. $V=\frac{1}{2}\pi r^2h$

៨៨. រូបមន្តមាឌកោនកាត់ដែលមានកាំបាតទាំងពីរ $r_1,r_2$ និងកម្ពស់ $h$ គឺ៖

ក. $V=\frac{1}{3}\pi h(r_1+r_2)^2$ ខ. $V=\pi h(r_1^2+r_2^2)$

គ. $V=\frac{1}{2}\pi h(r_1^2+r_2^2)$ ឃ. $V=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$

៨៩. មាឌកំណាត់ស្វ៊ែរកម្ពស់ $h$ នៃស្វ៊ែរកាំ $R$ $(h\le R)$ កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

ក. $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$ ខ. $V=\frac{1}{3}\pi h^2(R+h)$

គ. $V=\pi h^2(2R-h)$ ឃ. $V=\frac{4}{3}\pi Rh^2$

៩០. តូរុស (Torus) កើតពីរង្វិលរង្វង់ $(x-R)^2+y^2\le r^2$ $(R>r)$ ជុំវិញអ័ក្ស $Oy$ មានមាឌស្មើនឹង៖

ក. $\pi^2Rr^2$ ខ. $2\pi^2Rr^2$ គ. $4\pi^2R^2r$ ឃ. $2\pi R\cdot\pi r$

៩១. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=-x^2+4$ និង $y=0$ គឺ៖

ក. $\frac{128\pi}{15}$ ខ. $\frac{256\pi}{15}$ គ. $\frac{512\pi}{15}$ ឃ. $\frac{64\pi}{3}$

៩២. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^2$ និង $y=2x$ គឺ៖

ក. $\frac{32\pi}{15}$ ខ. $\frac{16\pi}{15}$ គ. $\frac{8\pi}{5}$ ឃ. $\frac{64\pi}{15}$

៩៣. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}$ និង $y=\frac{x}{2}$ គឺ៖

ក. $\frac{8\pi}{3}$ ខ. $\frac{16\pi}{3}$ គ. $\frac{4\pi}{3}$ ឃ. $4\pi$

៩៤. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=e^x, x=0, x=1$ និង $y=0$ គឺ៖

ក. $\pi(e^2-1)$ ខ. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

គ. $\frac{\pi}{2}(e-1)$ ឃ. $\pi(e-1)$

៩៥. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃក្រាប $y=\sin x$ លើចន្លោះ $[0,\pi]$ គឺ៖

ក. $\pi^2$ ខ. $2\pi$ គ. $\frac{\pi^2}{2}$ ឃ. $\frac{\pi}{2}$

៩៦. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}, x=4, y=0$ គឺ៖

ក. $\frac{64\pi}{5}$ ខ. $16\pi$ គ. $32\pi$ ឃ. $\frac{128\pi}{5}$

៩៧. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនកាដ្រង់ទី១ ខណ្ឌដោយ $y=4-x^2, x=0, y=0$ គឺ៖

ក. $8\pi$ ខ. $16\pi$ គ. $4\pi$ ឃ. $\frac{32\pi}{3}$

៩៨. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Oy$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=x^2$ និង $y=4$ គឺ៖

ក. $4\pi$ ខ. $8\pi$ គ. $16\pi$ ឃ. $\frac{16\pi}{3}$

៩៩. (បាក់ឌុប) ប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ពី $x=0$ ដល់ $x=8$ គឺ៖

ក. $\frac{26}{3}$ ខ. $\frac{50}{3}$ គ. $\frac{52}{3}$ ឃ. $18$

១០០. (បាក់ឌុប) មាឌសូលីតបរិវត្តកើតពីរង្វិលជុំវិញ $Ox$ នៃដែនខណ្ឌដោយ $y=\frac{1}{x+1}$ លើ $[0,1]$ គឺ៖

ក. $\pi$ ខ. $\frac{\pi}{4}$ គ. $\frac{3\pi}{4}$ ឃ. $\frac{\pi}{2}$

# លំហាត់អនុវត្តន៍

**១**. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់បានពីការវង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍៖

ក. $y = 2x + 1$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x = 1$ និង $x = 3$

ខ. $y = x^2 + 1$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x = 0$ និង $x = 3$

គ. $y = \sqrt{x - 3}$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x = 4$ ទៅ $x = 9$

ឃ. $y = e^x$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x = 0$ និង $x = 1$

ង. $y = \sin x$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x = 0$ ទៅ $x = \pi$

ច. $y = \dfrac{2}{x}$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x = 1$ ទៅ $x = 4$

## ដំណោះស្រាយ

២. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការវង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'Ox$ នៃផ្ទៃប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍៖

ក. $f(x)=x^2$ និង $g(x)=4x-x^2$

គ. $f(x)=\sqrt{x}$ និង $g(x)=x^2$

ខ. $f(x)=x^2-2x+3$ និង $g(x)=9-x$

ឃ. $f(x)=4-x^2$ និង $g(x)=x+2$

## ដំណោះស្រាយ

៣. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការវង្វិលជុំវិញអ័ក្សអ័រដោណេ $y'Oy$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយៈ

ក. $x = y^2$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 4$

ខ. $y = \ln x$, អ័ក្ស $Oy$ និង $y = 0, y = 2$

## ដំណោះស្រាយ

៤. ចំពោះអនុគមន៍ $F(x)=\int_1^x \sin(\pi t)\,dt$ ។ គណនា៖

ក. $F(-1)$

ខ. $F'(0)$

គ. $F''\left(\frac{1}{2}\right)$

ឃ. $F''(x)$

## ដំណោះស្រាយ

៥. គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ ពី $x=1$ ទៅ $x=3$

ខ. $y=\ln(\cos x)$ ពី $x=0$ ទៅ $x=\frac{\pi}{3}$

គ. ឧបមាថា $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ។ បន្ទាត់ជួបអ័ក្សអ័រដោណេត្រង់ $B$ ហើយប៉ះក្រាប $f$ ត្រង់ $A(a,f(a))$ $(a>0)$។ ប្រៀបធៀបប្រវែងនៃអង្កត់ $AB$ និងប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាង $f$ នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=a$ ។

## ដំណោះស្រាយ

៦. រកផ្ទៃក្រឡាខាង និងមាឌនៃស្វ៊ែរដែលមានកាំ $R$ ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល។

## ដំណោះស្រាយ

៧. **លំហាត់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប (BacII Practice) ៖**
គេមានអនុគមន៍ $y = 4x - x^2$ មានក្រាបតាង $(P)$ ៖

ក. រកកូអរដោនេកំពូល និងចំណុចប្រសព្វរវាង $(P)$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្ស $Ox$។

គ. គណនាមាឌ $V$ នៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្ស $Ox$។

## ដំណោះស្រាយ

# លំហាត់ជំពូក

១. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$

គ. $\int x e^{x^2}\,dx$

ង. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

ខ. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

ឃ. $\int \sin(3x-1)\,dx$

ច. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

## ដំណោះស្រាយ

២. គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក៖

ក. $\int x\cos x\,dx$  គ. $\int \ln x\,dx$  ង. $\int e^x \sin x\,dx$

ខ. $\int x^2 e^x\,dx$  ឃ. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$  ច. $\int \arctan x\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

៣. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

ខ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

គ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ៤ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ

៤. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = x^2 - 4x$ និងអ័ក្ស $Ox$

ខ. $y = x^3 - 3x$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-1, 2]$

គ. $y = -x^2 + 4x$ និងបន្ទាត់ $y = x$

ឃ. $y = \sqrt{x}$ និង $y = x^2$

## ដំណោះស្រាយ

៥. គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ៖

ក. $y = x^2$ និង $y = 4$

ខ. $y = \sqrt{x}$ និង $y = x$

គ. $y = \sin x$ លើចន្លោះ $[0, \pi]$

## ដំណោះស្រាយ

៦. គណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោងខាងក្រោម៖

ក. $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ ពី $x=0$ ដល់ $x=3$

ខ. $y=\ln(\cos x)$ ពី $x=0$ ដល់ $x=\frac{\pi}{4}$

គ. $y=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$ ពី $x=1$ ដល់ $x=2$

## ដំណោះស្រាយ

**៧. លំហាត់ស្វ៊ីតអាំងតេក្រាលប្រឡងបាក់ឌុប៖**

គេឱ្យស្វ៊ីត $(I_n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$ ។

ក. គណនា $I_0$ និង $I_1$ ។

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរបង្ហាញថា $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ $I_2$ និង $I_3$ ។

## ដំណោះស្រាយ

# ផ្នែកដំណោះស្រាយ

## មេរៀនទី ១ ៖ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

### តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ១

| ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ១ | ក | ២១ | ខ | ៤១ | ខ | ៦១ | គ | ៨១ | គ |
| ២ | ខ | ២២ | គ | ៤២ | គ | ៦២ | ឃ | ៨២ | ឃ |
| ៣ | គ | ២៣ | ឃ | ៤៣ | ឃ | ៦៣ | ក | ៨៣ | ក |
| ៤ | ក | ២៤ | ក | ៤៤ | ក | ៦៤ | ខ | ៨៤ | ខ |
| ៥ | ខ | ២៥ | ខ | ៤៥ | ខ | ៦៥ | គ | ៨៥ | គ |
| ៦ | គ | ២៦ | គ | ៤៦ | គ | ៦៦ | ឃ | ៨៦ | ឃ |
| ៧ | ក | ២៧ | ឃ | ៤៧ | ឃ | ៦៧ | ក | ៨៧ | ក |
| ៨ | គ | ២៨ | ក | ៤៨ | ក | ៦៨ | ខ | ៨៨ | ខ |
| ៩ | ខ | ២៩ | ខ | ៤៩ | ខ | ៦៩ | គ | ៨៩ | គ |
| ១០ | គ | ៣០ | គ | ៥០ | គ | ៧០ | ឃ | ៩០ | ឃ |
| ១១ | ឃ | ៣១ | ឃ | ៥១ | ខ | ៧១ | ក | ៩១ | ក |
| ១២ | ខ | ៣២ | ក | ៥២ | ក | ៧២ | ខ | ៩២ | ខ |
| ១៣ | ក | ៣៣ | ខ | ៥៣ | គ | ៧៣ | គ | ៩៣ | គ |
| ១៤ | ខ | ៣៤ | គ | ៥៤ | ឃ | ៧៤ | ឃ | ៩៤ | ឃ |
| ១៥ | គ | ៣៥ | ឃ | ៥៥ | ក | ៧៥ | ក | ៩៥ | ក |
| ១៦ | ក | ៣៦ | ក | ៥៦ | ខ | ៧៦ | ខ | ៩៦ | ខ |
| ១៧ | ខ | ៣៧ | ខ | ៥៧ | គ | ៧៧ | គ | ៩៧ | គ |
| ១៨ | គ | ៣៨ | គ | ៥៨ | ឃ | ៧៨ | ឃ | ៩៨ | ឃ |
| ១៩ | ឃ | ៣៩ | ឃ | ៥៩ | ក | ៧៩ | ក | ៩៩ | ក |
| ២០ | ក | ៤០ | ក | ៦០ | ខ | ៨០ | ខ | ១០០ | ខ |

## ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

### លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int 10x\sqrt{5x^2+2}dx$

ខ. $\int \frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$

គ. $\int -6x(1-2x^2)^3dx$

ឃ. $\int 3\sqrt{x}(9+2\sqrt{x^3})^4dx$

ង. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}dx$

ច. $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ឆ. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}dx$

ជ. $\int x\sqrt{3+4x^2}dx$

ឈ. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-1)^2}dx$

ញ. $\int \frac{x^3}{(1-x^4)^4}dx$

ដ. $\int 3e^{3x}\sqrt{1+e^{3x}}dx$

ឋ. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}dx$

ឌ. $\int \frac{e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^3}dx$

ឍ. $\int 10x^2(x^3+1)^4dx$

ណ. $\int (x^3+2)(x^4+8x-3)^5dx$

ត. $\int 2x^3\sqrt{(x^4+5)^3}dx$

ថ. $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx$

ទ. $\int \cos x\sqrt{4+3\sin x}dx$

ធ. $\int \frac{1-\sin x}{\sqrt[3]{x+\cos x}}dx$

ន. $\int \sin\frac{1}{2}x.\cos^3\frac{1}{2}xdx$

ប. $\int \frac{x\cos x+\sin x}{\sqrt{1+x\sin x}}dx$

ផ. $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int 10x\sqrt{5x^2+2}\,dx$

តាង $u=5x^2+2 \implies du=10x\,dx$

គេបាន $I=\int\sqrt{u}\,du=\int u^{1/2}du=\frac{2}{3}u^{3/2}+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{3}(5x^2+2)\sqrt{5x^2+2}+C}$

ខ. $I=\int\frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$

តាង $u=x^3+4 \implies du=3x^2\,dx \implies x^2\,dx=\frac{1}{3}du$

គេបាន $I=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{3u}+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{3(x^3+4)}+C}$

គ. $I=\int -6x(1-2x^2)^3\,dx$

តាង $u=1-2x^2 \implies du=-4x\,dx \implies -6x\,dx=\frac{3}{2}du$

គេបាន $I=\frac{3}{2}\int u^3\,du=\frac{3}{8}u^4+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{3}{8}(1-2x^2)^4+C}$

ឃ. $I=\int 3\sqrt{x}(9+2\sqrt{x^3})^4\,dx$

សម្គាល់ $2\sqrt{x^3}=2x^{3/2}$ នាំឱ្យ $(9+2x^{3/2})'=3x^{1/2}=3\sqrt{x}$

តាង $u=9+2x^{3/2} \implies du=3\sqrt{x}dx$

គេបាន $I=\int u^4\,du=\frac{1}{5}u^5+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{5}(9+2x\sqrt{x})^5+C}$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ ចម្លើយ និងដំណោះស្រាយលម្អិត

ង. $I=\int\frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}dx$
តាង $u=x^2+3x+1 \implies du=(2x+3)\,dx$
គេបាន $I=\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}du=-\frac{1}{2u^2}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{2(x^2+3x+1)^2}+C}$

ច. $I=\int\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}dx$
តាង $u=x^2+2 \implies du=2x\,dx \implies 4x\,dx=2du$
គេបាន $I=2\int\frac{du}{\sqrt{u}}=4\sqrt{u}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=4\sqrt{x^2+2}+C}$

ឆ. $I=\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}dx$
តាង $u=x^3+3x+1 \implies du=3(x^2+1)\,dx \implies (x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}du$
គេបាន $I=\frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{2}{3}\sqrt{u}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x+1}+C}$

ជ. $I=\int x\sqrt{3+4x^2}\,dx$
តាង $u=3+4x^2 \implies du=8x\,dx \implies x\,dx=\frac{1}{8}du$
គេ បាន $I=\frac{1}{8}\int u^{1/2}du=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C=\frac{1}{12}u\sqrt{u}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{12}(3+4x^2)\sqrt{3+4x^2}+C}$

ឈ. $I=\int\frac{x+1}{(x^2+2x-1)^2}dx$
តាង $u=x^2+2x-1 \implies du=2(x+1)\,dx \implies (x+1)\,dx=\frac{1}{2}du$
គេបាន $I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{2u}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{2(x^2+2x-1)}+C}$

ញ. $I=\int\frac{x^3}{(1-x^4)^4}dx$
តាង $u=1-x^4 \implies du=-4x^3\,dx \implies x^3\,dx=-\frac{1}{4}du$
គេបាន $I=-\frac{1}{4}\int u^{-4}du=\frac{1}{12u^3}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{12(1-x^4)^3}+C}$

ដ. $I=\int 3e^{3x}\sqrt{1+e^{3x}}\,dx$
តាង $u=1+e^{3x} \implies du=3e^{3x}\,dx$
គេបាន $I=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{3}(1+e^{3x})\sqrt{1+e^{3x}}+C}$

ឋ. $I=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}dx$
តាង $u=e^x+2 \implies du=e^x\,dx$
គេបាន $I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=2\sqrt{e^x+2}+C}$

ឌ. $I=\int\frac{e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^3}dx$
តាង $u=1-e^{-2x} \implies du=2e^{-2x}\,dx \implies e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}du$
គេបាន $I=\frac{1}{2}\int u^{-3}du=-\frac{1}{4u^2}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{4(1-e^{-2x})^2}+C}$

ឍ. $I=\int 10x^2(x^3+1)^4\,dx$
តាង $u=x^3+1 \implies du=3x^2\,dx \implies 10x^2\,dx=\frac{10}{3}du$
គេបាន $I=\frac{10}{3}\int u^4\,du=\frac{2}{3}u^5+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{3}(x^3+1)^5+C}$

ណ. $I=\int(x^3+2)(x^4+8x-3)^5\,dx$
តាង $u=x^4+8x-3 \implies du=4(x^3+2)\,dx \implies (x^3+2)\,dx=\frac{1}{4}du$
គេបាន $I=\frac{1}{4}\int u^5\,du=\frac{1}{24}u^6+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{24}(x^4+8x-3)^6+C}$

ត. $I=\int 2x^3\sqrt{(x^4+5)^3}\,dx$
តាង $u=x^4+5 \implies du=4x^3\,dx \implies 2x^3\,dx=\frac{1}{2}du$
គេបាន $I=\frac{1}{2}\int u^{3/2}du=\frac{1}{5}(x^4+5)^2\sqrt{x^4+5}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{5}(x^4+5)^2\sqrt{x^4+5}+C}$

ថ. $I=\int\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx$
តាង $u=1-\sin 2x \implies du=-2\cos 2x\,dx \implies \cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}du$
គេបាន $I=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\sqrt{u}+C$
ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\sqrt{1-\sin 2x}+C}$

ច. $I=\int \cos x\sqrt{4+3\sin x}\,dx$

តាង $u=4+3\sin x \implies du=3\cos x\,dx \implies \cos x\,dx=\frac{1}{3}du$

គេបាន $I=\dfrac{1}{3}\int u^{1/2}du=\dfrac{2}{9}u^{3/2}+C$

ដូចនេះៈ $\boxed{I=\frac{2}{9}(4+3\sin x)\sqrt{4+3\sin x}+C}$

ឆ. $I=\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{\sqrt[3]{x+\cos x}}dx$

តាង $u=x+\cos x \implies du=(1-\sin x)\,dx$

គេបាន $I=\int u^{-1/3}du=\dfrac{3}{2}u^{2/3}+C$

ដូចនេះៈ $\boxed{I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+\cos x)^2}+C}$

ជ. $I=\displaystyle\int \sin\frac{1}{2}x\cos^3\frac{1}{2}x\,dx$

តាង $u=\cos\frac{1}{2}x \implies du=-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x\,dx \implies \sin\frac{1}{2}x\,dx=-2du$

គេបាន $I=-2\int u^3\,du=-\dfrac{1}{2}u^4+C$

ដូចនេះៈ $\boxed{I=-\frac{1}{2}\cos^4\left(\frac{1}{2}x\right)+C}$

ឈ. $I=\displaystyle\int \frac{x\cos x+\sin x}{\sqrt{1+x\sin x}}dx$

ដោយ $(1+x\sin x)'=\sin x+x\cos x$ នាំឱ្យតាង $u=1+x\sin x \implies du=(x\cos x+\sin x)\,dx$

គេបាន $I=\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$

ដូចនេះៈ $\boxed{I=2\sqrt{1+x\sin x}+C}$

ញ. $I=\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$

តាង $u=\sqrt{x}+1 \implies du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \implies \frac{dx}{\sqrt{x}}=2du$

គេបាន $I=2\int\sqrt{u}\,du=\dfrac{4}{3}(\sqrt{x}+1)\sqrt{\sqrt{x}+1}+C$

ដូចនេះៈ $\boxed{I=\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)\sqrt{\sqrt{x}+1}+C}$

## លំហាត់ទី ២

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int \sin 2x.\cos 3x dx$

ខ. $\int \sin 4x.\cos 6x dx$

គ. $\int \sin 7x.\cos 5x dx$

ឃ. $\int \sin 9x.\cos 4x dx$

ង. $\int \cos 2x.\cos x dx$

ច. $\int \cos 3x.\cos 5x dx$

ឆ. $\int \cos 7x.\cos 3x dx$

ជ. $\int \sin 5x.\sin 8x dx$

ឈ. $\int \cos 8x.\cos 10x dx$

ញ. $\int \sin^2 x.\cos^3 x dx$

ដ. $\int \sin 6x.\sin 2x dx$

ឋ. $\int \sin^4 x.\cos^3 x dx$

ឌ. $\int \sin^6 x.\cos^5 x dx$

ឍ. $\int \cos^4 x.\cos^3 x dx$

ណ. $\int \sin^4 x.\cos^5 x dx$

ត. $\int \sin^8 x.\cos^5 x dx$

ថ. $\int \cos^6 x.\sin^5 x dx$

ទ. $\int \sin^5 x.\cos^4 x dx$

ធ. $\int \cos^2 x.\sin^3 x dx$

ន. $\int \cos^8 x.\sin^5 x dx$

ប. $\int \sin^3 x.\cos^6 x dx$

ផ. $\int \cos^3 x.\sin^6 x dx$

ព. $\int \sin^5 x.\cos^7 x dx$

ភ. $\int \sin^2 x.\cos^2 x dx$

ម. $\int \sin^3 x.\cos^5 x dx$

យ. $\int \sin^3 x.\cos^7 x dx$

រ. $\int \cos^2 x.\sin^4 x dx$

ល. $\int \sin^3 x.\cos^7 x dx$

វ. $\int \cos^3 x.\sin^7 x dx$

ស. $\int \tan^2 x dx$

ហ. $\int \tan^3 x dx$

ឡ. $\int \cot^2 x dx$

អ. $\int \tan^4 x dx$

# ដំណោះស្រាយ

ក. $I = \int \sin 2x \cos 3x\, dx$

ប្រើរូបមន្ត $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$I = \frac{1}{2}\int [\sin 5x - \sin x] dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C}$

ខ. $I = \int \sin 4x \cos 6x\, dx$

$I = \frac{1}{2}\int [\sin 10x - \sin 2x] dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 2x + C}$

គ. $I = \int \sin 7x \cos 5x\, dx$

$I = \frac{1}{2}\int [\sin 12x + \sin 2x] dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = -\frac{1}{24}\cos 12x - \frac{1}{4}\cos 2x + C}$

ឃ. $I = \int \sin 9x \cos 4x\, dx$

$I = \frac{1}{2}\int [\sin 13x + \sin 5x] dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = -\frac{1}{26}\cos 13x - \frac{1}{10}\cos 5x + C}$

ង. $I=\int \cos 2x\cos x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int[\cos 3x+\cos x]dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C}$

ច. $I=\int \cos 3x\cos 5x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int[\cos 8x+\cos 2x]dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C}$

ឆ. $I=\int \cos 7x\cos 3x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int[\cos 10x+\cos 4x]dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{20}\sin 10x+\frac{1}{8}\sin 4x+C}$

ជ. $I=\int \sin 5x\sin 8x\,dx$

ប្រើរូបមន្ត $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

$I=\frac{1}{2}\int[\cos 3x-\cos 13x]dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{26}\sin 13x+C}$

ឈ. $I=\int \cos 8x\cos 10x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int[\cos 18x+\cos 2x]dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{36}\sin 18x+\frac{1}{4}\sin 2x+C}$

ញ. $I=\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

សរសេរ $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^2(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C}$

ដ. $I=\int \sin 6x\sin 2x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int[\cos 4x-\cos 8x]dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 8x+C}$

ឋ. $I=\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^4(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C}$

ឌ. $I=\int \sin^6 x\cos^5 x\,dx$

សរសេរ $\cos^5 x=(1-\sin^2 x)^2\cos x$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^6(1-2u^2+u^4)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{2}{9}\sin^9 x+\frac{1}{11}\sin^{11} x+C}$

ឍ. $I=\int \cos^4 x\cos^3 x\,dx=\int \cos^7 x\,dx$

សរសេរ $\cos^7 x=(1-\sin^2 x)^3\cos x$

តាង $u=\sin x \implies I=\int(1-3u^2+3u^4-u^6)du$

ដូចនេះ៖

$\boxed{I=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C}$

ណ. $I=\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^4(1-2u^2+u^4)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C}$

ត. $I=\int \sin^8 x\cos^5 x\,dx$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^8(1-2u^2+u^4)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{2}{11}\sin^{11} x+\frac{1}{13}\sin^{13} x+C}$

ថ. $I=\int \cos^6 x\sin^5 x\,dx$

សរសេរ $\sin^5 x=(1-\cos^2 x)^2\sin x$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^6(1-2u^2+u^4)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{7}\cos^7 x+\frac{2}{9}\cos^9 x-\frac{1}{11}\cos^{11} x+C}$

ទ. $I=\int \sin^5 x\cos^4 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^4(1-2u^2+u^4)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+C}$

ធ. $I=\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^2(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C}$

ន. $I=\int \cos^8 x\sin^5 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^8(1-2u^2+u^4)du$

ដូចនេះ៖

$\boxed{I=-\frac{1}{9}\cos^9 x+\frac{2}{11}\cos^{11} x-\frac{1}{13}\cos^{13} x+C}$

ប. $I=\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^6(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{7}\cos^7 x+\frac{1}{9}\cos^9 x+C}$

ផ. $I=\int \cos^3 x\sin^6 x\,dx$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^6(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{1}{9}\sin^9 x+C}$

ព. $I=\int \sin^5 x\cos^7 x\,dx$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^5(1-u^2)^3du$

ដូចនេះ៖

$\boxed{I=\frac{1}{6}\sin^6 x-\frac{3}{8}\sin^8 x+\frac{3}{10}\sin^{10} x-\frac{1}{12}\sin^{12} x+C}$

ភ. $I=\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

$I=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C}$

ម. $I=\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^5(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{8}\cos^8 x+C}$

យ. $I=\int \sin^3 x\cos^7 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int u^7(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{8}\cos^8 x+\frac{1}{10}\cos^{10} x+C}$

រ. $I=\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$

$I=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\sin^2 2x\,dx$

$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}-\sin^2 2x\cos 2x\right)dx$

ដូចនេះ៖

$\boxed{I=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C}$

ល. $I=\int \sin^3 x\cos^7 x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies I=-\int(u^7-u^9)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{1}{8}\cos^8 x+\frac{1}{10}\cos^{10} x+C}$

វ. $I=\int \cos^3 x\sin^7 x\,dx$

តាង $u=\sin x \implies I=\int u^7(1-u^2)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{8}\sin^8 x-\frac{1}{10}\sin^{10} x+C}$

ស. $I=\int \tan^2 x\,dx$

សរសេរ $\tan^2 x=(\tan^2 x+1)-1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\tan x-x+C}$

ហ. $I=\int \tan^3 x\,dx$

$I=\int \tan x(\tan^2 x+1)dx-\int \tan x\,dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C}$

ឡ. $I=\int \cot^2 x\,dx$

សរសេរ $\cot^2 x=(\cot^2 x+1)-1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\cot x-x+C}$

អ. $I=\int \tan^4 x\,dx$

$I=\int \tan^2 x(\tan^2 x+1)dx-\int(\tan^2 x+1-1)dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C}$

## លំហាត់ទី ៣

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int \frac{4x-3}{x+2}dx$

ខ. $\int \frac{3x+2}{x-4}dx$

គ. $\int \frac{x+1}{3x-2}dx$

ឃ. $\int \frac{5x-3}{2x+1}dx$

ង. $\int \frac{2x+3}{(x-3)^2}dx$

ច. $\int \frac{x-3}{(3x-2)^2}dx$

ឆ. $\int \frac{2x-5}{(3x-2)^2}dx$

ជ. $\int \frac{x}{(2x-1)^2}dx$

ឈ. $\int \frac{x^2+x+1}{x+2}dx$

ញ. $\int \frac{x^2+2}{3x+2}dx$

ដ. $\int \frac{x^2-3x+5}{2x+1}dx$

ឋ. $\int \frac{2x^2-x+3}{x-3}dx$

ឌ. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+2)^2}dx$

ឍ. $\int \frac{x^2-3x+4}{(2x+3)^2}dx$

ណ. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}dx$

ត. $\int \frac{x^2}{x^2-5x+6}dx$

ថ. $\int \frac{x^2+4}{x^2-4}dx$

ទ. $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}dx$

ធ. $\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx$

ន. $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}dx$

ប. $\int \frac{3}{(2x+3)(3x+4)}dx$

# ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int \frac{4x-3}{x+2}dx$

ចែកភាគយកនឹងភាគបែង៖ $\frac{4x-3}{x+2}=4-\frac{11}{x+2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=4x-11\ln|x+2|+C}$

ខ. $I=\int \frac{3x+2}{x-4}dx$

$\frac{3x+2}{x-4}=3+\frac{14}{x-4}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=3x+14\ln|x-4|+C}$

គ. $I=\int \frac{x+1}{3x-2}dx$

$\frac{x+1}{3x-2}=\frac{1}{3}+\frac{5/3}{3x-2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\ln|3x-2|+C}$

ឃ. $I=\int \frac{5x-3}{2x+1}dx$

$\frac{5x-3}{2x+1}=\frac{5}{2}-\frac{11/2}{2x+1}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{5}{2}x-\frac{11}{4}\ln|2x+1|+C}$

ង. $I=\int \frac{2x+3}{(x-3)^2}dx$

តាង $u=x-3 \implies x=u+3 \implies 2x+3=2u+9$

$I=\int\left(\frac{2}{u}+\frac{9}{u^2}\right)du=2\ln|u|-\frac{9}{u}+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=2\ln|x-3|-\frac{9}{x-3}+C}$

ច. $I=\int \frac{x-3}{(3x-2)^2}dx$

តាង $u=3x-2 \implies x=\frac{u+2}{3}, dx=\frac{du}{3} \implies x-3=\frac{u-7}{3}$

$I=\frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{7}{u^2}\right)du=\frac{1}{9}\ln|3x-2|+\frac{7}{9(3x-2)}+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{9}\ln|3x-2|+\frac{7}{9(3x-2)}+C}$

ឆ. $I=\int \frac{2x-5}{(3x-2)^2}dx$

តាង $u=3x-2 \implies 2x-5=\frac{2u-11}{3}$

$I=\frac{1}{9}\int\left(\frac{2}{u}-\frac{11}{u^2}\right)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{9}\ln|3x-2|+\frac{11}{9(3x-2)}+C}$

ជ. $I=\int\frac{x}{(2x-1)^2}dx$

តាង $u=2x-1 \implies x=\frac{u+1}{2}, dx=\frac{du}{2}$

$I=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{4(2x-1)}+C}$

ឈ. $I=\int\frac{x^2+x+1}{x+2}dx$

ចែកពហុធា៖ $\frac{x^2+x+1}{x+2}=x-1+\frac{3}{x+2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{2}x^2-x+3\ln|x+2|+C}$

ញ. $I=\int\frac{x^2+2}{3x+2}dx$

$\frac{x^2+2}{3x+2}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}+\frac{22/9}{3x+2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{22}{27}\ln|3x+2|+C}$

ដ. $I=\int\frac{x^2-3x+5}{2x+1}dx$

$\frac{x^2-3x+5}{2x+1}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{27/4}{2x+1}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}x+\frac{27}{8}\ln|2x+1|+C}$

ឋ. $I=\int\frac{2x^2-x+3}{x-3}dx$

$\frac{2x^2-x+3}{x-3}=2x+5+\frac{18}{x-3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x^2+5x+18\ln|x-3|+C}$

ឌ. $I=\int\frac{2x^2+x+1}{(x+2)^2}dx$

តាង $u=x+2 \implies 2(u-2)^2+(u-2)+1=2u^2-7u+7$

$I=\int\left(2-\frac{7}{u}+\frac{7}{u^2}\right)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=2x-7\ln|x+2|-\frac{7}{x+2}+C}$

ឍ. $I=\int\frac{x^2-3x+4}{(2x+3)^2}dx$

តាង $u=2x+3 \implies x^2-3x+4=\frac{u^2-12u+31}{4}$

$I=\frac{1}{8}\int\left(1-\frac{12}{u}+\frac{31}{u^2}\right)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\ln|2x+3|-\frac{31}{8(2x+3)}+C}$

ណ. $I=\int\frac{x^2+1}{(x-1)^2}dx$

តាង $u=x-1 \implies (u+1)^2+1=u^2+2u+2$

$I=\int\left(1+\frac{2}{u}+\frac{2}{u^2}\right)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C}$

ត. $I=\int\frac{x^2}{x^2-5x+6}dx$

បំបែកជាប្រភាគងាយ៖ $\frac{x^2}{x^2-5x+6}=1-\frac{4}{x-2}+\frac{9}{x-3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x-4\ln|x-2|+9\ln|x-3|+C}$

ថ. $I=\int\frac{x^2+4}{x^2-4}dx$

$\frac{x^2+4}{x^2-4}=1+\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x+2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C}$

ទ. $I=\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}dx$

$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}=1+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x+2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x+\ln|x+1|-3\ln|x+2|+C}$

ធ. $I=\int\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx$

បំបែកជាប្រភាគងាយ៖ $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\ln|x+2|+2\ln|x+3|+C}$

ន. $I=\int\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}dx$

$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}=-\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-5\ln|x-1|+7\ln|x-2|+C}$

ប. $I=\int\frac{3}{(2x+3)(3x+4)}dx$

$\frac{3}{(2x+3)(3x+4)}=-\frac{6}{2x+3}+\frac{9}{3x+4}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=3\ln\left|\frac{3x+4}{2x+3}\right|+C}$

## លំហាត់ទី ៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,4\}$ ។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-4}$ ដែល $A,B$ និង $C$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(x-1)(x-2)(x-4)$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}x^2+2x+6&=A(x-2)(x-4)\\&+B(x-1)(x-4)\\&+C(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

ជំនួស $x=1$៖ $1^2+2(1)+6=A(1-2)(1-4)\implies 9=3A\implies A=3$

ជំនួស $x=2$៖ $2^2+2(2)+6=B(2-1)(2-4)\implies 14=-2B\implies B=-7$

ជំនួស $x=4$៖ $4^2+2(4)+6=C(4-1)(4-2)\implies 30=6C\implies C=5$

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=3,\ B=-7,\ C=5}$ ហើយគេសរសេរបាន៖

$$\boxed{f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើកន្សោមប្រភាគងាយ៖

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}\right)dx\\&=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|\\&+5\ln|x-4|+C\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖

$$\boxed{I=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C}$$

## លំហាត់ទី ៥

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B,C$ និង $D$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{(x-1)^3}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{x+3}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B,C$ និង $D$

តម្រូវភាគបែងរួម គេបាន៖

$$\begin{aligned}x^2+1&=A(x+3)+B(x-1)(x+3)\\&+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3\end{aligned}$$

យក $x=1$៖ $1^2+1=A(1+3) \implies 4A=2 \implies A=\frac{1}{2}$

យក $x=-3$៖ $(-3)^2+1=D(-3-1)^3 \implies -64D=10 \implies D=-\frac{5}{32}$

ផ្ទឹមមេគុណនៃ $x^3$៖ $C+D=0 \implies C=-D=\frac{5}{32}$

យក $x=0$៖ $1=3A-3B+3C-D \implies 3B=\frac{9}{8} \implies B=\frac{3}{8}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=\frac{1}{2},\ B=\frac{3}{8},\ C=\frac{5}{32},\ D=-\frac{5}{32}}$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើកន្សោមប្រភាគនីមួយៗ៖

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{1/2}{(x-1)^3}+\frac{3/8}{(x-1)^2}\right]dx \\ &\quad + \frac{5}{32}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx \\ &= -\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)} \\ &\quad + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖

$$\boxed{I=-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C}$$

## លំហាត់ទី ៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ដែល $A,B$ និង $C$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

ដាក់ភាគបែងជាផលគុណកត្តា៖ $x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$

តម្រូវភាគបែងរួម៖ $5x^2+20x+6=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$

យក $x=0$៖ $6=A(1)^2 \implies A=6$

យក $x=-1$៖ $5(-1)^2+20(-1)+6=C(-1) \implies -9=-C \implies C=9$

ផ្ទឹមមេគុណនៃ $x^2$៖ $5=A+B \implies 5=6+B \implies B=-1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=6,\ B=-1,\ C=9}$ ហើយ គេ បាន

$$\boxed{f(x)=\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx \\ &= 6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C}$

## លំហាត់ទី ៧

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{3x^2-10x-5}{(x-1)^2(x+2)}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x-1)^2}$ ចំពោះ $\forall x\neq\{-2,1\}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I(x)=\int f(x)dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=-4$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B$

តម្រូវភាគបែងរួម គេបាន

$$f(x)=\frac{A(x-1)^2+B(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+(A+2B)}{(x+2)(x-1)^2}$$

ផ្ទឹមនឹងភាគយក $3x^2-10x-5$ គេបាន៖

$$\begin{cases}A=3\\-2A+B=-10\implies B=-4\\A+2B=3-8=-5\quad(\text{ផ្ទៀងផ្ទាត់})\end{cases}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=3,\ B=-4}$

គេបាន៖ $\boxed{f(x)=\frac{3}{x+2}-\frac{4}{(x-1)^2}}$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I(x)=\int f(x)dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=-4$

គណនាអាំងតេក្រាលទូទៅ៖

$$I(x)=\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx=3\ln|x+2|+\frac{4}{x-1}+C$$

ដោយ $I(0)=-4\implies 3\ln2-4+C=-4\implies C=-3\ln2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I(x)=3\ln\left|\frac{x+2}{2}\right|+\frac{4}{x-1}}$

### លំហាត់ទី ៨

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\neq\{-1,3\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B$ និង $C$

តម្រូវភាគបែងរួម គេបាន៖

$$5x^2-14x+13=A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)$$

យក $x=-1$៖ $5(-1)^2-14(-1)+13=16A\implies A=2$

យក $x=3$៖ $5(3)^2-14(3)+13=4C\implies C=4$

យក $x=0$៖ $13=9A-3B+C\implies 3B=9\implies B=3$

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=2,\ B=3,\ C=4}$

គេបាន៖ $\boxed{f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}}$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f(x)dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាល៖

$$I=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right)dx$$

$$=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+C$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+C}$

## លំហាត់ទី ៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4x^2-7x+5}{x-2x^2+x^3}$ ។

ក. រកតម្លៃ $A,B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{1-x}+\dfrac{C}{(1-x)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $k(x)=\int f(x)dx$ បើដឹងថាក្រាបតាង $y=k(x)$ កាត់តាមចំណុច $M(2,2)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. រកតម្លៃ $A,B$ និង $C$

ដាក់ភាគបែងជាផលគុណកត្តា៖ $x-2x^2+x^3=x(1-x)^2$

តម្រូវភាគបែងរួម៖

$$4x^2-7x+5=A(1-x)^2+Bx(1-x)+Cx$$

ជំនួស $x=0$៖ $5=A(1)^2 \implies A=5$

ជំនួស $x=1$៖ $4(1)^2-7(1)+5=C(1) \implies C=2$

ផ្ទឹមមេគុណនៃ $x^2$៖ $4=A-B \implies B=A-4=1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=5,\ B=1,\ C=2}$

គេបាន៖ $\boxed{f(x)=\frac{5}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}}$

ខ. គណនា $k(x)=\int f(x)dx$ បើក្រាបតាង $y=k(x)$ កាត់តាមចំណុច $M(2,2)$

គណនាអាំងតេក្រាលទូទៅ៖

$$k(x)=\int\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}\right)dx$$

$$=5\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{2}{1-x}+C$$

ដោយ $k(2)=2 \implies 5\ln 2-\ln 1+\frac{2}{1-2}+C=2 \implies 5\ln 2-2+C=2 \implies C=4-5\ln 2$

ជំនួសតម្លៃ $C$ គេបាន៖

ដូចនេះ៖ $\boxed{k(x)=5\ln\left|\frac{x}{2}\right|-\ln|1-x|+\frac{2}{1-x}+4}$

## លំហាត់ទី ១០

ក. គណនាអាំងតេក្រាល $I(x)=\int\left(\dfrac{e^x}{1-e^x}\right)dx$ ។

ខ. រកចំនួនពិត $A$ និង $B$ ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{e^x}{1-e^x}=A+\dfrac{B}{1-e^x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

គ. ទាញរកអាំងតេក្រាល $J(x)=\int\left(\dfrac{1}{1-e^x}\right)dx$ ។

# ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាអាំងតេក្រាល $I(x)=\int\left(\frac{e^x}{1-e^x}\right)dx$

តាង $u=1-e^x \implies du=-e^x dx \implies e^x dx=-du$

$I(x)=\int\frac{-du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|1-e^x|+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I(x)=-\ln|1-e^x|+C}$

ខ. រកចំនួនពិត $A$ និង $B$

បំប្លែងភាគយក៖

$$\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{-(1-e^x)+1}{1-e^x}=-1+\frac{1}{1-e^x}$$

ផ្ទឹមនឹងកន្សោម $A+\frac{B}{1-e^x}$ គេទាញបាន៖

ដូចនេះ៖ $\boxed{A=-1,\quad B=1}$

គ. ទាញរកអាំងតេក្រាល $J(x)=\int\left(\frac{1}{1-e^x}\right)dx$

តាមលទ្ធផលសំណួរ (b) គេមាន $\frac{1}{1-e^x}=\frac{e^x}{1-e^x}+1$

$J(x)=\int\left(\frac{e^x}{1-e^x}+1\right)dx=I(x)+x+C'$

ដូចនេះ៖ $\boxed{J(x)=x-\ln|1-e^x|+C}$

## លំហាត់ទី ១១

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$ ខ. $\int\frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$ គ. $\int\frac{x^2}{x^2-4x+3}dx$

# ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$

បំបែកភាគយក៖ $x^3-2x=x(x^2+1)-3x \implies$

$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{3x}{(x^2+1)^2}$

ដោយ $d(x^2+1)=2x\,dx$ គេបាន៖

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{3}{2}\int(x^2+1)^{-2}d(x^2+1)$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2(x^2+1)}+C}$

ខ. $J=\int\frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$

តាង $u=1+x^4 \implies x^4=u-1$ និង $du=4x^3dx \implies x^3dx=\frac{1}{4}du$

$J=\frac{1}{4}\int\frac{u-1}{u^2}du=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u}-u^{-2}\right)du$

ដូចនេះ៖ $\boxed{J=\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4(1+x^4)}+C}$

គ. $K=\int\frac{x^2}{x^2-4x+3}dx$

ចែកពហុធា និងបំបែកជាប្រភាគងាយ៖

$$\frac{x^2}{x^2-4x+3}=1+\frac{4x-3}{(x-1)(x-3)}=1-\frac{1/2}{x-1}+\frac{9/2}{x-3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{K=x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{9}{2}\ln|x-3|+C}$

# មេរៀនទី ២ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់

## តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ២

| ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ១ | ក | ២១ | ក | ៤១ | ក | ៦១ | ក | ៨១ | ក |
| ២ | ខ | ២២ | ខ | ៤២ | ខ | ៦២ | ខ | ៨២ | ខ |
| ៣ | គ | ២៣ | គ | ៤៣ | គ | ៦៣ | គ | ៨៣ | គ |
| ៤ | ឃ | ២៤ | ឃ | ៤៤ | ឃ | ៦៤ | ឃ | ៨៤ | ឃ |
| ៥ | ក | ២៥ | ក | ៤៥ | ក | ៦៥ | ក | ៨៥ | ក |
| ៦ | ខ | ២៦ | ខ | ៤៦ | ខ | ៦៦ | ខ | ៨៦ | ខ |
| ៧ | គ | ២៧ | គ | ៤៧ | គ | ៦៧ | គ | ៨៧ | គ |
| ៨ | ឃ | ២៨ | ឃ | ៤៨ | ឃ | ៦៨ | ឃ | ៨៨ | ឃ |
| ៩ | ក | ២៩ | ក | ៤៩ | ក | ៦៩ | ក | ៨៩ | ក |
| ១០ | ខ | ៣០ | ខ | ៥០ | ខ | ៧០ | ខ | ៩០ | ខ |
| ១១ | គ | ៣១ | គ | ៥១ | គ | ៧១ | គ | ៩១ | គ |
| ១២ | ឃ | ៣២ | ឃ | ៥២ | ឃ | ៧២ | ឃ | ៩២ | ឃ |
| ១៣ | ក | ៣៣ | ក | ៥៣ | ក | ៧៣ | ក | ៩៣ | ក |
| ១៤ | ខ | ៣៤ | ខ | ៥៤ | ខ | ៧៤ | ខ | ៩៤ | ខ |
| ១៥ | គ | ៣៥ | គ | ៥៥ | គ | ៧៥ | គ | ៩៥ | គ |
| ១៦ | ឃ | ៣៦ | ឃ | ៥៦ | ឃ | ៧៦ | ឃ | ៩៦ | ឃ |
| ១៧ | ក | ៣៧ | ក | ៥៧ | ក | ៧៧ | ក | ៩៧ | ក |
| ១៨ | ខ | ៣៨ | ខ | ៥៨ | ខ | ៧៨ | ខ | ៩៨ | ខ |
| ១៩ | គ | ៣៩ | គ | ៥៩ | គ | ៧៩ | គ | ៩៩ | គ |
| ២០ | ឃ | ៤០ | ឃ | ៦០ | ឃ | ៨០ | ឃ | ១០០ | ឃ |

## ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

### លំហាត់ទី ១

គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$

ខ. $\int_1^1 \frac{f(x)}{3}\,dx$

### ដំណោះស្រាយ

ក. $I = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$

តាមលក្ខណៈត្រឡប់ព្រំដែន៖

$\int_2^1 f(x)\,dx = -\int_1^2 f(x)\,dx$

នាំឱ្យ $I = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 0$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = 0}$

ខ. $I = \int_1^1 \frac{f(x)}{3}\,dx$

ដោយព្រំដែនក្រោមស្មើព្រំដែនលើ $(a = b = 1)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = 0}$

### លំហាត់ទី ២

គេមាន $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[1,5]$ ហើយ $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_2^5 f(x)dx = 6$, $\int_1^5 g(x)dx = 8$ ។ គណនា ៖

ក. $\int_1^5 f(x)dx$

ខ. $\int_5^1 [-4f(x)]dx$

គ. $\int_1^5 [4f(x) - 2g(x)]dx$

### ដំណោះស្រាយ

ក. $I = \int_1^5 f(x)dx$

តាមលក្ខណៈ Chasles ៖

$I = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = -4 + 6 = 2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = 2}$

ខ. $J = \int_5^1 [-4f(x)]dx$

$J = 4\int_1^5 f(x)dx = 4(2) = 8$

ដូចនេះ៖ $\boxed{J = 8}$

គ. $K = \int_1^5 [4f(x) - 2g(x)]dx$

តាមលក្ខណៈលីនេអ៊ែរ ៖

$K = 4(2) - 2(8) = 8 - 16 = -8$

ដូចនេះ៖ $\boxed{K = -8}$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ ចម្លើយ និងដំណោះស្រាយលម្អិត

## លំហាត់ទី ៣

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $k$ បើគេដឹងថា $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = 2$ ។

## ដំណោះស្រាយ

**គណនាអាំងតេក្រាល ៖**

ដោយ $d(2x-1) = 2dx$ គេបាន៖

$$\int_1^k \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \left[\sqrt{2x-1}\right]_1^k = \sqrt{2k-1}-1$$

**ទាញរកតម្លៃ $k$ ៖**

តាមសម្មតិកម្ម $\sqrt{2k-1}-1=2$

$\iff \sqrt{2k-1}=3 \iff 2k-1=9 \iff k=5$

ដូចនេះ៖ $\boxed{k=5}$

## លំហាត់ទី ៤

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int_1^1 (3x^2+1)\,dx$

ខ. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-3\right)dx$

គ. $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

ឃ. $\int_2^4 \sqrt{x-2}\,dx$

ង. $\int_2^4 \sqrt[3]{x-2}\,dx$

ច. $\int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

ឆ. $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$

ជ. $\int_1^3 5x(x^2-7)^3\,dx$

ឈ. $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

ញ. $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

ដ. $\int_1^4 \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$

ឋ. $\int_0^1 (3x^2-2x)^2\,dx$

ឌ. $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I = \int_1^1 (3x^2+1)\,dx$

ដោយព្រំដែនក្រោមស្មើព្រំដែនលើ $(a=b=1)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=0}$

ខ. $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-3\right)dx$

ព្រីមីទីវ៖ $\int (x^{-2}-3)dx = \left[-\frac{1}{x}-3x\right]_1^2$

$I = (-\frac{1}{2}-6)-(-1-3) = -\frac{13}{2}+4 = -\frac{5}{2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{5}{2}}$

គ. $I = \int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

$I = \left[4\sqrt{x}\right]_4^9 = 4(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 4(3-2) = 4$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=4}$

ឃ. $I = \int_2^4 \sqrt{x-2}\,dx$

$I = \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{4\sqrt{2}}{3}}$

ង. $I = \int_2^4 \sqrt[3]{x-2}\,dx$

$I = \left[\frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}\right]_2^4 = \frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$

ច. $I = \int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

$I = \left[-2\sqrt{4-x}\right]_{-4}^0 = -2(\sqrt{4}-\sqrt{8}) = 4\sqrt{2}-4$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=4\sqrt{2}-4}$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ ចម្លើយ និងដំណោះស្រាយលម្អិត

# ដំណោះស្រាយ (ត)

ឆ. $I=\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$

$I=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_1^5=\frac{2}{3}(\sqrt{16}-\sqrt{4})=\frac{4}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{4}{3}}$

ជ. $I=\int_1^3 5x(x^2-7)^3\,dx$

ដោយ $d(x^2-7)=2x\,dx$ គេបាន៖

$I=\left[\frac{5}{8}(x^2-7)^4\right]_1^3=\frac{5}{8}(16-1296)=-800$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-800}$

ឈ. $I=\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

$I=\left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{2}{3}(27-1)=\frac{52}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{52}{3}}$

ញ. $I=\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

ដោយ $d(x^2+4x+1)=2(x+2)dx$ ៖

$I=\left[\sqrt{x^2+4x+1}\right]_1^2=\sqrt{13}-\sqrt{6}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\sqrt{13}-\sqrt{6}}$

ដ. $I=\int_1^4\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$

$I=\left[6\sqrt{x}-x\right]_1^4=(12-4)-(6-1)=3$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=3}$

ឋ. $I=\int_0^1 (3x^2-2x)^2\,dx$

$I=\left[\frac{9}{5}x^5-3x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=\frac{9}{5}-3+\frac{4}{3}=\frac{2}{15}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{15}}$

ឌ. $I=\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$

$I=\left[-\frac{1}{4(x^2+2x+2)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{100}+\frac{1}{16}=\frac{21}{400}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{21}{400}}$

## លំហាត់ទី ៥

គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងសនិទានខាងក្រោម ៖

ក. $\int_1^2 3e^{4x}\,dx$

ខ. $\int_0^1 4x^3e^{2x^4}\,dx$

គ. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

ឃ. $\int_1^3 3e^{2x}(e^{-2x}-1)\,dx$

ង. $\int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$

### ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int_1^2 3e^{4x}\,dx$

$I=\left[\frac{3}{4}e^{4x}\right]_1^2=\frac{3}{4}(e^8-e^4)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{3}{4}(e^8-e^4)}$

ខ. $I=\int_0^1 4x^3e^{2x^4}\,dx$

$I=\left[\frac{1}{2}e^{2x^4}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{2}(e^2-1)}$

គ. $I=\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$I=\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4=2(e^2-e)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=2(e^2-e)}$

ឃ. $I=\int_1^3 3e^{2x}(e^{-2x}-1)\,dx$

$\int_1^3(3-3e^{2x})dx=\left[3x-\frac{3}{2}e^{2x}\right]_1^3$

$I=6-\frac{3}{2}(e^6-e^2)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=6-\frac{3}{2}(e^6-e^2)}$

ង. $I=\int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$

$I=\left[\frac{1}{3}\ln|2+3x|\right]_0^1=\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 2)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}}$

## លំហាត់ទី ៦

**អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច៖**

សហគ្រាសមួយទទួលបានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមពីការលក់ផលិតផលចំនួន $t$ គ្រឿង ដោយអត្រានៃចំណូលបន្ថែមកំណត់ដោយ $R'(t)=180+0.2t$ (គិតជាពាន់រៀល) ក្នុងមួយគ្រឿង។ ចូររកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពី 30 ទៅ 40 គ្រឿង។

### ដំណោះស្រាយ

**បម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណូលសរុប ៖**

$\Delta R=\int_{30}^{40}(180+0.2t)\,dt$

$=\left[180t+0.1t^2\right]_{30}^{40}$

**ជំនួសតម្លៃព្រំដែន ៖**

$\Delta R=7360-5490=1870$ ពាន់រៀល

ដូចនេះ៖ $\boxed{\Delta R=1\,870\,000}$ រៀល

## លំហាត់ទី ៧

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរ ៖

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}dx$

ខ. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x-2}dx$

គ. $\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}dx$

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx$

ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}dx$

តាង $u=1+2x^3 \implies 2x^2dx=\frac{1}{3}du$

ព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=1;\ x=1 \implies u=3$

$I=\frac{1}{3}\int_1^3 \frac{du}{u}=\left[\frac{1}{3}\ln u\right]_1^3=\frac{1}{3}\ln 3$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{3}\ln 3}$

ខ. $I=\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x-2}dx$

តាង $u=4e^x-2 \implies e^xdx=\frac{1}{4}du$

ព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=2;\ x=\ln 2 \implies u=6$

$I=\frac{1}{4}\int_2^6 \frac{du}{u}=\left[\frac{1}{4}\ln u\right]_2^6=\frac{1}{4}\ln 3$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{4}\ln 3}$

គ. $I=\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

តាង $u=1+x^2 \implies xdx=\frac{1}{2}du$

ព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=1;\ x=2 \implies u=5$

$I=\frac{1}{2}\int_1^5 u^{-2}du=\left[-\frac{1}{2u}\right]_1^5=\frac{2}{5}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{5}}$

ឃ. $I=\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

តាង $u=\ln x \implies du=\frac{1}{x}dx$

ព្រំដែន៖ $x=1 \implies u=0;\ x=e \implies u=1$

$I=\int_0^1 u^2du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{3}}$

ង. $I=\int_0^1 xe^{2x^2}dx$

តាង $u=2x^2 \implies xdx=\frac{1}{4}du$

ព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=0;\ x=1 \implies u=2$

$I=\frac{1}{4}\int_0^2 e^u du=\frac{1}{4}(e^2-1)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{4}(e^2-1)}$

ច. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

តាង $u=\cos x \implies du=-\sin x dx$

ព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=1;\ x=\frac{\pi}{3} \implies u=\frac{1}{2}$

$I=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u}=\left[\ln u\right]_{\frac{1}{2}}^1=\ln 2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\ln 2}$

ឆ. $I=\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx$

តាង $u=1+\ln x \implies du=\frac{1}{x}dx$

ព្រំដែន៖ $x=1 \implies u=1;\ x=e \implies u=2$

$I=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2du=\left[\frac{u^3}{6}\right]_1^2=\frac{7}{6}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{7}{6}}$

ជ. $I=\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

តាង $u=\ln x \implies du=\frac{1}{x}dx$

ព្រំដែន៖ $x=e \implies u=1;\ x=e^2 \implies u=2$

$I=\int_1^2 \frac{du}{u}=\left[\ln u\right]_1^2=\ln 2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\ln 2}$

## លំហាត់ទី ៨

គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ៖

ក. $\int_0^1 xe^x\,dx$
ខ. $\int_1^e \ln x\,dx$
គ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$
ឃ. $\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$
ង. $\int_1^e x^2\ln x\,dx$
ច. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$
ឆ. $\int_0^1 x^2e^x\,dx$
ជ. $\int_0^1 \arctan x\,dx$
ឈ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int_0^1 xe^x\,dx$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

$I=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-(e-1)=1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=1}$

ខ. $I=\int_1^e \ln x\,dx$

តាង $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=x \end{cases}$

$I=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=1}$

គ. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$I=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx=\frac{\pi}{2}-1$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{\pi}{2}-1}$

ឃ. $I=\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$

តាង $\begin{cases} u=2x+1 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$I=\left[\frac{2x+1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx$

$I=\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{e^2-1}{2}\right)=e^2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=e^2}$

ង. $I=\int_1^e x^2\ln x\,dx$

តាង $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^2dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^3}{3} \end{cases}$

$I=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx$

$I=\frac{e^3}{3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e=\frac{2e^3+1}{9}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2e^3+1}{9}}$

# ដំណោះស្រាយ (ត)

ប. $I=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=\sin x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-\cos x \end{cases}$

$I=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=\pi$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\pi}$

ផ. $I=\int_0^1 x^2e^x\,dx$

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកពីរដង ៖

ព្រីមីទីវនៃ $x^2e^x$ គឺ $(x^2-2x+2)e^x$

$I=\Big[(x^2-2x+2)e^x\Big]_0^1=e-2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=e-2}$

ព. $I=\int_0^1 \arctan x\,dx$

តាង $\begin{cases} u=\arctan x \\ dv=dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ v=x \end{cases}$

$I=\Big[x\arctan x\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$

$I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2}$

ភ. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$

អាំងតេក្រាលវិលជុំ ៖

ព្រីមីទីវនៃ $e^x\cos x$ គឺ $\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}$

$I=\Big[\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}}$

## លំហាត់ទី ៩

លំហាត់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប (BacII Practice) ៖

ក. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ និង $J=\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ ។

- គណនា $I+J$
- គណនា $I-J$ ដោយប្តូរអថេរ
- ទាញរកតម្លៃនៃ $I$ និង $J$

ខ. គេមានស្វ៊ីត $(I_n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយ $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ ។

- គណនា $I_0$ និង $I_1$
- បង្ហាញ ទំនាក់ទំនង $I_n$ និង $I_{n-1}$
- ទាញរកតម្លៃនៃ $I_3$

## ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសំណួរ (a) ៖

• **គណនា $I+J$ ៖**

$$I+J=\int_0^1\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}\right)dx$$
$$=\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 1\,dx=1$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I+J=1}$

• **គណនា $I-J$ ដោយប្តូរអថេរ ៖**

$$I-J=\int_0^1\frac{e^x-3}{e^x+1}dx$$

តាង $u=e^x+1 \implies e^x=u-1$ និង $dx=\frac{du}{u-1}$ ៖

$$\frac{e^x-3}{e^x+1}dx=\frac{u-4}{u(u-1)}du=\left(\frac{4}{u}-\frac{3}{u-1}\right)du$$

ព្រំដែន៖ $x=0 \implies u=2$ និង $x=1 \implies u=e+1$ ៖

$$I-J=\int_2^{e+1}\left(\frac{4}{u}-\frac{3}{u-1}\right)du$$
$$=\Big[4\ln u-3\ln(u-1)\Big]_2^{e+1}$$
$$=4\ln(e+1)-3\ln e-4\ln 2$$
$$=4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)-3$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I-J=4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)-3}$

• **ទាញរកតម្លៃនៃ $I$ និង $J$ ៖**

បូកសមីការទាំងពីរ៖

$$2I=(I+J)+(I-J)=4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)-2$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)-1}$

ដកសមីការទាំងពីរ៖

$$2J=(I+J)-(I-J)=4-4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{J=2-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$

# ដំណោះស្រាយ (ត)

២. ដោះស្រាយសំណួរ (b) ៖

• គណនា $I_0$ និង $I_1$ ៖

$$I_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I_0 = \frac{e-1}{e}}$

ចំពោះ $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ ៖

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_1 = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{e-2}{e}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I_1 = \frac{e-2}{e}}$

• ទំនាក់ទំនងរវាង $I_n$ និង $I_{n-1}$ ៖

ចំពោះ $n \geq 1$ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក៖

តាង $\begin{cases} u = x^n \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_n = \Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \cdot nx^{n-1}\,dx$$
$$= -\frac{1}{e} + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx$$
$$= nI_{n-1} - \frac{1}{e}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}}$

• ទាញរកតម្លៃនៃ $I_3$ ៖

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2\left(\frac{e-2}{e}\right) - \frac{1}{e} = \frac{2e-5}{e}$$
$$I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(\frac{2e-5}{e}\right) - \frac{1}{e} = \frac{6e-16}{e}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I_3 = \frac{6e-16}{e}}$

# មេរៀនទី ៣ ៖ អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលក្នុងធរណីមាត្រ

## តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ៣

| ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ១ | ក | ២១ | ក | ៤១ | ក | ៦១ | ក | ៨១ | ក |
| ២ | ខ | ២២ | ខ | ៤២ | ខ | ៦២ | ខ | ៨២ | ខ |
| ៣ | គ | ២៣ | គ | ៤៣ | គ | ៦៣ | គ | ៨៣ | គ |
| ៤ | ឃ | ២៤ | ឃ | ៤៤ | ឃ | ៦៤ | ឃ | ៨៤ | ឃ |
| ៥ | ក | ២៥ | ក | ៤៥ | ក | ៦៥ | ក | ៨៥ | ក |
| ៦ | ខ | ២៦ | ខ | ៤៦ | ខ | ៦៦ | ខ | ៨៦ | ខ |
| ៧ | គ | ២៧ | គ | ៤៧ | គ | ៦៧ | គ | ៨៧ | គ |
| ៨ | ឃ | ២៨ | ឃ | ៤៨ | ឃ | ៦៨ | ឃ | ៨៨ | ឃ |
| ៩ | ក | ២៩ | ក | ៤៩ | ក | ៦៩ | ក | ៨៩ | ក |
| ១០ | ខ | ៣០ | ខ | ៥០ | ខ | ៧០ | ខ | ៩០ | ខ |
| ១១ | គ | ៣១ | គ | ៥១ | គ | ៧១ | គ | ៩១ | គ |
| ១២ | ឃ | ៣២ | ឃ | ៥២ | ឃ | ៧២ | ឃ | ៩២ | ឃ |
| ១៣ | ក | ៣៣ | ក | ៥៣ | ក | ៧៣ | ក | ៩៣ | ក |
| ១៤ | ខ | ៣៤ | ខ | ៥៤ | ខ | ៧៤ | ខ | ៩៤ | ខ |
| ១៥ | គ | ៣៥ | គ | ៥៥ | គ | ៧៥ | គ | ៩៥ | គ |
| ១៦ | ឃ | ៣៦ | ឃ | ៥៦ | ឃ | ៧៦ | ឃ | ៩៦ | ឃ |
| ១៧ | ក | ៣៧ | ក | ៥៧ | ក | ៧៧ | ក | ៩៧ | ក |
| ១៨ | ខ | ៣៨ | ខ | ៥៨ | ខ | ៧៨ | ខ | ៩៨ | ខ |
| ១៩ | គ | ៣៩ | គ | ៥៩ | គ | ៧៩ | គ | ៩៩ | គ |
| ២០ | ឃ | ៤០ | ឃ | ៦០ | ឃ | ៨០ | ឃ | ១០០ | ឃ |

# ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

## លំហាត់ទី ១

ដោយប្រើនិយមន័យ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int_0^2 3x\,dx$

ខ. $\int_2^4 4x\,dx$

គ. $\int_0^2 x^2\,dx$

ឃ. $\int_0^2 (x^2-5x)\,dx$

ង. $\int_1^2 x^2\,dx$

ច. $\int_0^3 (2x+1)\,dx$

ឆ. $\int_0^1 x^3\,dx$

ជ. $\int_1^3 (3x^2-2x)\,dx$

ឈ. $\int_0^2 (4-x^2)\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int_0^2 3x\,dx$

គេបាន $I=\left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2=\frac{3(4)}{2}-0=6$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=6}$

ខ. $I=\int_2^4 4x\,dx$

គេបាន $I=\left[2x^2\right]_2^4=2(16)-2(4)=24$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=24}$

គ. $I=\int_0^2 x^2\,dx$

គេបាន $I=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{8}{3}}$

ឃ. $I=\int_0^2 (x^2-5x)\,dx$

គេបាន $I=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right]_0^2=\frac{8}{3}-10$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\frac{22}{3}}$

ង. $I=\int_1^2 x^2\,dx$

គេបាន $I=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{7}{3}}$

ច. $I=\int_0^3 (2x+1)\,dx$

គេបាន $I=\left[x^2+x\right]_0^3=(9+3)-0=12$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=12}$

ឆ. $I=\int_0^1 x^3\,dx$

គេបាន $I=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1}{4}}$

ជ. $I=\int_1^3 (3x^2-2x)\,dx$

គេបាន $I=\left[x^3-x^2\right]_1^3=(27-9)-0=18$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=18}$

ឈ. $I=\int_0^2 (4-x^2)\,dx$

គេបាន $I=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{16}{3}}$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ • ចម្លើយ និងដំណោះស្រាយលម្អិត

**លំហាត់ទី ២**

គណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាង $y=f(x)$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ៖

ក. $f(x)=9-x^2,\ [a,b]=[-3,2], n=5$

ខ. $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ [a,b]=[-1,3], n=4$

គ. $f(x)=\sqrt{x},\ [a,b]=[0,4], n=4$

ឃ. $f(x)=x^2+1,\ [a,b]=[0,3], n=6$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=9-x^2$ លើ $[-3,2]$ ជាមួយ $n=5$ ៖

- $\Delta x=\dfrac{2-(-3)}{5}=1$
- $x_i\in\{-2,-1,0,1,2\}$
- $f(x_i)\in\{5,8,9,8,5\}$
- $S\approx R_5=1\times(5+8+9+8+5)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S\approx 35}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ លើ $[-1,3]$ ជាមួយ $n=4$ ៖

- $\Delta x=\dfrac{3-(-1)}{4}=1$
- $x_i\in\{0,1,2,3\}$
- $f(x_i)\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\}$
- $S\approx R_4=1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{77}{60}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S\approx 1.283}$

គ. $f(x)=\sqrt{x}$ លើ $[0,4]$ ជាមួយ $n=4$ ៖

- $\Delta x=\dfrac{4-0}{4}=1$
- $x_i\in\{1,2,3,4\}$
- $f(x_i)\in\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},2\}$
- $S\approx R_4=1\times(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S\approx 6.146}$

ឃ. $f(x)=x^2+1$ លើ $[0,3]$ ជាមួយ $n=6$ ៖

- $\Delta x=\dfrac{3-0}{6}=0.5$
- $x_i\in\{0.5,1,1.5,2,2.5,3\}$
- $f(x_i)\in\{1.25,2,3.25,5,7.25,10\}$
- $S\approx R_6=0.5\times 28.75$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S\approx 14.375}$

## លំហាត់ទី ៣

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះដែលឱ្យ ៖

ក. $f(x)=x^2$ ដែល $x\in[1,3]$

ខ. $f(x)=x^2+2x-3$ ដែល $x\in[1,3]$

គ. $f(x)=2-x^3$ ដែល $x\in[-3,-2]$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ ដែល $x\in[0,2]$

ង. $f(x)=4-x^2$ ដែល $x\in[-2,2]$

ច. $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ដែល $x\in[0,2]$

ឆ. $f(x)=\cos x$ ដែល $x\in[0,\pi]$

ជ. $f(x)=e^x-1$ ដែល $x\in[0,2]$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x^2$ លើ $[1,3]$ ៖

ដោយ $x^2\geq 0$ លើ $[1,3]$ នាំឱ្យ ៖

$$S=\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{26}{3}}$

ខ. $f(x)=x^2+2x-3$ លើ $[1,3]$ ៖

លើ $[1,3]$ គេមាន $x^2+2x-3\geq 0$

$$S=\int_1^3(x^2+2x-3)dx$$

$$=\left[\tfrac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_1^3=\tfrac{32}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{32}{3}}$

គ. $f(x)=2-x^3$ លើ $[-3,-2]$ ៖

លើ $[-3,-2]$ គេមាន $2-x^3>0$

$$S=\int_{-3}^{-2}(2-x^3)dx$$

$$=\left[2x-\tfrac{x^4}{4}\right]_{-3}^{-2}=\tfrac{73}{4}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{73}{4}}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ លើ $[0,2]$ ៖

ដោយ $\frac{3}{2x+1}>0$ លើ $[0,2]$ នាំឱ្យ ៖

$$S=\int_0^2\frac{3}{2x+1}dx=\left[\frac{3}{2}\ln(2x+1)\right]_0^2$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{3}{2}\ln 5}$

ង. $f(x)=4-x^2$ លើ $[-2,2]$ ៖

លើ $[-2,2]$ គេមាន $4-x^2\geq 0$

$$S=\int_{-2}^2(4-x^2)dx$$

$$=\left[4x-\tfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^2=\tfrac{32}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{32}{3}}$

ច. $f(x)=x^3-3x^2+2x$ លើ $[0,2]$ ៖

លើ $[0,1]$ ៖ $f(x)\geq 0$, លើ $[1,2]$ ៖ $f(x)\leq 0$

$$S=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\tfrac{1}{4}-\left(-\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{1}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{1}{2}}$

ឆ. $f(x)=\cos x$ លើ $[0,\pi]$ ៖

លើ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ៖ $\cos x\geq 0$

លើ $[\frac{\pi}{2},\pi]$ ៖ $\cos x\leq 0$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=2$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=2}$

ជ. $f(x)=e^x-1$ លើ $[0,2]$ ៖

លើ $[0,2]$ គេមាន $e^x-1\geq 0$

$$S=\int_0^2(e^x-1)dx$$

$$=\left[e^x-x\right]_0^2=e^2-3$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=e^2-3}$

## លំហាត់ទី ៤

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ទាំងពីរ ៖

ក. $f(x)=x^2+2$ និង $g(x)=x$ លើ $[2,5]$

ខ. $f(x)=x^2$ និង $g(x)=x^3$ លើ $[0,1]$

គ. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ និង $g(x)=3x+2$ លើ $[0,2]$

ឃ. $f(x)=e^{x-1}$ និង $g(x)=x$ លើ $[1,4]$

ង. $f(x)=4-x^2$ និង $g(x)=x+2$

ច. $f(x)=x^3$ និង $g(x)=4x$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x^2+2$ និង $g(x)=x$ លើ $[2,5]$ ៖

លើ $[2,5]$ គេមាន $x^2+2>x$ គ្រប់ $x$

$$S=\int_2^5(x^2+2-x)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^5=\frac{155}{6}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{155}{6}}$

ខ. $f(x)=x^2$ និង $g(x)=x^3$ លើ $[0,1]$ ៖

លើ $[0,1]$ គេមាន $x^2\geq x^3$

$$S=\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{1}{12}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{1}{12}}$

គ. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ និង $g(x)=3x+2$ លើ $[0,2]$ ៖

លើ $[0,2]$ គេមាន $3x+2\geq\sqrt{2x+1}$

$$S=\int_0^2(3x+2-\sqrt{2x+1})dx=\frac{13}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{13}{3}}$

ឃ. $f(x)=e^{x-1}$ និង $g(x)=x$ លើ $[1,4]$ ៖

លើ $[1,4]$ គេមាន $e^{x-1}\geq x$

$$S=\int_1^4(e^{x-1}-x)dx=\left[e^{x-1}-\frac{x^2}{2}\right]_1^4$$
$$=(e^3-8)-\frac{1}{2}=e^3-\frac{17}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=e^3-\frac{17}{2}}$

ង. $f(x)=4-x^2$ និង $g(x)=x+2$ ៖

សមីការអាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $4-x^2=x+2$

$\iff x^2+x-2=0 \iff x=-2$ ឬ $x=1$

លើ $[-2,1]$ គេបាន $4-x^2\geq x+2$ ៖

$$S=\int_{-2}^1(2-x-x^2)dx=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{9}{2}}$

ច. $f(x)=x^3$ និង $g(x)=4x$ ៖

សមីការអាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $x^3=4x \iff x\in\{-2,0,2\}$

ដោយភាពស៊ីមេទ្រី ៖

$$S=2\int_0^2(4x-x^3)dx=2\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=8$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=8}$

## លំហាត់ទី ៥

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ និងអ័ក្សអរដោណេ $(Oy)$ ៖

ក. $x = y^2$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 4$

ខ. $x = \sqrt{y}$ និងបន្ទាត់ដេក $y = 1, y = 4$

គ. $x = y^2 - 2y$ និងអ័ក្ស $Oy$

ឃ. $x = e^y$, អ័ក្ស $Oy$ និងបន្ទាត់ដេក $y = 0, y = 1$

### ដំណោះស្រាយ

ក. $x = y^2$ និង $x = 4$ ៖

$y^2 = 4 \implies y \in [-2, 2]$

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)dy = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S = \frac{32}{3}}$

ខ. $x = \sqrt{y}$ ពី $y = 1$ ដល់ $y = 4$ ៖

$$S = \int_{1}^{4} \sqrt{y}dy = \left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_{1}^{4} = \frac{14}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S = \frac{14}{3}}$

គ. $x = y^2 - 2y$ និង $Oy$ ៖

$y^2 - 2y = 0 \implies y \in [0, 2]$

$$S = \int_{0}^{2} (2y - y^2)dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{4}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S = \frac{4}{3}}$

ឃ. $x = e^y$ ពី $y = 0$ ដល់ $y = 1$ ៖

$$S = \int_{0}^{1} e^y dy = \left[e^y\right]_{0}^{1} = e - 1$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S = e - 1}$

## លំហាត់ទី ៦

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $x = y^2$ និង $y = x - 2$ ។

### ដំណោះស្រាយ

▶ សរសេរ $x$ ជាអនុគមន៍នៃ $y$ ៖

$x = y^2$ និង $x = y + 2$

▶ សមីការអរដោណេប្រសព្វ ៖

$y^2 = y + 2 \iff y^2 - y - 2 = 0$

$\iff y = -1$ ឬ $y = 2$

▶ លើចន្លោះ $[-1, 2]$ ៖ $y + 2 \geq y^2$

▶ គណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

$$S = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S = \frac{9}{2}}$

## លំហាត់ទី ៧

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ និង $g(x)=x^4$ ។

### ដំណោះស្រាយ

▶ ចំណុចប្រសព្វ ៖

លើ $[0,1]$ ក្រាបប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x=0$ និង $x=1$

▶ ប្រៀបធៀប ៖

លើ $[0,1]$ គេមាន $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\geq x^4$

▶ គណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

$$S=\int_0^1\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x^4\right]dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{5}=\frac{10-\pi}{5\pi}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{10-\pi}{5\pi}}$

## លំហាត់ទី ៨

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin^3 x$ និង $g(x)=\cos^3 x$ លើចន្លោះ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ ។

### ដំណោះស្រាយ

▶ លើ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ គេមាន $\sin x\geq\cos x$

$\Longrightarrow\ \sin^3 x\geq\cos^3 x$

▶ ព្រីមីទីវ ៖

$\int\sin^3 x dx=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$

$\int\cos^3 x dx=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$

▶ គណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin^3 x-\cos^3 x)dx$$

$$=\left[-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}-\sin x+\frac{\sin^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{5\sqrt{2}}{3}}$

## លំហាត់ទី ៩

តាង $C$ ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = e^{2x} - 1$ និង $l$ ជាបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $P(1, e^2 - 1)$ ៖

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $l$

ខ. រកផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ ខណ្ឌដោយក្រាប $C$ បន្ទាត់ $l$ និងអ័ក្ស $Ox$

### ដំណោះស្រាយ

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $l$ ៖

- $y' = 2e^{2x} \implies y'(1) = 2e^2$
- $y - (e^2 - 1) = 2e^2(x - 1)$

  $\iff y = 2e^2x - e^2 - 1$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{y = 2e^2x - e^2 - 1}$

ខ. រកផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ ៖

- បន្ទាត់ $l$ កាត់ $Ox$ ត្រង់ $x_0 = \frac{e^2+1}{2e^2}$
- $\mathscr{A} = \int_0^1 (e^{2x} - 1)dx - S_\Delta$

  $= \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_0^1 - \frac{1}{2}(1 - x_0)(e^2 - 1)$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A} = \frac{e^2-1}{4e^2}}$

## លំហាត់ទី ១០

គេមានប៉ារ៉ាបូល $(P): y = 4 - x^2$ និងបន្ទាត់ដេក $d: y = m\ (0 < m < 4)$ ៖

ក. រកតម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យ $d$ ចែកផ្ទៃ $(P)$ ជាពីរស្មើគ្នា

ខ. រកបន្ទាត់ឈរ $x = c$ ចែកផ្ទៃជាពីរស្មើគ្នា

### ដំណោះស្រាយ

ក. រកតម្លៃ $m$ ៖

- ផ្ទៃសរុប ៖ $S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \dfrac{32}{3}$
- ផ្ទៃលើបន្ទាត់ $y = m$ ៖

  $S_1 = \int_{-\sqrt{4-m}}^{\sqrt{4-m}}(4 - x^2 - m)dx = \dfrac{4}{3}(4 - m)^{3/2}$
- ដោយ $S_1 = \frac{1}{2}S \iff (4 - m)^{3/2} = 4$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{m = 4 - 2\sqrt[3]{2}}$

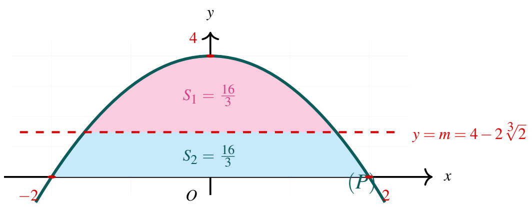
ខ. រកបន្ទាត់ឈរ $x = c$ ៖

- ដោយ $(P): y = 4 - x^2$ ជាអនុគមន៍គូ និងមានអ័ក្សស៊ីមេទ្រីជាអ័ក្ស $Oy\ (x = 0)$
- ផ្ទៃដែនប្លង់ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអ័ក្ស $Oy$ ៖

  $\int_{-2}^{0}(4 - x^2)dx = \int_{0}^{2}(4 - x^2)dx = \dfrac{16}{3}$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{x = 0}$

---




**រូបតំណាង ៖** បន្ទាត់ $y = m$ ចែកផ្ទៃប៉ារ៉ាបូល $(P)$ ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នា $S_1 = S_2 = \frac{16}{3}$

## លំហាត់ទី ១១

**អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច (Consumer and Producer Surplus) ៖**

នៅក្នុងទីផ្សារទំនិញមួយ អនុគមន៍តម្រូវការគឺ $P = D(x) = 100 - 0.5x$ និងអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់គឺ $P = S(x) = 10 + 0.5x$ (គិតជាពាន់រៀល) ដែល $x$ ជាបរិមាណទំនិញ (គិតជាឯកតា)។

ក. រកចំណុចលំនឹងទីផ្សារ $(x_0, P_0)$

ខ. គណនាអតិរេកអ្នកប្រើប្រាស់ (Consumer Surplus) ៖ $CS = \int_0^{x_0} [D(x) - P_0]\,dx$

គ. គណនាអតិរេកអ្នកផលិត (Producer Surplus) ៖ $PS = \int_0^{x_0} [P_0 - S(x)]\,dx$

# ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំណុចលំនឹងទីផ្សារ $(x_0, P_0)$ ៖

- លំនឹងកើតឡើងនៅពេល $D(x) = S(x)$ ៖
  $100 - 0.5x = 10 + 0.5x \iff x = 90$
  $\implies x_0 = 90$ ឯកតា
- តម្លៃលំនឹង ៖

  $P_0 = D(90) = 100 - 0.5(90) = 55$ ពាន់រៀល

  ដូចនេះ៖ $\boxed{(x_0, P_0) = (90, 55)}$

ខ. គណនាអតិរេកអ្នកប្រើប្រាស់ $(CS)$ ៖

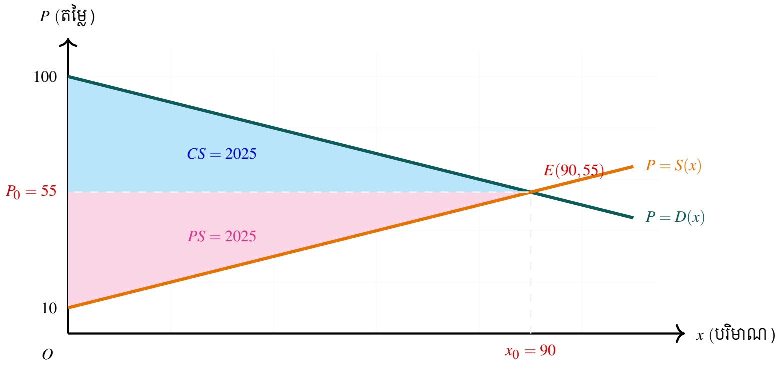
- $CS = \int_0^{90} [(100 - 0.5x) - 55]\,dx$
  $= \int_0^{90} (45 - 0.5x)\,dx$
  $= \left[45x - 0.25x^2\right]_0^{90} = 4050 - 2025$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{CS = 2025 \text{ ពាន់រៀល}}$

គ. គណនាអតិរេកអ្នកផលិត $(PS)$ ៖

- $PS = \int_0^{90} [55 - (10 + 0.5x)]\,dx$
  $= \int_0^{90} (45 - 0.5x)\,dx$
  $= \left[45x - 0.25x^2\right]_0^{90}$
  $= 4050 - 2025 = 2025$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{PS = 2025 \text{ ពាន់រៀល}}$




**រូបតំណាង ៖** ក្រាបតម្រូវការ $D(x)$, ផ្គត់ផ្គង់ $S(x)$, ចំណុចលំនឹងទីផ្សារ និងដែនអតិរេក $CS, PS$

## លំហាត់ទី ១២

**លំហាត់ត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប (BacII Practice) ៖**

ក. គេមានប៉ារ៉ាបូល $(P): y=-x^2+2x+3$ ។ រកចំណុចប្រសព្វរវាង $(P)$ និងអ័ក្សទាំងពីរ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្ស $Ox$ ។

ខ. គេមានខ្សែកោងពីរ $(C_1): y=x^2-3x+2$ និង $(C_2): y=-x^2+x+2$ ។ រកចំណុចប្រសព្វ និងគណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរ។

គ. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x-1)e^x$ មានក្រាប $(C)$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ ត្រង់ $x=0$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ $(C), Ox$ និង $x=1, x=2$ ។

## ដំណោះស្រាយ

**ក. ដោះស្រាយសំណួរ (a) ៖**

- ប្រសព្វ $Ox$ $(y=0)$ ៖
  $-x^2+2x+3=0 \iff x=-1$ ឬ $x=3$
  នាំឱ្យ $\boxed{(-1,0) \text{ និង } (3,0)}$
- ប្រសព្វ $Oy$ $(x=0)$ ៖ $y=3 \implies \boxed{(0,3)}$
- ផ្ទៃក្រឡា ៖
  $$S=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\frac{32}{3}$$
  ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{32}{3}}$

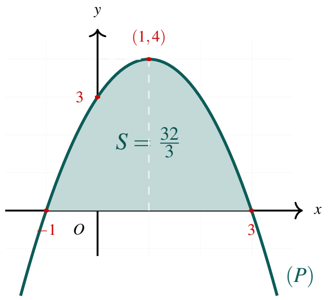
**ខ. ដោះស្រាយសំណួរ (b) ៖**

- សមីការអាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖
  $x^2-3x+2=-x^2+x+2 \iff 2x(x-2)=0$
  នាំឱ្យ $\boxed{(0,2) \text{ និង } (2,0)}$
- លើ $[0,2]$: $-x^2+x+2 \geq x^2-3x+2$
  $$S=\int_{0}^{2}(4x-2x^2)dx=\frac{8}{3}$$
  ដូចនេះ៖ $\boxed{S=\frac{8}{3}}$

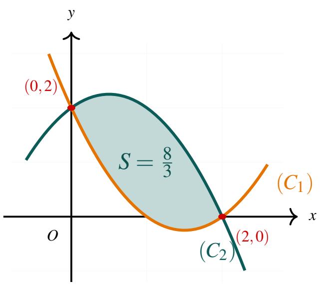
**គ. ដោះស្រាយសំណួរ (c) ៖**

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ ត្រង់ $x=0$ ៖
  $f'(x)=xe^x \implies f'(0)=0$
  $f(0)=-1$
  $(\Delta): y-(-1)=0(x-0)$
  ដូចនេះ៖ $\boxed{y=-1}$
- គណនាផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ ៖
  លើ $[1,2]$: $(x-1)e^x \geq 0$
  $$\mathscr{A}=\int_{1}^{2}(x-1)e^x dx$$
  តាង $\begin{cases} u=x-1 \\ dv=e^x dx \end{cases} \implies \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$
  $$\mathscr{A}=\Big[(x-1)e^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$
  $$=e^2-(e^2-e)=e$$
  ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A}=e}$

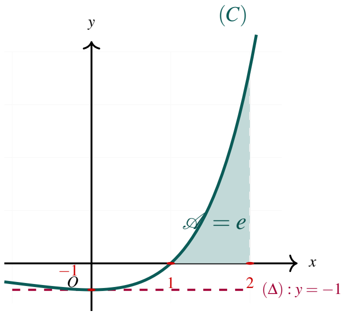
---




រូប (ក) ៖ ផ្ទៃខណ្ឌដោយ $(P)$ និង $Ox$




រូប (ខ) ៖ ផ្ទៃខណ្ឌដោយ $(C_1)$ និង $(C_2)$




រូប (គ) ៖ ផ្ទៃខណ្ឌដោយ $(C), Ox, x=1, x=2$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ ចម្លើយ និងដំណោះស្រាយលម្អិត

# មេរៀនទី ៤ ៖ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ

## តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ៤

| ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ | ល.រ | ចម្លើយ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ១ | ក | ២១ | ក | ៤១ | ក | ៦១ | ក | ៨១ | ក |
| ២ | ខ | ២២ | ខ | ៤២ | ខ | ៦២ | ខ | ៨២ | ខ |
| ៣ | គ | ២៣ | គ | ៤៣ | គ | ៦៣ | គ | ៨៣ | គ |
| ៤ | ឃ | ២៤ | ឃ | ៤៤ | ឃ | ៦៤ | ឃ | ៨៤ | ឃ |
| ៥ | ក | ២៥ | ក | ៤៥ | ក | ៦៥ | ក | ៨៥ | ក |
| ៦ | ខ | ២៦ | ខ | ៤៦ | ខ | ៦៦ | ខ | ៨៦ | ខ |
| ៧ | គ | ២៧ | គ | ៤៧ | គ | ៦៧ | គ | ៨៧ | គ |
| ៨ | ឃ | ២៨ | ឃ | ៤៨ | ឃ | ៦៨ | ឃ | ៨៨ | ឃ |
| ៩ | ក | ២៩ | ក | ៤៩ | ក | ៦៩ | ក | ៨៩ | ក |
| ១០ | ខ | ៣០ | ខ | ៥០ | ខ | ៧០ | ខ | ៩០ | ខ |
| ១១ | គ | ៣១ | គ | ៥១ | គ | ៧១ | គ | ៩១ | គ |
| ១២ | ឃ | ៣២ | ឃ | ៥២ | ឃ | ៧២ | ឃ | ៩២ | ឃ |
| ១៣ | ក | ៣៣ | ក | ៥៣ | ក | ៧៣ | ក | ៩៣ | ក |
| ១៤ | ខ | ៣៤ | ខ | ៥៤ | ខ | ៧៤ | ខ | ៩៤ | ខ |
| ១៥ | គ | ៣៥ | គ | ៥៥ | គ | ៧៥ | គ | ៩៥ | គ |
| ១៦ | ឃ | ៣៦ | ឃ | ៥៦ | ឃ | ៧៦ | ឃ | ៩៦ | ឃ |
| ១៧ | ក | ៣៧ | ក | ៥៧ | ក | ៧៧ | ក | ៩៧ | ក |
| ១៨ | ខ | ៣៨ | ខ | ៥៨ | ខ | ៧៨ | ខ | ៩៨ | ខ |
| ១៩ | គ | ៣៩ | គ | ៥៩ | គ | ៧៩ | គ | ៩៩ | គ |
| ២០ | ឃ | ៤០ | ឃ | ៦០ | ឃ | ៨០ | ឃ | ១០០ | ឃ |

# ខ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១

គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់បានពីការវង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍៖

ក. $y=2x+1$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x=1$ និង $x=3$

ខ. $y=x^2+1$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x=0$ និង $x=3$

គ. $y=\sqrt{x-3}$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x=4$ ទៅ $x=9$

ឃ. $y=e^x$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x=0$ និង $x=1$

ង. $y=\sin x$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x=0$ ទៅ $x=\pi$

ច. $y=\dfrac{2}{x}$, អ័ក្ស $x'Ox$, $x=1$ ទៅ $x=4$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $y=2x+1$ លើ $[1,3]$ ៖

$$V=\pi\int_1^3(2x+1)^2\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{4x^3}{3}+2x^2+x\right]_1^3=\frac{158\pi}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{158\pi}{3}}$

ខ. $y=x^2+1$ លើ $[0,3]$ ៖

$$V=\pi\int_0^3(x^2+1)^2\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^3=\frac{348\pi}{5}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{348\pi}{5}}$

គ. $y=\sqrt{x-3}$ លើ $[4,9]$ ៖

$$V=\pi\int_4^9(x-3)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_4^9=\frac{35\pi}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{35\pi}{2}}$

ឃ. $y=e^x$ លើ $[0,1]$ ៖

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{\pi(e^2-1)}{2}}$

ង. $y=\sin x$ លើ $[0,\pi]$ ៖

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\pi^2}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{\pi^2}{2}}$

ច. $y=\dfrac{2}{x}$ លើ $[1,4]$ ៖

$$V=4\pi\int_1^4\frac{1}{x^2}\,dx=4\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4$$
$$=3\pi$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=3\pi}$

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២

គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការវង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍៖

ក. $f(x) = x^2$ និង $g(x) = 4x - x^2$

ខ. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ និង $g(x) = 9 - x$

គ. $f(x) = \sqrt{x}$ និង $g(x) = x^2$

ឃ. $f(x) = 4 - x^2$ និង $g(x) = x + 2$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = x^2$ និង $g(x) = 4x - x^2$ ៖

អាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $4x - x^2 = x^2 \iff x = 0, 2$

លើ $[0, 2]$ ៖ $g(x) \geq f(x) \geq 0$

$$V = \pi \int_0^2 ((4x - x^2)^2 - x^4)dx$$
$$= \pi \left[\frac{16x^3}{3} - 2x^4\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{32\pi}{3}}$

ខ. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ និង $g(x) = 9 - x$ ៖

អាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $x = -2, 3$

លើ $[-2, 3]$ ៖ $g(x) \geq f(x) \geq 0$

$$V = \pi \int_{-2}^3 (-x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 6x + 72)dx$$
$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 72x\right]_{-2}^3$$
$$= 250\pi$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = 250\pi}$

គ. $f(x) = \sqrt{x}$ និង $g(x) = x^2$ ៖

អាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $x = 0, 1$

លើ $[0, 1]$ ៖ $\sqrt{x} \geq x^2 \geq 0$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$= \frac{3\pi}{10}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{3\pi}{10}}$

ឃ. $f(x) = 4 - x^2$ និង $g(x) = x + 2$ ៖

អាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $x = -2, 1$

លើ $[-2, 1]$ ៖ $4 - x^2 \geq x + 2 \geq 0$

$$V = \pi \int_{-2}^1 (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^1$$
$$= \frac{108\pi}{5}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{108\pi}{5}}$

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣

គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការវិលជុំវិញអ័ក្សអ័រដោណេ $y'Oy$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ៖

ក. $x=y^2$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=4$

ខ. $y=\ln x$, អ័ក្ស $Oy$ និង $y=0, y=2$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $x=y^2$ និង $x=4$ ជុំវិញ $Oy$ ៖

អ័រដោណេប្រសព្វ ៖ $y=\pm 2$

លើ $[-2,2]$ ៖ $R=4, r=y^2$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(16-y^4)dy$$

$$=2\pi\left[16y-\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{256\pi}{5}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{256\pi}{5}}$

ខ. $y=\ln x \iff x=e^y$ លើ $[0,2]$ ៖

$$V=\pi\int_0^2 (e^y)^2dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy$$

$$=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2=\frac{\pi(e^4-1)}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{\pi(e^4-1)}{2}}$

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤

ចំពោះអនុគមន៍ $F(x)=\int_1^x \sin(\pi t)\,dt$ ។ គណនា៖

ក. $F(-1)$

ខ. $F'(0)$

គ. $F''\left(\frac{1}{2}\right)$

ឃ. $F''(x)$

## ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $F(-1)$ ៖

$$F(-1)=\int_1^{-1}\sin(\pi t)dt$$

$$=\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_1^{-1}=0$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{F(-1)=0}$

ខ. គណនា $F'(0)$ ៖

តាម FTC ៖ $F'(x)=\sin(\pi x)$

$\implies F'(0)=\sin(0)=0$

ដូចនេះ៖ $\boxed{F'(0)=0}$

គ. គណនា $F''(x)$ ៖

$$F''(x)=(F'(x))'=(\sin(\pi x))'$$

$$=\pi\cos(\pi x)$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{F''(x)=\pi\cos(\pi x)}$

ឃ. គណនា $F''\left(\frac{1}{2}\right)$ ៖

$$F''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\pi\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{F''\left(\tfrac{1}{2}\right)=0}$

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥

គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ ពី $x=1$ ទៅ $x=3$

ខ. $y=\ln(\cos x)$ ពី $x=0$ ទៅ $x=\frac{\pi}{3}$

គ. ឧបមាថា $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ។ បន្ទាត់ជួបអ័ក្សអ័រដោណេត្រង់ $B$ ។ ប្រៀបធៀបប្រវែង $AB$ និងប្រវែងធ្នូ $L$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ លើ $[1,3]$ ៖

$y'=x^2-\frac{1}{4x^2}$

$1+(y')^2=\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2$

$L=\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_1^3=\frac{53}{6}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{L=\frac{53}{6}}$

ខ. $y=\ln(\cos x)$ លើ $[0,\frac{\pi}{3}]$ ៖

$y'=-\tan x \implies 1+(y')^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

$L=\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x}=\left[\ln\left|\tan x+\frac{1}{\cos x}\right|\right]_0^{\pi/3}$

$=\ln(2+\sqrt{3})$

ដូចនេះ៖ $\boxed{L=\ln(2+\sqrt{3})}$

គ. ប្រៀបធៀប $AB$ និងធ្នូ $L$ ចំពោះ $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ៖

- $(T): y-f(a)=f'(a)(x-a)$
- $B(0,f(a)-af'(a))$
- $AB=a\sqrt{1+[f'(a)]^2}=af(a)$
- $L=\int_0^a\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

  $=\frac{e^a-e^{-a}}{2}=f'(a)$
- ចំពោះគ្រប់ $a>0$ ៖

  $a\cosh a>\sinh a \implies AB>L$

  ដូចនេះ៖ $\boxed{AB>L}$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ ចម្លើយ និងដំណោះស្រាយលម្អិត

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦

រកផ្ទៃក្រឡាខាង និងមាឌនៃស្វ៊ែរដែលមានកាំ $R$ ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល។

## ដំណោះស្រាយ

▶ **គណនាមាឌស្វ៊ែរ ៖**

ស្វ៊ែរកាំ $R$ កើតពីរង្វិលនៃកន្លះរង្វង់ $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ជុំវិញ $Ox$ លើ $[-R,R]$

តាមវិធីសាស្ត្របន្ទះមូល ៖

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$

▶ **គណនាផ្ទៃក្រឡាខាង ៖**

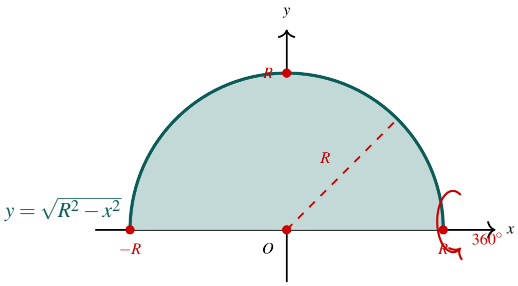
ដេរីវេ ៖ $y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$

$$\sqrt{1+(y')^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

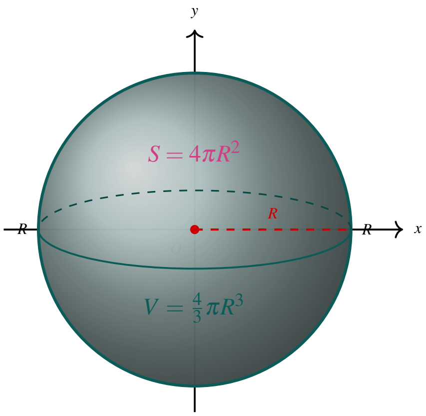
$$y\sqrt{1+(y')^2}=R$$

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=4\pi R^2$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{S=4\pi R^2}$




រូប (ក) ៖ រង្វិលកន្លះរង្វង់ $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ជុំវិញ $Ox$




រូប (ខ) ៖ ស្វ៊ែរ 3D ដែលមានកាំ $R$ បង្កើតបានពីអាំងតេក្រាល

## លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧ ( BacII Practice )

គេមានអនុគមន៍ $y = 4x - x^2$ មានក្រាបតាង $(P)$ ៖

ក. រកកូអរដោនេកំពូល និងចំណុចប្រសព្វរវាង $(P)$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្ស $Ox$។

គ. គណនាមាឌ $V$ នៃសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ $(P)$ និងអ័ក្ស $Ox$។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំពូល និងប្រសព្វ $Ox$ ៖

- $y = -(x-2)^2 + 4 \implies \boxed{S(2,4)}$
- $4x - x^2 = 0 \iff x = 0, 4$

នាំឱ្យ $\boxed{O(0,0) \text{ និង } A(4,0)}$

ខ. ផ្ទៃក្រឡា $\mathscr{A}$ ៖

លើ $[0,4]$ ៖ $4x - x^2 \geq 0$

$$\mathscr{A} = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A} = \frac{32}{3}}$

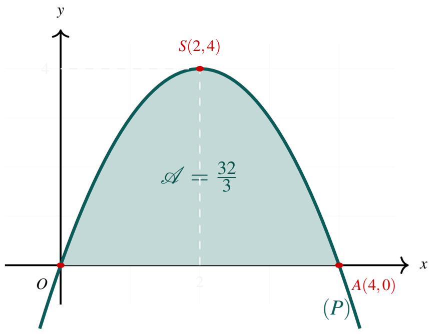
គ. មាឌសូលីតបរិវត្ត $V$ ៖

$$V = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx$$

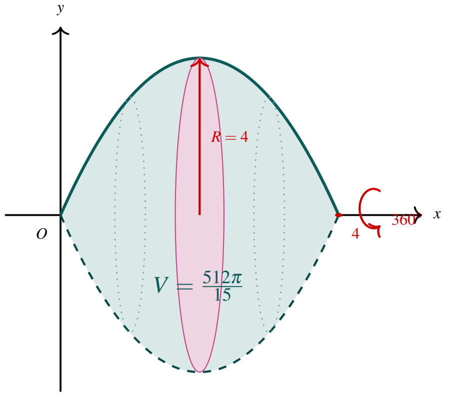
$$= \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4)dx$$

$$= \pi \left[\frac{16x^3}{3} - 2x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{512\pi}{15}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{512\pi}{15}}$




រូប (ក) ៖ ផ្ទៃខណ្ឌដោយ $(P) : y = 4x - x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$




រូប (ខ) ៖ សូលីតបរិវត្តដែលកើតពីរង្វិល $(P)$ ជុំវិញអ័ក្ស $Ox$

## គ. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់ជំពូក

### លំហាត់ជំពូកទី ១

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$

ខ. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

គ. $\int xe^{x^2}\,dx$

ឃ. $\int \sin(3x)\cos(3x)\,dx$

ង. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

ច. $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I = \int (2x^3 - 3x^2 + 1)dx$

$I = \frac{x^4}{2} - x^3 + x + C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = \frac{x^4}{2} - x^3 + x + C}$

ខ. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

តាង $u = x^3 + 1 \implies du = 3x^2dx$

$I = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C}$

គ. $I = \int xe^{x^2}dx$

តាង $u = x^2 \implies du = 2xdx$

$I = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = \frac{1}{2}e^{x^2} + C}$

ឃ. $I = \int \sin(3x)\cos(3x)dx$

$I = \frac{1}{2}\int \sin(6x)dx = -\frac{1}{12}\cos(6x) + C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = -\frac{1}{12}\cos(6x) + C}$

ង. $I = \int \frac{\ln x}{x}dx$

តាង $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx$

$I = \int udu = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = \frac{1}{2}\ln^2 x + C}$

ច. $I = \int \frac{1}{x^2-4}dx$

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C}$

## លំហាត់ជំពូកទី ២

គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក៖

ក. $\int x\cos x\,dx$ គ. $\int \ln x\,dx$ ង. $\int e^x\sin x\,dx$

ខ. $\int x^2e^x\,dx$ ឃ. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ ច. $\int \arctan x\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\int x\cos x\,dx$ ៖

តាង $u=x, dv=\cos x dx$

$I=x\sin x-\int \sin x dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x\sin x+\cos x+C}$

ខ. $I=\int x^2e^x\,dx$ ៖

តាង $u=x^2, dv=e^x dx$

$I=x^2e^x-2\int xe^x dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=(x^2-2x+2)e^x+C}$

គ. $I=\int \ln x\,dx$ ៖

តាង $u=\ln x, dv=dx$

$I=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x\ln x-x+C}$

ឃ. $I=\int x\sqrt{x+1}\,dx$ ៖

តាង $t=\sqrt{x+1} \implies x=t^2-1, dx=2tdt$

$I=\int (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)^{3/2}+C}$

ង. $I=\int e^x\sin x\,dx$ ៖

អាំងតេក្រាលវិលជុំ ៖

$I=e^x\sin x-e^x\cos x-I$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C}$

ច. $I=\int \arctan x\,dx$ ៖

តាង $u=\arctan x, dv=dx$

$I=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}$

**លំហាត់ជំពូកទី ៣**

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$ ខ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ គ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$ ៖

$\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$

$I=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1-\ln 2}{2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{1-\ln 2}{2}}$

ខ. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ ៖

តាមលក្ខណៈ King's Property ៖

$2I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx=\frac{\pi}{2} \implies I=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{\pi}{4}}$

គ. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$ ៖

ជំនួស $x\to\frac{\pi}{4}-x$ ៖

$1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{2}{1+\tan x}$

$2I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx=\frac{\pi}{4}\ln 2$

$\implies I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=\frac{\pi}{8}\ln 2}$

**លំហាត់ជំពូកទី ៤**

គណនាផ្ទៃក្រឡាដែនប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = x^2 - 4x$ និងអ័ក្ស $Ox$

ខ. $y = x^3 - 3x$ និងអ័ក្ស $Ox$ លើចន្លោះ $[-1,2]$

គ. $y = -x^2 + 4x$ និងបន្ទាត់ $y = x$

ឃ. $y = \sqrt{x}$ និង $y = x^2$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $y = x^2 - 4x$ និង $Ox$ ៖

$x^2 - 4x = 0 \iff x = 0, 4$

លើ $[0,4]$ ៖ $x^2 - 4x \leq 0$

$$\mathscr{A} = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \frac{32}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A} = \frac{32}{3}}$

ខ. $y = x^3 - 3x$ លើ $[-1,2]$ ៖

$x^3 - 3x = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

លើ $[-1,0]$ ៖ $y \geq 0$, លើ $[0,\sqrt{3}]$ ៖ $y \leq 0$, លើ $[\sqrt{3},2]$ ៖ $y \geq 0$

$\mathscr{A} = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A} = \frac{15}{4}}$

គ. $y = -x^2 + 4x$ និង $y = x$ ៖

$-x^2 + 4x = x \iff x = 0, 3$

លើ $[0,3]$ ៖ $-x^2 + 4x \geq x$

$$\mathscr{A} = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \frac{9}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A} = \frac{9}{2}}$

ឃ. $y = \sqrt{x}$ និង $y = x^2$ ៖

$\sqrt{x} = x^2 \iff x = 0, 1$

លើ $[0,1]$ ៖ $\sqrt{x} \geq x^2$

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{3}}$

## លំហាត់ជំពូកទី ៥

គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកើតពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នៃដែនប្លង់ខណ្ឌដោយ៖

ក. $y = x^2$ និង $y = 4$

ខ. $y = \sqrt{x}$ និង $y = x$

គ. $y = \sin x$ លើចន្លោះ $[0, \pi]$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $y = x^2$ និង $y = 4$ ជុំវិញ $Ox$ ៖

អាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $x = \pm 2$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (16 - x^4) dx$$

$$= 2\pi \left[16x - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{256\pi}{5}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{256\pi}{5}}$

ខ. $y = \sqrt{x}$ និង $y = x$ ជុំវិញ $Ox$ ៖

អាប់ស៊ីសប្រសព្វ ៖ $x = 0, 1$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{\pi}{6}}$

គ. $y = \sin x$ លើ $[0, \pi]$ ជុំវិញ $Ox$ ៖

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{V = \frac{\pi^2}{2}}$

## លំហាត់ជំពូកទី ៦

គណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោងខាងក្រោម៖

ក. $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ ពី $x=0$ ដល់ $x=3$

ខ. $y=\ln(\cos x)$ ពី $x=0$ ដល់ $x=\frac{\pi}{4}$

គ. $y=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$ ពី $x=1$ ដល់ $x=2$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ ពី $x=0$ ដល់ 3 ៖

$y'=x\sqrt{x^2+2} \implies 1+(y')^2=(x^2+1)^2$

$L=\int_0^3 (x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3=12$

ដូចនេះ៖ $\boxed{L=12}$

ខ. $y=\ln(\cos x)$ ពី $x=0$ ដល់ $\frac{\pi}{4}$ ៖

$y'=-\tan x \implies 1+(y')^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

$L=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ៖ $\boxed{L=\ln(1+\sqrt{2})}$

គ. $y=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2x^2}$ ពី $x=1$ ដល់ 2 ៖

$y'=\frac{x^3}{4}-\frac{1}{x^3}$

$1+(y')^2=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}\right)^2$

$L=\int_1^2\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{21}{16}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{L=\frac{21}{16}}$

**លំហាត់ជំពូកទី ៧** ( BacII Integral Sequence )

គេឱ្យស៊ីត $(I_n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$ ។

ក. គណនា $I_0$ និង $I_1$ ។

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរបង្ហាញថា $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ $I_2$ និង $I_3$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $I_0$ និង $I_1$ ៖

▶ $I_0 = \int_0^1 1\, dx = 1 \Longrightarrow \boxed{I_0 = 1}$

▶ $I_1 = \int_0^1 (1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

នាំឱ្យ $\boxed{I_1 = \frac{2}{3}}$

ខ. បង្ហាញថា $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ ៖

▶ តាង $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} du = -2nx(1-x^2)^{n-1}dx \\ v = x \end{cases}$

▶ $I_n = \left[x(1-x^2)^n\right]_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx$

$= 2n(I_{n-1} - I_n)$

▶ $\Longrightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ (ពិត)

គ. ទាញរកតម្លៃ $I_2$ និង $I_3$ ៖

▶ $I_2 = \frac{4}{5}I_1 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15} \Longrightarrow \boxed{I_2 = \frac{8}{15}}$

▶ $I_3 = \frac{6}{7}I_2 = \frac{6}{7}\cdot\frac{8}{15} = \frac{16}{35} \Longrightarrow \boxed{I_3 = \frac{16}{35}}$

# ឧបសម្ព័ន្ធ

## ក ៖ តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលគ្រឹះ (Table of Integrals)

### ១. លក្ខណៈប្រមាណវិធីលើអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)$, $g(x)$ ដែលមានព្រីមីទីវ និងចំនួនពិត $k,c\in\mathbb{R}$ ៖

- $\int 0\,dx = c$
- $\int k\,dx = kx + c \quad (k\neq 0)$
- $\int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- $\int f'(x)\,dx = f(x)+c$
- $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$

### ២. រូបមន្តព្រីមីទីវទម្រង់លីនេអ៊ែរ $ax+b$ $(a\neq 0)$

- $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad (n\neq -1)$
- $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$
- $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + c$
- $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
- $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
- $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$

## ៣. តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍បឋម $f(x)$ និងអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u(x)$

| ល.រ | ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍អថេរ $x$ | ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $u=u(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$ | $\int u'u^n\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$ |
| 2 | $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\lvert x\rvert+c \quad (x\neq 0)$ | $\int \frac{u'}{u}\,dx=\ln\lvert u\rvert+c \quad (u\neq 0)$ |
| 3 | $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}+c \quad (x>0)$ | $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx=2\sqrt{u}+c \quad (u>0)$ |
| 4 | $\int e^x\,dx=e^x+c$ | $\int u'e^u\,dx=e^u+c$ |
| 5 | $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c \quad (a>0, a\neq 1)$ | $\int u'a^u\,dx=\frac{a^u}{\ln a}+c$ |
| 6 | $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$ | $\int u'\sin u\,dx=-\cos u+c$ |
| 7 | $\int \cos x\,dx=\sin x+c$ | $\int u'\cos u\,dx=\sin u+c$ |
| 8 | $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int(1+\tan^2 x)\,dx=\tan x+c$ | $\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx=\tan u+c$ |
| 9 | $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\int(1+\cot^2 x)\,dx=-\cot x+c$ | $\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx=-\cot u+c$ |
| 10 | $\int \tan x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+c$ | $\int u'\tan u\,dx=-\ln\lvert\cos u\rvert+c$ |
| 11 | $\int \cot x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+c$ | $\int u'\cot u\,dx=\ln\lvert\sin u\rvert+c$ |
| 12 | $\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+c$ | $\int \frac{u'}{\cos u}\,dx=\ln\left\lvert\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+c$ |
| 13 | $\int \frac{1}{\sin x}\,dx=\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert+c$ | $\int \frac{u'}{\sin u}\,dx=\ln\left\lvert\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right\rvert+c$ |
| 14 | $\int \tan^2 x\,dx=\tan x-x+c$ | $\int u'\tan^2 u\,dx=\tan u-u+c$ |
| 15 | $\int \cot^2 x\,dx=-\cot x-x+c$ | $\int u'\cot^2 u\,dx=-\cot u-u+c$ |
| 16 | $\int \sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$ | $\int u'\sin^2 u\,dx=\frac{u}{2}-\frac{\sin 2u}{4}+c$ |
| 17 | $\int \cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$ | $\int u'\cos^2 u\,dx=\frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4}+c$ |
| 18 | $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$ | $\int \frac{u'}{u^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+c$ |
| 19 | $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$ | $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx=\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+c$ |
| 20 | $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c$ | $\int \frac{u'}{u^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+c$ |

## ៤. រូបមន្តព្រីមីទីវពិសេស និងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស ($a > 0$)

a. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

c. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

d. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

e. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$

f. $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

g. $\displaystyle\int \log_a x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln x - x)+c$

h. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x|+c$

## ៥. លក្ខខណ្ឌដើមស្វែងរកព្រីមីទីវជាក់លាក់ (Initial Value Problem)

ដើម្បីកំណត់ព្រីមីទីវ $F(x)$ តែមួយគត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $F(x_0) = y_0$ ៖

1. គណនាព្រីមីទីវទូទៅ ៖ $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx + c$
2. ជំនួស $x = x_0$ និង $F(x_0) = y_0$ ទៅក្នុងសមីការ ៖ $y_0 = \left[\displaystyle\int f(x)\,dx\right]_{x=x_0} + c$
3. ដោះស្រាយសមីការរកតម្លៃថេរ $c$ រួចជំនួស $c$ ចូលទៅក្នុង $F(x)$ វិញ។

## ៦. ឧទាហរណ៍អនុវត្តគំរូនៃលក្ខខណ្ឌដើម (Initial Value Examples)

**ឧទាហរណ៍ ១ ៖** រកអនុគមន៍ $f(x)$ បើ $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ និង $f(1) = 6$។

- ព្រីមីទីវទូទៅ ៖ $f(x) = \int(3x^2-4x+5)\,dx = x^3 - 2x^2 + 5x + c$
- ដោយ $f(1) = 6 \iff 1^3 - 2(1)^2 + 5(1) + c = 6 \implies 4 + c = 6 \implies c = 2$
- ដូចនេះ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 2$

**ឧទាហរណ៍ ២ ៖** រកសមីការខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ កាត់តាម $A(0,3)$ បើមេគុណប្រាប់ទិស $y' = 2e^{2x} + \cos x$។

- សមីការទូទៅ ៖ $y = \int(2e^{2x} + \cos x)\,dx = e^{2x} + \sin x + c$
- ខ្សែកោងកាត់ $A(0,3) \iff 3 = e^0 + \sin 0 + c \implies 3 = 1 + c \implies c = 2$
- ដូចនេះ សមីការខ្សែកោងគឺ ៖ $y = e^{2x} + \sin x + 2$

## ខ ៖ វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលគន្លឹះ (Integration Techniques)

### ១. វិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរ (Method of Substitution)

- **គោលការណ៍ទូទៅ ៖** បើកន្សោមមានទម្រង់ $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ គេតាង $u = g(x) \implies du = g'(x)dx$ នាំឱ្យ ៖

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad \text{និង} \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- **វិធីសាស្ត្រប្តូរអថេរត្រីកោណមាត្រ (Trigonometric Substitutions) ៖**

| ទម្រង់កន្សោម | អថេរជំនួស | ឌីផេរ៉ង់ស្យែល | រូបមន្តសម្រួល |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x = a\sin\theta \;\; (-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ | $dx = a\cos\theta\,d\theta$ | $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$ |
| $\sqrt{a^2+x^2}$ ឬ $a^2+x^2$ | $x = a\tan\theta \;\; (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ | $dx = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$ | $\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos\theta}$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x = \frac{a}{\cos\theta} \;\; (0 \le \theta < \frac{\pi}{2})$ | $dx = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ | $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$ |

### ២. វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក (Integration by Parts)

**រូបមន្ត ៖** $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$ និង $\int_a^b u\,dv = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b v\,du$

**ក្បួនអាទិភាពជ្រើសរើស $u$ តាមវិធាន L-I-A-T-E ៖** **L** $(\ln x) \to$ **I** $(\arcsin, \arctan) \to$ **A** $(x^n, P) \to$ **T** $(\sin, \cos) \to$ **E** $(e^x, a^x)$

**វិធីសាស្ត្រតារាង (Tabular Method / DI Method) ៖** ប្រើចំពោះ $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin(\alpha x)dx$, $\int P(x)\cos(\alpha x)dx$ ៖

- ជួរឈរ $D$ ៖ យក $P(x)$ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់រហូតដល់ 0។
- ជួរឈរ $I$ ៖ យកអនុគមន៍ដែលនៅសល់ធ្វើអាំងតេក្រាលបន្តបន្ទាប់។
- ជួរឈរ $\pm$ ៖ ឆ្លាស់សញ្ញា $+, -, +, -, \dots$ រួចគុណតាមអង្កត់ទ្រូង។

## ៣. វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

1. ករណី $\deg(P) \geq \deg(Q)$ ៖ ត្រូវតែធ្វើវិធីចែកពហុធាជាមុនសិន ៖

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (\text{ដោយ } \deg(R) < \deg(Q))$$

2. ករណីកត្តាលីនេអ៊ែរខុសៗគ្នា ៖

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \implies \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + c$$

3. ករណីកត្តាលីនេអ៊ែរត្រួតគ្នា ៖

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$$

4. ករណីកត្តាដឺក្រេទីពីរមិនអាចបំបែកបាន $(\Delta < 0)$ ៖

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} = \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{(x+\frac{b}{2a})^2+k^2} \implies A\ln|ax^2+bx+c| + \frac{B}{k}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{k}\right) + c$$

## ៤. វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1. ទម្រង់ $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ ៖

- បើ $m$ ជាចំនួនសេស ៖ ផ្តាច់ $\sin x\, dx = -d(\cos x)$ រួចប្តូរ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$។
- បើ $n$ ជាចំនួនសេស ៖ ផ្តាច់ $\cos x\, dx = d(\sin x)$ រួចប្តូរ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$។
- បើ $m$ និង $n$ ជាចំនួនគូទាំងពីរ ៖ ប្រើរូបមន្តបន្ថយដឺក្រេ ៖

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

2. ទម្រង់ផលគុណទៅជាផលបូក ៖

- $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$
- $\sin(mx)\sin(nx) = -\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$

## គ ៖ លក្ខណៈ និងទ្រឹស្ដីបទនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ (Theorems of Definite Integrals)

### ១. ទ្រឹស្ដីបទគ្រឹះនៃគណិតវិភាគ (Fundamental Theorem of Calculus)

a. ផ្នែកទី ១ (ដេរីវេនៃអាំងតេក្រាល) ៖ បើ $f$ ជាប់លើ $[a,b]$ នោះអនុគមន៍ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ មានដេរីវេលើ $[a,b]$ ហើយ ៖

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)$$

b. ផ្នែកទី ២ (រូបមន្តញូតុន-ឡៃបនីស) ៖ បើ $f$ ជាប់លើ $[a,b]$ និង $F$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f$ នោះ ៖

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

### ២. លក្ខណៈគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

ចំពោះអនុគមន៍ $f,g$ ជាប់លើ $[a,b]$ និង $k\in\mathbb{R}$ ៖

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b [f\pm g]\,dx=\int_a^b f\,dx\pm\int_a^b g\,dx$
- $\int_a^b f\,dx=\int_a^c f\,dx+\int_c^b f\,dx \quad (c\in[a,b])$
- $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$

### ៣. វិធីសាស្ត្រគន្លឹះគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ (Key Definite Integral Tips)

- វិធីសាស្ត្រប្ដូរអថេរ ៖ កាលណាប្រើ $u=g(x)$ ត្រូវប្ដូរព្រំដែនជានិច្ច ៖ $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$
- វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ៖ $\int_a^b u\,dv=[u\cdot v]_a^b-\int_a^b v\,du=\big(u(b)v(b)-u(a)v(a)\big)-\int_a^b v\,du$
- ការបំបែកចន្លោះ ៖ បើមានតម្លៃដាច់ខាត $|f(x)|$ ត្រូវរកឫស $f(x)=0$ រួចបំបែកចន្លោះ $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$។

## ៤. លក្ខណៈវិសមភាព និងទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

1. លក្ខណៈវិជ្ជមាន ៖ បើ $f(x) \geq 0$ លើ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$។
2. លក្ខណៈលំដាប់ ៖ បើ $f(x) \leq g(x)$ លើ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$។
3. វិសមភាពតម្លៃដាច់ខាត ៖ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
4. ការកំណត់ព្រំដែនតម្លៃ ៖ បើ $m \leq f(x) \leq M$ លើ $[a,b]$ នោះ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$។
5. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម ៖ បើ $f$ ជាប់លើ $[a,b]$ នោះមាន $c \in [a,b]$ យ៉ាងតិចមួយដែល ៖

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

## ៥. អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ស៊ីមេទ្រី លើចន្លោះ $[-a,a]$

- អនុគមន៍គូ $(f(-x) = f(x))$ ៖ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- អនុគមន៍សេស $(f(-x) = -f(x))$ ៖ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

## ៦. អនុគមន៍ខួប រូបមន្ត Leibniz និង King's Property

a. អនុគមន៍ខួប $(f(x+T) = f(x))$ ៖ $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$ និង $\int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$

b. ដេរីវេនៃអាំងតេក្រាល (Leibniz Rule) ៖ $\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right] = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

c. រូបមន្តប្តូរអថេរ King's Property ៖ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

## ឃ ៖ រូបមន្តធរណីមាត្រ និងរូបវិទ្យាអនុវត្ត (Applications of Integrals)

### ១. ការគណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ (Plane Areas)

1. ផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាប $(C): y = f(x)$, អ័ក្ស $Ox$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = a, x = b$ ៖

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃ})$$

- បើ $f(x) \geq 0$ លើ $[a,b] \implies S = \int_a^b f(x)\,dx$
- បើ $f(x) \leq 0$ លើ $[a,b] \implies S = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [-f(x)]\,dx$
- បើ $f(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $c \in (a,b) \implies S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

2. ផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $(C_1): y = f(x)$ និង $(C_2): y = g(x)$ លើ $[a,b]$ ៖

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \quad \left(\text{បើ } f(x) \geq g(x) \implies S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right)$$

3. ផ្ទៃគណនាធៀបនឹងអ័ក្សអ័រដោនេ $Oy$ លើចន្លោះ $[c,d]$ ៖

$$S = \int_c^d |g(y)|\,dy \quad \text{ឬ} \quad S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy \quad (f(y) \geq g(y))$$

### ២. ឧទាហរណ៍គំរូគណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ (Plane Area Example)

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $(C): y = 4 - x^2$ និងអ័ក្ស $Ox$ $(y = 0)$ ៖

- សមីការអាប់ស៊ីស ៖ $4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2$ (នាំឱ្យព្រំដែន $a = -2, b = 2$)
- លើចន្លោះ $[-2,2]$ ក្រាបស្ថិតនៅខាងលើអ័ក្ស $Ox$ $(y \geq 0)$
- ផ្ទៃក្រឡា ៖ $S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ

## ៣. ការគណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត (Volumes of Solids of Revolution)

1. វង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស $Ox$ (ចន្លោះ $x=a$ ដល់ $x=b$) ៖

- វិធីសាស្ត្រថាស (Disk) ៖ $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ (ឯកតាមាឌ)
- វិធីសាស្ត្រក្រវិល (Washer) ៖ $V=\pi\int_a^b \left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$ $(|f(x)|\geq|g(x)|)$

2. វង្វិល ជុំវិញ អ័ក្សអ័រដោនេ $Oy$ (ចន្លោះ $y=c$ ដល់ $y=d$) ៖ $V=\pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy$ ឬ $V=\pi\int_c^d \left([R(y)]^2-[r(y)]^2\right)dy$

3. វិធីសាស្ត្រសំបកស៊ីឡាំង (Cylindrical Shell Method) ៖ វង្វិលជុំវិញ $Oy$ ៖ $V=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\,dx$

## ៤. ឧទាហរណ៍គំរូគណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត (Volume Example)

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលបានពីការវង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $Ox$ នូវផ្ទៃខណ្ឌដោយ $y=\sqrt{x}$, $x=4$ និង $y=0$ ៖

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi \quad \text{(ឯកតាមាឌ)}$$

### ៥. ការគណនាប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង (Arc Length of Curves)

a. ខ្សែកោង $y = f(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ៖

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad (\text{ឯកតាប្រវែង})$$

b. ខ្សែកោង $x = g(y)$ លើចន្លោះ $[c,d]$ ៖

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

c. ខ្សែកោងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x = x(t), y = y(t)$ លើ $[t_1,t_2]$ ៖

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

### ៦. កម្មវិធីអនុវត្តនៃអាំងតេក្រាលក្នុងរូបវិទ្យា (Physics Applications)

1. ចលនាត្រង់ ៖ ចម្ងាយចរ បម្លាស់ទី និងល្បឿន

- អនុគមន៍ល្បឿនពីសំទុះ ៖ $v(t) = \int a(t)\,dt = v_0 + \int_0^t a(t)\,dt$
- អនុគមន៍ទីតាំងពីល្បឿន ៖ $s(t) = \int v(t)\,dt = s_0 + \int_0^t v(t)\,dt$
- បម្លាស់ទី ៖ $\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ ចម្ងាយសរុប ៖ $d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$

2. ការងារនៃកម្លាំងអថេរ ៖ $W = \int_a^b F(x)\,dx$ (រ៉ឺស័រ Hooke: $F = kx \implies W = \frac{1}{2}k(b^2-a^2)$)

## ៧. រូបមន្តផលបូកគ្រឹះសម្រាប់ផលបូក Riemann (Summation Formulas)

a. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

b. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

c. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

## ៨. តារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

| មុំជាដឺក្រេ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| មុំជារ៉ាដ្យង់ $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\|\|$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |
| $\cot x$ | $\|\|$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\|\|$ |

## ៩. យុទ្ធសាស្ត្រគន្លឹះដោះស្រាយលំហាត់អាំងតេក្រាលក្នុងវិញ្ញាសាបាក់ឌុប

1. **សង្កេតកន្សោមអាំងតេក្រង់ ៖** ពិនិត្យមើលថាតើជាទម្រង់ស្វ័យគុណ $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, ឬទម្រង់ប្តូរអថេរត្រង់ណា។
2. **អនុវត្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ៖** ប្រើវិធាន ILATE ជានិច្ច ពិសេសកាលណាឃើញ $\ln x$ ត្រូវតាង $u = \ln x$។
3. **ចំពោះអាំងតេក្រាលកំណត់ ៖** គណនាឱ្យបានប្រុងប្រយ័ត្នត្រង់ $F(b) - F(a)$ និងកុំភ្លេចប្តូរព្រំដែនពេលប្តូរអថេរ។
4. **ផ្ទៃក្រឡា និងមាឌ ៖** ត្រូវកំណត់ចំណុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងជាមុន ដើម្បីរកព្រំដែនអាំងតេក្រាល និងពិនិត្យសញ្ញាខ្សែកោងលើ-ក្រោម។

# ឯកសារយោង


1. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

2. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

3. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** ៖ សៀវភៅគ្រូ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

4. **នាយកដ្ឋានជានាគុណភាពអប់រំ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ *(*បាក់ឌុប) គណិតវិទ្យា *(*២០១៤-២០២៥), ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា។

5. **នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹតការ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, រាជធានីភ្នំពេញ។

6. **Stewart, James** (2016) ៖ *Calculus: Early Transcendentals* (8th Edition), Cengage Learning, Boston, USA.

7. **Thomas, George B., Weir, Maurice D., & Hass, Joel** (2018) ៖ *Thomas' Calculus* (14th Edition), Pearson Education, New York, USA.

8. **Larson, Ron, & Edwards, Bruce** (2018) ៖ *Calculus* (11th Edition), Cengage Learning, USA.

9. **Spivak, Michael** (2008) ៖ *Calculus* (4th Edition), Publish or Perish, Houston, Texas.