

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

DIFFERENTIAL EQUATIONS -- GRADE 12

ថ្នាក់ទី ១២ • GRADE 12

ជ្រើសរើសទ្រឹស្តី • វិធីសាស្ត្រគណនា • លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ
គ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ឆ្នាំទី១) និងប្រឡងសិស្សពូកែ

រូបមន្តគ្រឹះនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល • CORE ODE FORMULAS

$$y' + ay = 0 \implies y = Ce^{-ax}$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \implies ar^2 + br + c = 0$$

$$y' + ay = p(x) \implies y = y_c + y_p$$

$$\Delta > 0 \implies y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$g(y) dy = f(x) dx \implies \int g(y) dy = \int f(x) dx$$

$$\Delta < 0 \implies y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

អ្នករៀបរៀង ៖ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០២៦

គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យ

គណៈកម្មការរៀបរៀង

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

ត្រួតពិនិត្យឌីមសារ

លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

រៀបចំឌីមសារ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

រចនាគម្រប និងទំព័រ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

រូបភាព និងតារាង

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

កែសម្រួលអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

គណៈកម្មការពិនិត្យចុងក្រោយ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ក្នុងការស្វ័យសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

ព័ត៌មានសៀវភៅ

កំណែសាកល្បង © ២០២៦

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ថ្នាក់ទី១២

DIFFERENTIAL EQUATIONS - GRADE 12

រៀបរៀងដោយ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

សម្រាប់បោះពុម្ពផ្សាយ៖ បណ្ណាគារអង្គរ

ប្រសិទ្ធពរ និងការឧទ្ទិស

សៀវភៅ «សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ថ្នាក់ទី១២» មួយក្បាលនេះ
ត្រូវបានបង្កើតឡើង និងឧទ្ទិសជូនយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រចំពោះ ៖

មាតាបិតាជាតិគោរពសក្ការៈដ៏ខ្ពង់ខ្ពស់បំផុត

ដែលបានលះបង់កម្លាំងកាយចិត្ត ឧបត្ថម្ភគាំទ្រ និងផ្តល់ក្តីស្រឡាញ់ឥតព្រំដែន
ក្នុងការផ្តល់ឱកាសឱ្យកូនបានក្រេបជញ្ជក់ចំណេះវិជ្ជា និងរីកចម្រើនរហូតមកដល់បច្ចុប្បន្ន។

លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់ជំនាន់

ដែលជាអ្នកផ្តល់ពន្លឺប្រាជ្ញា ណែនាំមាត់ដំត្រចះត្រចង់
និងបណ្តុះបណ្តាលសិស្សានុសិស្សឱ្យក្លាយជាទំពាំងស្នងប្រសើរដ៏មានសមត្ថភាព។

ម្ចាស់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ទាំងអស់

ដែលកំពុងខិតខំប្រឹងប្រែងរៀនសូត្រ ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
និងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស សូមឱ្យទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ៗគ្នា!

ដោយសេចក្តីគោរព និងស្រឡាញ់ដ៏ជ្រាលជ្រៅ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យា គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដ៏មានសារៈសំខាន់បំផុត ក្នុងការអភិវឌ្ឍការគិតបែបសមហេតុផល វិភាគស៊ីជម្រៅ និងការដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ បច្ចេកវិទ្យា វិស្វកម្ម និងជីវភាពរស់នៅជាក់ស្តែង។ ក្នុងចំណោមប្រធានបទគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ «សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល» (Differential Equations) គឺជាស្នូលដ៏សំខាន់នៃគណិតវិភាគកម្រិតខ្ពស់ ដែលជាស្ថានភាពភ្ជាប់រវាងគំនិតគណិតវិទ្យាអរូបី ទៅនឹងបាតុភូតរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវសាស្ត្រ និងសេដ្ឋកិច្ច។ ការចេះដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់បំផុតសម្រាប់សិស្សានុសិស្សគ្រប់រូប ទាំងក្នុងការត្រៀមខ្លួនប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

សៀវភៅ «សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ថ្នាក់ទី១២» មួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងហ្មត់ចត់ ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាផ្លូវការនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដោយបែងចែកខ្លឹមសារជា ៣ មេរៀនចម្បងៗ ៖

- **មេរៀនទី១ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរដាប៌ងទី១** — ពន្យល់ពីសញ្ញាណ និងនិយមន័យនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១, សមីការទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$, សមីការញែកអថេរបាន $g(y)dy = f(x)dx$, សមីការលីនេអ៊ែរដាប៌ងទី១ មេគុណថេរអូម៉ូសែន $y' + ay = 0$, សមីការមិនអូម៉ូសែន $y' + ay = p(x)$ តាមវិធីស្វែងរកចម្លើយពិសេស និងតាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេររបស់ Lagrange អមដោយឧទាហរណ៍ និងលំហាត់អនុវត្តន៍ចម្រុះ។
- **មេរៀនទី២ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរដាប៌ងទី២** — ផ្តោតលើសមីការលីនេអ៊ែរដាប៌ងទី២ អូម៉ូសែនមានមេគុណថេរ $ay'' + by' + cy = 0$, វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយតាមសមីការសម្គាល់ $ar^2 + br + c = 0$ ក្នុងករណី $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ និង $\Delta < 0$, ព្រមទាំងវិធីដោះស្រាយសមីការមិនអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = p(x)$ តាមវិធីសាស្ត្រកំណត់មេគុណ (Undetermined Coefficients) និងលំហាត់ជំពូកជាក់ស្តែង។
- **មេរៀនទី៣ ៖ អនុវត្តន៍នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងលំហាត់ប្រឡងបាក់ឌុប** — បង្ហាញពីការអនុវត្តជាក់ស្តែងក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រពិតដូចជា កំណើនប្រជាជន, ការបំបែកនៃធាតុវិទ្យុសកម្ម និងកន្លះជីវិត, ច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុន, ចលនាក្នុងមជ្ឈដ្ឋានទប់, លំយោលមេកានិចនៃប្រព័ន្ធរ៉ឺស័រ ព្រមទាំងកម្រងប្រធានវិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុបថ្នាក់ជាតិឆ្នាំ ២០១៤ ដល់ ២០២៤ អមដោយដំណោះស្រាយគំរូយ៉ាងលម្អិត។

សៀវភៅនេះត្រូវបានរចនាឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់តាមក្បួនខ្នាតបោះពុម្ពទំនើប មានគំនូសក្រាហ្វិក TikZ ច្បាស់ត្រឹមត្រូវ ប្លង់ទំព័រស្អាតបាត និងមានផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់គំរូ ព្រមទាំងឧបសម្ព័ន្ធរូបមន្តសង្ខេបដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់ការរំលឹកមេរៀន។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមគ្គុទេសក៍ និងជាកម្រងឯកសារជំនួយស្នូលគឺដ៏មានតម្លៃបំផុតសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្អូនៗសិស្សានុសិស្សក្នុងការបង្រៀននិងរៀន។ ទោះបីជាមានការខិតខំប្រឹងប្រែងយ៉ាងណាក្តី ក៏សៀវភៅនេះប្រាកដជាមិនអាចជៀសផុតពីកំហុសអចេតនាណាមួយឡើយ។ ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិវិចិត្រស្តាប់នាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកអានដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី..... ខែ..... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

សេចក្តីជីខគុណ

ជាបឋម ខ្ញុំបាទ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធ សូមលំឱនកាយវាចាចិត្ត ថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុត ជូនចំពោះលោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ គឺមាតា និងបិតារបស់ខ្ញុំ ដែលលោកទាំងពីរបានពលិកម្មគ្រប់បែបយ៉ាង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សាផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ និងអប់រំទូន្មានប្រៀនប្រដៅខ្ញុំបាទតាំងពីកុមារភាព រហូតធ្វើឱ្យខ្ញុំអាចឈរយ៉ាងរឹងមាំនៅលើវិថីជីវិតមួយនេះ។ បើគ្មានការលះបង់ និងសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏មហាសាលពីលោកទាំងពីរទេ នោះខ្ញុំបាទក៏ប្រហែលជាគ្មានថ្ងៃនេះឡើយ។

ជាបន្តបន្ទាប់ ខ្ញុំបាទសូមសម្តែងនូវសេចក្តីគោរពដឹងគុណយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រ ជូនចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ តាំងពីកម្រិតបឋមសិក្សា រហូតដល់ថ្នាក់សាកលវិទ្យាល័យ ដែលបានខិតខំចំណាយកម្លាំងកាយចិត្តក្នុងការផ្ទេរនូវចំណេះដឹង និងបណ្តុះបណ្តាលរូបខ្ញុំឱ្យក្លាយជាធនធានមនុស្សមួយរូបប្រកបដោយសមត្ថភាព។ រាល់ដំបូន្មានដែលទទួលបានពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ គឺជាប្រទិបបំភ្លឺផ្លូវដែលតែងតែចង្អុលបង្ហាញឱ្យខ្ញុំបាទដើរលើកន្លងដ៏ត្រឹមត្រូវ។

ជាពិសេសលើសពីនេះទៅទៀត ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងធ្វើជូននូវសេចក្តីស្រឡាញ់ដ៏ធំធេងមិនអាចកាត់ថ្លៃបាន ជូនចំពោះភរិយាជាទីស្រឡាញ់របស់ខ្ញុំ គឺលោកស្រី ង៉ែត សុគន្ធា ព្រមទាំងកូនស្រីជាទីស្រឡាញ់ ខែម សោភា ដែលតែងតែនៅក្បែរ ផ្តល់ភាពកក់ក្តៅ មើលថែទាំ លើកទឹកចិត្ត និងលះបង់គ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យខ្ញុំបាទមានពេលវេលាពេញលេញក្នុងការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងសៀវភៅមួយក្បាលនេះឡើងរហូតទទួលបានជោគជ័យ។

សៀវភៅ «**សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ មិនអាចលេចចេញជារូបរាងឡើងបានឡើយប្រសិនបើគ្មានការលើកទឹកចិត្តពីមនុស្សជាច្រើនជុំវិញខ្លួនខ្ញុំ។ ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់មិត្តភក្តិ បងប្អូន និងសហការីទាំងអស់ដែលតែងតែផ្តល់មតិយោបល់ ជួយកែសម្រួល និងជួយជំរុញទឹកចិត្តខ្ញុំនៅក្នុងដំណើរការនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះជាភាសា LATEX ។ ជាចុងបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមប្រសិទ្ធពរជ័យ សិរីសួស្តី ជ័យមង្គល ជូនដល់លោកអ្នកមានគុណ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ភរិយាកូនស្រី ព្រមទាំងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមប្រកបដោយសុខភាពល្អបរិបូណ៌ ប្រាជ្ញាក្តីថ្លា ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និងសម្រេចបាននូវរាល់បំណងប្រាថ្នាក្នុងជីវិតជានិរន្តរ៍។

ថ្ងៃទី..... ខែ..... ឆ្នាំ២០២៦
លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធ

តារាងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ	អានថា / ការប្រើប្រាស់
$y, f(x)$	អនុគមន៍អថេរ x ដែលត្រូវស្វែងរក	អនុគមន៍អញ្ញាតនៃសមីការ
$y', \frac{dy}{dx}$	ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍ y ធៀបនឹង x	ឌី y លើ ឌី x (ល្បឿនបម្រែបម្រួល)
$y'', \frac{d^2y}{dx^2}$	ដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ y ធៀបនឹង x	ដេរីវេទីពីរ (សំទុះ ឬកម្រោងកោង)
$y^{(n)}$	ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ y	ដេរីវេលំដាប់ទី n
dx, dy, dt	ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអថេរ x, y, t	កំណើនតូចល្អិតបំផុត
$ay' + by = 0$	សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់១ អូម៉ូសែន	អង្គទី២ ស្មើសូន្យ
$ay' + by = p(x)$	សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់១ មិនអូម៉ូសែន	$p(x) \neq 0$ ជាអនុគមន៍ប្រភព
y_c, y_h	ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន	Complementary / Homogeneous Solution
y_p	ចម្លើយពិសេសនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន	Particular Solution
$y = y_c + y_p$	ចម្លើយទូទៅនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន	ចម្លើយពេញលេញនៃសមីការលីនេអ៊ែរ
$ay'' + by' + cy = 0$	សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មេគុណថេរ	សមីការលំដាប់ពីរអូម៉ូសែន
$ar^2 + br + c = 0$	សមីការសម្គាល់ (Characteristic Eq.)	សមីការដឺក្រេទីពីរជំនួយ
$\Delta = b^2 - 4ac$	ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការសម្គាល់	សម្រាប់វិភាគករណីឫស
r_1, r_2	ឫសនៃសមីការសម្គាល់	ឫសពិត ឬឫសកុំផ្លិចឆ្លាស់
A, B, C, C_1, C_2	ចំនួនថេរបំពានក្នុងចម្លើយ	កំណត់បានតាមលក្ខខណ្ឌដើម
$y(x_0) = y_0$	លក្ខខណ្ឌដើម (Initial Condition)	សម្រាប់កំណត់រកចម្លើយពិសេស
$T_{1/2}$	កន្លះជីវិតនៃសារធាតុវិទ្យុសកម្ម	$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
k, λ	មេគុណសមាមាត្រ ឬថេររលាយ	ថេរអត្រាកំណើន ឬអត្រាថយ
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	សំណុំចំនួនពិត និងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច	$x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

មាតិកា

ខ្លឹមសារ

ទំព័រ

មេរៀនទី ១ : សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១	9
១ សញ្ញាណសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១	9
២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១	10
៣ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី 2 ស្មើសូន្យ)	14
៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី ១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន (អង្គទី ២ ខុសពីសូន្យ)	16
៥ ដំណោះស្រាយសមីការ $y' + ay = p(x)$ តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ	17
៦ សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) មេរៀនទី១ (១០០ លំហាត់)	19
៧ លំហាត់អនុវត្តន៍	27
មេរៀនទី ២ : សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២	49
១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២អូម៉ូសែន	49
២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ ២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរ	49
៣ វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ ២ មិនអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = p(x)$	53
៤ សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) មេរៀនទី២ (១០០ លំហាត់)	57
៥ លំហាត់អនុវត្តន៍	66
៦ លំហាត់ជំពូក	90
មេរៀនទី ៣ : អនុវត្តន៍នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល	109
១ ម៉ូដែលគណិតវិទ្យា និងអនុវត្តន៍ក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ	109
២ ឧទាហរណ៍គំរូ និងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ	112
៣ សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) មេរៀនទី៣ (១០០ លំហាត់)	117
៤ លំហាត់អនុវត្តន៍	126
កម្រងប្រធានវិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប (២០១៤-២០២៦)	137
ផ្នែកទី១ ៖ ប្រធានវិញ្ញាសាប្រឡងផ្លូវការ (២០១៤ - ២០២៦)	137
ផ្នែកទី២ ៖ វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុបជ្រើសរើសពិសេស	150
ផ្នែកដំណោះស្រាយ	155
ដំណោះស្រាយកម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប (២០១៤-២០២៦)	177
ឧបសម្ព័ន្ធ ៖ តារាងរូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រគន្លឹះនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល	187
ក ៖ តារាងសង្ខេបវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១	187
ខ ៖ តារាងសង្ខេបវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២	188
គ ៖ តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវ និងដេរីវេគ្រឹះដែលត្រូវប្រើជាប្រចាំ	189
ឃ ៖ សទ្ទានុក្រមពាក្យគន្លឹះ និងគំរូម៉ូដែលអនុវត្តន៍ក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ និងសេដ្ឋកិច្ច	190
ឯកសារយោង	193



១ សញ្ញាណសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១

និយមន័យ ១

:

- សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ជាទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ ដេរីវេទី 1 របស់អនុគមន៍នេះ អថេរ និង ចំនួនថេរ។
- ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ជាអនុគមន៍មួយដែលអនុគមន៍នេះ និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។
- លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺជាលំដាប់នៃដេរីវេខ្ពស់ជាងគេក្នុងសមីការ។

លំហាត់គំរូ ១

គេមានអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត k ។ សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមាន $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។

ដំណោះស្រាយ

គេមានអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ (k ជាចំនួនពិតថេរ) ។
 ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីររៀបរៀងអថេរ x ៖

$$y' = (ke^{-3x})' = k(-3)e^{-3x} = -3ke^{-3x}$$

 ដោយសារ $y = ke^{-3x}$ នោះគេជំនួសចូលបាន ៖

$$y' = -3y \iff y' + 3y = 0$$

 ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមាន $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅគឺ $y' + 3y = 0$ ។

លំហាត់គំរូ ២

បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវគ្នាបស់វា ៖

១. អនុគមន៍ $y = ke^{-\frac{x}{2}}$ សមីការ $2y' + y = 0$

២. អនុគមន៍ $y = 5 \tan 5x$ សមីការ $y' - y^2 = 25$

ដំណោះស្រាយ

១. គេមាន $y = ke^{-\frac{x}{2}}$ ។ គណនាដេរីវេទីមួយ ៖

$$y' = k \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} ke^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} y$$

ជំនួស y' ចូលក្នុងអង្គខាងធ្វេងនៃសមីការ $2y' + y = 0$ ៖

$$2y' + y = 2 \left(-\frac{1}{2} y \right) + y = -y + y = 0$$

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់។ ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = ke^{-\frac{x}{2}}$ ពិតជាចម្លើយនៃសមីការ $2y' + y = 0$ ។

២. គេមាន $y = 5 \tan 5x$ ។ គណនាដេរីវេទីមួយ ៖

$$y' = 5 \cdot 5(1 + \tan^2 5x) = 25(1 + \tan^2 5x) = 25 + 25 \tan^2 5x$$

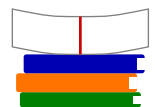
ដោយ $y^2 = (5 \tan 5x)^2 = 25 \tan^2 5x$ នាំឱ្យ ៖

$$y' = 25 + y^2 \iff y' - y^2 = 25$$

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់។ ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = 5 \tan 5x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - y^2 = 25$ ។

២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១

២.១ សមីការមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$



ជាទូទៅ ១

- សរសេរ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ជាទម្រង់ $dy = f(x)dx$
- រកអាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរ : $\int dy = \int f(x)dx$ ឬ $y = \int f(x)dx + c$, c ជាចំនួនថេរ
- $y = \int f(x)dx + c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx} = f(x)$
- រកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ គឺយក x_0 និង y_0 ទៅជំនួសក្នុងចម្លើយទូទៅ រួចទាញយក $c = y_0 - F(x_0)$
 $y = \int f(x)dx + y_0 - F(x_0)$ ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌ $y(x_0) = y_0$ ។

លំហាត់គំរូ

៣

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

១. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

២. $y' = 6x^2 + 4x + 5$

៣. $y' = xe^{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការ $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1} \iff dy = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ ។
 ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ ៖

$$y = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

(ដោយសារ $x^2 + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះពុំបាច់ដាក់តម្លៃដាច់ខាតឡើយ)។
 ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = \ln(x^2 + 1) + C$ (C ជាចំនួនថេរ)។

២. សមីការ $y' = 6x^2 + 4x + 5 \iff dy = (6x^2 + 4x + 5) dx$ ។
 ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ ៖

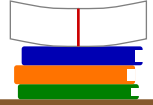
$$y = \int (6x^2 + 4x + 5) dx = 2x^3 + 2x^2 + 5x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = 2x^3 + 2x^2 + 5x + C$ (C ជាចំនួនថេរ)។

៣. សមីការ $y' = xe^{x^2} \iff dy = xe^{x^2} dx$ ។
 ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ ៖

$$y = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ (C ជាចំនួនថេរ)។



២.២ សមីការមានទម្រង់ $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$

និយមន័យ ២

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចព្រែកអថេរបាន ជាសមីការដែលក្រោយពីសម្រួលរួច មានទម្រង់ទូទៅ :

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \quad ។$$

ជាទូទៅ ២

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចព្រែកអថេរបានគេត្រូវ៖

- សរសេរសមីការឱ្យទៅជា រាង : $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$
- ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំង 2 ធៀបនឹងអថេរ x :
 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ សមមូល $G(y) = F(x) + c$ (c ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន)
 $G(y)$ ជាព្រីមីទីនៃអនុគមន៍ $g(y)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

លំហាត់គំរូ

៤

ក្នុងចំណោមសមីការខាងក្រោម តើសមីការណាខ្លះដែលអាចព្រែកអថេរបាន ?

១. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+1)}{y}$ ២. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ ៣. $\frac{dy}{dx} = \ln(xy)$ ៤. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

ដោះស្រាយសមីការដែលព្រែកអថេរបាន តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(2) = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

- **ការសម្គាល់សមីការដែលអាចព្រែកអថេរបាន ៖ **

១. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+1)}{y} \iff \frac{y}{y+1} dy = 2x dx \implies$ អាចព្រែកអថេរបាន។
២. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x^2}{xy} \implies$ មិនអាចព្រែកអថេរបានដោយផ្ទាល់ (ជាសមីការអូម៉ូសែន)។
៣. $\frac{dy}{dx} = \ln(xy) = \ln x + \ln y \implies$ មិនអាចព្រែកអថេរបាន។
៤. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x \cdot e^y \iff e^{-y} dy = e^x dx \implies$ អាចព្រែកអថេរបាន។

- **ដោះស្រាយសមីការដែលព្រែកបានតាមលក្ខខណ្ឌ $y(2) = 0$ ៖ **

- ចំពោះសមីការ (១) ៖ $\frac{y}{y+1} dy = 2x dx \iff \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = 2x dx$

$$\int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int 2x dx \iff y - \ln|y+1| = x^2 + C$$

ជំនួស $x=2, y=0$ ៖ $0 - \ln|1| = 2^2 + C \implies 0 = 4 + C \implies C = -4$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសគឺ $y - \ln|y+1| = x^2 - 4$

- ចំពោះសមីការ (៤) ៖ $e^{-y} dy = e^x dx \implies -e^{-y} = e^x + C$

ជំនួស $x=2, y=0$ ៖ $-e^0 = e^2 + C \implies -1 = e^2 + C \implies C = -1 - e^2$

គេបាន $-e^{-y} = e^x - 1 - e^2 \iff e^{-y} = 1 + e^2 - e^x \iff y = -\ln(1 + e^2 - e^x)$

លំហាត់គំរូ

៥

ក្នុងចំណោមសមីការខាងក្រោម តើសមីការណាខ្លះដែលអាចព្រែកអថេរបាន ?

១. $y' = 3 + y$

២. $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

៣. $y' = y^2 - 4$

៤. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{xy} + y$

ដោះស្រាយសមីការដែលព្រែកអថេរបាន តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = -2$ ។

ដំណោះស្រាយ

• **ការសម្គាល់សមីការដែលព្រែកអថេរបាន ៖ **

១. $y' = 3 + y \iff \frac{dy}{y+3} = dx \implies$ អាចព្រែកអថេរបាន។

២. $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) \implies$ មិនអាចព្រែកអថេរបាន។

៣. $y' = y^2 - 4 \iff \frac{dy}{y^2 - 4} = dx \implies$ អាចព្រែកអថេរបាន។

៤. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1+xy^2}{xy} \implies$ មិនអាចព្រែកអថេរបាន។

• **ដោះស្រាយសមីការដែលព្រែកបានតាមលក្ខខណ្ឌ $y(0) = -2$ ៖ **

- ចំពោះសមីការ (១) ៖ $\frac{dy}{y+3} = dx \implies \ln|y+3| = x + C$

ជំនួស $x=0, y=-2$ ៖ $\ln|-2+3| = 0 + C \implies C = \ln 1 = 0$

នាំឱ្យ $\ln(y+3) = x \iff y+3 = e^x \iff y = e^x - 3$

- ចំពោះសមីការ (៣) ៖ $y' = y^2 - 4$

សង្កេតឃើញថា ចំពោះអនុគមន៍ថេរ $y(x) \equiv -2$ នោះ $y' = 0$ ហើយ $(-2)^2 - 4 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

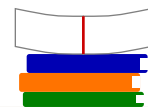
ភ្លាមៗ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $y(0) = -2$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសគឺអនុគមន៍ថេរ $y = -2$

៣

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរ អូម៉ូសែន (អង្គទី 2 ស្មើសូន្យ)

៣.១ និយមន័យ



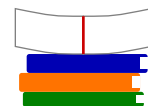
និយមន័យ ៣

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី 2 ស្មើសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ ៖

$$y' + ay = 0 \quad (a \text{ ជាចំនួនថេរពិត})$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរពិតណាមួយ។

៣.២ របៀបដោះស្រាយសមីការ $y' + ay = 0$



គេអាចសរសេរ ៖

$$y' = -ay \iff \frac{dy}{dx} = -ay$$

តាមវិធីប្រែកម្រិត គេបាន $\frac{dy}{y} = -a dx$ ។

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ ៖

$$\int \frac{dy}{y} = \int -a dx$$

$$\ln |y| = -ax + c$$

$$|y| = e^{-ax+c} = e^c \cdot e^{-ax}$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{-ax}$$

តាង $A = \pm e^c$ (ជាចំនួនថេរពិតមិនសូន្យ រួមទាំង $A = 0$ ចំពោះចម្លើយ $y \equiv 0$) គេបាន ៖

$$y = Ae^{-ax} \quad (A \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ $y = Ae^{-ax}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 អូម៉ូសែន។

លំហាត់គំរូ

៦

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + y = 0$ ។ រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការនេះ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(0) = -1, y(0) = 1, y(1) = 1$

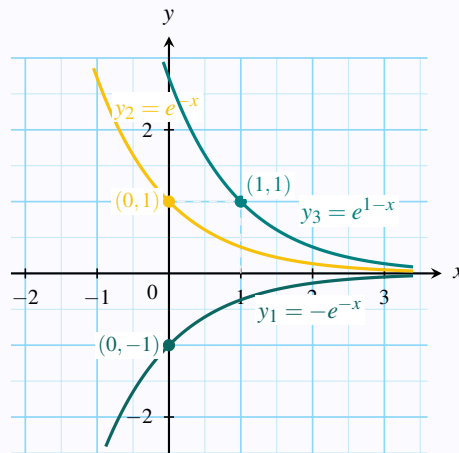
រួចសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ចម្លើយនីមួយៗ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការ $y' + y = 0$ មានរាង $y' + ay = 0$ ដែល $a = 1$ ។
ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖

$$y = Ce^{-x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

- បើ $y(0) = -1 \Rightarrow Ce^0 = -1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y_1 = -e^{-x}$
- បើ $y(0) = 1 \Rightarrow Ce^0 = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y_2 = e^{-x}$
- បើ $y(1) = 1 \Rightarrow Ce^{-1} = 1 \Rightarrow C = e \Rightarrow y_3 = e \cdot e^{-x} = e^{1-x}$



លំហាត់គំរូ

៧

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-y' + 2y = 0$ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(3) = -2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $-y' + 2y = 0 \iff y' - 2y = 0$ (ទម្រង់ $y' + ay = 0$ ដែល $a = -2$)។
ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = Ce^{-(-2)x} = Ce^{2x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(3) = -2$ គេបាន ៖

$$Ce^{2(3)} = -2 \iff Ce^6 = -2 \iff C = -2e^{-6}$$

ជំនួស C ចូលក្នុងចម្លើយទូទៅ ៖

$$y = (-2e^{-6})e^{2x} = -2e^{2x-6} = -2e^{2(x-3)}$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសដែលត្រូវរកគឺ $y = -2e^{2(x-3)}$ ។

លំហាត់គំរូ ៨

រកអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការ $3y' + 6y = 0$ ដែលខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(-4, 2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង 3 គេបាន ៖

$$3y' + 6y = 0 \iff y' + 2y = 0$$

ចម្លើយទូទៅគឺ $y = Ce^{-2x}$ ($C \in \mathbb{R}$) ។

ដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំណុច $(-4, 2)$ នោះគេបាន $y(-4) = 2$ ៖

$$Ce^{-2(-4)} = 2 \iff Ce^8 = 2 \iff C = 2e^{-8}$$

ជំនួស C ចូលក្នុងចម្លើយទូទៅ ៖

$$y = (2e^{-8})e^{-2x} = 2e^{-2(x+4)}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយដែលត្រូវរកគឺ $y = 2e^{-2(x+4)}$ ។

៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអ៊ីលីដាប់ទី ១ មេគុណថេរ មិនអូម៉ូសែន (អង្គទី ២ ខុសពីសូន្យ)

និយមន័យ ៤

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអ៊ីលីដាប់ទី ១ មេគុណថេរ (អង្គទី ២ ខុសពីសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y' + ay = p(x)$, a ជាចំនួនថេរ និង $p(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ជំនួញទី ៣

របៀបដោះស្រាយសមីការ $y' + ay = p(x)$

ដើម្បីដោះស្រាយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអ៊ីលីដាប់ទី ១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន $y' + ay = p(x)$ ដែល $p(x) \neq 0$ គេត្រូវ ៖

១. រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + ay = 0$ តាងដោយ $y_c = Ae^{-ax}$

២. រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' + ay = p(x)$ តាងដោយ y_p ដែល y_p មានរាងដូច $p(x)$

ex: $p(x)$ ជីក្រេទី ១ តាង $y_p = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$p(x)$ ជីក្រេទី ២ តាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ដែល $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

៣. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + ay = p(x)$ គឺអនុគមន៍ y ដែល $y = y_c + y_p$

៥

ដំណោះស្រាយសមីការ $y' + ay = p(x)$ តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

ជំហានទី ៤

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $y' + ay = p(x) : (E), p(x) \neq 0$ នោះគេត្រូវ៖

១. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + ay = 0$ គឺ មានរាង $y = Ae^{-ax}$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន)
២. ក្នុងចម្លើយ $y = Ae^{-ax}$ ជំនួសចំនួនថេរ A ដោយអនុគមន៍ $A(x)$
៣. ពី $y = A(x)e^{-ax}$ ទាញរក y' រួចយក y និង y' ជំនួសក្នុងសមីការ $y' + ay = p(x)$

ដើម្បីទាញរក $A(x)$ គេបាន ៖

$$y = A(x)e^{-ax} \Rightarrow y' = A'(x)e^{-ax} - aA(x)e^{-ax}$$

$$(E) : y' + ay = p(x)$$

$$A'(x)e^{-ax} - aA(x)e^{-ax} + aA(x)e^{-ax} = p(x)$$

$$A'(x)e^{-ax} = p(x)$$

$$A'(x) = e^{ax}p(x)$$

$$\Rightarrow A(x) = \int e^{ax}p(x)dx + c$$

$$\text{ដូចនេះ } y = e^{-ax} \left[\int e^{ax}p(x)dx + c \right]$$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $y = ce^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax}p(x)dx$

ដែល $y_c = ce^{-ax}$ និង $y_p = e^{-ax} \int e^{ax}p(x)dx$

លំហាត់គំរូ

៩

ដោះស្រាយសមីការ $y' + y = 2e^x \quad (E)$

ដំណោះស្រាយ

សមីការ $(E) : y' + y = 2e^x$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរដាច់ដាច់ទី១ មិនអូម៉ូសែន។

របៀបទី១ ៖ តាមវិធីមេគុណមិនកំណត់ ($y = y_c + y_p$)

- ចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0$ គឺ $y_c = Ce^{-x}$ (C ជាចំនួនថេរ)។
- រកចម្លើយពិសេស y_p ៖ ដោយអង្គទីពីរគឺ $p(x) = 2e^x$ គេតាង $y_p = Ae^x$ ។
គណនា $y'_p = Ae^x$ រួចជំនួសចូលក្នុង (E) ៖

$$Ae^x + Ae^x = 2e^x \iff 2Ae^x = 2e^x \iff 2A = 2 \iff A = 1$$

នាំឱ្យ $y_p = e^x$ ។

- ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = y_c + y_p = Ce^{-x} + e^x$ ($C \in \mathbb{R}$)។

របៀបទី២ ៖ តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

- តាង $y = C(x)e^{-x} \implies y' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$ ។
- ជំនួសចូលក្នុង (E) ៖

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = 2e^x \iff C'(x)e^{-x} = 2e^x \iff C'(x) = 2e^{2x}$$

- នាំឱ្យ $C(x) = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} + C_0$ ($C_0 \in \mathbb{R}$)។
- ជំនួស $C(x)$ ត្រឡប់មកវិញ ៖ $y = (e^{2x} + C_0)e^{-x} = e^x + C_0e^{-x}$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = Ce^{-x} + e^x$ (C ជាចំនួនថេរ)។

៦ សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) បេឡេនទី១ (១០០ លំហាត់)

១. លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' + 5y = 0$ គឺ ៖
 - ក. ០
 - ខ. ១
 - គ. ២
 - ឃ. ៥
 ២. លំដាប់នៃសមីការ $(y')^3 + 4y = x^2$ គឺ ៖
 - ក. ១
 - ខ. ២
 - គ. ៣
 - ឃ. ៤
 ៣. ដឺក្រេនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(y')^4 - 3y' + y = 0$ គឺ ៖
 - ក. ១
 - ខ. ២
 - គ. ៣
 - ឃ. ៤
 ៤. សមីការណាខាងក្រោមជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១ ?
 - ក. $y' + y^2 = x$
 - ខ. $y' + 3xy = \sin x$
 - គ. $(y')^2 + y = 0$
 - ឃ. $yy' = 1$
 ៥. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' = 0$ គឺ ៖
 - ក. $y = x + C$
 - ខ. $y = C$ (C ថេរ)
 - គ. $y = 0$
 - ឃ. $y = e^x$
 ៦. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' = 3x^2$ គឺ ៖
 - ក. $y = 6x + C$
 - ខ. $y = x^3 + C$
 - គ. $y = 3x^3 + C$
 - ឃ. $y = x^2 + C$
 ៧. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' = e^{2x}$ គឺ ៖
 - ក. $y = 2e^{2x} + C$
 - ខ. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$
 - គ. $y = e^{2x} + C$
 - ឃ. $y = \frac{1}{4}e^{2x} + C$
 ៨. ចម្លើយនៃ $y' = \cos x$ ដែល $y(0) = 3$ គឺ ៖
 - ក. $y = \sin x + 3$
 - ខ. $y = -\sin x + 3$
 - គ. $y = \cos x + 2$
 - ឃ. $y = \sin x$
 ៩. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) គឺ ៖
 - ក. $y = -\frac{1}{x^2} + C$
 - ខ. $y = \ln x + C$
 - គ. $y = e^x + C$
 - ឃ. $y = x + C$
 ១០. ចម្លើយនៃសមីការ $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ គឺ ៖
 - ក. $y = \ln(x^2 + 1) + C$
 - ខ. $y = 2\ln(x^2 + 1) + C$
 - គ. $y = \arctan x + C$
 - ឃ. $y = \frac{1}{x^2 + 1} + C$
 ១១. ចម្លើយនៃសមីការ $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ គឺ ៖
 - ក. $y = \ln(1 + x^2) + C$
 - ខ. $y = \arctan x + C$
 - គ. $y = \arcsin x + C$
 - ឃ. $y = \tan x + C$
 ១២. អនុគមន៍ $y = Ce^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ៖
 - ក. $y' - 3y = 0$
 - ខ. $y' + 3y = 0$
 - គ. $3y' + y = 0$
 - ឃ. $y' + 9y = 0$

១៣. អនុគមន៍ $y = 4e^{2x}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

ក. $y' - 2y = 0$

ខ. $y' + 2y = 0$

គ. $2y' - y = 0$

ឃ. $y' - 4y = 0$

១៤. បើ $y = e^{kx}$ ជាចម្លើយនៃ $y' + 7y = 0$ នោះ $k =$

ក. 7

ខ. -7

គ. $\frac{1}{7}$

ឃ. $-\frac{1}{7}$

១៥. បើ $y = 5e^{-2x}$ នោះតម្លៃ $y(0)$ ស្មើ ៖

ក. 0

ខ. 1

គ. 5

ឃ. -10

១៦. ក្នុងសមីការដែលអាចព្យាករបាន $g(y)dy = f(x)dx$, អាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរផ្តល់ ៖

ក. $G(y) = F(x) + C$

ខ. $G(y) \cdot F(x) = C$

គ. $G(y) + F(x) = 0$

ឃ. $g'(y) = f'(x)$

១៧. ចម្លើយទូទៅនៃ $\frac{dy}{dx} = 2xy$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{x^2}$

ខ. $y = Ce^{2x}$

គ. $y = x^2 + C$

ឃ. $y = Ce^{-x^2}$

១៨. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' = -2xy$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{x^2}$

ខ. $y = Ce^{-x^2}$

គ. $y = -x^2 + C$

ឃ. $y = Ce^{-2x}$

១៩. ចម្លើយទូទៅនៃ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ គឺ ៖

ក. $y^2 - x^2 = C$

ខ. $y^2 + x^2 = C$

គ. $y = Cx$

ឃ. $xy = C$

២០. ចម្លើយទូទៅនៃ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ គឺ ៖

ក. $x^2 + y^2 = C$

ខ. $x^2 - y^2 = C$

គ. $y = -x + C$

ឃ. $xy = C$

២១. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' = y^2$ គឺ ៖

ក. $y = -\frac{1}{x+C}$

ខ. $y = \frac{1}{x+C}$

គ. $y = x^3 + C$

ឃ. $y = e^{x^2}$

២២. ចម្លើយនៃ $y' = y^2$ ដែល $y(0) = 1$ គឺ ៖

ក. $y = \frac{1}{1-x}$

ខ. $y = \frac{1}{1+x}$

គ. $y = e^x$

ឃ. $y = x + 1$

២៣. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' = 1 + y^2$ គឺ ៖

ក. $y = \tan(x+C)$

ខ. $y = \arctan(x+C)$

គ. $y = \sin(x+C)$

ឃ. $y = e^x + C$

២៤. ចម្លើយនៃ $y' = 1 + y^2$ ដែល $y(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = \tan x$

ខ. $y = \arctan x$

គ. $y = \sin x$

ឃ. $y = x$

២៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $xy' = y$ ($x > 0$) គឺ ៖

ក. $y = Cx$

ខ. $y = \frac{C}{x}$

គ. $y = x^2 + C$

ឃ. $y = C \ln x$

២៦. ចម្លើយទូទៅនៃ $xy' = -y$ ($x > 0$) គឺ ៖

ក. $y = \frac{C}{x}$

ខ. $y = -Cx$

គ. $y = C - x$

ឃ. $y = -\ln x + C$

២៧. ចម្លើយនៃ $y' = e^{x-y}$ គឺ ៖

ក. $e^y = e^x + C$

ខ. $e^{-y} = e^{-x} + C$

គ. $y = e^x + C$

ឃ. $e^y = -e^x + C$

២៨. ចម្លើយនៃ $y' = \frac{y+1}{x}$ ($x > 0$) គឺ ៖

ក. $y = Cx - 1$

ខ. $y = Cx + 1$

គ. $y = \frac{C}{x} - 1$

ឃ. $y = x^2 - 1$

២៩. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' = 3x^2y$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{x^3}$

ខ. $y = Ce^{3x^2}$

គ. $y = x^3 + C$

ឃ. $y = Ce^{-x^3}$

៣០. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' = \frac{e^x}{y}$ គឺ ៖

ក. $y^2 = 2e^x + C$

ខ. $y = e^x + C$

គ. $y^2 = e^x + C$

ឃ. $y = 2e^x + C$

៣១. សមីការ $y' + ay = 0$ មានចម្លើយទូទៅរាង ៖

ក. $y = Ce^{-ax}$

ខ. $y = Ce^{ax}$

គ. $y = -ax + C$

ឃ. $y = C \cos(ax)$

៣២. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' + 4y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{-4x}$

ខ. $y = Ce^{4x}$

គ. $y = 4e^{-x}$

ឃ. $y = -4x + C$

៣៣. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' - 5y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{5x}$

ខ. $y = Ce^{-5x}$

គ. $y = 5e^x$

ឃ. $y = 5x + C$

៣៤. ចម្លើយទូទៅនៃ $2y' + y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{-x/2}$

ខ. $y = Ce^{-2x}$

គ. $y = Ce^{2x}$

ឃ. $y = Ce^{x/2}$

៣៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $3y' - 6y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{2x}$

ខ. $y = Ce^{-2x}$

គ. $y = Ce^{6x}$

ឃ. $y = Ce^{-6x}$

៣៦. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' + y\sqrt{2} = 0$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{-x\sqrt{2}}$

ខ. $y = Ce^{x\sqrt{2}}$

គ. $y = Ce^{-2x}$

ឃ. $y = -\sqrt{2}x + C$

៣៧. ចម្លើយនៃ $y' + 2y = 0$ ដែល $y(0) = 5$ គឺ ៖

ក. $y = 5e^{-2x}$

ខ. $y = 5e^{2x}$

គ. $y = 2e^{-5x}$

ឃ. $y = -2x + 5$

៣៨. ចម្លើយនៃ $y' - 3y = 0$ ដែល $y(0) = -2$ គឺ ៖

ក. $y = -2e^{3x}$

ខ. $y = 2e^{-3x}$

គ. $y = -2e^{-3x}$

ឃ. $y = 3e^{-2x}$

៣៩. ចម្លើយនៃ $2y' + 4y = 0$ ដែល $y(1) = e^{-2}$ គឺ ៖

ក. $y = e^{-2x}$

ខ. $y = 2e^{-2x}$

គ. $y = e^{2x}$

ឃ. $y = e^{-x}$

៤០. បើ $y' + 5y = 0$ និង $y(0) = 1$ នោះ $y(1) =$

ក. e^{-5}

ខ. e^5

គ. $5e^{-1}$

ឃ. -5

៤១. បើ $y' - 2y = 0$ និង $y(\ln 2) = 12$ នោះតម្លៃ C គឺ ៖

ក. 3

ខ. 6

គ. 12

ឃ. 24

៤២. បើ $y = 4e^{-3x}$ ជាចម្លើយនៃ $y' + ky = 0$ នោះ $k =$

ក. 3

ខ. -3

គ. 4

ឃ. -4

៤៣. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y = 3e^{-2x}$ ត្រង់ $x = 0$ គឺ ៖

ក. -6

ខ. 6

គ. -2

ឃ. 3

៤៤. ក្រាបនៃចម្លើយ $y = Ce^{-ax}$ កាត់តាមគល់តម្រុយ $O(0,0)$ លុះត្រាតែ ៖

ក. $C = 0$

ខ. $C = 1$

គ. $a = 0$

ឃ. មិនអាចកាត់តាម O បានទេ

៤៥. ចំពោះ $C \neq 0$, ក្រាប $y = Ce^{-2x}$ មានអាស៊ីមតូតដេកគឺ ៖

ក. បន្ទាត់ $y = 0$ (កាលណា $x \rightarrow +\infty$)

ខ. បន្ទាត់ $x = 0$

គ. បន្ទាត់ $y = C$

ឃ. គ្មានអាស៊ីមតូត

៤៦. កត្តាអាំងតេក្រាល (Integrating factor) នៃ $y' + 3y = e^x$ គឺ ៖

ក. e^{3x}

ខ. e^{-3x}

គ. $3x$

ឃ. e^x

៤៧. កត្តាអាំងតេក្រាលនៃ $y' + \frac{1}{x}y = x^2$ ($x > 0$) គឺ ៖

ក. x

ខ. $\ln x$

គ. $\frac{1}{x}$

ឃ. x^2

៤៨. កត្តាអាំងតេក្រាលនៃ $y' + \frac{2}{x}y = 1$ ($x > 0$) គឺ ៖

ក. x^2

ខ. $2x$

គ. x

ឃ. $\frac{1}{x^2}$

៤៩. កត្តាអាំងតេក្រាលនៃ $y' - \frac{1}{x}y = x$ ($x > 0$) គឺ ៖

ក. $\frac{1}{x}$

ខ. x

គ. $-\ln x$

ឃ. $-x$

៥០. កត្តាអាំងតេក្រាលនៃ $y' + 2xy = 4x$ គឺ ៖

ក. e^{x^2}

ខ. e^{2x}

គ. x^2

ឃ. e^{-x^2}

៥១. កត្តាអាំងតេក្រាលនៃ $y' + \tan x y = 1$ លើ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ គឺ ៖

ក. $\frac{1}{\cos x}$

ខ. $\cos x$

គ. $\sin x$

ឃ. $\ln |\cos x|$

៥២. ចម្លើយពិសេសថេរនៃសមីការ $y' + 2y = 4$ គឺ ៖

- ក. $y_p = 2$ ខ. $y_p = 4$ គ. $y_p = -2$ ឃ. $y_p = 0$
៥៣. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + 2y = 4$ គឺ ៖
 ក. $y = Ce^{-2x} + 2$ ខ. $y = Ce^{2x} + 2$ គ. $y = Ce^{-2x} + 4$ ឃ. $y = Ce^{2x} - 2$
៥៤. ចម្លើយពិសេសថេរនៃ $y' - 3y = 6$ គឺ ៖
 ក. $y_p = -2$ ខ. $y_p = 2$ គ. $y_p = 6$ ឃ. $y_p = -6$
៥៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' - 3y = 6$ គឺ ៖
 ក. $y = Ce^{3x} - 2$ ខ. $y = Ce^{-3x} - 2$ គ. $y = Ce^{3x} + 2$ ឃ. $y = Ce^{-3x} + 6$
៥៦. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' + y = 2x$ មានរាង $y_p = ax + b$ ។ តម្លៃ a និង b គឺ ៖
 ក. $a = 2, b = -2$ ខ. $a = 2, b = 2$ គ. $a = 1, b = -1$ ឃ. $a = 2, b = 0$
៥៧. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' + 2y = 2x + 1$ គឺ ៖
 ក. $y_p = x$ ខ. $y_p = x + 1$ គ. $y_p = 2x$ ឃ. $y_p = x - 1$
៥៨. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' - y = 3e^{2x}$ មានរាង $y_p = Ae^{2x}$ ។ តម្លៃ A គឺ ៖
 ក. $A = 3$ ខ. $A = 1$ គ. $A = -3$ ឃ. $A = 6$
៥៩. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' + 2y = e^x$ គឺ ៖
 ក. $y_p = \frac{1}{3}e^x$ ខ. $y_p = e^x$ គ. $y_p = 3e^x$ ឃ. $y_p = \frac{1}{2}e^x$
៦០. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' + y = e^{-x}$ គឺ ៖
 ក. $y_p = xe^{-x}$ ខ. $y_p = e^{-x}$ គ. $y_p = -e^{-x}$ ឃ. $y_p = \frac{1}{2}e^{-x}$
៦១. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' + y = e^{-x}$ គឺ ៖
 ក. $y = (x + C)e^{-x}$ ខ. $y = Ce^{-x} + e^{-x}$ គ. $y = xe^{-x} + C$ ឃ. $y = (x^2 + C)e^{-x}$
៦២. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' - 2y = e^{2x}$ គឺ ៖
 ក. $y_p = xe^{2x}$ ខ. $y_p = e^{2x}$ គ. $y_p = 2xe^{2x}$ ឃ. $y_p = -e^{2x}$
៦៣. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' + y = \cos x$ គឺ ៖
 ក. $y_p = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$ ខ. $y_p = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$
 គ. $y_p = \sin x$ ឃ. $y_p = \cos x$
៦៤. ចម្លើយពិសេសនៃ $y' + y = \sin x$ គឺ ៖
 ក. $y_p = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ ខ. $y_p = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$
 គ. $y_p = -\cos x$ ឃ. $y_p = \sin x$
៦៥. ចម្លើយនៃ $y' + 2y = 4$ ដែល $y(0) = 5$ គឺ ៖

ក. $y = 3e^{-2x} + 2$

ខ. $y = 5e^{-2x} + 2$

គ. $y = 3e^{2x} + 2$

ឃ. $y = e^{-2x} + 4$

៦៦. ចម្លើយនៃ $y' - y = 1$ ដែល $y(0) = 1$ គឺ ៖

ក. $y = 2e^x - 1$

ខ. $y = e^x$

គ. $y = 2e^{-x} - 1$

ឃ. $y = e^x + 1$

៦៧. ចម្លើយនៃ $y' + 3y = 3$ ដែល $y(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = 1 - e^{-3x}$

ខ. $y = 1 + e^{-3x}$

គ. $y = e^{-3x} - 1$

ឃ. $y = 3(1 - e^{-3x})$

៦៨. ចម្លើយនៃ $y' + y = x$ ដែល $y(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = x - 1 + e^{-x}$

ខ. $y = x + 1 - e^{-x}$

គ. $y = x - e^{-x}$

ឃ. $y = x - 1 - e^{-x}$

៦៩. សមីការ $(x^2 + 1)y' + 2xy = 0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

ក. $y = \frac{C}{x^2 + 1}$

ខ. $y = C(x^2 + 1)$

គ. $y = \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ឃ. $y = \ln(x^2 + 1) + C$

៧០. សមីការ $xy' + y = 1$ ($x > 0$) មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

ក. $y = 1 + \frac{C}{x}$

ខ. $y = x + C$

គ. $y = 1 + Cx$

ឃ. $y = \frac{x + C}{2}$

៧១. សមីការ $xy' - 2y = 0$ ($x > 0$) មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

ក. $y = Cx^2$

ខ. $y = \frac{C}{x^2}$

គ. $y = Cx$

ឃ. $y = 2\ln x + C$

៧២. ខ្សែកោងអាំងតេក្រាលនៃ $y' = \frac{y}{x}$ កាត់តាមចំណុច $(1, 3)$ គឺ ៖

ក. $y = 3x$

ខ. $y = \frac{3}{x}$

គ. $y = x + 2$

ឃ. $y = 3x^2$

៧៣. ខ្សែកោងកែងនៃគ្រួសារបន្ទាត់ $y = Cx$ គឺ ៖

ក. គ្រួសាររង្វង់ $x^2 + y^2 = R^2$

ខ. គ្រួសារប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$

គ. គ្រួសារអ៊ីពែបូល $xy = C$

ឃ. គ្រួសារអេលីប

៧៤. ខ្សែកោងកែងនៃគ្រួសារប៉ារ៉ាបូល $y = Cx^2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

ក. $y' = -\frac{x}{2y}$

ខ. $y' = \frac{2y}{x}$

គ. $y' = -\frac{2y}{x}$

ឃ. $y' = \frac{x}{2y}$

៧៥. ចម្លើយនៃ $y' = -\frac{x}{2y}$ គឺជាគ្រួសារ ៖

ក. អេលីប $x^2 + 2y^2 = C$

ខ. រង្វង់ $x^2 + y^2 = C$

គ. អ៊ីពែបូល $x^2 - 2y^2 = C$

ឃ. ប៉ារ៉ាបូល

៧៦. បើ $y = 3e^{-4x}$ ជាចម្លើយនៃ $y' + ay = 0$ នោះ $a =$

ក. 4

ខ. -4

គ. 3

ឃ. -3

៧៧. បើ $y = e^{2x} + 3$ ជាចម្លើយនៃ $y' - 2y = k$ នោះ $k =$

ក. -6

ខ. 6

គ. 0

ឃ. -3

៧៨. ចម្លើយនៃ $y' = 2\sqrt{y}$ ដែល $y(0) = 4$ គឺ ៖

ក. $y = (x+2)^2$

ខ. $y = (x+4)^2$

គ. $y = 4e^{2x}$

ឃ. $y = 2x + 4$

៧៩. ចម្លើយនៃ $y' = e^{-y}$ ដែល $y(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = \ln(x+1)$

ខ. $y = e^x - 1$

គ. $y = \ln x$

ឃ. $y = -\ln(x+1)$

៨០. បើ $y' + 3y = 0$ នោះកាលណា $x \rightarrow +\infty$, $y(x) \rightarrow$

ក. 0

ខ. $+\infty$

គ. $-\infty$

ឃ. 3

៨១. បើ $y' - 3y = 0$ និង $C > 0$ នោះកាលណា $x \rightarrow +\infty$, $y(x) \rightarrow$

ក. $+\infty$

ខ. 0

គ. $-\infty$

ឃ. 1

៨២. សមីការប៊ែរណូឡី (Bernoulli equation) មានទម្រង់ទូទៅ ៖

ក. $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

ខ. $y'' + P(x)y = Q(x)$

គ. $(y')^2 + P(x)y = Q(x)$

ឃ. $y' = P(x) + Q(y)$

៨៣. ដើម្បីដោះស្រាយសមីការប៊ែរណូឡី $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$) គេប្តូរអថេរ ៖

ក. $u = y^{1-n}$

ខ. $u = y^n$

គ. $u = y^{n-1}$

ឃ. $u = \frac{1}{y}$

៨៤. សមីការ $y' + y = y^2$ ត្រូវនឹងសមីការប៊ែរណូឡីដែលមាន $n =$

ក. 2

ខ. -1

គ. 0

ឃ. 1

៨៥. សមីការ $y' = f(y/x)$ អាចដោះស្រាយបានដោយតាង ៖

ក. $u = \frac{y}{x}$

ខ. $u = xy$

គ. $u = x + y$

ឃ. $u = x - y$

៨៦. ចម្លើយនៃ $xy' = x + y$ ($x > 0$) ជាមួយ $y(1) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = x \ln x$

ខ. $y = x^2 - x$

គ. $y = \ln x$

ឃ. $y = x - 1$

៨៧. ពីសំណួរទី ៨៦, តម្លៃ $y(e) =$

ក. e

ខ. 1

គ. 0

ឃ. e^2

៨៨. ចំពោះសមីការ $y' + 4y = 8$, កាលណា $x \rightarrow +\infty$ ចម្លើយ $y(x)$ ខិតជិត ៖

ក. 2

ខ. 8

គ. 4

ឃ. 0

៨៩. សមីការ $y' + ky = kp$ ($k > 0$) មានលីមីត $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) =$

ក. p

ខ. k

គ. 0

ឃ. $+\infty$

៩០. សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y = 2e^{-x}$ ត្រង់ $x = 0$ គឺ ៖

ក. $y = -2x + 2$

ខ. $y = 2x + 2$

គ. $y = -x + 2$

ឃ. $y = -2x$

៩១. បើបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y = Ce^{-3x}$ ត្រង់ $x = 0$ គឺ $y = -6x + 2$ នោះ ៖

ក. $C = 2$

ខ. $C = 6$

គ. $C = -2$

ឃ. $C = 3$

៩២. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃខ្សែកោងដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ (x, y) ស្មើ $2x + y$ គឺ ៖

ក. $y' - y = 2x$

ខ. $y' + y = 2x$

គ. $y' = 2xy$

ឃ. $y' = x + 2y$

៩៣. ចម្លើយទូទៅនៃ $y' - y = 2x$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^x - 2x - 2$

ខ. $y = Ce^x + 2x + 2$

គ. $y = Ce^{-x} - 2x - 2$

ឃ. $y = Ce^x - 2x + 2$

៩៤. ចម្លើយនៃ $y' - y = 2x$ ដែលកាត់តាមគល់តម្រុយ $O(0, 0)$ គឺ ៖

ក. $y = 2e^x - 2x - 2$

ខ. $y = e^x - 2x - 1$

គ. $y = 2e^{-x} - 2x - 2$

ឃ. $y = -2x$

៩៥. សមីការ $y' = y$ មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

ក. $y = Ce^x$

ខ. $y = Ce^{-x}$

គ. $y = x + C$

ឃ. $y = \frac{x^2}{2} + C$

៩៦. សមីការ $y' = -y$ មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

ក. $y = Ce^{-x}$

ខ. $y = Ce^x$

គ. $y = -x + C$

ឃ. $y = e^{-x} + C$

៩៧. បើ $y(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y' = 3y$ និង $y(0) = 2$ នោះ $y(2) =$

ក. $2e^6$

ខ. $2e^3$

គ. $6e^2$

ឃ. $3e^6$

៩៨. បើ $y' = \frac{1}{2}y$ និង $y(0) = 4$ នោះ $y(4) =$

ក. $4e^2$

ខ. $4e^4$

គ. $2e^2$

ឃ. e^2

៩៩. សមីការ $y' + y = 5$ មានចម្លើយពិសេសគឺ ៖

ក. $y = 5$

ខ. $y = -5$

គ. $y = 0$

ឃ. $y = 5x$

១០០. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + y = 5$ គឺ ៖

ក. $y = Ce^{-x} + 5$

ខ. $y = Ce^x + 5$

គ. $y = Ce^{-x} - 5$

ឃ. $y = 5e^{-x} + C$

១០១. បើ $y(0) = 2$ ក្នុង $y' + y = 5$ នោះចម្លើយពិសេសគឺ ៖

ក. $y = -3e^{-x} + 5$

ខ. $y = 3e^{-x} + 5$

គ. $y = 2e^{-x} + 5$

ឃ. $y = -3e^x + 5$

៧ លំហាត់អនុវត្ត

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

ក. $y' = 2x^2 - x + 1$

ខ. $y' = e^{-2x}$

គ. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

ឃ. $y' = \frac{x}{x^2 - 1}$ កំណត់លើ $(-1, 1)$

ង. $xy' = 1$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper for solving differential equations. The grid consists of 20 columns and 30 rows of small squares. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the right. The top and bottom edges are also blue. The grid is intended for plotting solutions to differential equations.

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ :

ក. $\frac{y'}{y} = \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

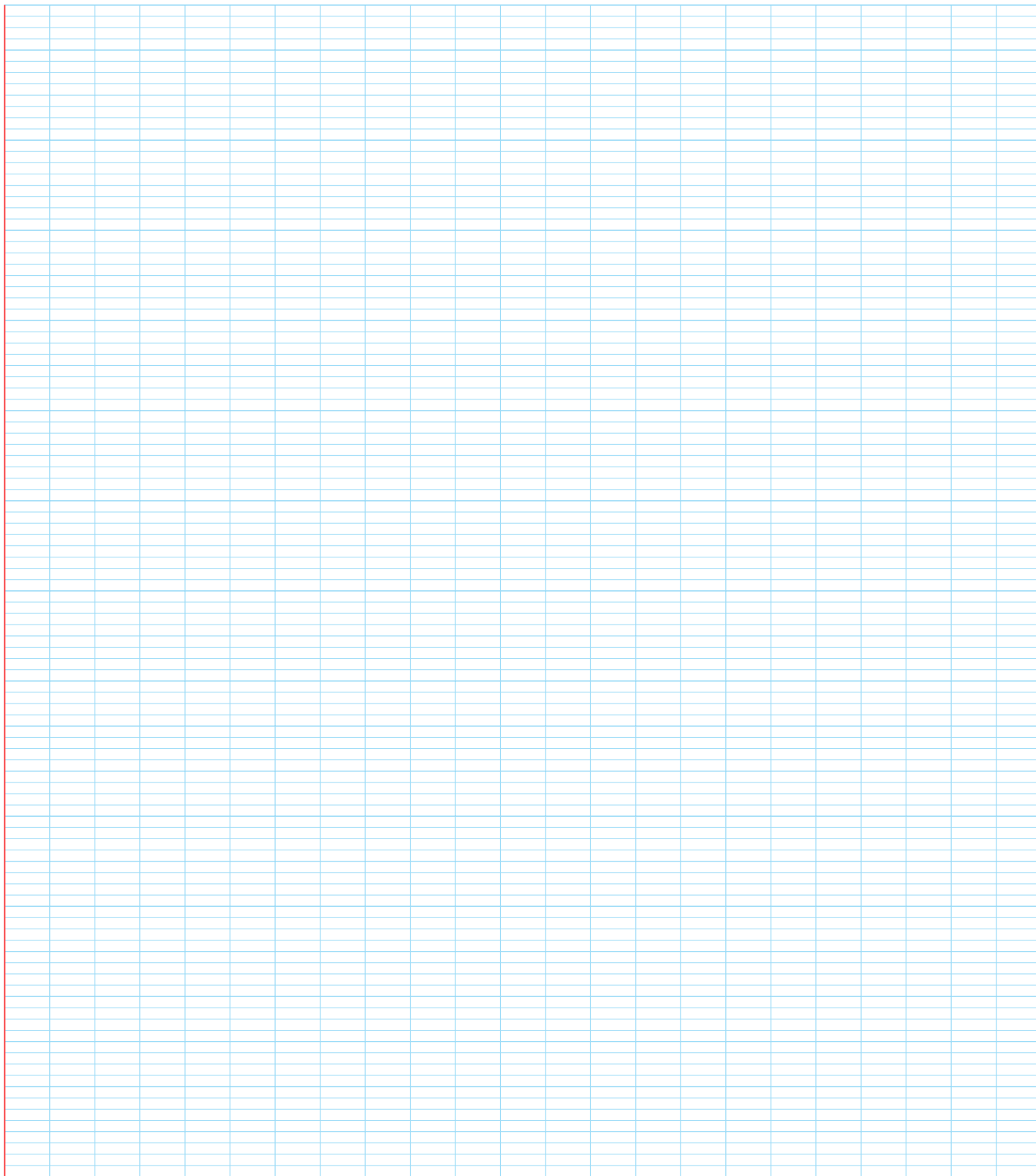
គ. $(3x^2 - 2)y' = 6x$, $y(1) = 4$

ខ. $y' = e^{2x}$, $y(0) = 5$

ឃ. $\frac{y'}{\tan x} = 1$, $y(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for solving differential equations. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the top and right.

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរដាច់ទី ១:

ក. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

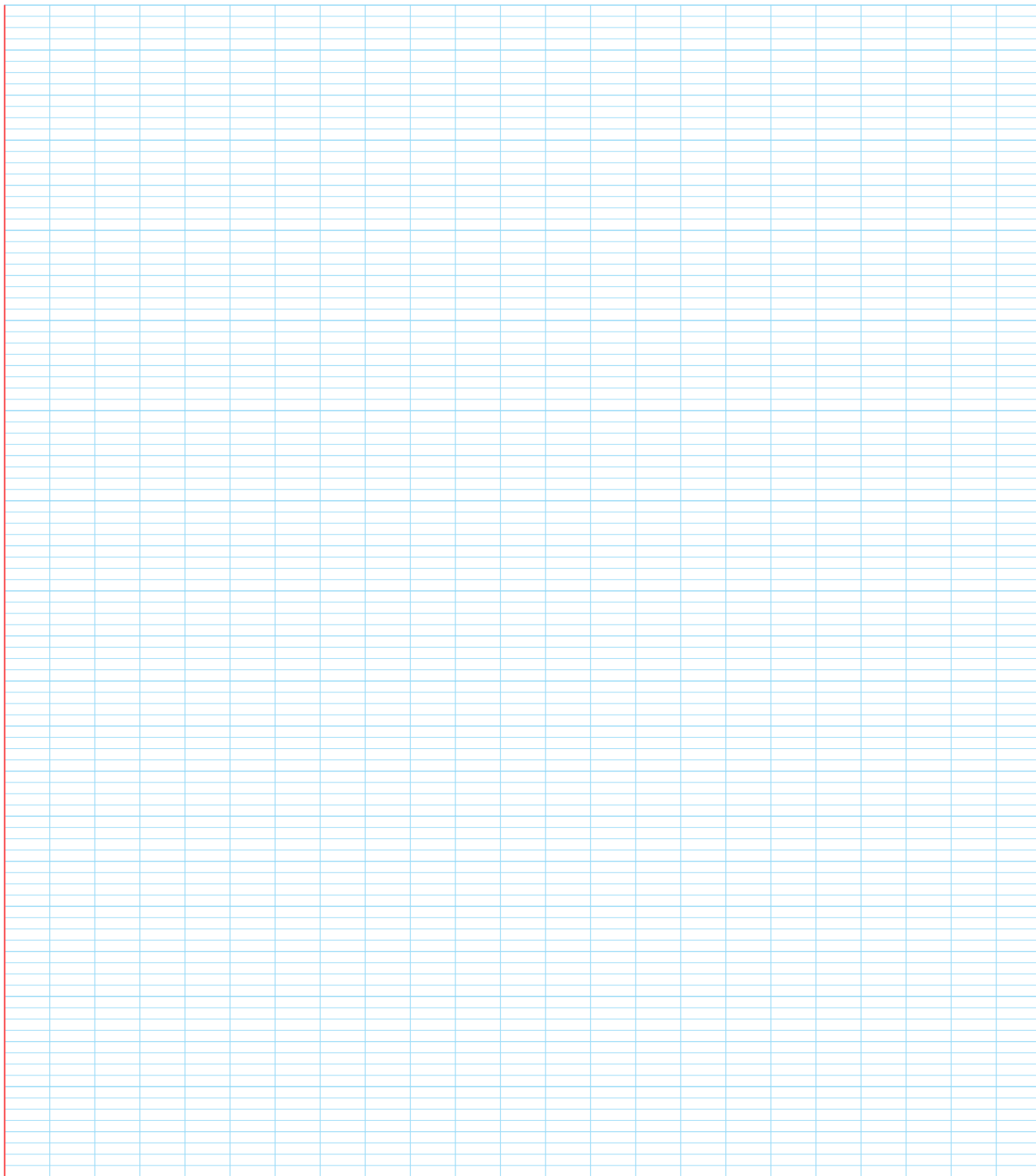
គ. $2y' - 3y = 0$

ខ. $3\frac{dy}{dx} + y = 0$

ឃ. $y' + y\sqrt{2} = 0$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

A large grid of 20 columns and 40 rows, intended for writing the solution to the differential equation. The grid is composed of light blue lines on a white background. A red vertical line is positioned at the far left edge of the grid.

៤. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 តាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ :

ក. $-y' + 2y = 0$, $y(3) = -2$

គ. $7y' + 4y = 0$, $y(7) = e^{-4}$

ខ. $2y' + y = 0$, $y(\ln 4) = \frac{1}{5}$

ឃ. $2y' - 5y = 0$, $y(1) = -3$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for solving differential equations. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the right.

៥. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមនេះជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលនៅខាងស្តាំ :

ក. $y = x + e^x$, $y' - y = 1 - x$

គ. $y = \sin x + \cos x$, $y' + y = 2 \cos x$

ខ. $y = e^{3x} - x - 1$, $y' - 3y = 3x + 2$

ឃ. $y = x + \ln x$, $xy' - y = 1 - \ln x$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper for solving differential equations. The grid consists of 20 columns and 40 rows of small squares. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the right. The top and bottom boundaries are also blue.

៦. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + 2y = x^2$ ។
- ក. កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទី 2 ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។
 - ខ. តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x) = f(x) - g(x)$ ។ បើ h ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' + 2y = 0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
 - គ. ដោះស្រាយសមីការ $y' + 2y = 0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

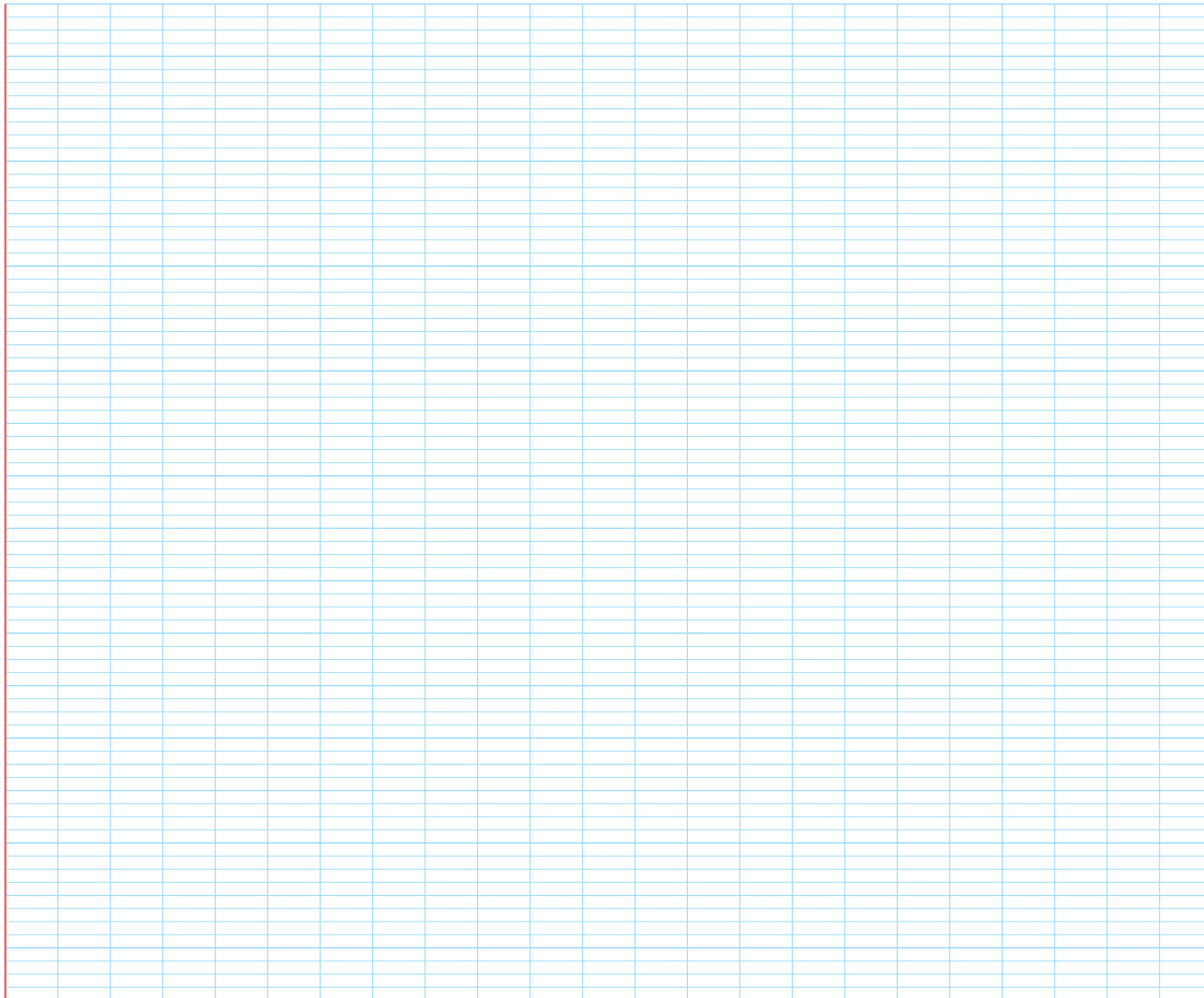
ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper for solving differential equations. The grid consists of 20 columns and 40 rows of small squares. A vertical red line is drawn between the 1st and 2nd columns, and a horizontal red line is drawn between the 20th and 21st rows, intersecting at the top-left corner of the grid.

៧. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

- ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' - 2y = 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = 1$ ។
- ខ. តាង f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = e^{2x}g(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។
- គ. បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ ។
- ឃ. ទាញរកកន្សោម $g(x)$ រួច $f(x)$ ដែល f ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ



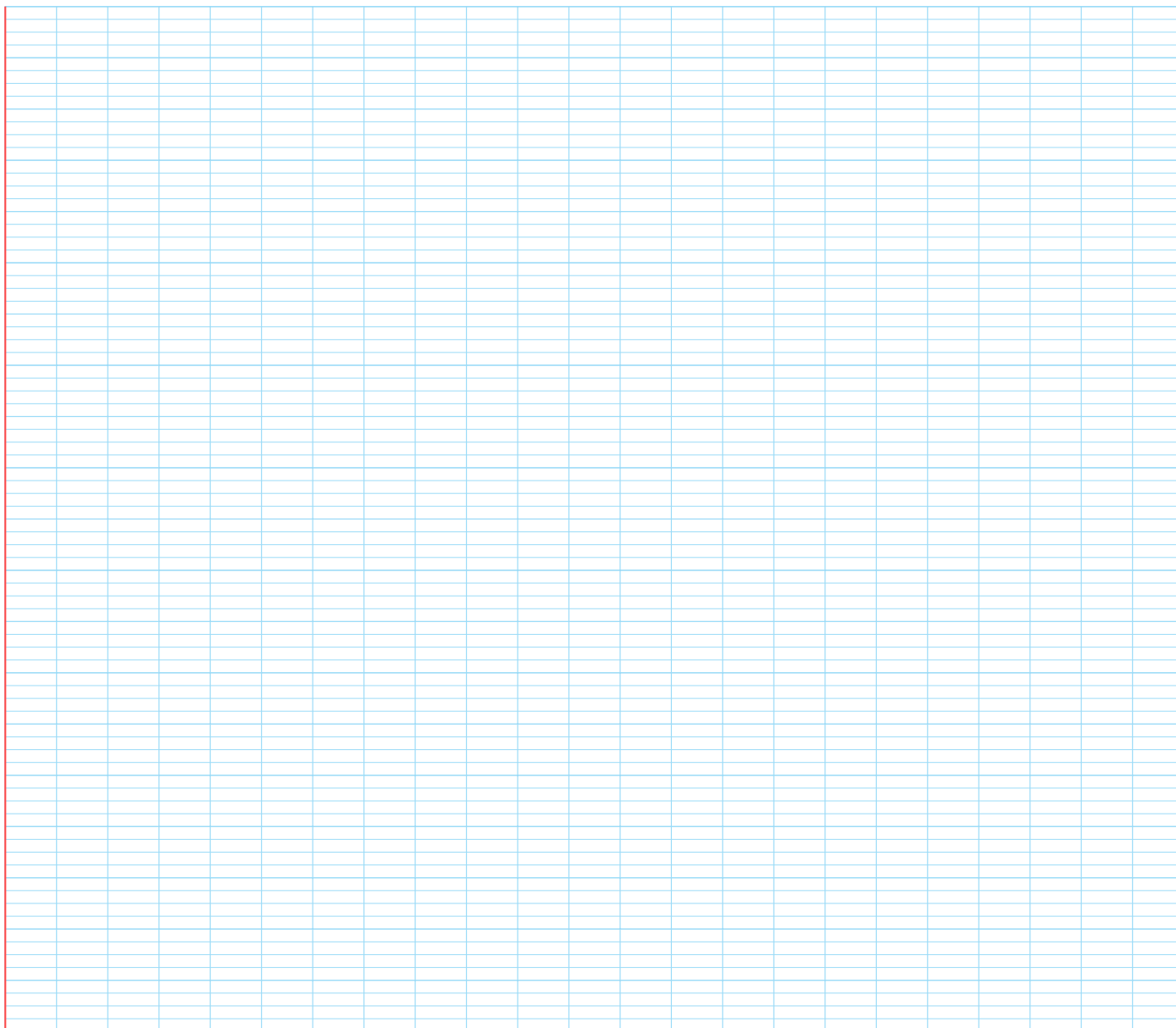
៨. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + y = xe^{-x}$

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_0) : y' + y = 0$ ។

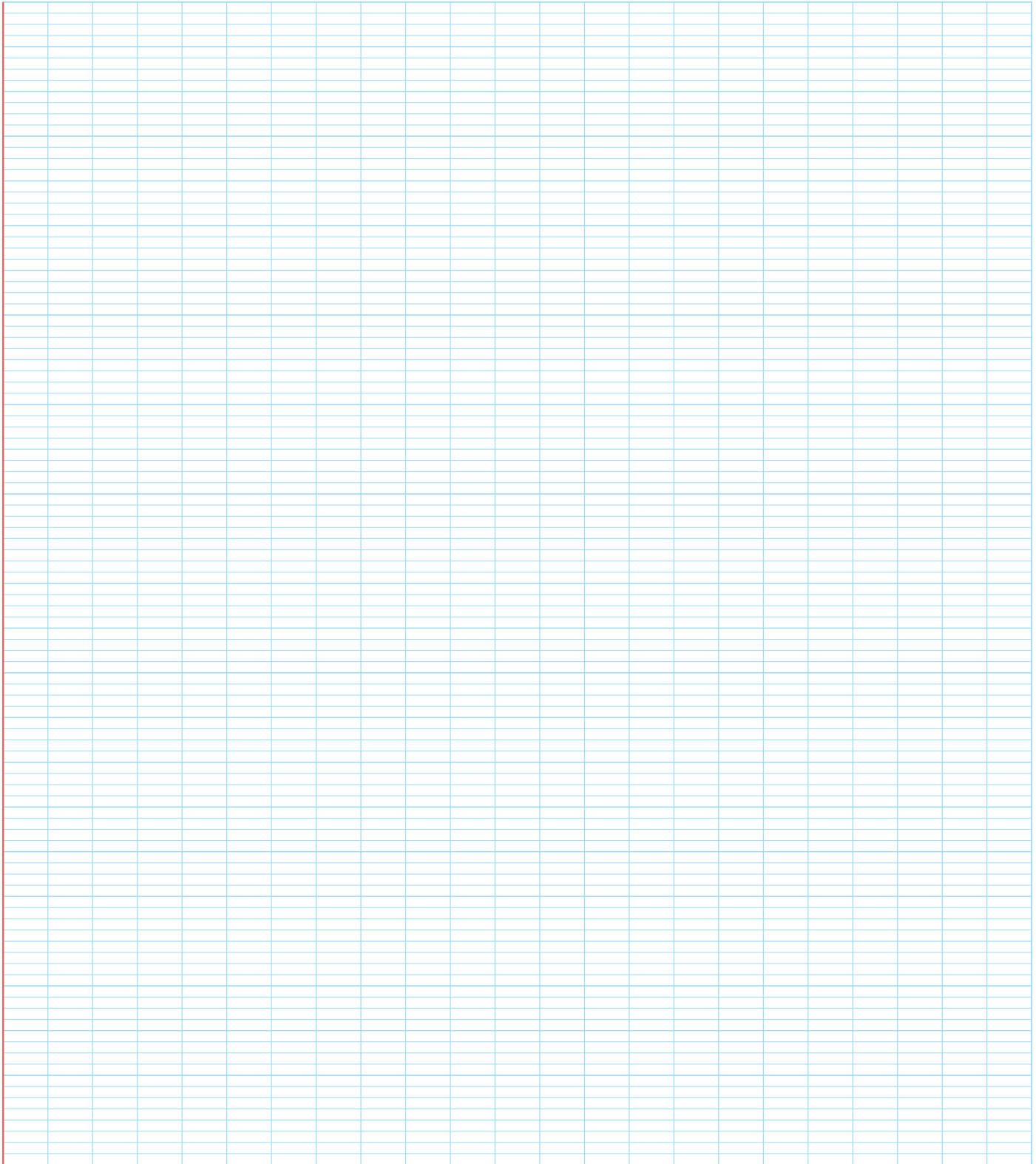
ខ. រកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = (mx^2 + nx)e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) រួចកំណត់ចម្លើយ f នៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $y(0) = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ



ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for solving differential equations. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the top and right.

៩. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

ក. $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$

គ. $y' + y = xe^x$

ខ. $\frac{dy}{dx} + y = x - 1$

ឃ. $y' + y = \sin x$

ដំណោះស្រាយ

ដំណោះស្រាយ

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for solving differential equations. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the top and right.

១០. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម :

ក. $y' - y = 1$, $y(0) = 1$

ខ. $y' + 2y = 1$, $y(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

A large grid for solving differential equations. The grid is 20 columns wide and 30 rows high. A vertical red line is drawn at the first column. A horizontal red line is drawn at the 15th row. The grid is used for plotting solutions to the differential equations.

១១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក. $y' - 3y = 3x + 2$

ខ. $xy' - y = 1 - \ln x$

គ. $y' + 2y = e^{-2x}$

ឃ. $y' + y = 2e^x$

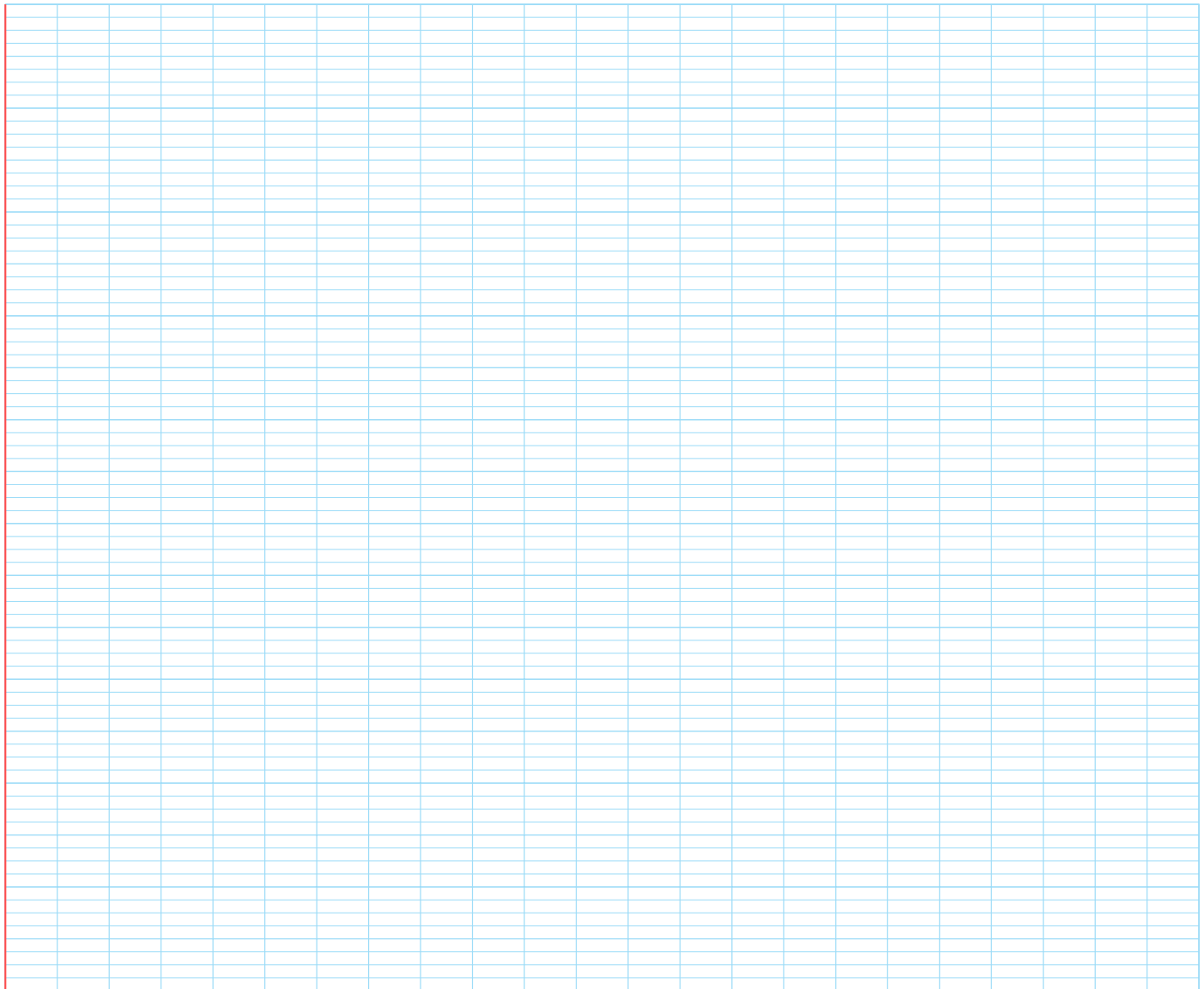
ង. $y' + y = \cos x + \sin x$

ប. $y' + 2y = 2x^2 - 3$

ឆ. $y' + 5y = 20$, $y(0) = 2$

ជ. $y' + y = 1$, $y(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ





សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២

១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២អូម៉ូសែន

និយមន័យ ១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី ២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរ ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ ៖

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ និង } a \neq 0)$$

ជំនួញទី ១

គោលការណ៍ត្រួតស៊ីគ្នា (Principle of Superposition) ៖

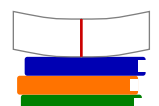
បើ $y_1(x)$ និង $y_2(x)$ ជាចម្លើយលីនេអ៊ែរកករដ្ឋពីរនៃសមីការ $ay'' + by' + cy = 0$ (ពោលគឺ ប្រុងស្តីយ៉ាង $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$) នោះបន្សំលីនេអ៊ែរ ៖

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ ជាចំនួនថេរពិត})$$

គឺជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។

២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ ២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរ

២.១ សមីការសម្គាល់

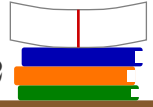


សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ay'' + by' + cy = 0$ មានសមីការសម្គាល់ (Characteristic Equation) ៖

$$ar^2 + br + c = 0$$

ដែលឌីសក្រីមីណង់គឺ $\Delta = b^2 - 4ac$ (ឬ $\Delta' = b'^2 - ac$ បើ $b = 2b'$)។

២.២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ២ តាមឫសនៃសមីការសម្គាល់



ជំនួយទី ២

ក្នុងការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ អ្នកម៉ូសែន រាង $ay'' + by' + cy = 0$ គេត្រូវដោះស្រាយសមីការសម្គាល់ $ar^2 + br + c = 0$ តាម ៣ ករណីដូចខាងក្រោម ៖

- ក. ករណី $\Delta > 0$ (សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា) ៖
សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $r_1 = \alpha$ និង $r_2 = \beta$ ។
ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

- ខ. ករណី $\Delta = 0$ (សមីការសម្គាល់មានឫសឌុប) ៖
សមីការសម្គាល់ $ar^2 + br + c = 0$ មានឫសឌុប $r_1 = r_2 = \alpha = -\frac{b}{2a}$ ។
ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

- គ. ករណី $\Delta < 0$ (សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា) ៖
សមីការសម្គាល់ $ar^2 + br + c = 0$ មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ដែល $\alpha = -\frac{b}{2a}$ និង $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ។
តាមរូបមន្តអយល័រ $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$ គេទាញបានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

ករណីពិសេស (លំយោលអាម៉ូនិចសុទ្ធ) ៖ ចំពោះសមីការ $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\alpha = 0$) នោះចម្លើយទូទៅគឺ $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ ។

លំហាត់គំរូ ១

(ករណី $\Delta > 0$ ឬសពិតពីរផ្សេងគ្នា) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

១. $y'' - 5y' + 6y = 0$

២. $y'' - y' - 2y = 0$ ដោយដឹងថាលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 4$ និង $y'(0) = 5$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការ $y'' - 5y' + 6y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \iff (r-2)(r-3) = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = 3$$

ដោយសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា នោះចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

២. សមីការ $y'' - y' - 2y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - r - 2 = 0 \iff (r+1)(r-2) = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = 2$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖ $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$ ។

គណនាដេរីវេទីមួយ ៖ $y' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$ ។

អនុវត្តលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 4$ និង $y'(0) = 5$ ៖

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 4 \\ y'(0) = -A + 2B = 5 \end{cases}$$

បូកសមីការទាំងពីរអង្គនឹងអង្គ ៖ $3B = 9 \implies B = 3$ ។

ទាញបាន $A = 4 - B = 4 - 3 = 1$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសដែលត្រូវរកគឺ $y = e^{-x} + 3e^{2x}$ ។

លំហាត់គំរូ ២

(ករណី $\Delta = 0$ ឬសឌុប) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

១. $y'' - 6y' + 9y = 0$

២. $4y'' + 4y' + y = 0$ ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 2$ និង $y'(0) = -3$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការ $y'' - 6y' + 9y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = 3 \text{ (ឬសឌុប)}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖

$$y = (Ax + B)e^{3x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

២. សមីការ $4y'' + 4y' + y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ ៖

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \iff (2r + 1)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$$

ចម្លើយទូទៅគឺ ៖ $y = (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x}$

គណនាដេរីវេ ៖ $y' = Ae^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x}$

អនុវត្តលក្ខខណ្ឌដើម ៖

$$y(0) = B = 2$$

$$y'(0) = A - \frac{1}{2}B = -3 \implies A - \frac{1}{2}(2) = -3 \implies A - 1 = -3 \implies A = -2$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសគឺ $y = (-2x + 2)e^{-\frac{1}{2}x} = 2(1 - x)e^{-\frac{1}{2}x}$

លំហាត់គំរូ

៣

(ករណី $\Delta < 0$ ឬសកុំផ្លិចឆ្លាស់) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

១. $y'' + 9y = 0$

២. $y'' - 2y' + 5y = 0$ ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 1$ និង $y'(0) = 3$

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការ $y'' + 9y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 + 9 = 0 \iff r^2 = -9 = (3i)^2 \implies r = \pm 3i \quad (\alpha = 0, \beta = 3)$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = A \cos 3x + B \sin 3x \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

២. សមីការ $y'' - 2y' + 5y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \iff (r - 1)^2 + 4 = 0 \iff (r - 1)^2 = -4 \implies r = 1 \pm 2i$$

គេបាន $\alpha = 1$ និង $\beta = 2$ ។ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

គណនាដេរីវេទីមួយ ៖

$$y' = e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = e^x((A + 2B) \cos 2x + (B - 2A) \sin 2x)$$

អនុវត្តលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 1$ និង $y'(0) = 3$ ៖

$$\begin{cases} y(0) = e^0(A \cos 0 + B \sin 0) = A = 1 \\ y'(0) = A + 2B = 3 \implies 1 + 2B = 3 \implies 2B = 2 \implies B = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសគឺ $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$

៣ វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអំប៊ែលដាច់ ២ មិនអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = p(x)$

ជំហានទី ៣

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអំប៊ែលដាច់ទី២ មិនអូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរ មានរាងទូទៅ ៖

$$ay'' + by' + cy = p(x) \quad (p(x) \neq 0)$$

វិធីដោះស្រាយរួមមាន ៣ ជំហាន ៖

- ក. រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_c នៃសមីការអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = 0$ តាមសមីការសម្គាល់។
- ខ. ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមួយតាងដោយ y_p នៃសមីការមិនអូម៉ូសែន តាម វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់ ដោយជ្រើសរើសទម្រង់ y_p ស្របតាមទម្រង់នៃ $p(x)$ ។
- គ. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន ជាផលបូក ៖

$$y = y_c + y_p$$

តារាងជ្រើសរើសទម្រង់ចម្លើយពិសេស y_p តាមវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

ទម្រង់នៃអង្គទីពីរ $p(x)$	ទម្រង់ជ្រើសរើសសម្រាប់ចម្លើយពិសេស y_p
ពហុធានីក្រេ n ៖ $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$	$y_p = x^s (A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$ ($s = 0$ បើ $c \neq 0$, $s = 1$ បើ $c = 0$ និង $b \neq 0$)
អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖ $ke^{\lambda x}$	$y_p = Ax^s e^{\lambda x}$ ($s = 0$ បើ λ មិនមែនឫសនៃសមីការសម្គាល់) ($s = 1$ បើ λ ជាឫសទោល, $s = 2$ បើ λ ជាឫសឌុប)
ត្រីកោណមាត្រ ៖ $M \cos \omega x + N \sin \omega x$	$y_p = x^s (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$ ($s = 0$ បើ $\pm i\omega$ មិនមែនឫសនៃសមីការសម្គាល់) ($s = 1$ បើ $\pm i\omega$ ជាឫសនៃសមីការសម្គាល់ - អស្ចុណ្ឌ)

លំហាត់គំរូ ៤

(អង្គទីពីរជាពហុធានី) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$

១. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការអូម៉ូសែន $y'' - 3y' + 2y = 0$ ។
២. រកចម្លើយពិសេស y_p នៃសមីការ (E) ដែលមានរាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ។
៣. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការសម្គាល់នៃសមីការអូម៉ូសែន ៖

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ } y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

២. រក $y_p = ax^2 + bx + c$ ៖

$$\text{គណនាដេរីវេ ៖ } y'_p = 2ax + b \text{ និង } y''_p = 2a$$

ជំនួសចូលក្នុងសមីការ (E) ៖

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$2ax^2 + (-6a + 2b)x + (2a - 3b + 2c) = 2x^2 - 4x + 1$$

ផ្ទឹមមេគុណតាមដឺក្រេនៃ x ៖

$$\begin{cases} 2a = 2 \implies a = 1 \\ -6a + 2b = -4 \implies -6(1) + 2b = -4 \implies 2b = 2 \implies b = 1 \\ 2a - 3b + 2c = 1 \implies 2(1) - 3(1) + 2c = 1 \implies -1 + 2c = 1 \implies c = 1 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសគឺ } y_p = x^2 + x + 1$$

៣. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ ៖

$$y = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 + x + 1 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

លំហាត់គំរូ ៥

(អង្គទីពីរជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងករណីអេស្បូណង់) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

១. $y'' - 4y = 3e^x$

២. $y'' - 4y = 8e^{2x}$

ដំណោះស្រាយ

សមីការសម្គាល់ $r^2 - 4 = 0 \implies r = \pm 2$ ។ ចម្លើយអូម៉ូសែនគឺ $y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ។

១. ចំពោះ $y'' - 4y = 3e^x$ ៖ ដោយសារ $\lambda = 1$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការសម្គាល់ គេតាង $y_p = Ae^x$ ។

គណនា $y'_p = Ae^x$, $y''_p = Ae^x$ ។ ជំនួសចូលសមីការ ៖

$$Ae^x - 4Ae^x = 3e^x \iff -3Ae^x = 3e^x \iff -3A = 3 \implies A = -1$$

$$\text{នាំឱ្យ } y_p = -e^x$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - e^x$$

២. ចំពោះ $y'' - 4y = 8e^{2x}$ ដោយសារ $\lambda = 2$ ជាឫសទោលនៃសមីការសម្គាល់ គេត្រូវគុណនឹង x ពេលគឺតាង ៖

$$y_p = Axe^{2x}$$

គណនាដេរីវេ ៖

$$y'_p = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y''_p = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

ជំនួសចូលក្នុងសមីការ ៖

$$(4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 4(Axe^{2x}) = 8e^{2x} \iff 4Ae^{2x} = 8e^{2x} \iff 4A = 8 \implies A = 2$$

នាំឱ្យចម្លើយពិសេសគឺ $y_p = 2xe^{2x}$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2xe^{2x}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)។

លំហាត់គំរូ

៦

(អង្គទីពីរជាត្រីកោណមាត្រ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$y'' + 4y = 6\cos x \quad \text{ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម } y(0) = 3 \text{ និង } y'(0) = 0$$

ដំណោះស្រាយ

- សមីការសម្គាល់ $r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$ ។
ចម្លើយអូម៉ូសែនគឺ $y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ។
- រកចម្លើយពិសេស y_p ៖ ដោយអង្គទីពីរគឺ $6\cos x$ ($\omega = 1 \neq 2$) គេតាង ៖

$$y_p = A \cos x + B \sin x$$

គណនាដេរីវេ ៖ $y'_p = -A \sin x + B \cos x$ និង $y''_p = -A \cos x - B \sin x$ ។

ជំនួសចូលក្នុងសមីការ ៖

$$\begin{aligned} (-A \cos x - B \sin x) + 4(A \cos x + B \sin x) &= 6 \cos x \\ 3A \cos x + 3B \sin x &= 6 \cos x \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណ ៖ $3A = 6 \implies A = 2$ និង $3B = 0 \implies B = 0$ ។

នាំឱ្យចម្លើយពិសេសគឺ $y_p = 2 \cos x$ ។

- ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = y_c + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2 \cos x$$

- គណនា $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - 2 \sin x$ ។

អនុវត្តលក្ខខណ្ឌដើម ៖

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 2 = 3 \implies C_1 = 1 \\ y'(0) = 2C_2 = 0 \implies C_2 = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសដែលត្រូវរកគឺ ៖

$$y = \cos 2x + 2 \cos x$$

៤ សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) មេរៀនទី២ (១០០ លំហាត់)

១. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរដាច់ទី២ អ្វីមួយមានរាងទូទៅ ៖

ក. $ay'' + by' + cy = 0$ ($a \neq 0$)

ខ. $ay'' + by = c$

គ. $(y'')^2 + by' + cy = 0$

ឃ. $y'' + yy' = 0$

២. សមីការសម្គាល់នៃ $ay'' + by' + cy = 0$ គឺ ៖

ក. $ar^2 + br + c = 0$

ខ. $ar + b = 0$

គ. $ar^3 + br + c = 0$

ឃ. $a^2r + br + c = 0$

៣. សមីការសម្គាល់នៃ $y'' - 5y' + 6y = 0$ គឺ ៖

ក. $r^2 - 5r + 6 = 0$

ខ. $r^2 + 5r + 6 = 0$

គ. $r^2 - 6r + 5 = 0$

ឃ. $r^2 - 5r - 6 = 0$

៤. ឫសនៃសមីការសម្គាល់ $r^2 - 5r + 6 = 0$ គឺ ៖

ក. $r_1 = 2, r_2 = 3$

ខ. $r_1 = -2, r_2 = -3$

គ. $r_1 = 1, r_2 = 6$

ឃ. $r_1 = -1, r_2 = -6$

៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 5y' + 6y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

ខ. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 3x$

៦. សមីការសម្គាល់នៃ $y'' - 9y = 0$ គឺ ៖

ក. $r^2 - 9 = 0$

ខ. $r^2 - 9r = 0$

គ. $r - 9 = 0$

ឃ. $r^2 + 9 = 0$

៧. ឫសនៃសមីការសម្គាល់ $r^2 - 9 = 0$ គឺ ៖

ក. $r = \pm 3$

ខ. $r = \pm 3i$

គ. $r = 9$

ឃ. $r = 0, 9$

៨. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 9y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

ខ. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$

ឃ. $y = C_1 e^{9x} + C_2$

៩. សមីការសម្គាល់នៃ $y'' + 9y = 0$ គឺ ៖

ក. $r^2 + 9 = 0$

ខ. $r^2 - 9 = 0$

គ. $r^2 + 9r = 0$

ឃ. $r + 9 = 0$

១០. ឫសនៃសមីការសម្គាល់ $r^2 + 9 = 0$ គឺ ៖

ក. $r = \pm 3i$

ខ. $r = \pm 3$

គ. $r = -9$

ឃ. $r = \pm 9i$

១១. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 9y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

ខ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 9x + C_2 \sin 9x$

១២. សមីការសម្គាល់នៃ $y'' - 6y' + 9y = 0$ គឺ ៖

ក. $(r - 3)^2 = 0$

ខ. $(r + 3)^2 = 0$

គ. $r^2 - 9 = 0$

ឃ. $(r - 2)(r - 3) = 0$

១៣. ឌីសគ្រីមីណង់ Δ នៃសមីការសម្គាល់សម្រាប់ $y'' - 6y' + 9y = 0$ ស្មើ ៖

ក. 0

ខ. 36

គ. -36

ឃ. 72

១៤. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 6y' + 9y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = (C_1x + C_2)e^{3x}$

ខ. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$

គ. $y = (C_1x + C_2)e^{-3x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

១៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 4y' + 4y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = (C_1x + C_2)e^{-2x}$

ខ. $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$

គ. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

១៦. សមីការ $y'' - 4y' = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 4r = 0$ ។ ឫសរបស់វាគឺ ៖

ក. $r_1 = 0, r_2 = 4$

ខ. $r = \pm 2$

គ. $r = 4$ (ឫសឌុប)

ឃ. $r = \pm 2i$

១៧. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 4y' = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 + C_2e^{4x}$

ខ. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

គ. $y = (C_1x + C_2)e^{4x}$

ឃ. $y = C_1x + C_2$

១៨. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 2y' = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 + C_2e^{-2x}$

ខ. $y = C_1 + C_2e^{2x}$

គ. $y = (C_1x + C_2)e^{-2x}$

ឃ. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$

១៩. ឫសនៃសមីការសម្គាល់ $r^2 + 4r + 13 = 0$ គឺ ៖

ក. $r = -2 \pm 3i$

ខ. $r = 2 \pm 3i$

គ. $r = -4 \pm 6i$

ឃ. $r = -2 \pm 9i$

២០. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 4y' + 13y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

ខ. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

គ. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$

ឃ. $y = (C_1x + C_2)e^{-2x}$

២១. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 2y' + 5y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

ខ. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

គ. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

ឃ. $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

២២. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 2y' + 2y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

ខ. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

គ. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

ឃ. $y = (C_1x + C_2)e^{-x}$

២៣. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

ខ. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

គ. $y = (C_1x + C_2)e^x$

ឃ. $y = C_1 \cos x$

២៤. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^x$

ខ. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

ឃ. $y = C_1 e^x$

២៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 16y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{4x}$

ខ. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 16x + C_2 \sin 16x$

២៦. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 16y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{4x}$

ខ. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

ឃ. $y = C_1 e^{16x} + C_2$

២៧. សមីការ $y'' - y' - 2y = 0$ មានឫសសមីការសម្គាល់ ៖

ក. $r_1 = -1, r_2 = 2$

ខ. $r_1 = 1, r_2 = -2$

គ. $r_1 = 1, r_2 = 2$

ឃ. $r = \pm\sqrt{2}$

២៨. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - y' - 2y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

ខ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin x$

២៩. សមីការ $y'' - 4y' + 3y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$

ខ. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin x$

៣០. សមីការ $y'' + 3y' + 2y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$

ខ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

ឃ. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$

៣១. សមីការ $y'' - 7y' + 12y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

គ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}$

ខ. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$

ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^{4x}$

៣២. សមីការ $2y'' - 3y' + y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ។ ឫសរបស់វាគឺ ៖

ក. $r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$

ខ. $r_1 = -1, r_2 = -\frac{1}{2}$

គ. $r_1 = 2, r_2 = 1$

ឃ. $r_1 = 1, r_2 = -1$

៣៣. ចម្លើយទូទៅនៃ $2y'' - 3y' + y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^x + C_2 e^{x/2}$

គ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

ខ. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x/2}$

ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^x$

៣៤. សមីការ $2y'' + 5y' + 2y = 0$ មានឫសសមីការសម្គាល់ ៖

ក. $r_1 = -2, r_2 = -\frac{1}{2}$

ខ. $r_1 = 2, r_2 = \frac{1}{2}$

គ. $r_1 = -1, r_2 = -4$

ឃ. $r_1 = 1, r_2 = 4$

៣៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $2y'' + 5y' + 2y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x/2}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{-2x}$

ខ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$

ឃ. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$

៣៦. សមីការ $y'' - 2y' + y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = (C_1 x + C_2) e^x$

គ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

ខ. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$

ឃ. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

៣៧. សមីការ $y'' + 2y' + y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$

គ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

ខ. $y = (C_1 x + C_2) e^x$

ឃ. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

៣៨. សមីការ $4y'' - 4y' + y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $(2r - 1)^2 = 0$ ។ ឫសឌុបគឺ ៖

ក. $r = \frac{1}{2}$

ខ. $r = -\frac{1}{2}$

គ. $r = 2$

ឃ. $r = -2$

៣៩. ចម្លើយទូទៅនៃ $4y'' - 4y' + y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = (C_1 x + C_2) e^{x/2}$

គ. $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/2}$

ខ. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x/2}$

ឃ. $y = C_1 \cos(x/2) + C_2 \sin(x/2)$

៤០. ចម្លើយទូទៅនៃ $9y'' + 6y' + y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x/3}$

គ. $y = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{x/3}$

ខ. $y = (C_1 x + C_2) e^{x/3}$

ឃ. $y = C_1 \cos(x/3) + C_2 \sin(x/3)$

៤១. សមីការ $y'' + 4y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

ខ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

៤២. សមីការ $y'' + 25y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{5x}$

ខ. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 25x + C_2 \sin 25x$

៤៣. សមីការ $y'' - 25y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{5x}$

ខ. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$

ឃ. $y = C_1 e^{25x} + C_2$

៤៤. សមីការ $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{\omega x}$

ខ. $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$

ឃ. $y = C_1 \cos \omega^2 x + C_2 \sin \omega^2 x$

៤៥. សមីការ $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$

ខ. $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{\omega x}$

ឃ. $y = C_1 e^{\omega^2 x} + C_2$

៤៦. សមីការ $y'' = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 x + C_2$

ខ. $y = C_1$

គ. $y = C_1 x^2 + C_2$

ឃ. $y = 0$

៤៧. បើ $y = C_1 x + C_2$ ជាចម្លើយនៃ $y'' = 0$, នោះក្រាបរបស់វាជា ៖

ក. បន្ទាត់ត្រង់

ខ. ប៉ារ៉ាបូល

គ. រង្វង់

ឃ. អ៊ីបស្តូណង់ស្យែល

៤៨. ចម្លើយនៃ $y'' + y = 0$ ដែល $y(0) = 1, y'(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = \cos x$

ខ. $y = \sin x$

គ. $y = \cos x + \sin x$

ឃ. $y = e^x$

៤៩. ចម្លើយនៃ $y'' + y = 0$ ដែល $y(0) = 0, y'(0) = 1$ គឺ ៖

ក. $y = \sin x$

ខ. $y = \cos x$

គ. $y = -\sin x$

ឃ. $y = x$

៥០. ចម្លើយនៃ $y'' + 4y = 0$ ដែល $y(0) = 2, y'(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = 2 \cos 2x$

ខ. $y = 2 \sin 2x$

គ. $y = \cos 2x$

ឃ. $y = 2e^{2x}$

៥១. ចម្លើយនៃ $y'' + 4y = 0$ ដែល $y(0) = 0, y'(0) = 6$ គឺ ៖

ក. $y = 3 \sin 2x$

ខ. $y = 6 \sin 2x$

គ. $y = 3 \cos 2x$

ឃ. $y = 2 \sin 3x$

៥២. ចម្លើយនៃ $y'' - 4y = 0$ ដែល $y(0) = 2, y'(0) = 0$ គឺ ៖

ក. $y = e^{2x} + e^{-2x}$

ខ. $y = 2e^{2x}$

គ. $y = e^{2x} - e^{-2x}$

ឃ. $y = 2 \cos 2x$

៥៣. ចម្លើយនៃ $y'' - 4y = 0$ ដែល $y(0) = 0, y'(0) = 4$ គឺ ៖

ក. $y = e^{2x} - e^{-2x}$

ខ. $y = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$

គ. $y = e^{2x} + e^{-2x}$

ឃ. $y = 2 \sin 2x$

៥៤. ចម្លើយនៃ $y'' - 2y' + y = 0$ ដែល $y(0) = 1, y'(0) = 2$ គឺ ៖

ក. $y = (x+1)e^x$

ខ. $y = (2x+1)e^x$

គ. $y = (x+2)e^x$

ឃ. $y = e^x$

៥៥. ចម្លើយនៃ $y'' + 2y' + y = 0$ ដែល $y(0) = 1, y'(0) = -1$ គឺ ៖

ក. $y = e^{-x}$

ខ. $y = (x+1)e^{-x}$

គ. $y = (1-x)e^{-x}$

ឃ. $y = e^x$

៥៦. ចម្លើយពិសេសថេរនៃ $y'' - 5y' + 6y = 12$ គឺ ៖

ក. $y_p = 2$

ខ. $y_p = 6$

គ. $y_p = 12$

ឃ. $y_p = -2$

៥៧. ចម្លើយពិសេសថេរនៃ $y'' + 4y = 8$ គឺ ៖

ក. $y_p = 2$

ខ. $y_p = 4$

គ. $y_p = 8$

ឃ. $y_p = 0$

៥៨. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' + 4y = 8$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2$

គ. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 8$

ខ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 2$

ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^{2x} + 2$

៥៩. ចម្លើយពិសេសចំពោះ $y'' - 9y = 18$ គឺ ៖

ក. $y_p = -2$

ខ. $y_p = 2$

គ. $y_p = 9$

ឃ. $y_p = -9$

៦០. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 9y = 18$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - 2$

ខ. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - 2$

គ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + 2$

ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x} - 2$

៦១. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ មានរាង $y_p = ax + b$ ។ តម្លៃ a និង b គឺ ៖

ក. $a = 1, b = 0$

ខ. $a = 1, b = 1$

គ. $a = 2, b = -3$

ឃ. $a = 1, b = -1$

៦២. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' + y = 2x$ គឺ ៖

ក. $y_p = 2x$

ខ. $y_p = x$

គ. $y_p = 2x - 2$

ឃ. $y_p = -2x$

៦៣. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' - y = 4e^{3x}$ មានរាង $y_p = Ae^{3x}$ ។ តម្លៃ A គឺ ៖

ក. $A = \frac{1}{2}$

ខ. $A = 1$

គ. $A = 4$

ឃ. $A = 2$

៦៤. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' + y = 3e^{2x}$ គឺ ៖

ក. $y_p = \frac{3}{5}e^{2x}$

ខ. $y_p = e^{2x}$

គ. $y_p = 3e^{2x}$

ឃ. $y_p = \frac{1}{5}e^{2x}$

៦៥. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' - 4y' + 3y = 8e^{-x}$ គឺ ៖

ក. $y_p = e^{-x}$

ខ. $y_p = 2e^{-x}$

គ. $y_p = 8e^{-x}$

ឃ. $y_p = \frac{1}{8}e^{-x}$

៦៦. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' + 4y = 3 \cos x$ គឺ ៖

ក. $y_p = \cos x$

ខ. $y_p = 3 \cos x$

គ. $y_p = \sin x$

ឃ. $y_p = \frac{1}{3} \cos x$

៦៧. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' + 9y = 5 \sin 2x$ គឺ ៖

ក. $y_p = \sin 2x$

ខ. $y_p = 5 \sin 2x$

គ. $y_p = \cos 2x$

ឃ. $y_p = \frac{1}{5} \sin 2x$

៦៨. ចំពោះសមីការ $y'' + y = \cos x$, ដោយសារ $r = \pm i$ ជាឫសសមីការសម្គាល់ នោះ y_p មានរាង ៖

ក. $y_p = x(A \cos x + B \sin x)$

ខ. $y_p = A \cos x + B \sin x$

គ. $y_p = A \cos x$

ឃ. $y_p = Ax^2 \cos x$

៦៩. ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' + y = \cos x$ គឺ ៖

ក. $y_p = \frac{1}{2}x \sin x$

ខ. $y_p = \frac{1}{2}x \cos x$

គ. $y_p = -\frac{1}{2}x \sin x$

ឃ. $y_p = x \cos x$

៧០. ចំពោះសមីការ $y'' + y = \sin x$, ចម្លើយពិសេសគឺ ៖

ក. $y_p = -\frac{1}{2}x \cos x$ ខ. $y_p = \frac{1}{2}x \sin x$ គ. $y_p = \frac{1}{2}x \cos x$ ឃ. $y_p = -x \sin x$

៧១. សមីការ $y'' - 2y' + y = e^x$ មាន $r = 1$ ជាឫសឌុប នោះចម្លើយពិសេសមានរាង ៖

ក. $y_p = Ax^2 e^x$ ខ. $y_p = Ax e^x$ គ. $y_p = Ae^x$ ឃ. $y_p = Ax^3 e^x$

៧២. តម្លៃ A ក្នុង $y_p = Ax^2 e^x$ នៃសមីការ $y'' - 2y' + y = e^x$ គឺ ៖

ក. $A = \frac{1}{2}$ ខ. $A = 1$ គ. $A = 2$ ឃ. $A = \frac{1}{4}$

៧៣. សមីការ $y'' - 3y' + 2y = e^x$ មាន $r = 1$ ជាឫសទោល នោះចម្លើយពិសេសមានរាង ៖

ក. $y_p = Ax e^x$ ខ. $y_p = Ax^2 e^x$ គ. $y_p = Ae^x$ ឃ. $y_p = Ae^{2x}$

៧៤. តម្លៃ A នៃ $y_p = Ax e^x$ សម្រាប់ $y'' - 3y' + 2y = e^x$ គឺ ៖

ក. $A = -1$ ខ. $A = 1$ គ. $A = 2$ ឃ. $A = -2$

៧៥. ប្រសិនបើ y_1, y_2 ជាចម្លើយនៃ $ay'' + by' + cy = 0$ នោះ $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ ក៏ជាចម្លើយដែរ តាមគោលការណ៍ ៖

ក. គោលការណ៍ត្រួតស៊ីគ្នា (Principle of Superposition) ខ. គោលការណ៍ញូតុន
គ. គោលការណ៍អាំងតេក្រាល ឃ. គោលការណ៍ដេរីវេ

៧៦. សមីការ $y'' - 6y' + 9y = 0$ មានសមីការសម្គាល់មានឫសឌុប $r_0 = 3$ ។ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះគឺ ៖

ក. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$ ខ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$
គ. $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ឃ. $y = (C_1 x^2 + C_2) e^{3x}$

៧៧. សមីការ $y'' + 25y = 0$ មានចម្លើយទូទៅផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 5$ គឺ ៖

ក. $y = 2 \cos 5x + 5 \sin 5x$ ខ. $y = 2 \cos 5x + \sin 5x$
គ. $y = \cos 5x + 2 \sin 5x$ ឃ. $y = 2e^{5x}$

៧៨. សមីការ $y'' - 2y' - 3y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ និងឫស ៖

ក. $r^2 + 2r - 3 = 0$ មានឫស $r_1 = 1, r_2 = -3$ ខ. $r^2 - 3r - 2 = 0$ មានឫស $r_1 = -1, r_2 = 2$
គ. $r^2 - 2r - 3 = 0$ មានឫស $r_1 = -1, r_2 = 3$ ឃ. $r^2 - 2r + 3 = 0$ មានឫសកុំផ្លិច

៧៩. សមីការ $y'' - 4y' + 13y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ ខ. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
គ. $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

៨០. សមីការ $y'' + 6y' + 10y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ខ. $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
គ. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^{-3x}$

៨១. សមីការ $y'' + 2y' + 5y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

ខ. $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

គ. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

ឃ. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

៨២. ចម្លើយនៃ $y'' + 2y' + 5y = 0$ ដែល $y(0) = 1, y'(0) = -1$ គឺ ៖

ក. $y = e^{-x} \cos 2x$

ខ. $y = e^{-x} \sin 2x$

គ. $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$

ឃ. $y = e^x \cos 2x$

៨៣. សមីការ $y'' - 4y' + 4y = 0$ ដែល $y(0) = 2, y'(0) = 5$ មានចម្លើយ ៖

ក. $y = (x+2)e^{2x}$

ខ. $y = (2x+2)e^{2x}$

គ. $y = (5x+2)e^{2x}$

ឃ. $y = (x+5)e^{2x}$

៨៤. សមីការ $y'' - y' - 6y = 0$ មានឫសសមីការសម្គាល់ ៖

ក. $r_1 = 3, r_2 = -2$

ខ. $r_1 = -3, r_2 = 2$

គ. $r_1 = 6, r_2 = -1$

ឃ. $r_1 = -6, r_2 = 1$

៨៥. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - y' - 6y = 0$ គឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

ខ. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 2x$

៨៦. បើ $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ និង $y(0) = 0, y'(0) = 5$ នោះ ៖

ក. $y = e^{3x} - e^{-2x}$

ខ. $y = 5e^{3x} - 5e^{-2x}$

គ. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

ឃ. $y = 2e^{3x} - 2e^{-2x}$

៨៧. សមីការ $y'' - 2y' = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

ខ. $y = C_1 e^{2x}$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

ឃ. $y = C_1 + C_2 x$

៨៨. បើ $y(0) = 3$ និង $y'(0) = 4$ ក្នុង $y'' - 2y' = 0$ នោះ ៖

ក. $y = 1 + 2e^{2x}$

ខ. $y = 3 + 4e^{2x}$

គ. $y = 2 + e^{2x}$

ឃ. $y = -1 + 4e^{2x}$

៨៩. សមីការ $y'' + 4y' = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖

ក. $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$

ខ. $y = C_1 + C_2 e^{4x}$

គ. $y = C_1 e^{-4x}$

ឃ. $y = (C_1 x + C_2) e^{-4x}$

៩០. បើ $y(0) = 2$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 5$ ក្នុង $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$ នោះ ៖

ក. $C_1 = 5, C_2 = -3$

ខ. $C_1 = 2, C_2 = 3$

គ. $C_1 = -3, C_2 = 5$

ឃ. $C_1 = 5, C_2 = 2$

៩១. សមីការ $y'' + \pi^2 y = 0$ មានឧប $T =$

ក. 2

ខ. π

គ. 2π

ឃ. $\frac{2}{\pi}$

៩២. សមីការ $y'' + 4\pi^2 y = 0$ មានប្រេកង់ $f =$

ក. 1 Hz

ខ. 2 Hz

គ. π Hz

ឃ. 2π Hz

៩៣. សមីការ $y'' - 4y = 0$ អាចសរសេរជាទម្រង់ ៖

ក. $(D-2)(D+2)y = 0$

ខ. $(D-4)y = 0$

គ. $(D^2+4)y = 0$

ឃ. $(D-2)^2 y = 0$

ដែល $D = \frac{d}{dx}$

៩៤. សមីការ $(D-3)^2 y = 0$ សមមូលនឹងសមីការ ៖

- ក. $y'' - 6y' + 9y = 0$ ខ. $y'' - 9y = 0$ គ. $y'' + 6y' + 9y = 0$ ឃ. $y'' - 3y' + 9y = 0$
៩៥. សមីការ $(D+1)^2y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖
 ក. $y = (C_1x + C_2)e^{-x}$ ខ. $y = (C_1x + C_2)e^x$ គ. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x$ ឃ. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
៩៦. សមីការ $y'' - 4y' + 5y = 0$ មាន $\Delta' = (-2)^2 - 5 = -1 = i^2$ ។ ឫសរបស់វាគឺ ៖
 ក. $r = 2 \pm i$ ខ. $r = -2 \pm i$ គ. $r = 1 \pm 2i$ ឃ. $r = 4 \pm i$
៩៧. ចម្លើយទូទៅនៃ $y'' - 4y' + 5y = 0$ គឺ ៖
 ក. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ខ. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
 គ. $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ឃ. $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$
៩៨. ក្រាប $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ កាត់តាម $O(0,0)$ លុះត្រាតែ ៖
 ក. $C_1 = 0$ ខ. $C_2 = 0$ គ. $C_1 = 1$ ឃ. $C_2 = 1$
៩៩. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y = e^{2x} \sin x$ ត្រង់ $x = 0$ គឺ ៖
 ក. 1 ខ. 2 គ. 0 ឃ. -1
១០០. សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប $y = e^{2x} \sin x$ ត្រង់ $x = 0$ គឺ ៖
 ក. $y = x$ ខ. $y = 2x$ គ. $y = x + 1$ ឃ. $y = 2x + 1$

៥ លំហាត់អនុវត្ត

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y'' - 9y' = 0$

ខ. $y'' - 3y' + 3y = 0$

គ. $2y'' + 3y' - 2y = 0$

ឃ. $y'' - 3y' + y = 0$

ង. $y'' + 2y' + y = 0$

ច. $y'' - 2\sqrt{11}y' + 11y = 0$

ឆ. $y'' - 2y' + y = 0$

ជ. $y'' + y = 0$

ឈ. $9y'' + 6y' + y = 0$

ញ. $y'' - 2y' + 4y = 0$

ដ. $4y'' + 12y' + 9y = 0$

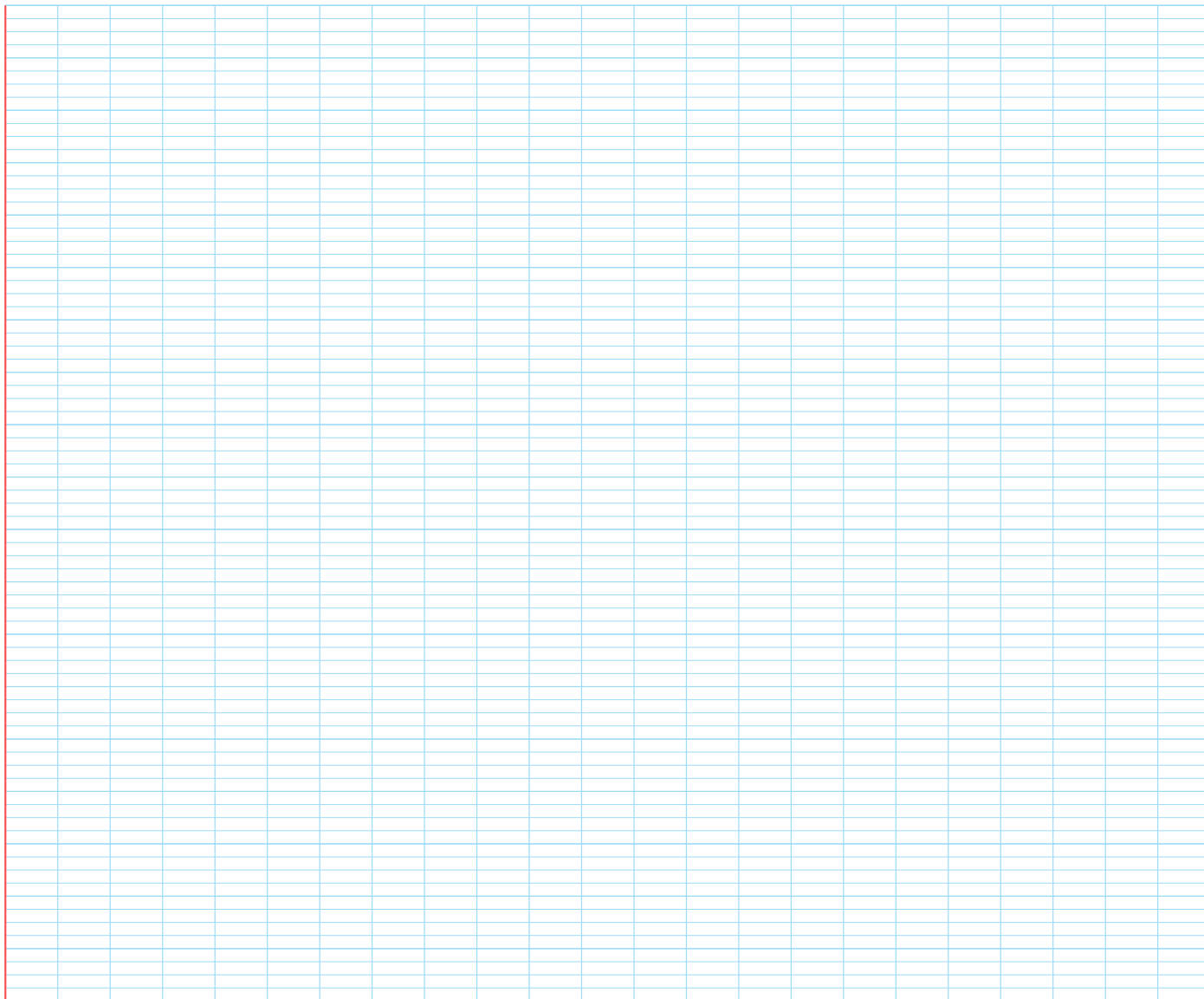
ប. $9y'' - 12y' + 11y = 0$

ដំណោះស្រាយ

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

- ក. $y'' - 9y' = 0 \quad y(0) = 3; y'(0) = 1$
 ខ. $y'' - 3y' + 3y = 0 \quad y(0) = 0; y'(0) = 11$
 គ. $2y'' + 3y' - 2y = 0 \quad y(0) = 12; y'(0) = -3$
 ឃ. $y'' - 3y' + y = 0 \quad y(0) = -7; y'(0) = 11$
 ង. $y'' + 2y' + y = 0 \quad y(0) = 15; y'(0) = -2$
 ច. $y'' - 2\sqrt{11}y' + 11y = 0 \quad y(0) = 5; y'(0) = -7$

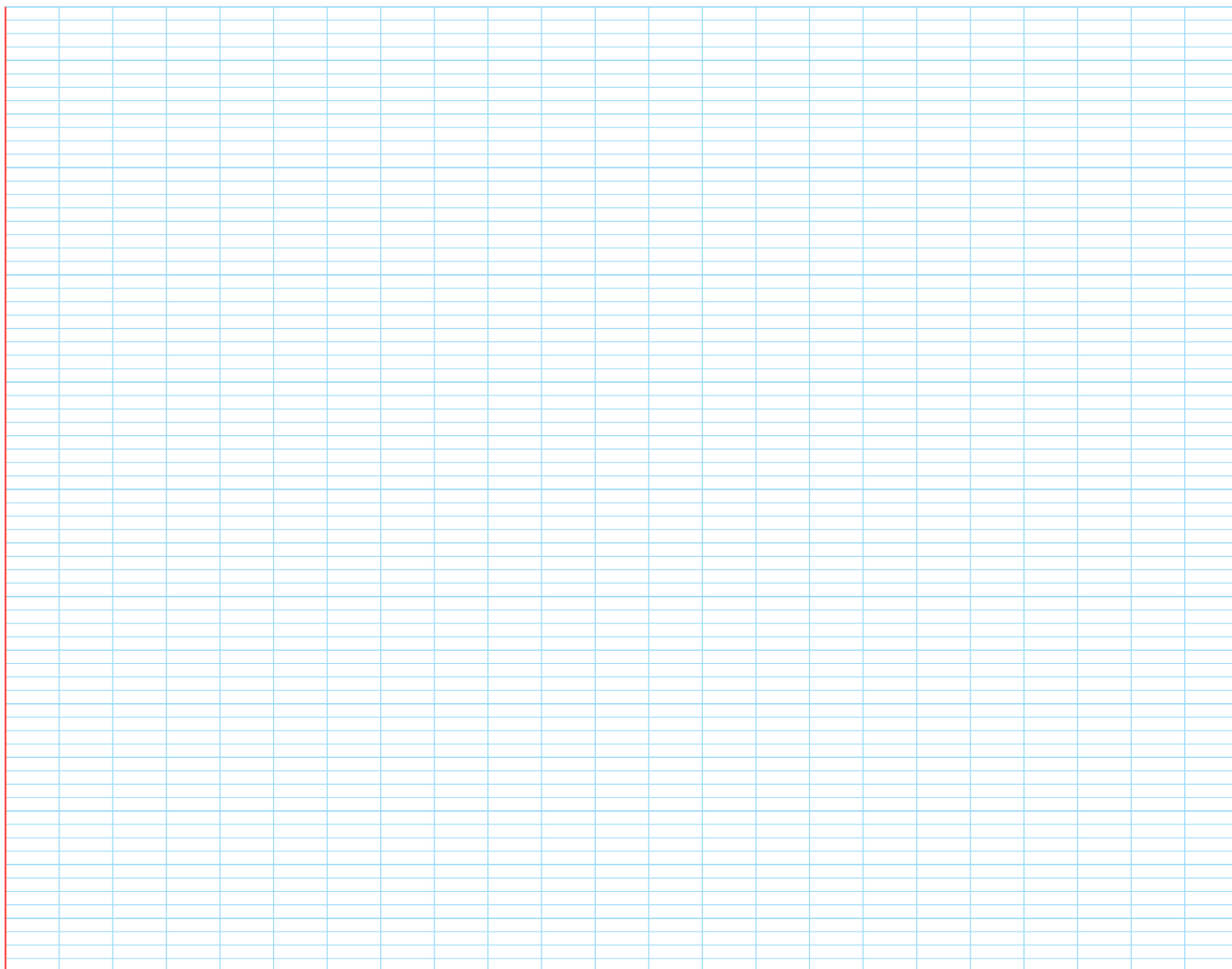
ដំណោះស្រាយ



៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

- ក. $y'' - y = 0 \quad y(0) = 1; y'(0) = -2$
 ខ. $y'' - 2y' + 3y = 0 \quad y(0) = 2; y'(0) = 1$
 គ. $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad y(1) = 1; y'(1) = 3$
 ឃ. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \quad y(0) = 0; y'(0) = 1$
 ង. $\frac{1}{4}y'' + y = 0 \quad y(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y'(0) = 3\sqrt{2}$
 ច. $y'' + y = 0 \quad y(\frac{\pi}{2}) = 3; y'(\frac{\pi}{2}) = 2$
 ឆ. $y'' - 9y = 0 \quad y(\ln 2) = 1; y'(\ln 2) = -3$
 ជ. $y'' + 6y' + 13y = 0 \quad y(0) = 1; y'(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ



៤. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $y'' + 4y = 0$ បើ $y(0) = 1, y'(0) = -1$

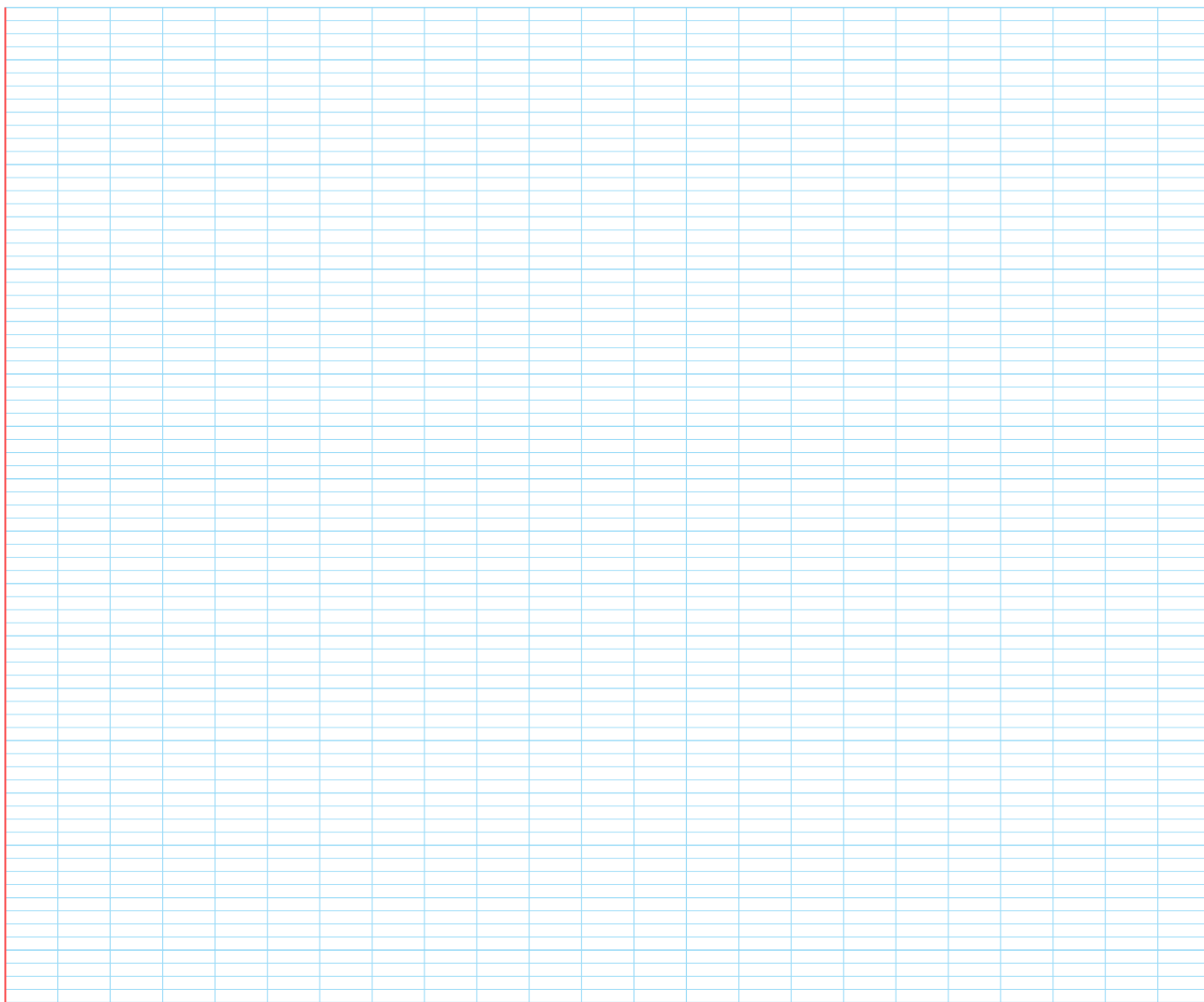
ខ. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$

គ. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$

ឃ. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

ង. $y'' - 2y' + 5y = 0$ ដោយដឹងថា $y(0) = -1$ និង $y'(0) = 1$ ។

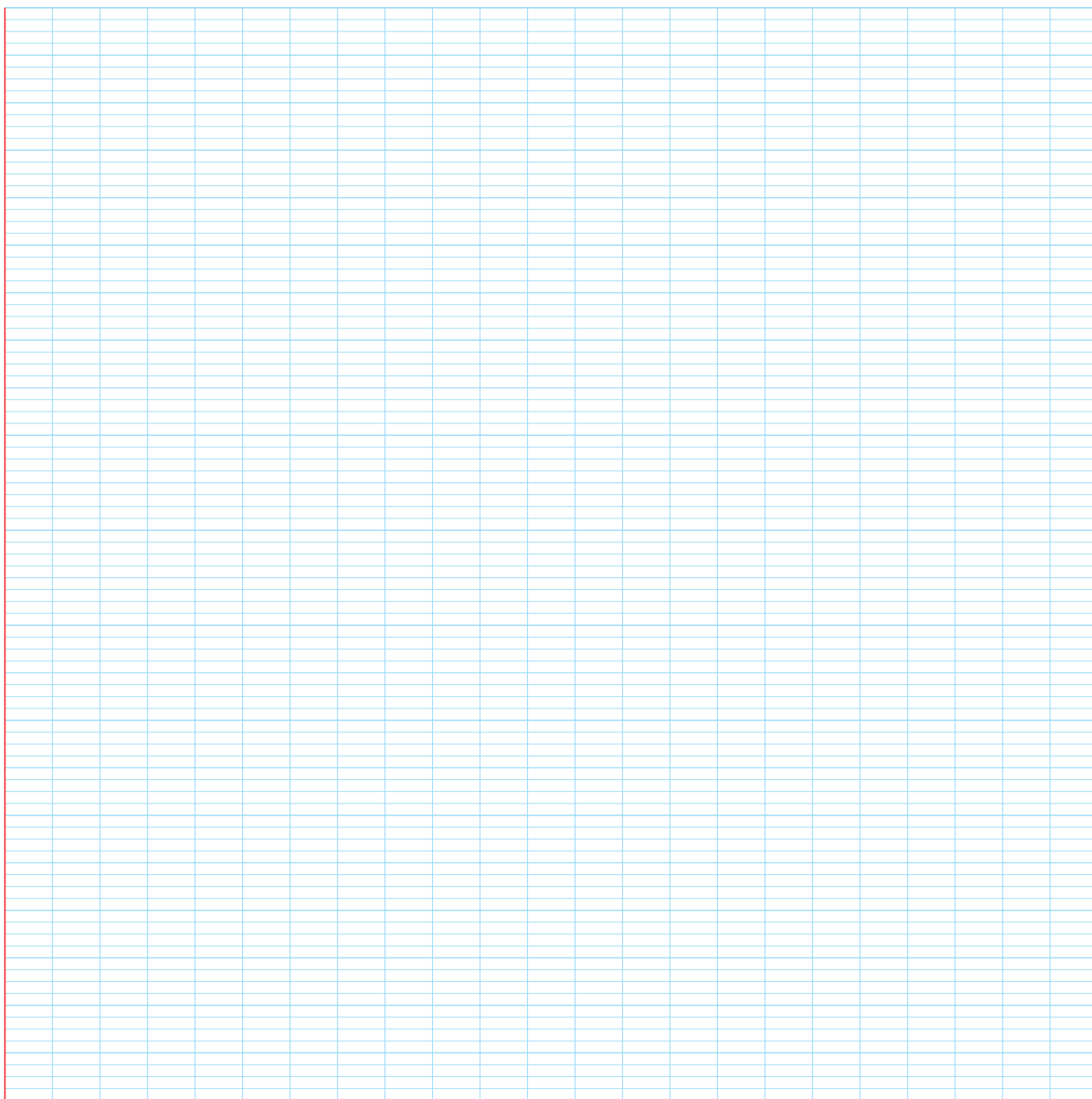
ដំណោះស្រាយ



៥. ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) $y'' + 5y' + 6y = 0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ (D) : $y = x - 1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x = 0$ ។

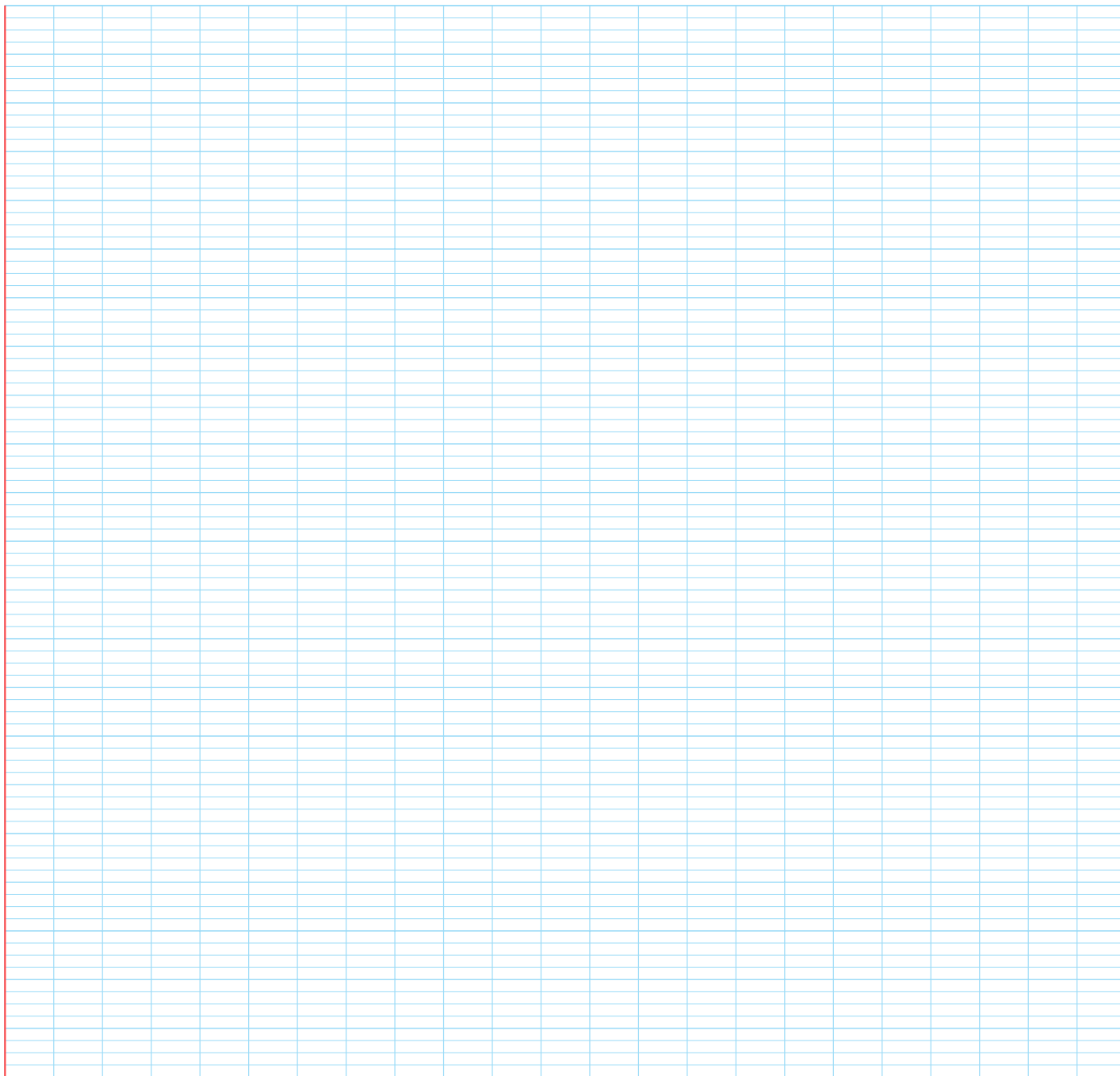
ដំណោះស្រាយ



៦. យើងមានសមីការ (E) $y' - y \ln 3 = 0$

- ក. រកសំណុំចម្លើយនៃ (E)
- ខ. កំណត់ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1) = 2$
- គ. បង្ហាញថា $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ



៧. គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f'' + 2f' = 0$

- ក. គេតាង $g = f'$ ។ បង្ហាញថា g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g' + 2g = 0$
- ខ. ដោះស្រាយសមីការ $g' + 2g = 0$ រួចទាញរកចម្លើយនៃ $f'' + 2f' = 0$
- គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅសំណួរ b ដោយដោះស្រាយសមីការ $f'' + 2f' = 0$ តាមសមីការសម្គាល់។

ដំណោះស្រាយ

៨. គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ ។

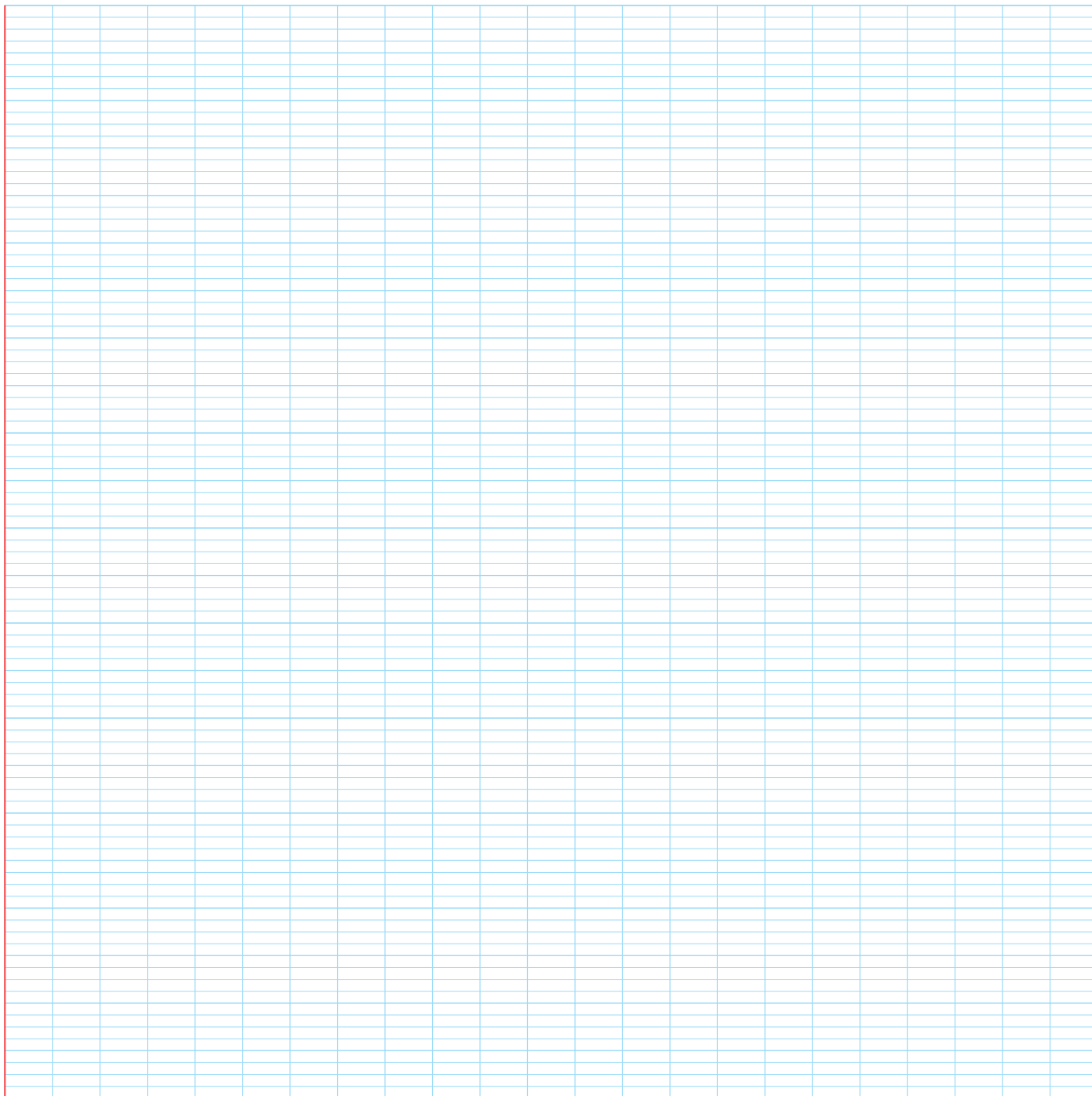
ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$ ។ កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E_1) ដែល $f(0) = 3$ និង $f'(0) = 4$

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីអោយ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

៩. ក. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 6y' + 8y = 0$ (α)
- ខ. រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (α) ដោយដឹងថាក្រាប (C) របស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ចំនុច $E(0, -1)$ ។

ដំណោះស្រាយ



១០. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$ ។ រកចម្លើយនៃ (F) បើ $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 6$ ។

ខ. រកចំនួនពិត n, p និង q ដោយដឹងថា $y = 2x^2 + 3x + 1$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E)

ដំណោះស្រាយ

១១. គេអោយសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 0$ (E)

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_g នៃសមីការ (E)

ខ. គេដឹងថា $y_p = a\cos x + b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 4\cos x - 12\sin x$ (F) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

ដំណោះស្រាយ

១២. គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1) : $-y'' - y' + 6y = 6x^2 - 2x + 4$

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E_2) : $-y'' - y' + 6y = 0$

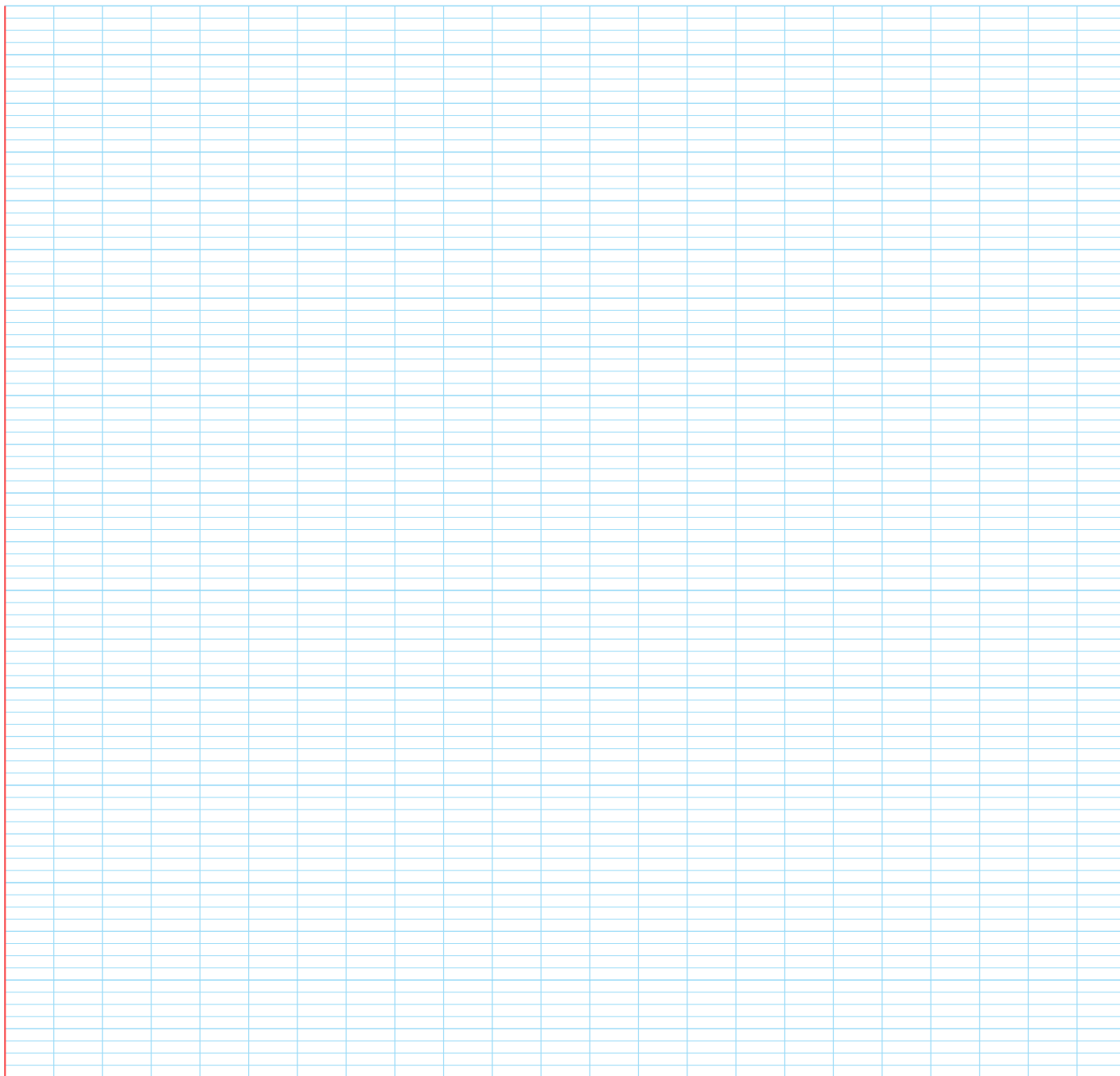
ខ. រកពហុធា $p(x) = ax^2 + bx + c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។ ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E_1)

ដំណោះស្រាយ

១៣. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 4y' + 2y = 4$ (E) ។

- ក. រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)
- ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 4y' + 2y = 4$
- គ. រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = 0$ ។

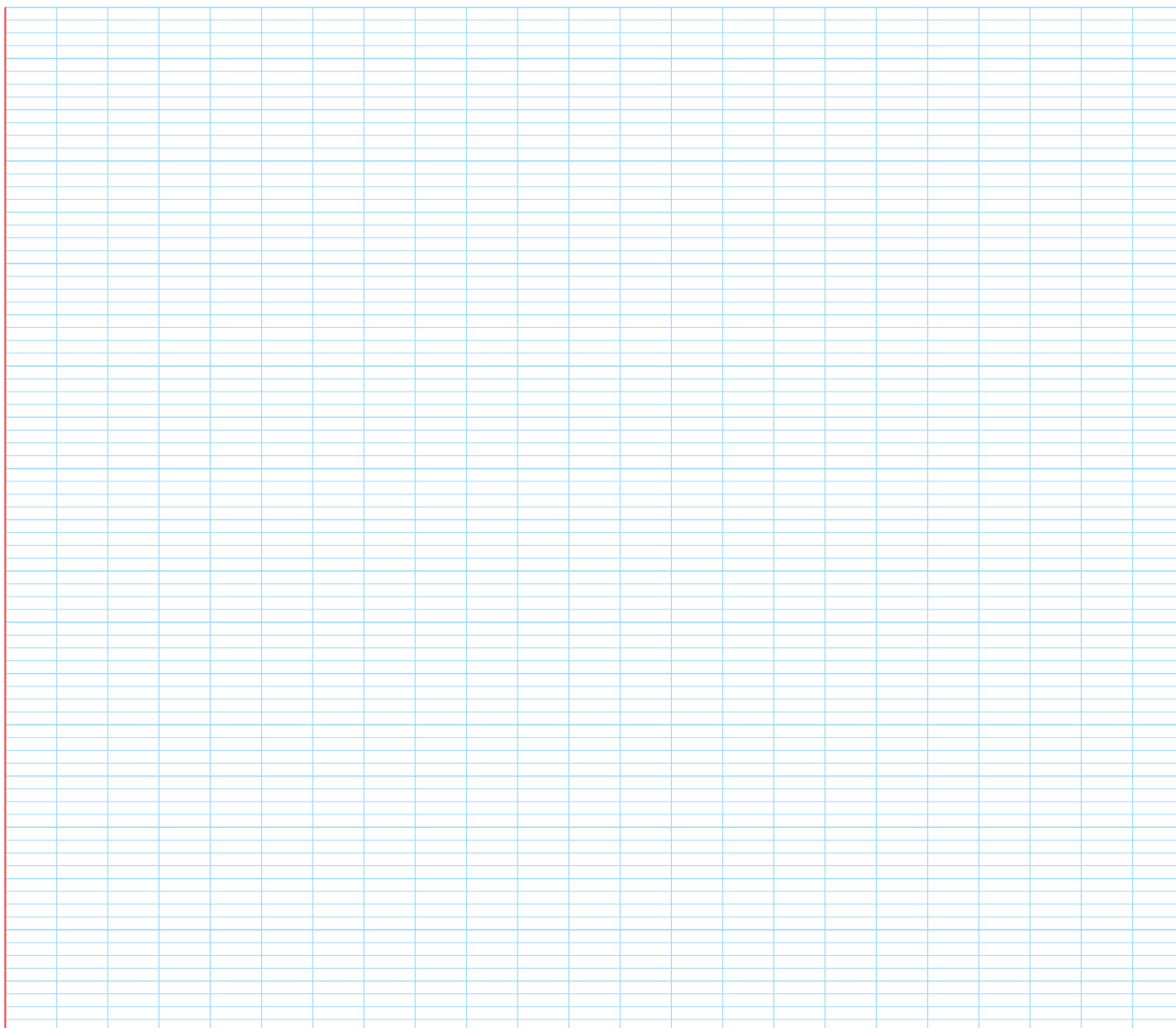
ដំណោះស្រាយ



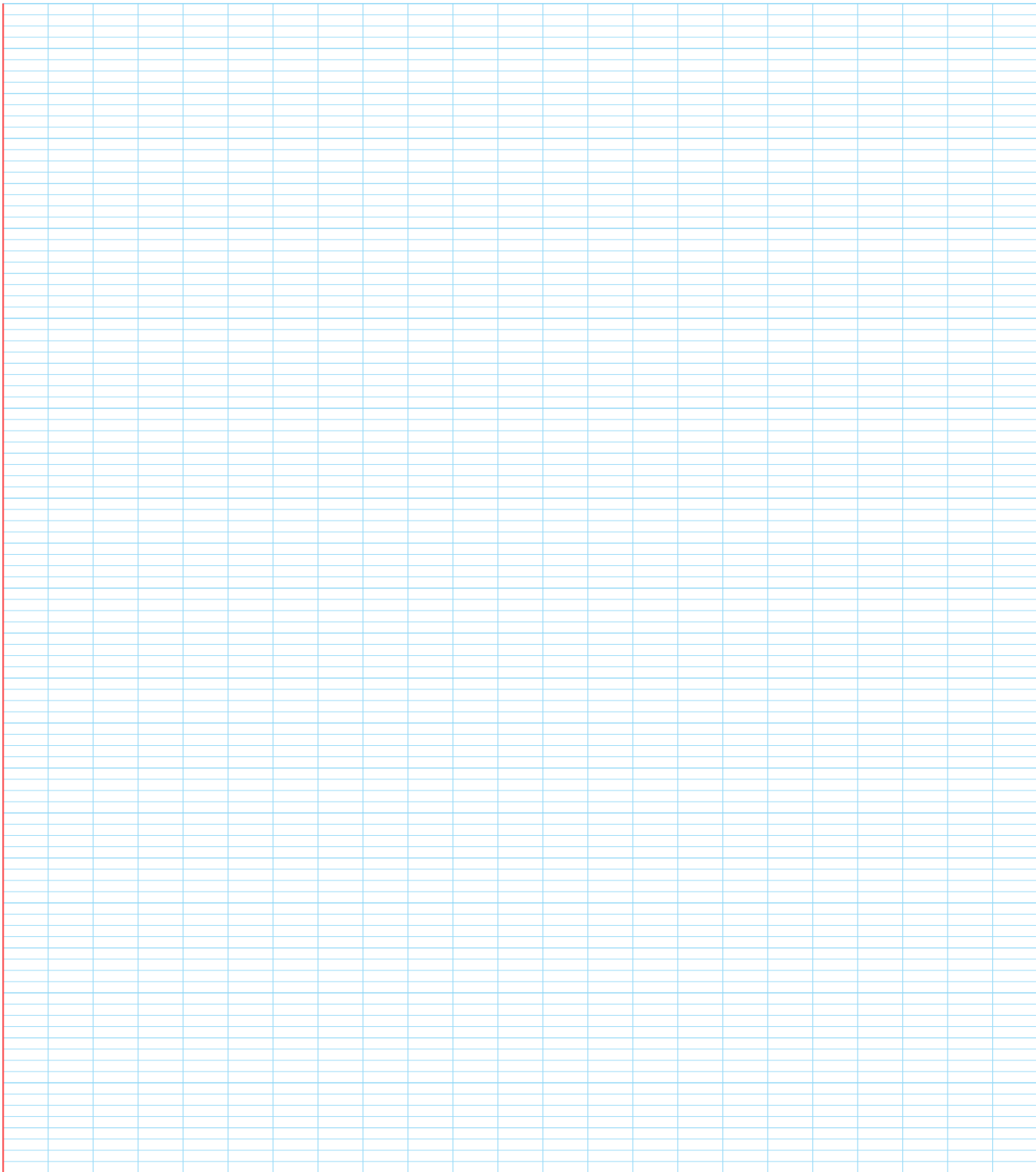
១៤. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 3y' = 5$ (E)

- ក. រកឫសនៃសមីការសម្គាល់នៃសមីការ (E)
- ខ. រកអនុគមន៍ g ដែល $g(x) = ax$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ សមីការ (E)
- គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + 3y' = 5$
- ឃ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ កាលណា $y(0) = e^3$, $y'(1) = \frac{2}{3}$

ដំណោះស្រាយ



ដំណោះស្រាយ

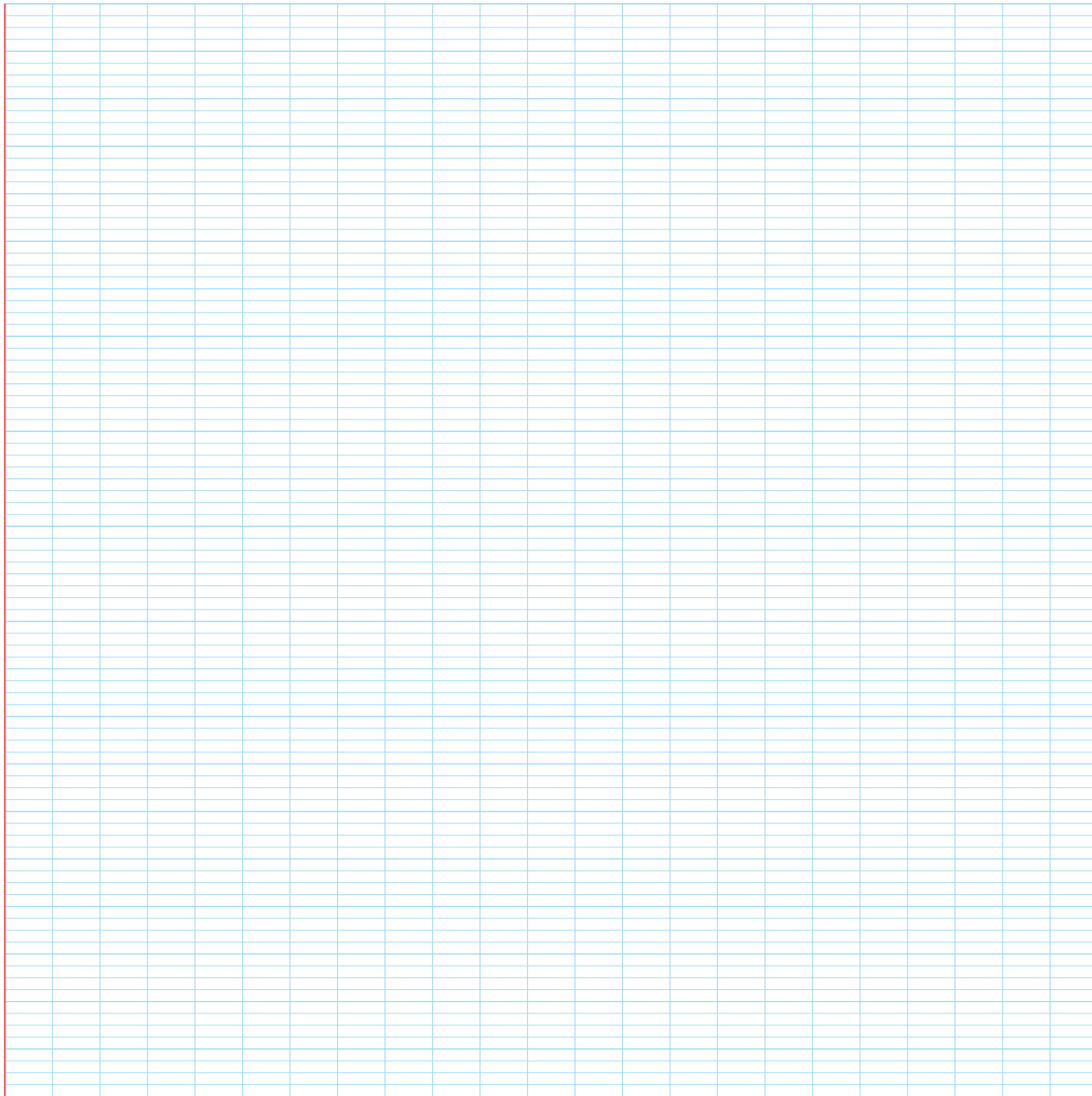
A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 40 rows of small squares, intended for solving the differential equation. The grid is bounded by a red line on the left and a blue line on the top and right.

១៥. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$ (E)។

ក. រកពហុធានីក្រទី ២ $p(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) បើ $h = f - p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' - 3y' + 2y = 0$

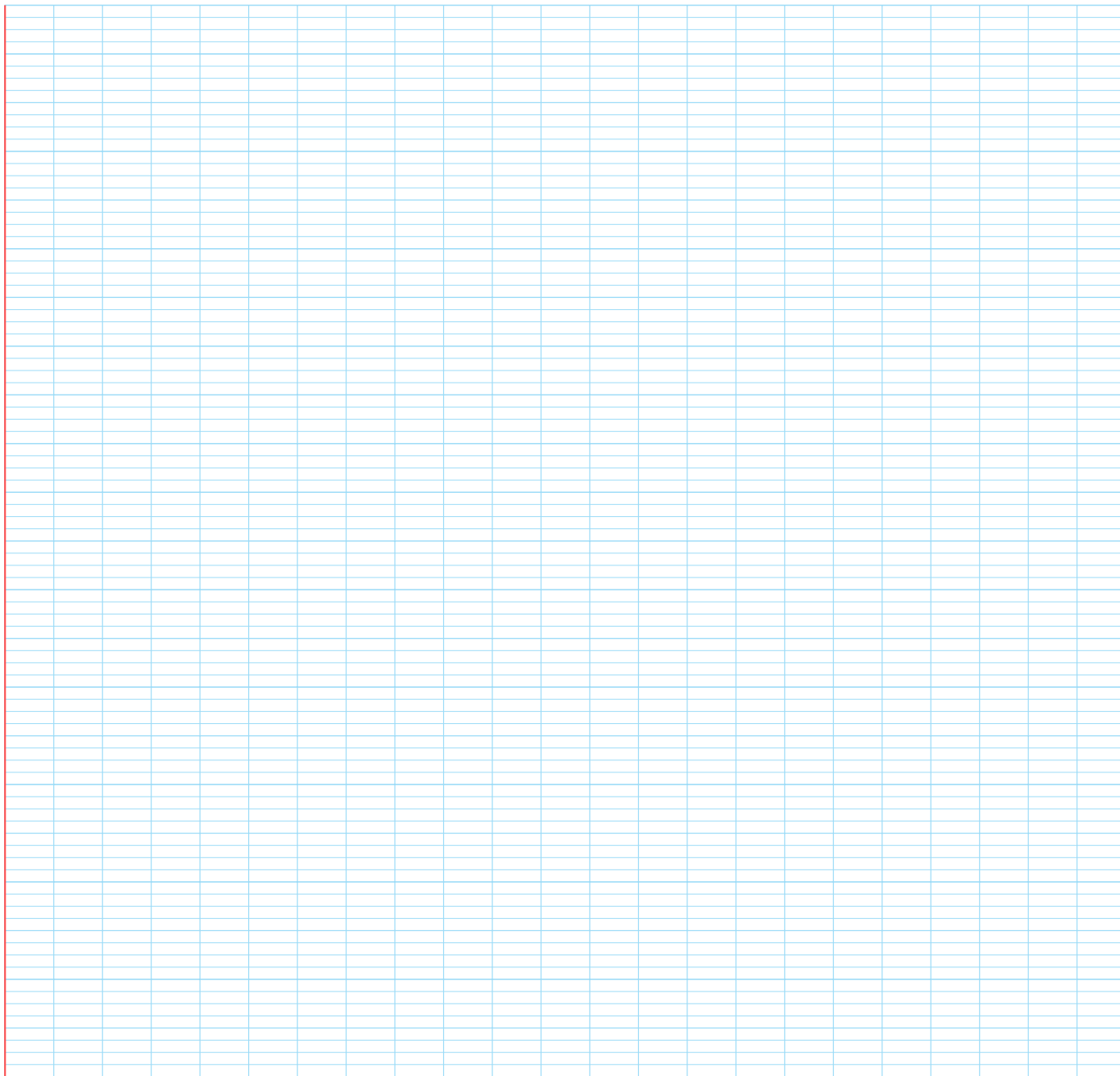
ដំណោះស្រាយ



១៦. គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = \sin x$ (E)

- ក. រកចំនួនពិត α ដែលអនុគមន៍ ϕ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $\phi(x) = \alpha x \cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។
- ខ. តាង f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។ បង្ហាញថា $(f - \phi)'' + (f - \phi) = 0$
- គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y = 0$ ។ ទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃ (E) ។

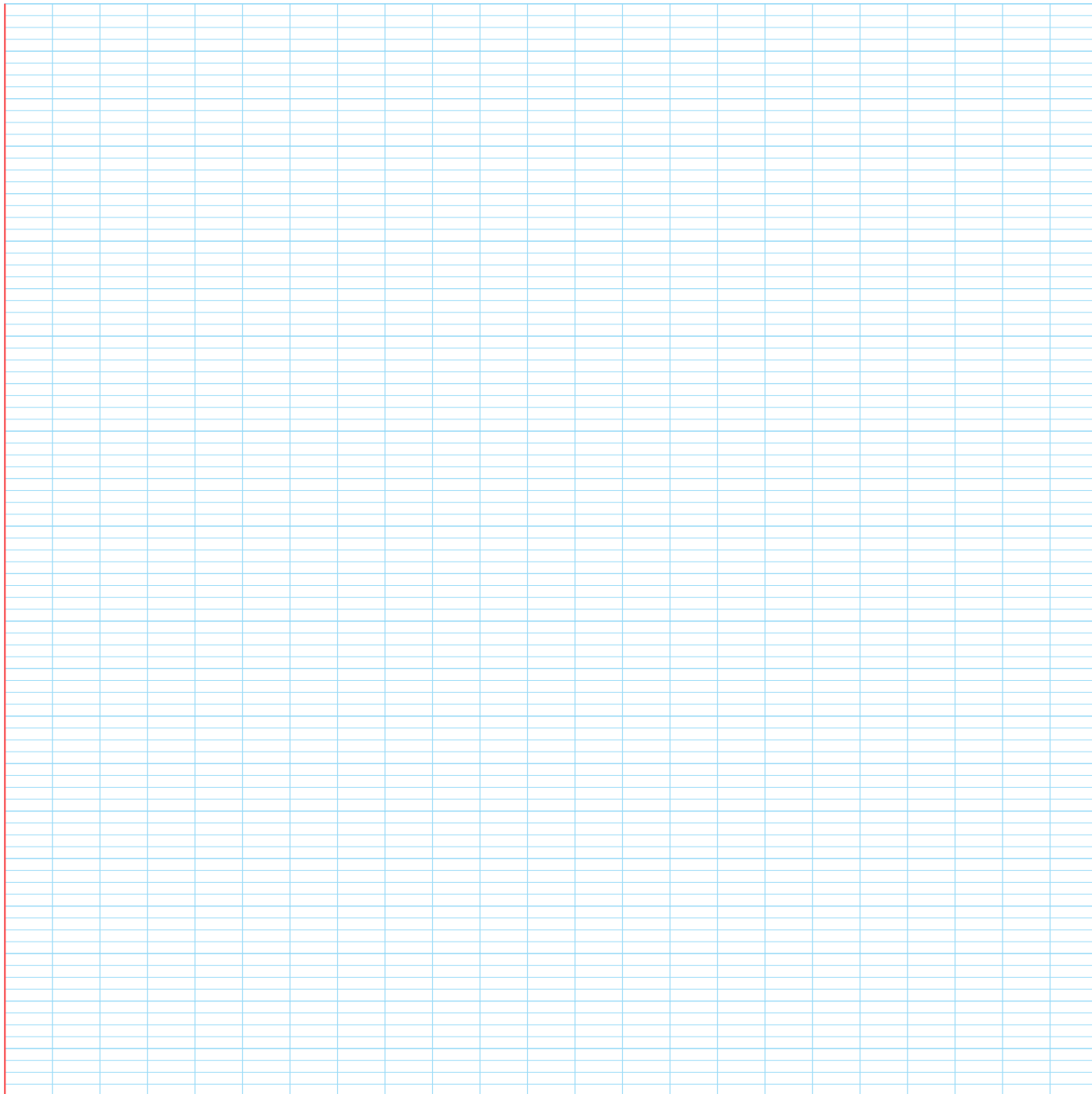
ដំណោះស្រាយ



១៧. ក. ដោះស្រាយសមីការ $2y'' - 3y' + y = 0$ (E)

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីអោយក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y = -\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

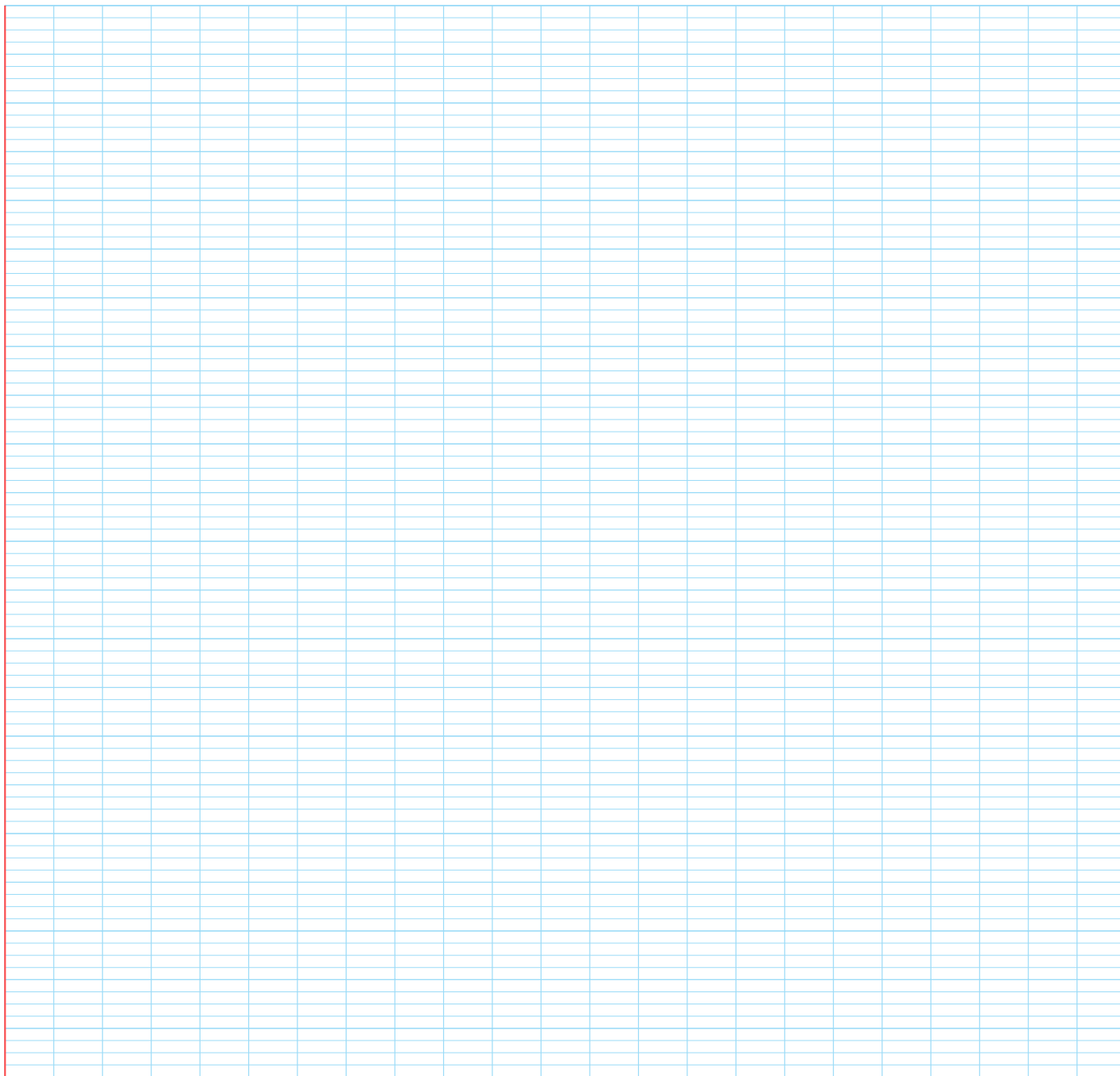


១៨. ក. រកចម្លើយទូទៅ y_g នៃសមីការ $y'' - 5y' + 6y = 0$ ។

ខ. រកចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីអោយ $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'' - 5y' + 6y = x^2 + x$ (E)

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

ដំណោះស្រាយ



១៩. គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 6y' + 5y = xe^{2x}$ ។

- ក. រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ $y'' - 6y' + 5y = 0$ ។
- ខ. កំណត់ A និង B ដើម្បីអោយ $y_p = e^{2x}(Ax + B)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)
- គ. បង្ហាញថា $y = y_h + y_p$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

ដំណោះស្រាយ

៦ លំហាត់ជំពូក

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 3y = 3x + 2$

ខ. $y' + 2y = e^{-2x}$

គ. $y' + y = \cos x + \sin x$

ឃ. $y' + 5y = 20, y(0) = 2$

ង. $xy' - y = 1 - \ln x$

ច. $y' + y = 2e^x$

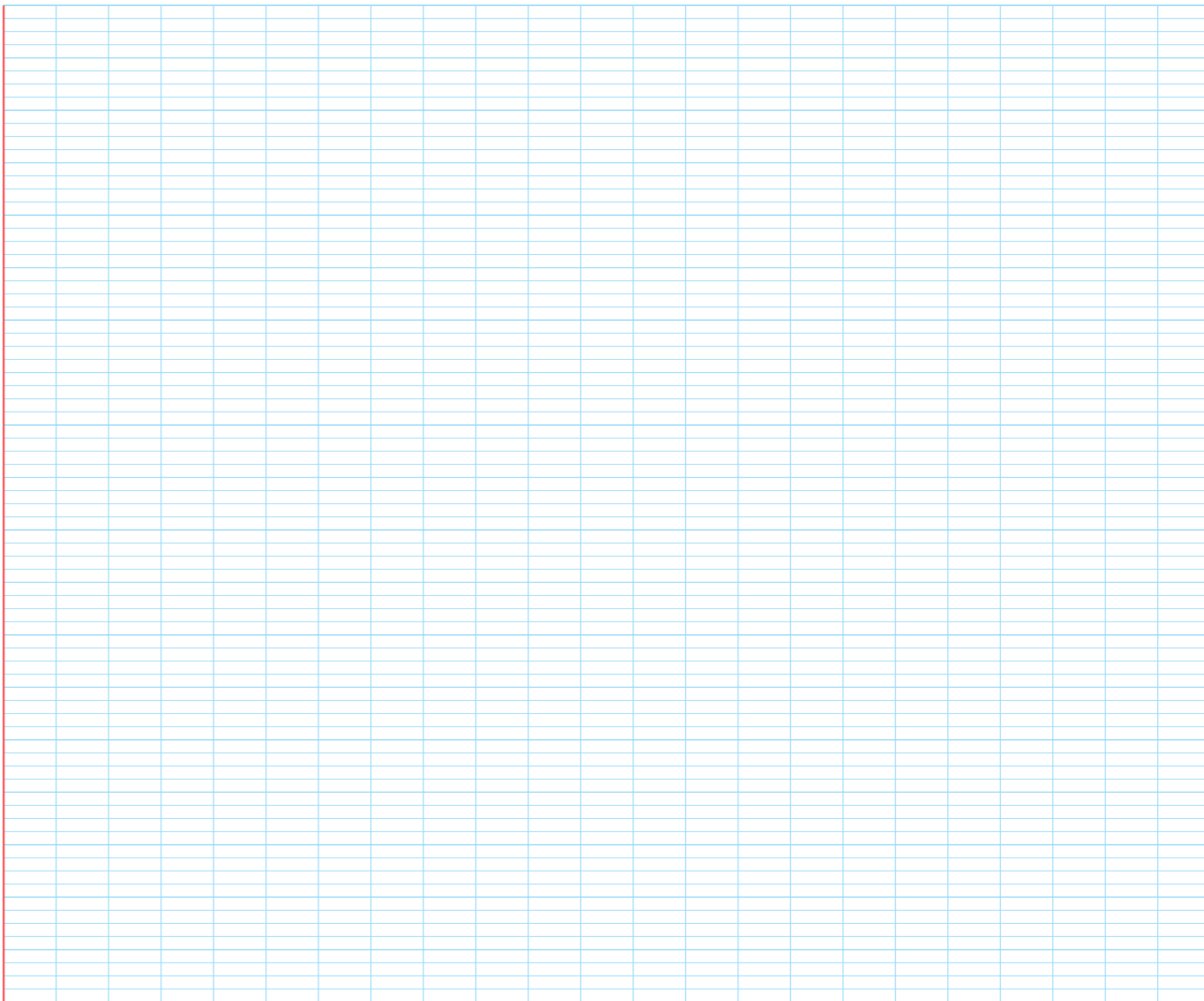
ឆ. $y' + 2y = 2x^2 - 3$

ជ. $y' + y = 1, y(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

២. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$ (E)។
- ក. រកពហុធានីក្រេទី២ $P(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)។
 - ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) បើ $h = f - p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E')។
 - គ. ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកអនុគមន៍ f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)។
 - ឃ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដែលខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f កាត់តាមចំណុចគល់ $O(0,0)$ ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ដែលស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចនោះ។

ដំណោះស្រាយ



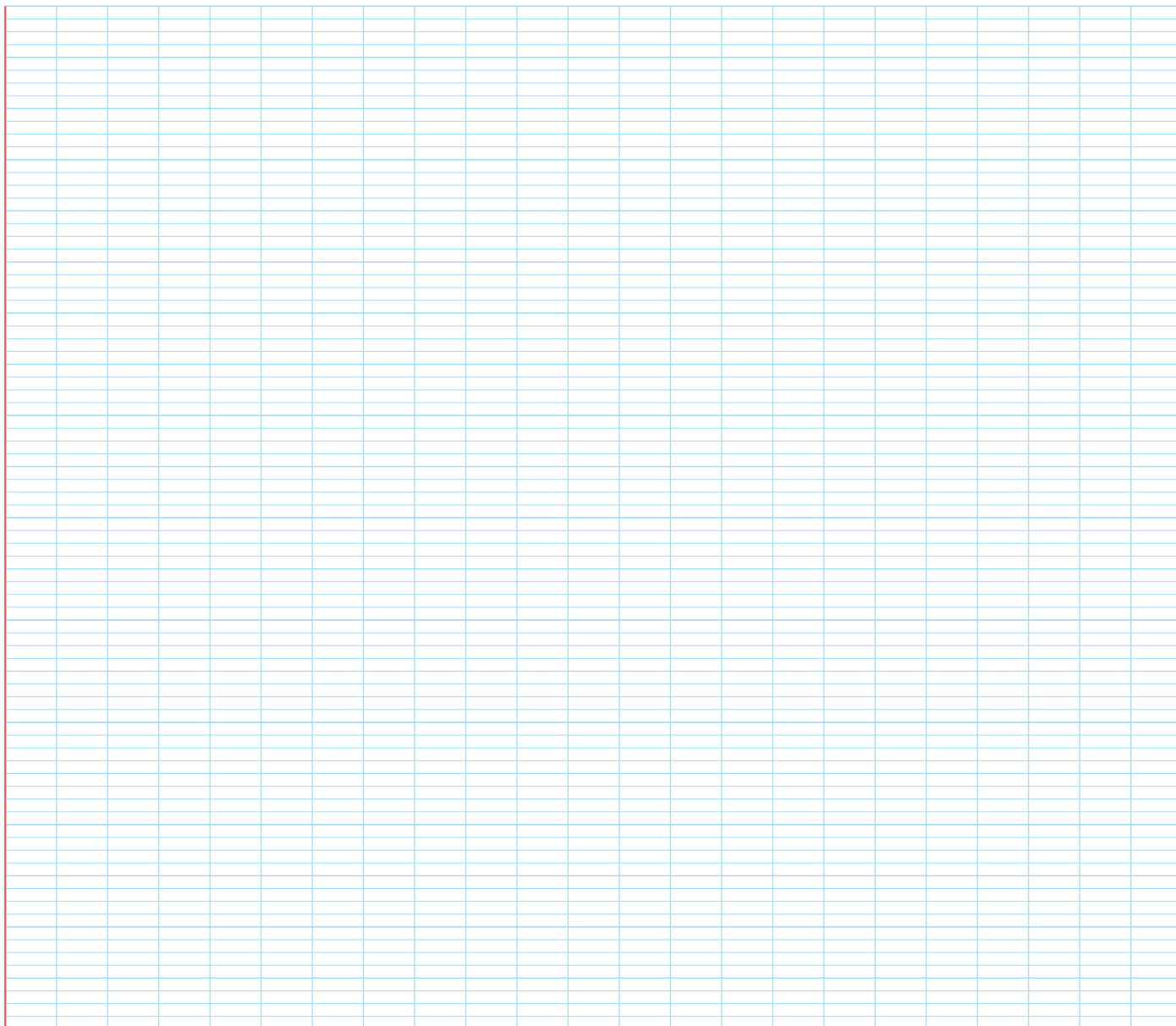
៣. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 9y = 2\cos x$ (E)។ គេតាង $y = Z + k\cos x$ ដែល Z ជាអនុគមន៍នៃ x និង k ជាចំនួនពិតថេរ។
- ក. រក k ដែល Z ជាចម្លើយនៃសមីការ $Z'' + 9Z = 0$ កាលណា $y = Z + k\cos x$ ជាចម្លើយសមីការ (E)។
 - ខ. ដោះស្រាយសមីការ $Z'' + 9Z = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)។
 - គ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = 0, y'(\pi) = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

៤. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = \sin x$ (E)។

- ក. រកចំនួនពិត α ដែលអនុគមន៍ φ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $\varphi(x) = \alpha x \cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E)។
- ខ. តាង f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)។ បង្ហាញថា $(f - \varphi)'' + (f - \varphi) = 0$ ។
- គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y = 0$ ទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃ (E)។

ដំណោះស្រាយ



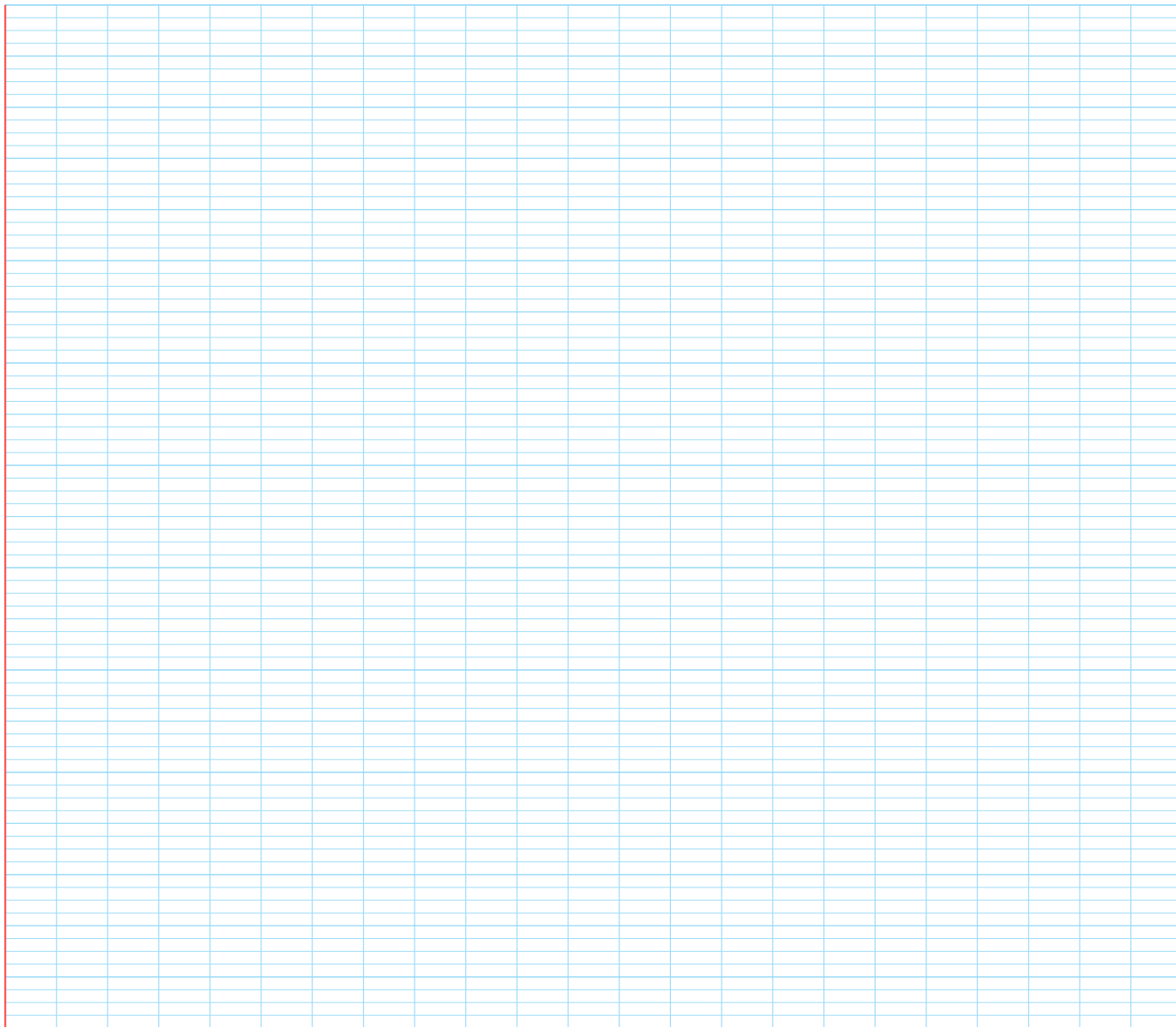
៥. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, y(0) = -3, y'(0) = 1$

ខ. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$

គ. $y'' + 4y = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 2$

ដំណោះស្រាយ

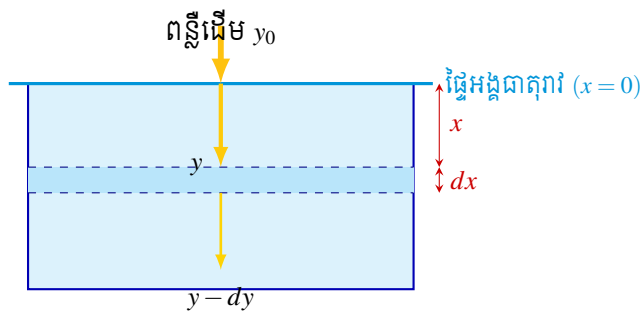


៦. គេយកទឹកកំសៀវដែលទើបនឹងដាំពុះមានសីតុណ្ហភាព $100^{\circ}C$ មកដាក់ក្នុងបន្ទប់មួយដែលមានសីតុណ្ហភាព $20^{\circ}C$ ។ គេដឹងថា ២០ នាទីក្រោយមក សីតុណ្ហភាពទឹកថយចុះនៅត្រឹម $60^{\circ}C$ ។ តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មាននាទីដែលសីតុណ្ហភាពទឹកថយចុះពី $60^{\circ}C$ មក $30^{\circ}C$?

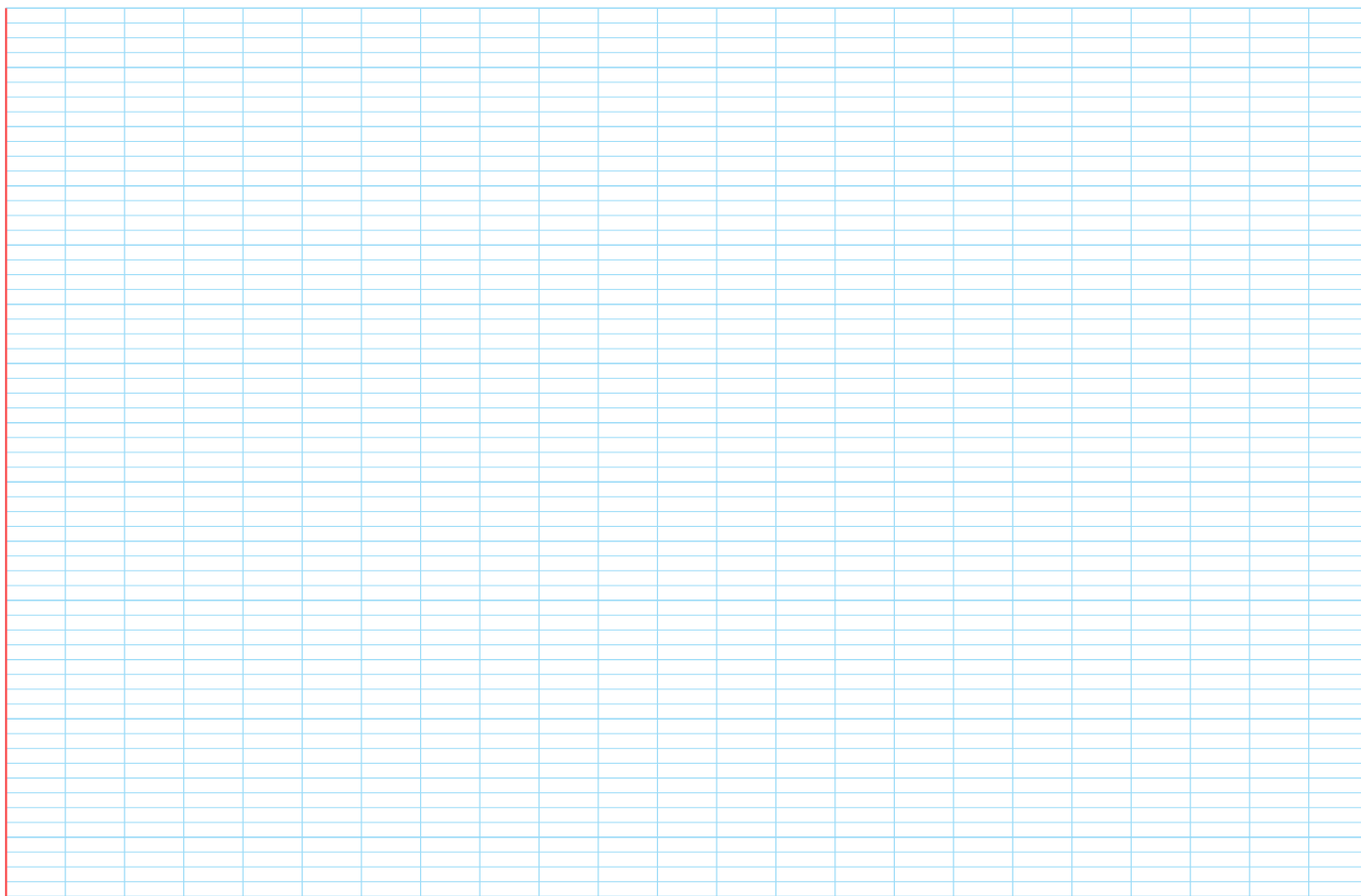
ដំណោះស្រាយ

သိရောင်းပြန်ဖယ်

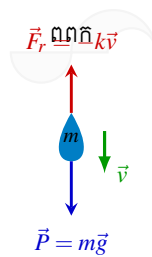
៧. នៅពេលដែលមានការស្ទើរតែទៅលើផ្ទៃនៃអង្គធាតុរាវមួយ នោះបរិមាណពន្លឺត្រូវបានអង្គធាតុរាវស្រូបយកអស់មួយចំនួន។ គេដឹងថា បរិមាណពន្លឺ dy ដែលអង្គធាតុរាវស្រូបយកសមាមាត្រទៅនឹងផលគុណនៃប្រវែងជម្រៅ dx ដែលកាំពន្លឺទៅដល់នឹងបរិមាណពន្លឺ y ដែលនៅសល់ត្រង់ផ្ទៃដែលកាំពន្លឺប៉ះ។ រកបរិមាណពន្លឺដែលនៅសល់ត្រង់ជម្រៅ x បើគេដឹងថាបរិមាណពន្លឺដែលមានពីដំបូងគឺ y_0 ។



ដំណោះស្រាយ

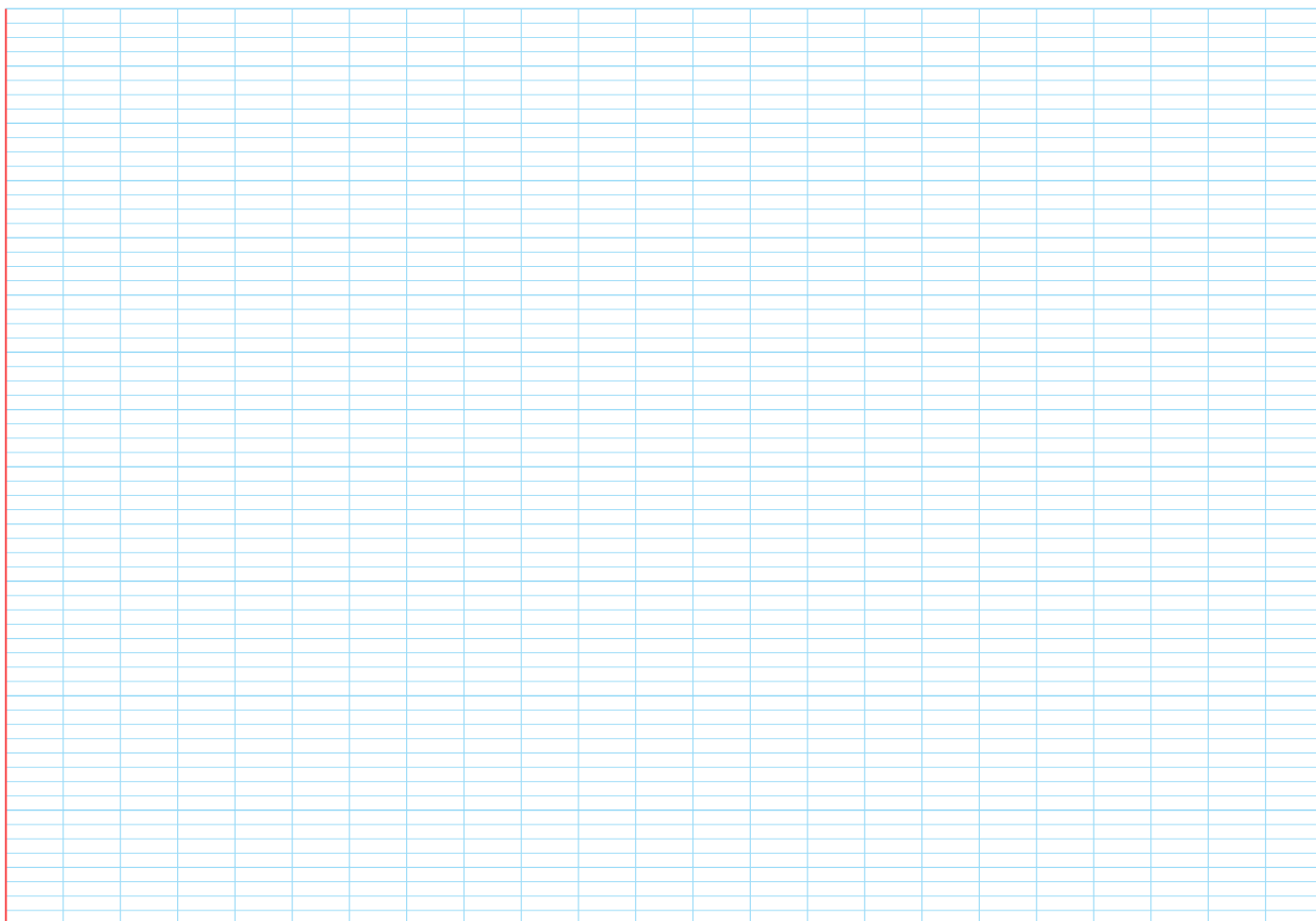


သိရောင်းပြဌာန



៨. នៅពេលភ្លៀងធ្លាក់ តំណក់ទឹកភ្លៀងដែលធ្លាក់ចុះមកត្រូវរងនូវកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ បើមិនដូចនេះទេ មនុស្សនឹងអាចស្លាប់ដោយសារតំណក់ទឹកភ្លៀងនៅរៀងរាល់រដូវវស្សា ។ គេដឹងថាកម្លាំងទប់នៃខ្យល់សមាមាត្រនឹងល្បឿននៃទឹកភ្លៀងដែលកំពុងធ្លាក់ ហើយគ្មានកម្លាំងផ្សេងទៀតក្រៅពីកម្លាំងទំនាញ និង កម្លាំង ទប់ មានអំពើ លើ តំណក់ទឹកភ្លៀង ឡើយ ។ រក ល្បឿន របស់ តំណក់ទឹកភ្លៀងនៅខណៈពេល t បើគេដឹងថា តំណក់ទឹកភ្លៀងមានម៉ាស់ m និងល្បឿនដើម v_0 ។

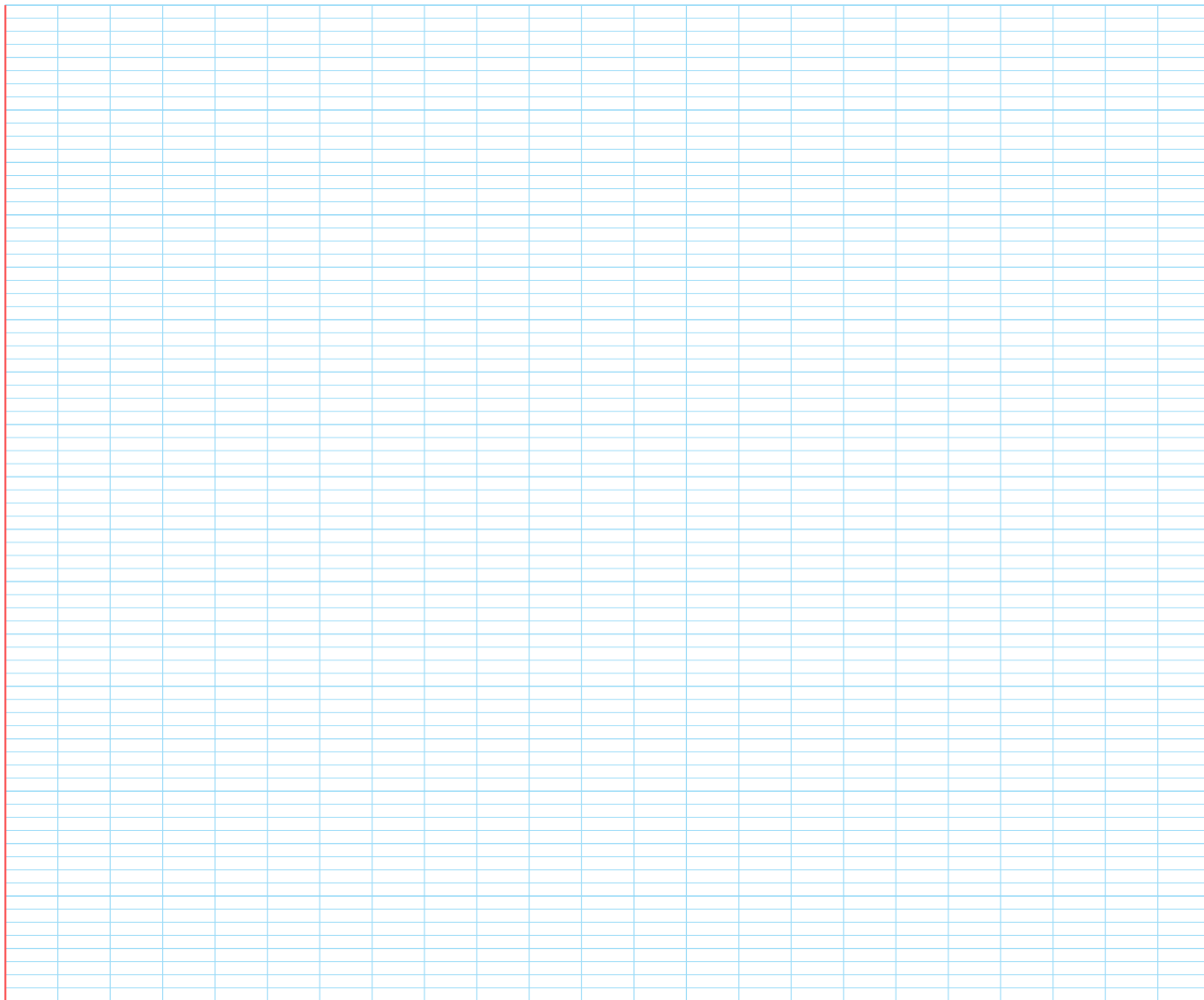
ដំណោះស្រាយ



သိရောင်းပြဌာန

៩. គេភ្ជាប់ម៉ាស 1 kg នៅខាងចុងនៃរ៉ឺស័រ ដែលមានថេរកម្រាញ $k = 16 \text{ N/m}$ ។ ប្រព័ន្ធរ៉ឺស័រនេះធ្វើចលនាក្នុងអង្គធាតុរាវ ដែលមានកម្លាំងកកិតស្មើនឹង 10 ដងនៃល្បឿនខណៈនោះ។ រកសមីការនៃចលនាបើ៖
- គេលែងម៉ាសឱ្យចេញពីចំណុចនៅខាងក្រោមទីតាំងលំនឹងប្រវែង 1 m ដោយគ្មានល្បឿនដើម។
 - គេលែងម៉ាសឱ្យចេញពីចំណុចនៅខាងក្រោមទីតាំងលំនឹងប្រវែង 1 m ដោយឱ្យល្បឿនរត់ឡើងលើ 12 m/s ។

ដំណោះស្រាយ



သိရောင်းပြန်ဖယ်

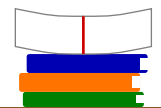
អនុវត្តន៍នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល



១ ម៉ូដែលគណិតវិទ្យា និងអនុវត្តន៍ក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺជាឧបករណ៍គណិតវិទ្យាដ៏មានឥទ្ធិពលបំផុត ក្នុងការបង្កើតគំរូ (Mathematical Modeling) ដើម្បីសិក្សាពីបាតុភូតធម្មជាតិ បម្រែបម្រួលរូបវិទ្យា ជីវសាស្ត្រ និងសេដ្ឋកិច្ច។

១.១ កំណើនប្រជាជន និងបម្រែបម្រួលបរិមាណ



និយមន័យ ១

បើអត្រាបម្រែបម្រួលនៃចំនួនប្រជាជន $P(t)$ នៅខណៈពេល t សមាមាត្រទៅនឹងចំនួនប្រជាជនដែលមាននៅពេលនោះ នោះគេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (k > 0 \text{ ជាថេរអត្រាកំណើន})$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះគឺ ៖

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

ដែល $P_0 = P(0)$ ជាចំនួនប្រជាជននៅខណៈដើម $t = 0$ ។

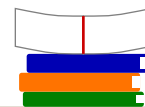
ជំនួញទី ១

រយៈពេលដែលចំនួនប្រជាជនកើនឡើងទ្វេដង (Doubling Time T_d) ៖

$$\text{គឺឱ្យ } P(T_d) = 2P_0 \iff P_0 e^{kT_d} = 2P_0 \iff e^{kT_d} = 2$$

ទាញបាន ៖

$$T_d = \frac{\ln 2}{k}$$

១.២ ការបំបែកធាតុវិទ្យុសកម្ម និងកន្លះជីវិត**និយមន័យ ២**

អត្រានៃការបំបែកធាតុវិទ្យុសកម្ម $N(t)$ គឺសមាមាត្រទៅនឹងបរិមាណសារធាតុដែលនៅសល់ ៖

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (\lambda > 0 \text{ ជាថេរការបំបែក ឬ Decay constant})$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះគឺ ៖

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

ដែល $N_0 = N(0)$ ជាបរិមាណសារធាតុនៅខណៈដើម $t = 0$ ។

ជំនួញទី ២

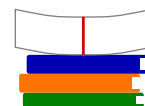
កន្លះជីវិតនៃសារធាតុវិទ្យុសកម្ម (Half-life $T_{1/2}$) ៖

កន្លះជីវិត គឺជារយៈពេលដែលសារធាតុវិទ្យុសកម្មថយចុះអស់ពាក់កណ្តាលនៃបរិមាណដើម ៖

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \iff N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \iff e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

ទាញបានរូបមន្តទំនាក់ទំនង ៖

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{ឬ} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

១.៣ ច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុន

និយមន័យ ៣

ច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុនចែងថា ៖ អត្រាបម្រែបម្រួលសីតុណ្ហភាពនៃអង្គធាតុមួយ សមាមាត្រទៅនឹងផលដកនៃសីតុណ្ហភាពរបស់អង្គធាតុ និងសីតុណ្ហភាពនៃមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញ ៖

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad (k > 0)$$

ដែល $T(t)$ ជាសីតុណ្ហភាពនៃអង្គធាតុនៅខណៈពេល t , T_m ជាសីតុណ្ហភាពថេរនៃមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញ, និង k ជាមេគុណត្រជាក់។

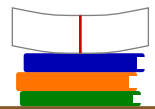
ជាទូទៅ ៣

តាមវិធីវិញកអថេរ គេបាន ៖

$$\frac{dT}{T - T_m} = -k dt \implies \ln|T - T_m| = -kt + C \implies T(t) - T_m = Ae^{-kt}$$

បើនៅខណៈ $t = 0$, $T(0) = T_0$ (សីតុណ្ហភាពដើម) នោះ $A = T_0 - T_m$ ។ ដូចនេះ ៖

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

១.៤ ចលនារបស់វត្ថុក្នុងមជ្ឈដ្ឋានធម៌**និយមន័យ ៤**

អង្គធាតុមួយមានម៉ាស់ m ធ្លាក់ចុះក្រោមក្រោមអំពើនៃកម្លាំងទំនាញ $P = mg$ និងកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ $F_r = -kv$ ($k > 0$ ជាមេគុណកកិត)។ តាមច្បាប់ទី២ ញូតុន ៖

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \iff \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

ជាទូទៅ ៤

សមីការ $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១ មិនអូម៉ូសែន ៖

- ចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន ៖ $v_c = Ce^{-\frac{k}{m}t}$
- ចម្លើយពិសេសថេរ ៖ $v_p = \frac{mg}{k}$

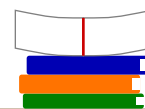
- ចម្លើយទូទៅ ៖ $v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$
- បើល្បឿនដើម $v(0) = 0$ នោះ $C = -\frac{mg}{k}$ នាំឱ្យ ៖

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

- កាលណា $t \rightarrow +\infty$, ល្បឿនខិតទៅរក ល្បឿនព្រំដែន (Terminal Velocity) ៖

$$v_{\lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$$

១.៥ លំយោលមេកានិចនៃប្រព័ន្ធរ៉ឺស័រ



និយមន័យ ៥

ប្រព័ន្ធរ៉ឺស័រមានម៉ាស់ m , ថេរកម្រាញរ៉ឺស័រ $k > 0$, និងកម្លាំងទប់កកិត $c \geq 0$ ធ្វើឱ្យផ្លាស់ប្តូរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២ ៖

$$my'' + cy' + ky = 0$$

- លំយោលសេរីគ្មានកកិត ($c = 0$) ៖ $my'' + ky = 0 \iff y'' + \omega_0^2 y = 0$ ដែល $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ជាប្រេកង់កែង។
ចម្លើយទូទៅ ៖ $y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$
- លំយោលខ្សោយ ($c^2 - 4mk < 0$) ៖ ចលនាថយចុះជាលំយោល ៖

$$y(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) \quad \text{ដែល } \alpha = \frac{c}{2m}$$

២ ឧទាហរណ៍គំរូ និងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

លំហាត់គំរូ ១

(កំណើនបាក់តេរី) នៅក្នុងមន្ទីរពិសោធន៍មួយ គេសង្កេតឃើញថាបាក់តេរីកើនឡើងតាមច្បាប់កំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $\frac{dP}{dt} = kP$ ។ នៅពេលចាប់ផ្តើមពិសោធន៍ ($t = 0$) គេរាប់ឃើញមានបាក់តេរីចំនួន 1000 កោសិកា។ រយៈពេល 3 ម៉ោង ក្រោយមក បរិមាណបាក់តេរីកើនឡើងដល់ 4000 កោសិកា។

១. កំណត់កន្សោម $P(t)$ ជាអនុគមន៍នៃពេល t (គិតជាម៉ោង)។
២. រកចំនួនបាក់តេរីក្រោយពេលកន្លងផុតទៅ 5 ម៉ោង។
៣. តើរយៈពេលប៉ុន្មានម៉ោង ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 16000 កោសិកា?

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការ $\frac{dP}{dt} = kP$ មានចម្លើយទូទៅ $P(t) = P_0 e^{kt}$ ។
នៅពេល $t = 0$, $P(0) = 1000 \implies P_0 = 1000$ ។ ដូចនេះ $P(t) = 1000 e^{kt}$ ។
នៅពេល $t = 3$, $P(3) = 4000$ នាំឱ្យ ៖

$$1000e^{3k} = 4000 \iff e^{3k} = 4 \iff 3k = \ln 4 \iff k = \frac{\ln 4}{3} = \frac{2\ln 2}{3}$$

ដូចនេះ កន្សោមអនុគមន៍គឺ ៖

$$P(t) = 1000e^{\left(\frac{\ln 4}{3}\right)t} = 1000 \cdot 4^{t/3}$$

២. ក្រោយពេល $t = 5$ ម៉ោង ៖

$$P(5) = 1000 \cdot 4^{5/3} = 1000 \cdot \sqrt[3]{4^5} = 1000 \cdot 4\sqrt[3]{16} = 1000 \cdot 8\sqrt[3]{2} \approx 10080 \text{ កោសិកា}$$

៣. រក t ដើម្បីឱ្យ $P(t) = 16000$ ៖

$$1000 \cdot 4^{t/3} = 16000 \iff 4^{t/3} = 16 = 4^2 \iff \frac{t}{3} = 2 \iff t = 6 \text{ ម៉ោង}$$

ដូចនេះ រយៈពេល 6 ម៉ោង ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 16000 កោសិកា។

លំហាត់គំរូ ២

(ច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុន) ការហូរក្ដៅមួយពែងទើបឆ្លងរួចមានសីតុណ្ហភាព 95°C ត្រូវបានគេយកមកដាក់លើតុក្នុងបន្ទប់ដែលមានសីតុណ្ហភាពថេរ 20°C ។ រយៈពេល 5 នាទីក្រោយមក សីតុណ្ហភាពការហូរថយចុះនៅត្រឹម 70°C ។

១. រកសមីការសីតុណ្ហភាព $T(t)$ ជាអនុគមន៍នៃពេល t (គិតជានាទី)។
២. គណនាសីតុណ្ហភាពការហូរក្រោយពេលដាក់ចោល 15 នាទី។
៣. តើត្រូវចំណាយពេលប៉ុន្មាននាទី ទើបសីតុណ្ហភាពការហូរថយចុះមកដល់ 40°C ?

ដំណោះស្រាយ

១. តាមច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុន ៖ $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$ ដែល $T_m = 20^\circ\text{C}$ ។
ចម្លើយទូទៅគឺ ៖ $T(t) = 20 + (T_0 - 20)e^{-kt}$ ។
ដោយ $T(0) = 95^\circ\text{C}$ នាំឱ្យ $T(t) = 20 + 75e^{-kt}$ ។

នៅពេល $t = 5$, $T(5) = 70^{\circ}\text{C}$ នាំឱ្យ ៖

$$20 + 75e^{-5k} = 70 \iff 75e^{-5k} = 50 \iff e^{-5k} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

$$\text{នាំឱ្យ } -5k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \implies k = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.0811$$

ដូចនេះ សមីការសីតុណ្ហភាពគឺ ៖

$$T(t) = 20 + 75\left(\frac{2}{3}\right)^{t/5}$$

២. ក្រោយពេល $t = 15$ នាទី ៖

$$T(15) = 20 + 75\left(\frac{2}{3}\right)^{15/5} = 20 + 75\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 20 + 75 \cdot \frac{8}{27} = 20 + \frac{200}{9} \approx 42.22^{\circ}\text{C}$$

៣. រកពេល t ដែល $T(t) = 40^{\circ}\text{C}$ ៖

$$20 + 75e^{-kt} = 40 \iff 75e^{-kt} = 20 \iff e^{-kt} = \frac{20}{75} = \frac{4}{15}$$

យកលោការីតនេព័ត៌មាន ៖

$$-kt = \ln\left(\frac{4}{15}\right) \implies t = \frac{\ln(15/4)}{k} = \frac{\ln(3.75)}{0.0811} \approx 16.3 \text{ នាទី}$$

ដូចនេះ ត្រូវចំណាយពេលប្រហែល 16.3 នាទី។

លំហាត់គំរូ

៣

(ការបំបែកធាតុវិទ្យុសកម្ម និងកាបូន-១៤) ធាតុវិទ្យុសកម្មប៉ូឡូញ៉ូម ^{210}Po មានកន្លះជីវិត 140 ថ្ងៃ។ សន្មតថាបរិមាណវិទ្យុសកម្មបំបែកទៅតាមសមីការ $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ គេមានសំណាកប៉ូឡូញ៉ូមដើម $N_0 = 12 \text{ mg}$ ។

១. គណនាថេរបំបែក λ នៃប៉ូឡូញ៉ូម ^{210}Po ។
២. រកបរិមាណប៉ូឡូញ៉ូមដែលនៅសល់ក្រោយពេល 70 ថ្ងៃ។
៣. តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបសំណាកនោះបំបែកអស់ 90% នៃបរិមាណដើម?

ដំណោះស្រាយ

១. តាមរូបមន្តទំនាក់ទំនងរវាងកន្លះជីវិត និងថេរបំបែក ៖

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{140} \approx 0.00495 \text{ ថ្ងៃ}^{-1}$$

២. ចម្លើយទូទៅគឺ $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = 12e^{-(\frac{\ln 2}{140})t} = 12 \cdot 2^{-t/140}$ ។
ក្រោយពេល $t = 70$ ថ្ងៃ ៖

$$N(70) = 12 \cdot 2^{-70/140} = 12 \cdot 2^{-1/2} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \approx 8.49 \text{ mg}$$

ដូចនេះ នៅសល់ប៉ូឡូញ៉ូមប្រហែល 8.49 mg ។

៣. កាលណាសំណាកបំបែកអស់ 90% នោះបរិមាណដែលនៅសល់គឺ 10% នៃ N_0 ពេលគឺ ៖

$$N(t) = 0.1N_0 \iff N_0 e^{-\lambda t} = 0.1N_0 \iff e^{-\lambda t} = 0.1 \iff -\lambda t = \ln(0.1) = -\ln 10$$

នាំឱ្យ ៖

$$t = \frac{\ln 10}{\lambda} = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 2}{140}} = 140 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 140 \cdot 3.3219 \approx 465 \text{ ថ្ងៃ}$$

ដូចនេះ ត្រូវចំណាយពេលប្រហែល 465 ថ្ងៃ ។

លំហាត់គំរូ

៤

(ចលនាធ្លាក់ក្នុងមជ្ឈដ្ឋានមានកកិត និងល្បឿនព្រំដែន) វត្ថុមួយមានម៉ាស់ $m = 5 \text{ kg}$ ត្រូវបានទម្លាក់ពីលើកំពូលអគារខ្ពស់ មួយដោយគ្មានល្បឿនដើម ($v(0) = 0$) ។ ក្នុងពេលធ្លាក់ វត្ថុរងកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ $F_r = -kv$ ដែល $k = 10 \text{ kg/s}$ (យក $g = 9.8 \text{ m/s}^2$) ។

១. បង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា និងកំណត់កន្សោមល្បឿន $v(t)$ ។
២. គណនាល្បឿនព្រំដែន (Terminal Velocity) v_{lim} នៃវត្ថុនោះ។
៣. គណនាល្បឿនវត្ថុនៅខណៈ $t = 2 \text{ s}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. តាមច្បាប់ទីពីរញូតុន ៖ $m \frac{dv}{dt} = mg - kv \iff \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$ ។

ជំនួស $m = 5 \text{ kg}, k = 10 \text{ kg/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ៖

$$\frac{dv}{dt} + 2v = 9.8$$

សមីការនេះមានចម្លើយទូទៅ ៖ $v(t) = Ce^{-2t} + \frac{9.8}{2} = Ce^{-2t} + 4.9$ ។

ដោយល្បឿនដើម $v(0) = 0 \implies C + 4.9 = 0 \implies C = -4.9$ ។

ដូចនេះ កន្សោមល្បឿនគឺ ៖

$$v(t) = 4.9(1 - e^{-2t}) \text{ (m/s)}$$

២. ល្បឿនព្រំដែននៅពេល $t \rightarrow +\infty$ គឺ ៖

$$v_{\lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4.9(1 - e^{-2t}) = 4.9 \text{ m/s}$$

៣. នៅខណៈ $t = 2 \text{ s}$ ៖

$$v(2) = 4.9(1 - e^{-4}) \approx 4.9(1 - 0.0183) = 4.9 \times 0.9817 \approx 4.81 \text{ m/s}$$

លំហាត់គំរូ ៥

(សៀគ្វីអគ្គិសនី RL) សៀគ្វីអគ្គិសនីមួយមានរេស៊ីស្តង់ $R = 12 \Omega$ និងប៊ូប៊ីនមានអាំងឌុចតង់ $L = 3 \text{ H}$ តភ្ជាប់ជាស៊េរីជាមួយប្រភពតង់ស្យុងថេរ $E = 60 \text{ V}$ ។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងអាំងតង់ស៊ីតេចរន្ត $i(t)$ គឺ ៖

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

ដោយដឹងថានៅខណៈដើម $t = 0$ គ្មានចរន្តឆ្លងកាត់ ($i(0) = 0$)។

១. រកកន្សោមអាំងតង់ស៊ីតេចរន្ត $i(t)$ ជាអនុគមន៍នៃពេល t ។
២. គណនាអាំងតង់ស៊ីតេចរន្តនៅពេលរបបអចិន្ត្រៃយ៍ ($t \rightarrow +\infty$)។
៣. គណនាតម្លៃចរន្តនៅខណៈ $t = 0.5 \text{ s}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ជំនួសតម្លៃ $L = 3, R = 12, E = 60$ ចូលក្នុងសមីការ ៖

$$3 \frac{di}{dt} + 12i = 60 \iff \frac{di}{dt} + 4i = 20$$

ចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន $\frac{di}{dt} + 4i = 0$ គឺ $i_c = Ce^{-4t}$ ។

ចម្លើយពិសេសថេរគឺ $i_p = \frac{20}{4} = 5$ ។

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅគឺ ៖ $i(t) = Ce^{-4t} + 5$ ។

ដោយសារ $i(0) = 0 \implies C + 5 = 0 \implies C = -5$ ។

ដូចនេះ កន្សោមអាំងតង់ស៊ីតេចរន្តគឺ ៖

$$i(t) = 5(1 - e^{-4t}) \text{ (A)}$$

២. នៅរបបអចិន្ត្រៃយ៍ ($t \rightarrow +\infty$) ៖

$$I_{\max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5(1 - e^{-4t}) = 5 \text{ A}$$

៣. នៅខណៈ $t = 0.5 \text{ s}$ ៖

$$i(0.5) = 5(1 - e^{-4 \times 0.5}) = 5(1 - e^{-2}) \approx 5(1 - 0.1353) = 5 \times 0.8647 \approx 4.32 \text{ A}$$

៣ សំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ) មេរៀនទី៣ (១០០ លំហាត់)

១. សមីការ $\frac{dP}{dt} = kP$ តាងកំណើនប្រជាជន។ បើ $k > 0$ នោះចំនួនប្រជាជន $P(t)$ ៖

 - ក. ថយចុះជាលំដាប់
 - ខ. កើនឡើងជាលំដាប់តាមអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
 - គ. នៅថេរជានិច្ច
 - ឃ. ប្រែប្រួលជាខួប

២. បើ $P(t) = P_0 e^{kt}$ នោះរយៈពេលទ្វេដង (Doubling time) T_d ស្មើនឹង ៖

 - ក. $T_d = \frac{k}{\ln 2}$
 - ខ. $T_d = \frac{\ln 2}{k}$
 - គ. $T_d = \ln(2k)$
 - ឃ. $T_d = \frac{2}{k}$

៣. បាក់តេរីមួយប្រភេទកើនឡើងទ្វេដងរៀងរាល់ 4 ម៉ោងម្តង។ តម្លៃនៃថេរកំណើន k គឺ ៖

 - ក. $\frac{\ln 2}{4}$
 - ខ. $4 \ln 2$
 - គ. $\frac{4}{\ln 2}$
 - ឃ. $\ln 8$

៤. ចំនួនប្រជាជនទីក្រុងមួយកើនឡើងពី 100 000 ទៅ 200 000 នាក់ក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំ។ តើក្រោយរយៈពេល 20 ឆ្នាំ ចំនួនប្រជាជននឹងកើនដល់ប៉ុន្មាន?

 - ក. 300 000 នាក់
 - ខ. 400 000 នាក់
 - គ. 500 000 នាក់
 - ឃ. 800 000 នាក់

៥. សមីការបំបែកនៃសារធាតុវិទ្យុសកម្មគឺ $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ ($\lambda > 0$)។ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

 - ក. $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$
 - ខ. $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
 - គ. $N(t) = N_0 - \lambda t$
 - ឃ. $N(t) = \frac{N_0}{\lambda t}$

៦. កន្លះជីវិត $T_{1/2}$ នៃសារធាតុវិទ្យុសកម្មទាក់ទងនឹងថេរបំបែក λ តាមរូបមន្ត ៖

 - ក. $T_{1/2} = \frac{\lambda}{\ln 2}$
 - ខ. $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
 - គ. $T_{1/2} = \lambda \ln 2$
 - ឃ. $T_{1/2} = \ln(2\lambda)$

៧. ធាតុវិទ្យុសកម្មមួយមានកន្លះជីវិត 8 ថ្ងៃ។ ក្រោយពេល 24 ថ្ងៃ បរិមាណដែលនៅសល់ស្មើនឹងប៉ុន្មានភាគរយនៃបរិមាណដើម?

 - ក. 50%
 - ខ. 25%
 - គ. 12.5%
 - ឃ. 6.25%

៨. ក្រោយពេលកន្លងផុតទៅ ៤ ដងនៃកន្លះជីវិត ($t = 4T_{1/2}$) បរិមាណសារធាតុវិទ្យុសកម្មនៅសល់ ៖

 - ក. $\frac{N_0}{4}$
 - ខ. $\frac{N_0}{8}$
 - គ. $\frac{N_0}{16}$
 - ឃ. $\frac{N_0}{32}$

៩. តាមច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសីតុណ្ហភាពគឺ ៖

 - ក. $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$
 - ខ. $\frac{dT}{dt} = k(T + T_m)$
 - គ. $\frac{dT}{dt} = -kTT_m$
 - ឃ. $\frac{dT}{dt} = -k(T_m - T)^2$

១០. ក្នុងច្បាប់ត្រជាក់ញូតុន កាលណា $t \rightarrow +\infty$ នោះសីតុណ្ហភាព $T(t)$ ខិតជិត ៖

ក. 0°C

ខ. T_0

គ. T_m

ឃ. $+\infty$

១១. ទឹកក្ដៅមានសីតុណ្ហភាពដើម 100°C ដាក់ក្នុងបន្ទប់សីតុណ្ហភាព 20°C ។ កន្សោម $T(t)$ មានរាង ៖

ក. $T(t) = 20 + 80e^{-kt}$

ខ. $T(t) = 20 + 100e^{-kt}$

គ. $T(t) = 100 + 20e^{-kt}$

ឃ. $T(t) = 80 + 20e^{-kt}$

១២. អង្គធាតុមួយធ្លាក់ចុះក្រោមរងកម្លាំងទប់ $F_r = -kv$ ។ សមីការចលនាគឺ ៖

ក. $m\frac{dv}{dt} = mg + kv$

ខ. $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$

គ. $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$

ឃ. $\frac{dv}{dt} = g - kv$

១៣. ល្បឿនព្រំដែន (Terminal velocity) v_{lim} នៃអង្គធាតុធ្លាក់ក្នុងខ្យល់រងកម្លាំងទប់ $-kv$ គឺ ៖

ក. $\frac{k}{mg}$

ខ. $\frac{mg}{k}$

គ. $\sqrt{\frac{mg}{k}}$

ឃ. $\frac{m}{kg}$

១៤. ប្រព័ន្ធម៉ាស់-រ៉ឺស័រគ្មានកកិតមានសមីការ $y'' + 16y = 0$ ។ ប្រេកង់កែង ω_0 គឺ ៖

ក. 16 rad/s

ខ. 8 rad/s

គ. 4 rad/s

ឃ. 2 rad/s

១៥. ខួប T នៃលំយោល $y'' + 4y = 0$ គឺ ៖

ក. $\pi \text{ s}$

ខ. $2\pi \text{ s}$

គ. $\frac{\pi}{2} \text{ s}$

ឃ. $4\pi \text{ s}$

១៦. សមីការលំយោល $y'' + 2y' + 5y = 0$ មានចម្លើយប្រភេទ ៖

ក. លំយោលសេរីមិនថយចុះ

ខ. លំយោលថយចុះ (Underdamped)

គ. គ្មានលំយោល (Overdamped)

ឃ. ថយចុះកម្រិតព្រំដែន (Critically damped)

១៧. សមីការ $y'' + 6y' + 9y = 0$ ត្រូវនឹងករណី ៖

ក. លំយោលថយចុះ

ខ. Critically damped ($\Delta = 0$)គ. Overdamped ($\Delta > 0$)

ឃ. លំយោលគ្មានកកិត

១៨. សមីការ $y'' + 5y' + 4y = 0$ ត្រូវនឹងករណី ៖

ក. Overdamped ($\Delta = 9 > 0$)

ខ. Critically damped

គ. Underdamped

ឃ. គ្មានកម្លាំងទប់

១៩. សៀគ្វី LC គ្មានរេស៊ីស្តង់ ($R = 0$) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $Lq'' + \frac{1}{C}q = 0$ ។ ប្រេកង់កែងនៃលំយោលអគ្គិសនីគឺ ៖

ក. $\omega = \sqrt{LC}$

ខ. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

គ. $\omega = \frac{L}{C}$

ឃ. $\omega = \frac{C}{L}$

២០. ក្នុងសៀគ្វី RLC , បន្ទុកអគ្គិសនី $q(t)$ និងចរន្តអគ្គិសនី $i(t)$ ទាក់ទងគ្នាដោយ ៖

ក. $i(t) = \int q(t)dt$

ខ. $i(t) = q'(t)$

គ. $i(t) = q''(t)$

ឃ. $i(t) = Rq(t)$

២១. បើ $\frac{dP}{dt} = 0.05P$ និង $P(0) = 2000$ នោះ $P(t) =$

ក. $2000e^{0.05t}$

ខ. $2000e^{-0.05t}$

គ. $0.05e^{2000t}$

ឃ. $2000 + 0.05t$

២២. អត្រាកំណើនប្រចាំឆ្នាំ $r = 5\%$ ត្រូវនឹងថេរ $k =$

ក. 0.5

ខ. 0.05

គ. 5

ឃ. 0.005

២៣. បើចំនួនប្រជាជនកើនឡើងបីដង (Triple) ក្នុងរយៈពេល T នោះ ៖

ក. $T = \frac{\ln 3}{k}$

ខ. $T = \frac{3}{k}$

គ. $T = \frac{k}{\ln 3}$

ឃ. $T = 3 \ln k$

២៤. សារធាតុមួយមានកន្លះជីវិត 10 ម៉ោង។ បរិមាណដើម 100 g ក្រោយ 30 ម៉ោង បរិមាណនៅសល់គឺ ៖

ក. 50 g

ខ. 25 g

គ. 12.5 g

ឃ. 6.25 g

២៥. រូបមន្តគណនាអាយុកាលតាមកាបូន-១៤ គឺ $t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{N}{N_0} \right)$ ។ បើ $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$ នោះ $t =$

ក. 0

ខ. $T_{1/2}$

គ. $2T_{1/2}$

ឃ. $\frac{T_{1/2}}{2}$

២៦. ទឹកត្រជាក់មួយកែវមានសីតុណ្ហភាព 5°C ដាក់ក្នុងបន្ទប់ 25°C ។ សមីការសីតុណ្ហភាពគឺ ៖

ក. $T(t) = 25 - 20e^{-kt}$

ខ. $T(t) = 25 + 20e^{-kt}$

គ. $T(t) = 5 + 20e^{-kt}$

ឃ. $T(t) = 5 - 20e^{-kt}$

២៧. បើ $T(t) = 25 - 20e^{-kt}$ នោះនៅពេល $t \rightarrow +\infty$, $T(t) \rightarrow$

ក. 5°C

ខ. 20°C

គ. 25°C

ឃ. 0°C

២៨. ល្បឿននៃអង្គធាតុធ្លាក់ពីភាពនៅស្ងៀម ($v(0) = 0$) រងកម្លាំងទប់ $-kv$ គឺ ៖

ក. $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

ខ. $v(t) = \frac{mg}{k}(1 + e^{-\frac{k}{m}t})$

គ. $v(t) = gt$

ឃ. $v(t) = \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$

២៩. ម៉ាស់ $m = 2 \text{ kg}$, $k = 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ ។ ល្បឿនព្រំដែន $v_{\text{lim}} =$

ក. 1 m/s

ខ. 2 m/s

គ. 5 m/s

ឃ. 20 m/s

៣០. សមីការ $y'' + 25y = 0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

ក. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$

ខ. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$

គ. $y = (C_1 x + C_2) e^{5x}$

ឃ. $y = C_1 \cos 25x + C_2 \sin 25x$

៣១. ក្នុងសមីការ $y'' + \omega_0^2 y = 0$, អំពូលទុតនៃលំយោល $y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ គឺ ៖

ក. $A + B$

ខ. $\sqrt{A^2 + B^2}$

គ. $|A - B|$

ឃ. AB

៣២. ថេរកម្រាញនៃរ៉ឺស័រពីរតភ្ជាប់ជាស៊េរី k_1, k_2 មានតម្លៃសមមូល $k_{eq} =$

ក. $k_1 + k_2$

ខ. $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

គ. $\sqrt{k_1 k_2}$

ឃ. $\frac{k_1 + k_2}{2}$

៣៣. ថេរកម្រាញនៃរ៉ឺស័រពីរតភ្ជាប់ជាស្រប k_1, k_2 មានតម្លៃសមមូល $k_{eq} =$

- ក. $k_1 + k_2$ ខ. $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ គ. $|k_1 - k_2|$ ឃ. $\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$

៣៤. សមីការ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ មានខ្សែកោងអាំងតេក្រាលជា :

- ក. បន្ទាត់ត្រង់ ខ. ប៉ារ៉ាបូល គ. រង្វង់ផ្ចិត $O(0,0)$ ឃ. អ៊ីពែបូល

៣៥. ខ្សែកោងកែង (Orthogonal trajectories) នៃគ្រួសារបន្ទាត់ $y = kx$ គឺ ៖

- ក. គ្រួសារប៉ារ៉ាបូល ខ. គ្រួសាររង្វង់ $x^2 + y^2 = \frac{C}{C}$ គ. គ្រួសារបន្ទាត់ $y = -kx$ ឃ. គ្រួសារអេលីប

៣៦. ខ្សែកោងកែងនៃគ្រួសាររង្វង់ $x^2 + y^2 = C$ គឺ ៖

- ក. គ្រួសារបន្ទាត់កាត់តាមគល់តម្រុយ $y = kx$ ខ. គ្រួសារប៉ារ៉ាបូល $y = \frac{C}{ax^2}$ គ. គ្រួសារអ៊ីពែបូល $xy = \frac{C}{k}$ ឃ. គ្រួសាររង្វង់ដូចគ្នា

៣៧. សមីការ $\frac{dy}{dx} = ky(M - y)$ ហៅថាសមីការ ៖

- ក. សមីការលីនេអ៊ែរ ខ. សមីការឡូជីស្ទិក (Logistic equation) គ. សមីការប៊ែរនូឡី ឃ. សមីការអេលីប

៣៨. ក្នុងសមីការឡូជីស្ទិក $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$, M តំណាងឱ្យ ៖

- ក. ចំនួនប្រជាជនដើម ខ. សមត្ថភាពផ្ទុកអតិបរមា (Carrying capacity) គ. អត្រាកំណើន ឃ. រយៈពេលទ្វេដង

៣៩. កាលណា $t \rightarrow +\infty$, ចម្លើយនៃសមីការឡូជីស្ទិក $y(t) \rightarrow$

- ក. 0 ខ. M គ. $+\infty$ ឃ. y_0

៤០. សមីការ $y' = 2\sqrt{y}$ ជាមួយ $y(0) = 0$ មានចម្លើយ ៖

- ក. តែមួយគត់ $y = x^2$ ខ. គ្មានចម្លើយ គ. យ៉ាងតិចពីរ គឺ $y = 0$ និង $y = x^2$ ($x \geq 0$) ឃ. គ្មានចម្លើយពិត

៤១. ប្រព័ន្ធរ៉ឺស័រមាន $m = 1 \text{ kg}$, $k = 9 \text{ N/m}$ ខួបនៃលំយោលសេរីគឺ ៖

- ក. $T = \frac{2\pi}{3} \text{ s}$ ខ. $T = 3\pi \text{ s}$ គ. $T = 6\pi \text{ s}$ ឃ. $T = \frac{\pi}{3} \text{ s}$

៤២. បើម៉ាសកើនឡើង 4 ដង នោះខួបនៃលំយោលរ៉ឺស័រនឹង ៖

- ក. កើនឡើង 2 ដង ខ. ថយចុះ 2 ដង គ. កើនឡើង 4 ដង ឃ. មិនប្រែប្រួល

៤៣. បើថេរកម្រាញ k កើនឡើង 4 ដង នោះប្រេកង់កែង ω_0 នឹង ៖

- ក. ថយចុះ 2 ដង ខ. កើនឡើង 2 ដង គ. កើនឡើង 4 ដង ឃ. មិនប្រែប្រួល

៤៤. បើ $\frac{dN}{dt} = -0.02N$ នោះភាគរយនៃការបំបែកក្នុងមួយឯកតាពេលគឺ ៖

- ក. 0.02% ខ. 0.2% គ. 2% ឃ. 20%
៤៥. ធាតុវិទ្យុសកម្មមួយមានកន្លះជីវិត 100 ឆ្នាំ។ ក្រោយពេល 200 ឆ្នាំ បរិមាណសារធាតុដែលបានបំបែកអស់ស្មើនឹង ៖
ក. 25% ខ. 50% គ. 75% ឃ. 100%
៤៦. សីតុណ្ហភាពបន្ទប់ $T_m = 30^\circ\text{C}$ ។ សីតុណ្ហភាពដើម $T_0 = 90^\circ\text{C}$ ។ បន្ទាប់ពីពេលយូរអង្វែង សីតុណ្ហភាពនឹងស្មើ ៖
ក. 0°C ខ. 30°C គ. 60°C ឃ. 90°C
៤៧. សមីការ $y'' + 4y = \sin(\omega t)$ កើតមានបាតុភូតអនុភាព (Resonance) កាលណា $\omega =$
ក. 1 ខ. 2 គ. 4 ឃ. 16
៤៨. ក្នុងករណីមានអនុភាព ចម្លើយពិសេសនៃ $y'' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega_0 t)$ មានរាង ៖
ក. $y_p = A \cos \omega_0 t$ ខ. $y_p = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$
គ. $y_p = Ae^{\omega_0 t}$ ឃ. $y_p = At^2 \cos \omega_0 t$
៤៩. អំពើទុតនៃលំយោលក្នុងបាតុភូតអនុភាពសុទ្ធ (Pure resonance) ៖
ក. កើនឡើងឥតព្រំដែនកាលណា $t \rightarrow +\infty$ ខ. ថយចុះទៅសូន្យ
គ. នៅថេរជានិច្ច ឃ. ប្រែប្រួលជាខួប
៥០. នៅក្នុងចលនាក្នុងមជ្ឈដ្ឋានទប់ $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$, បើ $v = v_{\text{lim}}$ នោះសំទុះ $\frac{dv}{dt} =$
ក. g ខ. 0 គ. $-g$ ឃ. $\frac{k}{m}$
៥១. អង្គធាតុមួយមានម៉ាស់ $m = 5 \text{ kg}$, $k = 2 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ។ $v_{\text{lim}} =$
ក. 24.5 m/s ខ. 49 m/s គ. 19.6 m/s ឃ. 9.8 m/s
៥២. បើល្បឿនធ្លាក់ផ្ទៀងផ្ទាត់ $v(t) = 50(1 - e^{-0.2t})$ នោះសំទុះដើម $a(0) =$
ក. 0 m/s^2 ខ. 10 m/s^2 គ. 50 m/s^2 ឃ. 2.5 m/s^2
៥៣. សមីការបំបែកវិទ្យុសកម្ម $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ ផ្តល់ $\ln N = -\lambda t + C$ ។ ក្រាបនៃ $\ln N$ ជាអនុគមន៍នៃ t ជា ៖
ក. បន្ទាត់ត្រង់មានមេគុណប្រាប់ទិស $-\lambda$ ខ. ប៉ារ៉ាបូល
គ. អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឃ. ខ្សែកោងរាង S
៥៤. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តាង $\ln N$ ធៀបនឹង t គឺ ៖
ក. λ ខ. $-\lambda$ គ. $-\frac{1}{\lambda}$ ឃ. $\ln \lambda$
៥៥. បាក់តេរីមួយប្រភេទមាន $P(0) = 500$ និងកើនដល់ 1500 ក្រោយពេល 2 ម៉ោង។ ចំនួនបាក់តេរីក្រោយ 6 ម៉ោងគឺ ៖
ក. 4500 ខ. 13500 គ. 6000 ឃ. 9000
៥៦. កាហ្វេក្តៅ 80°C ដាក់ក្នុងបន្ទប់ 20°C ។ ក្រោយ 10 នាទី សីតុណ្ហភាពគឺ 50°C ។ ក្រោយ 20 នាទី សីតុណ្ហភាពគឺ ៖
ក. 30°C ខ. 35°C គ. 40°C ឃ. 25°C

៥៧. ប្រព័ន្ធរឺស័រ $y'' + 9y = 0$ មានលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 4, y'(0) = 0$ ។ សមីការទីតាំងគឺ ៖

ក. $y(t) = 4 \cos 3t$

ខ. $y(t) = 4 \sin 3t$

គ. $y(t) = 4e^{3t}$

ឃ. $y(t) = 4 \cos 9t$

៥៨. ប្រព័ន្ធរឺស័រ $y'' + 16y = 0$ មាន $y(0) = 0, y'(0) = 8$ ។ សមីការទីតាំងគឺ ៖

ក. $y(t) = 2 \sin 4t$

ខ. $y(t) = 8 \sin 4t$

គ. $y(t) = 2 \cos 4t$

ឃ. $y(t) = 4 \sin 2t$

៥៩. សមីការលំយោល $y'' + 4y' + 13y = 0$ មានប្រេកង់កែងនៃលំយោលខ្សោយ $\beta =$

ក. 2

ខ. 3

គ. $\sqrt{13}$

ឃ. 5

៦០. សមីការ $y'' + 2y' + y = 0$ ជាមួយ $y(0) = 1, y'(0) = 0$ មានចម្លើយ ៖

ក. $y = (1+x)e^{-x}$

ខ. $y = (1-x)e^{-x}$

គ. $y = e^{-x}$

ឃ. $y = \cos x + \sin x$

៦១. សៀគ្វី RC តភ្ជាប់សេរីមានសមីការ $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$ ។ ចំពោះពេល (Time constant) τ គឺ ៖

ក. $\tau = \frac{R}{C}$

ខ. $\tau = RC$

គ. $\tau = \frac{C}{R}$

ឃ. $\tau = \frac{1}{RC}$

៦២. ក្នុងសៀគ្វី RL តភ្ជាប់សេរីមានសមីការ $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ ។ ចំពោះពេល τ គឺ ៖

ក. $\tau = \frac{L}{R}$

ខ. $\tau = \frac{R}{L}$

គ. $\tau = RL$

ឃ. $\tau = \frac{1}{RL}$

៦៣. ចរន្តអតិបរមាក្នុងសៀគ្វី RL ភ្ជាប់តង់ស្យុងចេញ E គឺ ៖

ក. $I_{\max} = \frac{E}{R}$

ខ. $I_{\max} = \frac{E}{L}$

គ. $I_{\max} = ER$

ឃ. $I_{\max} = \frac{R}{E}$

៦៤. បន្ទុកអតិបរមាក្នុងសៀគ្វី RC ភ្ជាប់តង់ស្យុងចេញ E គឺ ៖

ក. $Q_{\max} = CE$

ខ. $Q_{\max} = \frac{E}{C}$

គ. $Q_{\max} = \frac{C}{E}$

ឃ. $Q_{\max} = RCE$

៦៥. បើ $\frac{dP}{dt} = 2P$ នោះអត្រាកំណើនធៀប (Relative growth rate) $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$ ស្មើ ៖

ក. 1

ខ. 2

គ. $2P$

ឃ. e^{2t}

៦៦. បើ $\frac{dP}{dt} = kP$ និង $P(0) = 100$ ហើយ $P(1) = 100e^3$ នោះ $k =$

ក. 1

ខ. 2

គ. 3

ឃ. $\ln 3$

៦៧. សារធាតុវិទ្យុសកម្មមួយមានថេររំលាយ $\lambda = 0.693$ ឆ្នាំ⁻¹។ កន្លះជីវិតរបស់វាប្រហែល ៖

ក. 1 ឆ្នាំ

ខ. 2 ឆ្នាំ

គ. 0.5 ឆ្នាំ

ឃ. 10 ឆ្នាំ

៦៨. បើកន្លះជីវិត $T_{1/2} = 5$ ម៉ោង នោះក្រោយ 15 ម៉ោង បរិមាណសារធាតុថយចុះអស់ ៖

ក. $\frac{1}{8}$

ខ. $\frac{7}{8}$

គ. $\frac{1}{4}$

ឃ. $\frac{3}{4}$

៦៩. សមីការ $\frac{dT}{dt} = -0.1(T - 20)$ មាន $T(0) = 80$ ។ នៅខណៈ $t = 0$, $\frac{dT}{dt} =$

- ក. $-6^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ខ. $6^{\circ}\text{C}/\text{min}$ គ. $-8^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ឃ. $-2^{\circ}\text{C}/\text{min}$
៧០. ពីសំណួរទី ៦៩, នៅពេល $T = 20^{\circ}\text{C}$, $\frac{dT}{dt} =$
 ក. $0^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ខ. $-2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ គ. $2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ឃ. $-0.1^{\circ}\text{C}/\text{min}$
៧១. អង្គធាតុមួយមានសមីការចលនា $v' + 2v = 20$ ។ ល្បឿនព្រំដែនគឺ ៖
 ក. 5 m/s ខ. 10 m/s គ. 20 m/s ឃ. 40 m/s
៧២. បើ $v(0) = 0$ ក្នុង $v' + 2v = 20$ នោះ $v(t) =$
 ក. $v(t) = 10(1 - e^{-2t})$ ខ. $v(t) = 10(1 + e^{-2t})$
 គ. $v(t) = 20(1 - e^{-2t})$ ឃ. $v(t) = 10e^{-2t}$
៧៣. រ៉ឺសមួយយោលតាមសមីការ $y(t) = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$ ។ អំពូទុតនៃលំយោលគឺ ៖
 ក. 5 ខ. 7 គ. 1 ឃ. 12
៧៤. ពីសំណួរទី ៧៣, ល្បឿនអតិបរមា $v_{\max} =$
 ក. 5 ខ. 10 គ. 20 ឃ. 2.5
៧៥. ពីសំណួរទី ៧៣, សំទុះអតិបរមា $a_{\max} =$
 ក. 10 ខ. 20 គ. 40 ឃ. 5
៧៦. សមីការ $y'' + 4y' + 4y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ ៖
 ក. $y = (C_1x + C_2)e^{-2x}$ ខ. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$
 គ. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ឃ. $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$
៧៧. សមីការ $y'' + 4y' + 8y = 0$ មានសមីការសម្គាល់មានឫស ៖
 ក. $r = -2 \pm 2i$ ខ. $r = 2 \pm 2i$ គ. $r = -4 \pm 2i$ ឃ. $r = -2 \pm 4i$
៧៨. កត្តាថយចុះ (Damping factor) នៃចម្លើយក្នុងសំណួរទី ៧៧ គឺ ៖
 ក. e^{-2x} ខ. e^{2x} គ. e^{-4x} ឃ. e^{-8x}
៧៩. គ្រួសារខ្សែកោងកែងនៃ $y = Cx^2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖
 ក. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$ ខ. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ គ. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$ ឃ. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$
៨០. ចម្លើយនៃសមីការ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$ គឺជាគ្រួសារ ៖
 ក. អេលីប $x^2 + 2y^2 = C$ ខ. រង្វង់ $x^2 + y^2 = C$ គ. ប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ ឃ. អ៊ីពែបូល $x^2 - 2y^2 = C$
៨១. ប្រសិនបើចំនួនប្រជាជនកើនពី P_0 ដល់ $3P_0$ ក្នុងពេល ៤ ឆ្នាំ នោះពេលដែលកើនដល់ $9P_0$ គឺ ៖
 ក. ៦ ឆ្នាំ ខ. ៨ ឆ្នាំ គ. ១២ ឆ្នាំ ឃ. ១៦ ឆ្នាំ

៨២. ពេលដែលកើនដល់ $27P_0$ (ពីសំណួរទី ៨១) គឺ ៖

- ក. 12 ឆ្នាំ ខ. 16 ឆ្នាំ គ. 24 ឆ្នាំ ឃ. 36 ឆ្នាំ

៨៣. ធាតុ ^{14}C មានកន្លះជីវិត 5730 ឆ្នាំ។ បើនៅសល់ 25% នោះអាយុកាលគឺ ៖

- ក. 2865 ឆ្នាំ ខ. 5730 ឆ្នាំ គ. 11460 ឆ្នាំ ឃ. 17190 ឆ្នាំ

៨៤. បើនៅសល់ 12.5% នោះអាយុកាលគឺ ៖

- ក. 11460 ឆ្នាំ ខ. 17190 ឆ្នាំ គ. 22920 ឆ្នាំ ឃ. 5730 ឆ្នាំ

៨៥. សមីការ $\frac{dy}{dt} = k(y - 100)$ មាន $y(0) = 20$ និង $k = -0.5$ ។ កន្សោម $y(t) =$

- ក. $y(t) = 100 - 80e^{-0.5t}$ ខ. $y(t) = 100 + 80e^{-0.5t}$
 គ. $y(t) = 20 + 80e^{-0.5t}$ ឃ. $y(t) = 80 - 100e^{-0.5t}$

៨៦. ពីសំណួរទី ៨៥, តម្លៃលីមីត $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) =$

- ក. 20 ខ. 80 គ. 100 ឃ. 0

៨៧. ក្នុងសមីការចលនា $v' + 3v = 30$, ពេល $t = \frac{1}{3} \ln 2$ ល្បឿន v ស្មើ ៖

- ក. 5 m/s ខ. 10 m/s គ. 2.5 m/s ឃ. 15 m/s

៨៨. លំយោល $y'' + 100y = 0$ មានប្រេកង់ $f =$

- ក. $\frac{5}{\pi}$ Hz ខ. $\frac{10}{\pi}$ Hz គ. 10π Hz ឃ. 5π Hz

៨៩. ថាមពលមេកានិចសរុបនៃប្រព័ន្ធរឿងរាងកាយកកិត ៖

- ក. កើនឡើងតាមពេល ខ. ថយចុះតាមពេល គ. រក្សាថេរជានិច្ច ឃ. ប្រែប្រួលជាអនុគមន៍ស៊ីនុស

៩០. ក្នុងប្រព័ន្ធរឿងរាងកាយកកិត ($c > 0$), ថាមពលមេកានិច ៖

- ក. ថយចុះជាលំដាប់ដោយសារការកកិតបំប្លែងជាកម្ដៅ ខ. រក្សាថេរ
 គ. កើនឡើង ឃ. ប្រែប្រួលជាខួប

៩១. សមីការ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ មានខ្សែកោងអាំងតេក្រាលជា ៖

- ក. គ្រួសារបន្ទាត់កាត់តាម ខ. គ្រួសារប៉ារ៉ាបូល គ. គ្រួសាររង្វង់ ឃ. គ្រួសារអ៊ីពែបូល
 គល់តម្រុយ $y = kx$

៩២. ខ្សែកោងកែងនៃ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

- ក. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ខ. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ គ. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ឃ. $\frac{dy}{dx} = -xy$

៩៣. ចម្លើយនៃ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ គឺ $x^2 + y^2 = C$ ជា ៖

- ក. គ្រួសាររង្វង់មានផ្ចិតត្រង់ ខ. គ្រួសារបន្ទាត់ត្រង់ គ. គ្រួសារប៉ារ៉ាបូល ឃ. គ្រួសារអេលីប
៩៤. បើ $y(t)$ ជាដំណោះស្រាយនៃ $y' = ky$, នោះក្រាប $\ln y$ ធៀបនឹង t មានរាងជា ៖
- ក. បន្ទាត់ត្រង់ ខ. ប៉ារ៉ាបូល គ. រង្វង់ ឃ. អ៊ីពែបូល
៩៥. បើ $\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{1000})$ នោះអត្រាកំណើន $\frac{dP}{dt}$ ធំបំផុតនៅពេល $P =$
- ក. 0 ខ. 500 គ. 1000 ឃ. 250
៩៦. ចំណុចបត់ (Inflection point) នៃខ្សែកោងឡូជីស្ទិកកើតឡើងនៅពេល ៖
- ក. $P = \frac{M}{2}$ ខ. $P = M$ គ. $P = \frac{M}{4}$ ឃ. $P = 0$
៩៧. សមីការ $y'' + 9y = 5 \cos 3t$ ពិពណ៌នាអំពី ៖
- ក. លំយោលសេរី ខ. បាតុភូតអនុភាព (Resonance)
គ. លំយោលថយចុះ ឃ. លំយោលទប់ខ្លាំង
៩៨. សមីការ $y'' + 0.2y' + 9y = 5 \cos 3t$ ពិពណ៌នាអំពី ៖
- ក. លំយោលបង្គំមានកកិត ខ. អនុភាពសុទ្ធក្នុងដែនកំណត់
គ. លំយោលសេរីគ្មានកកិត ឃ. Critically damped
៩៩. ក្នុងសៀគ្វី RLC , ករណី $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$ ត្រូវនឹង ៖
- ក. Critical damping ខ. Underdamping (លំយោលថយចុះ)
គ. Overdamping ឃ. គ្មានការថយចុះ
១០០. ក្នុងសៀគ្វី RLC , ករណី $R^2 < \frac{4L}{C}$ ត្រូវនឹង ៖
- ក. Underdamping (លំយោលថយចុះ) ខ. Critical damping
គ. Overdamping ឃ. គ្មានកម្លាំងទប់

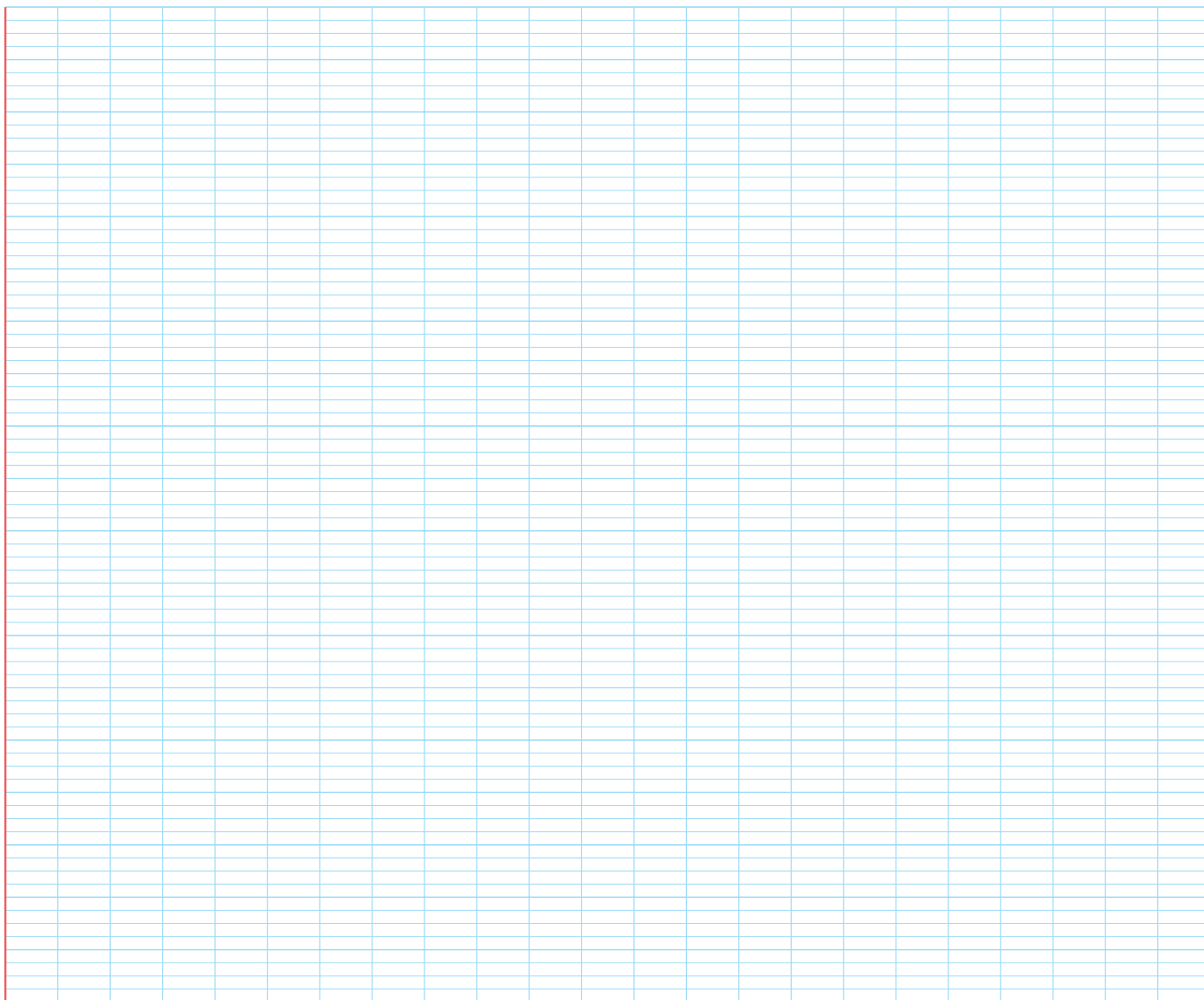
៤ លំហាត់អនុវត្តន៍

១. (វិទ្យុសកម្មកាបូន-១៤) ធាតុវិទ្យុសកម្មកាបូន ^{14}C មានកន្លះជីវិត $T_{1/2} = 5730$ ឆ្នាំ។ នៅក្នុងកំណាយបុរាណវិទ្យា មួយ គេរកឃើញបំណែកឈើបុរាណមួយ ដែលមានបរិមាណ ^{14}C នៅសល់តែ 35% នៃបរិមាណដែលមានក្នុងរុក្ខជាតិ រស់នៅបច្ចុប្បន្នប៉ុណ្ណោះ។ គណនាអាយុកាលនៃបំណែកឈើបុរាណនោះ។

ដំណោះស្រាយ

២. (ល្បឿនធ្លាក់នៃធាតុត្រយោង) អ្នកលោតធាតុត្រយោងម្នាក់មានម៉ាស់សរុបរួមទាំងធាតុ $m = 80 \text{ kg}$ លោតចេញពីយន្តហោះ។ កម្លាំងទប់នៃខ្យល់គឺ $F_r = -kv$ ដែល $k = 16 \text{ kg/s}$ (យក $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)។
- សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនា និងកំណត់ល្បឿន $v(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ t បើល្បឿនដើម $v(0) = 0$ ។
 - គណនាល្បឿនព្រំដែន (Terminal velocity) របស់អ្នកលោតធាតុត្រយោង។
 - គណនាល្បឿននៅខណៈ $t = 5 \text{ s}$ ។

ដំណោះស្រាយ



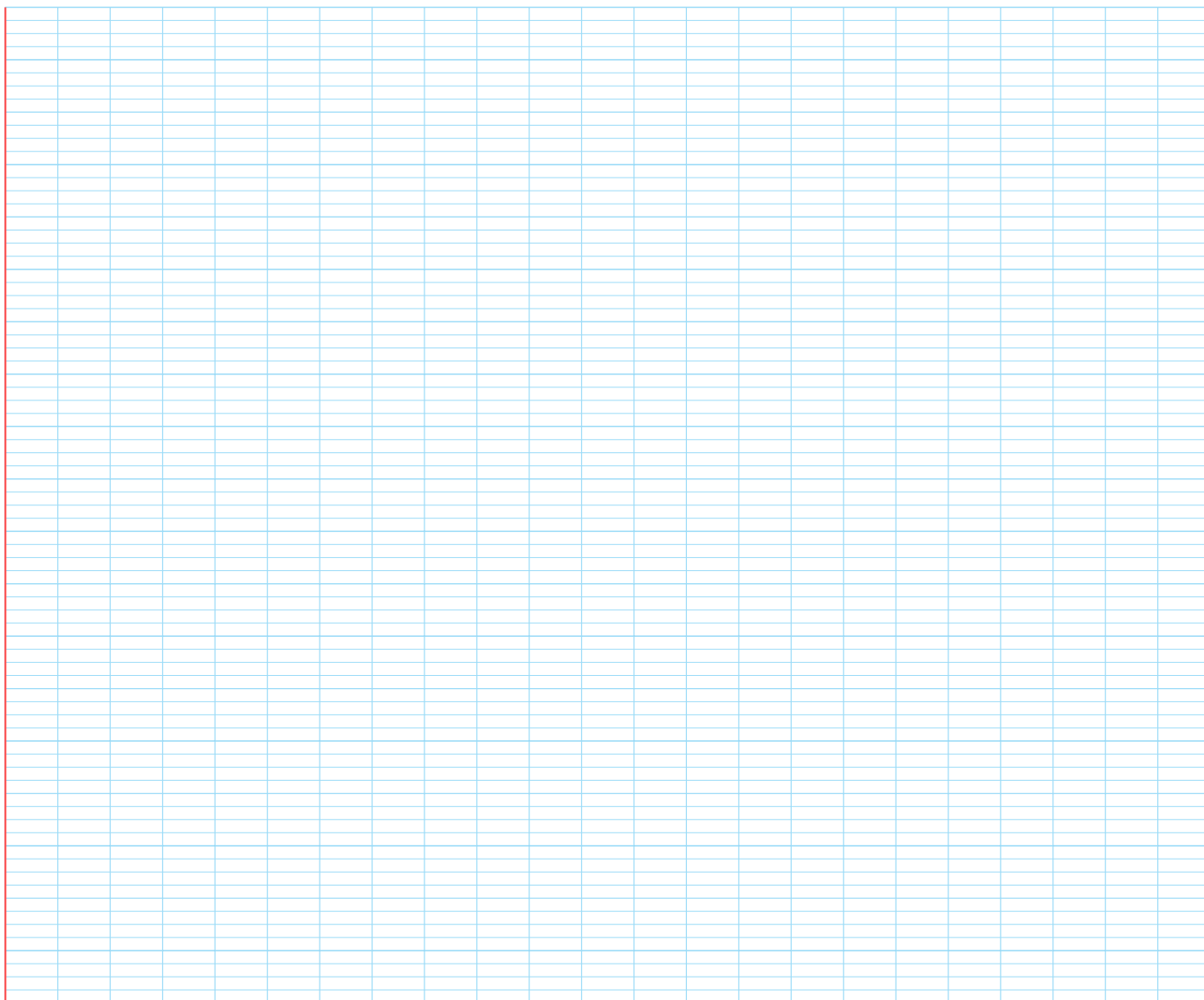
သိရောင်းပြန်ဖယ်

- ## သိရောက်နည်း

သိရောင်းပြန်ဖယ်

៤. (លំយោលរឺស័រ) វត្ថុមួយមានម៉ាស់ $m = 2 \text{ kg}$ ភ្ជាប់នឹងរឺស័រដែលមានថេរកម្រាញ $k = 50 \text{ N/m}$ និងកម្លាំងទប់កកិត $c = 12 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ។ នៅខណៈដើម $t = 0$ គេទាញវត្ថុឱ្យឃ្លាតពីទីតាំងលំនឹងប្រវែង 0.5 m ទៅខាងស្តាំ រួចលែងដោយគ្មានល្បឿនដើម។
- បង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាងចលនារបស់វត្ថុ។
 - ដោះស្រាយសមីការដើម្បីរកសមីការទីតាំង $y(t)$ នៃវត្ថុ។
 - កំណត់ខណៈពេលដែលវត្ថុឆ្លងកាត់ទីតាំងលំនឹងជាលើកដំបូង។

ដំណោះស្រាយ

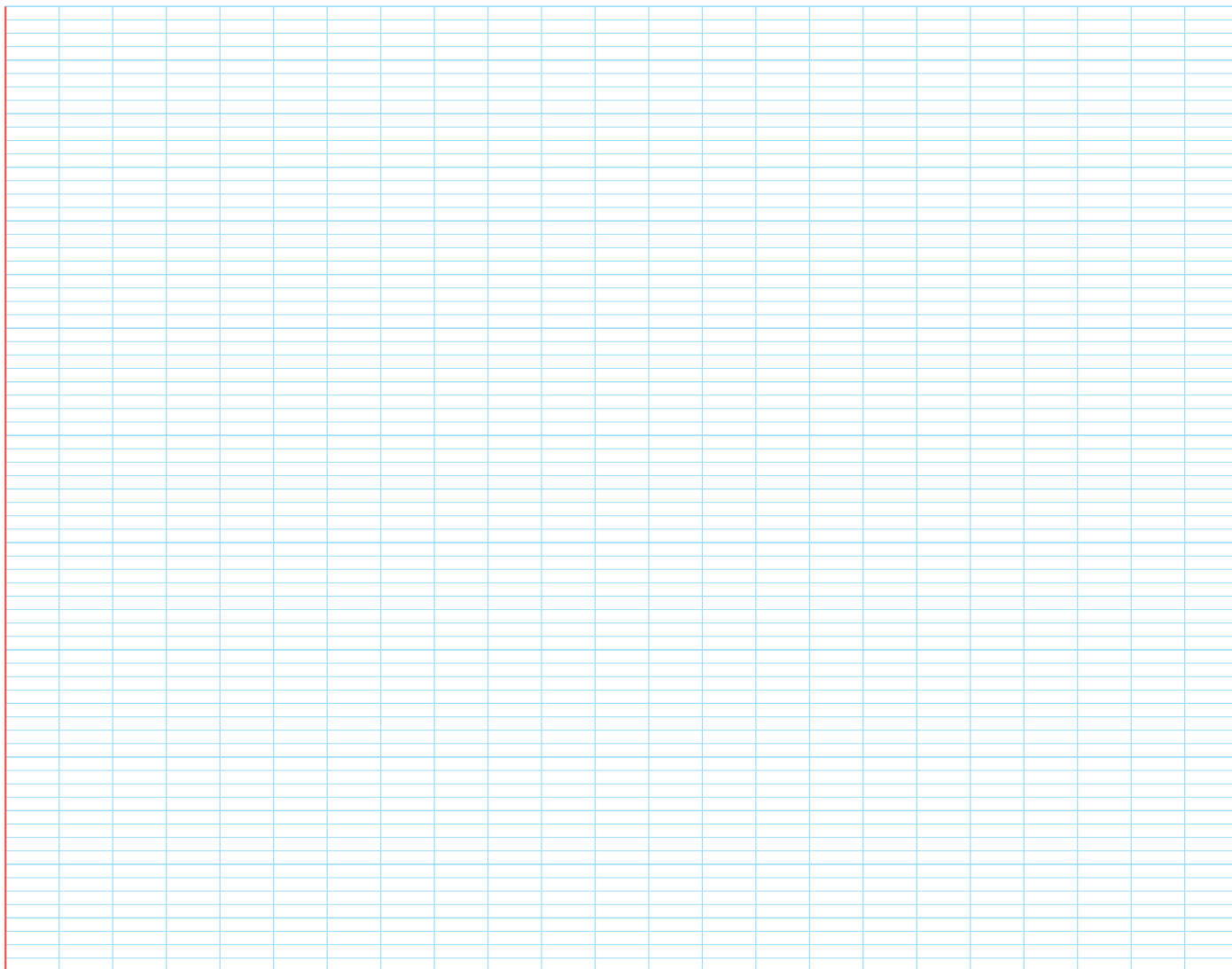


៥. (សៀគ្វីអគ្គិសនី RLC) សៀគ្វីតភ្ជាប់ជាស៊េរីមានរេស៊ីស្តង់ $R = 10\Omega$, អាំងឌុចតង់ $L = 0.5\text{ H}$, និងកាប៉ាស៊ីទ័រ $C = 0.02\text{ F}$ ភ្ជាប់នឹងប្រភពតង់ស្យុងថេរ $E = 12\text{ V}$ ។ សមីការបន្ទុកអគ្គិសនី $q(t)$ គឺ ៖

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$$

ដោយដឹងថាបន្ទុកដើម $q(0) = 0$ និងចរន្តដើម $i(0) = q'(0) = 0$ ។ ចូរកំណត់កន្សោមបន្ទុកអគ្គិសនី $q(t)$ និងចរន្តអគ្គិសនី $i(t) = q'(t)$ ។

ដំណោះស្រាយ





**ប្រមូលផ្ដុំវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ពីឆ្នាំ២០១៤ ដល់ ២០២៦ និងវិញ្ញាសា
គ្រោងប្រើសរសេរពិសេស អមដោយកន្លែងកត់ត្រាជំនោររូបសាស្ត្រ ៖**

ផ្នែកទី១ ៖ ប្រធានវិញ្ញាសាប្រឡងផ្លូវការ (២០១៤ - ២០២៦)

១. (បាក់ឌុប ២០១៤)

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y' - 3y = 0$ ។

ខ. រកអនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ នៃសមីការ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0) = 2$ ។

သို့သော်လည်း

137

២. (បាក់ឌុប ២០១៥)

- ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 4y' + 3y = 0$ ។
- ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថា $y(0) = 1$ និង $y'(0) = 5$ ។

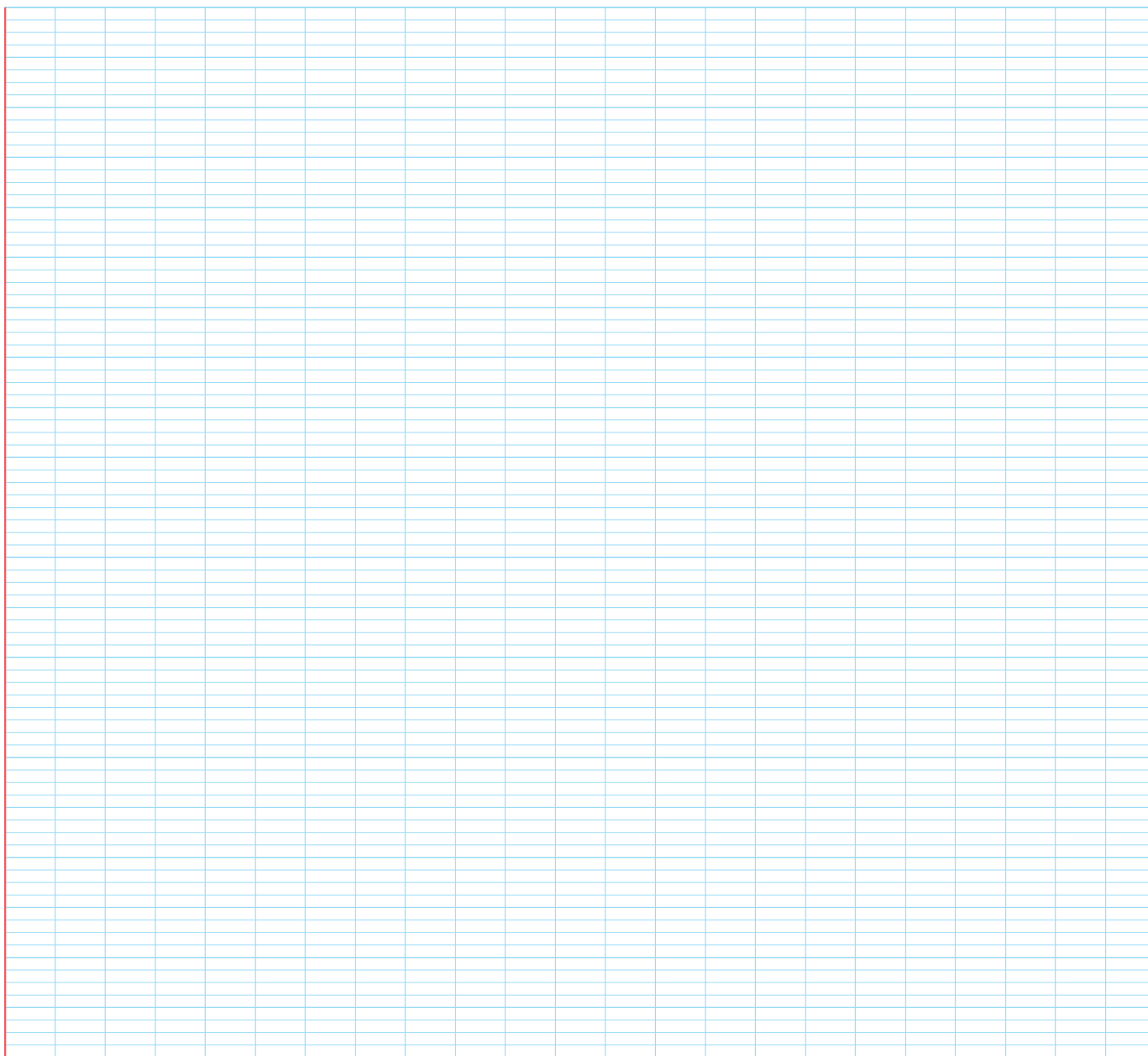
ដំណោះស្រាយ

៣. (បាក់ឌុប ២០១៦) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 2y' + y = 0$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ខ. រកចម្លើយពិសេស $g(x)$ នៃ (E) ដែលក្រាបរបស់វាកាត់តាមចំណុច $A(0,3)$ ហើយមានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះស្មើនឹង -1 ។

ដំណោះស្រាយ

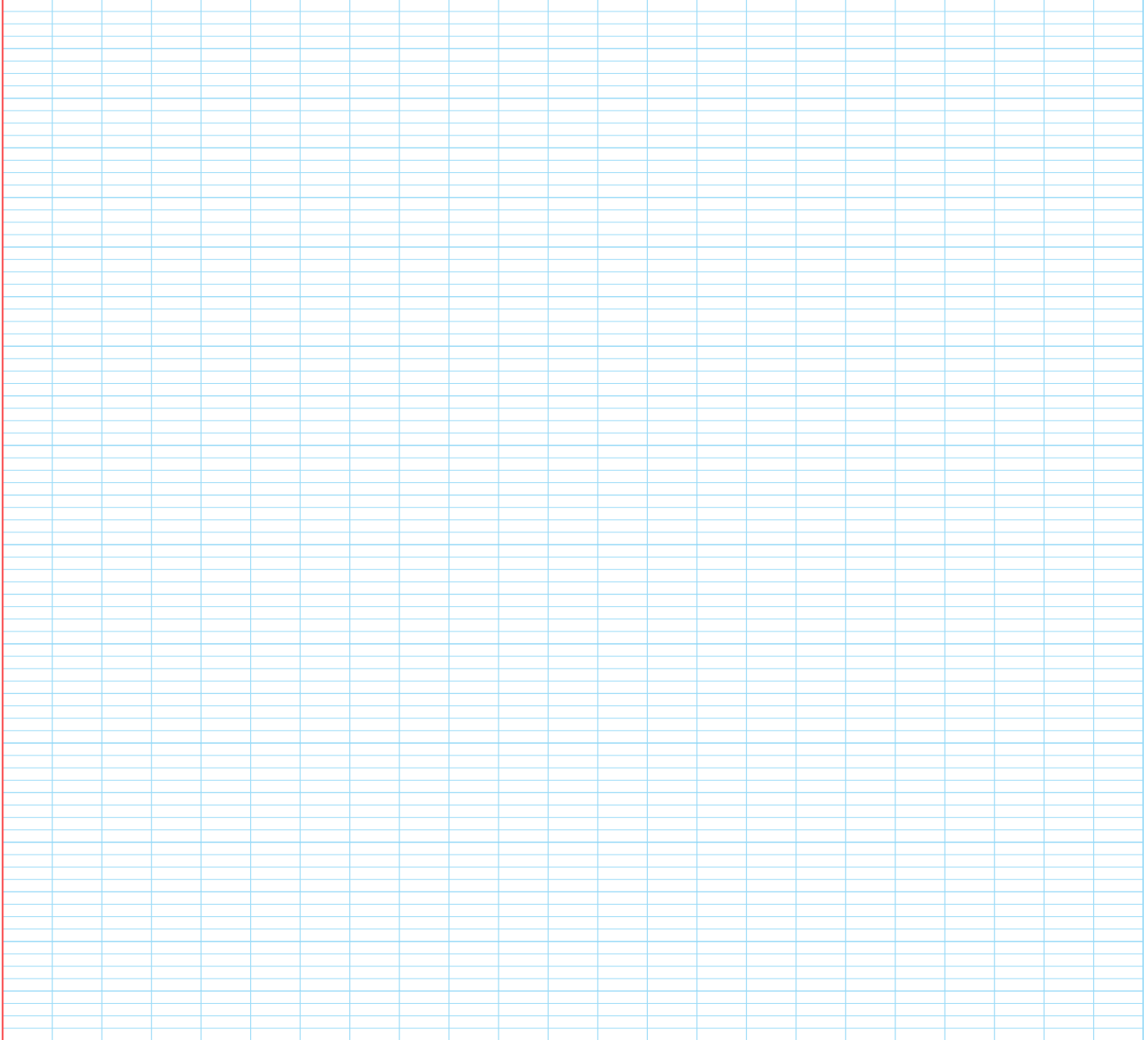


៤. (បាក់ឌុប ២០១៧) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 9y = 0$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ខ. រកអនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ មួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ និង $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ ។

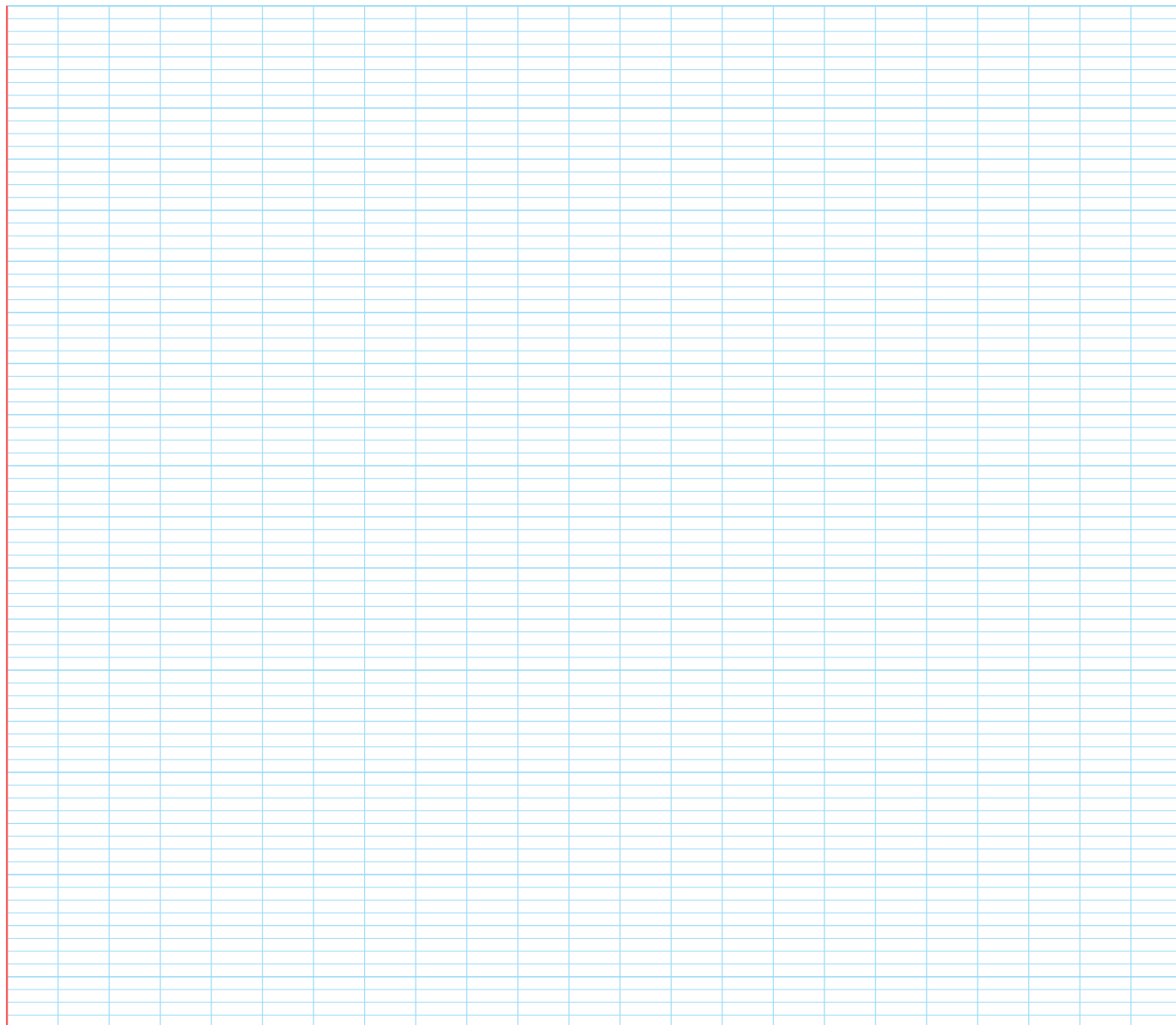
ដំណោះស្រាយ



៥. (បាក់ឌុប ២០១៨) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y' + 2y = 4x$ ។

- ក. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)។
- ខ. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន (E_0) : $y' + 2y = 0$ ។
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = 1$ ។

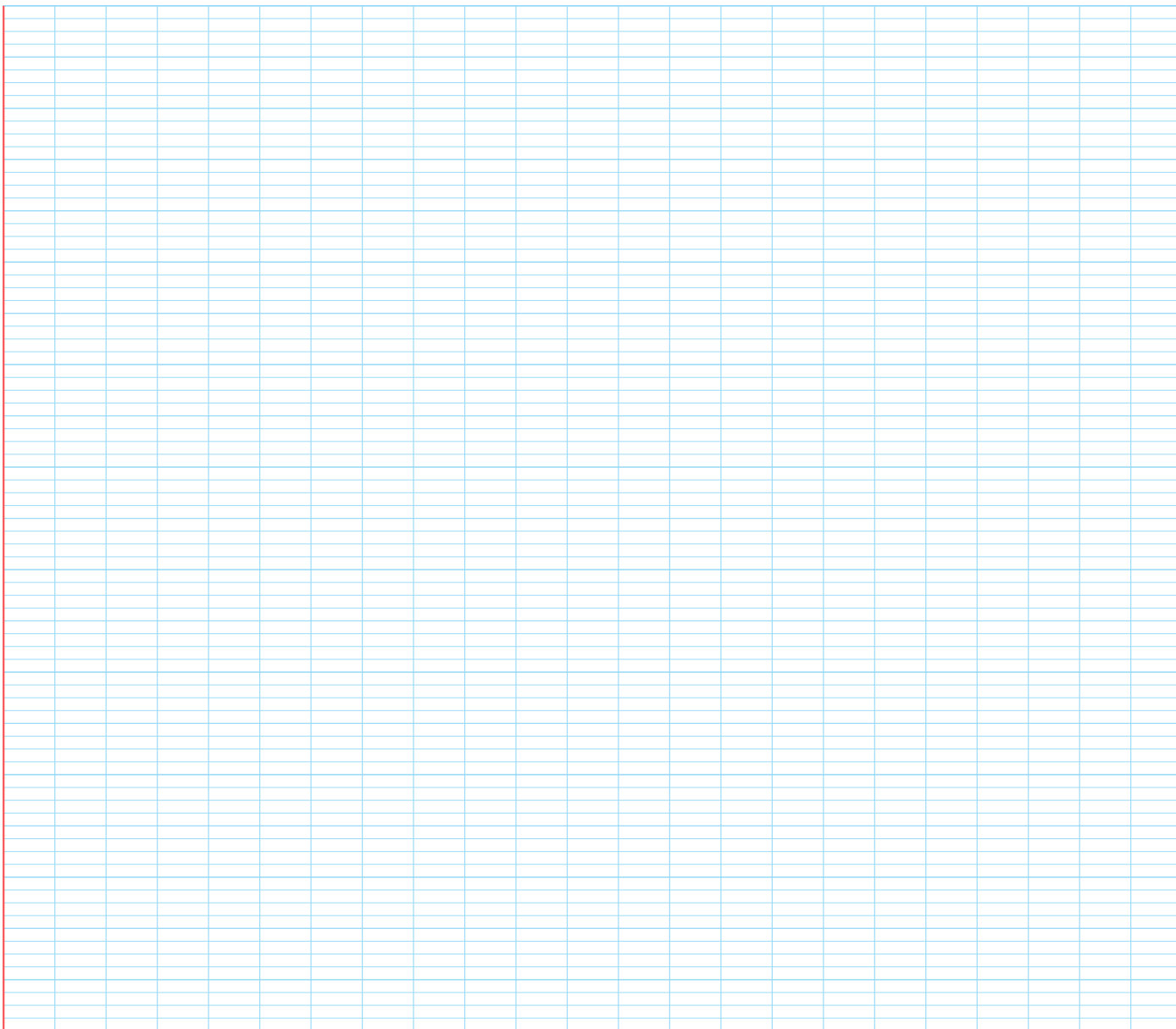
ដំណោះស្រាយ



៦. (បាក់ឌុប ២០១៩) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$ ។

- ក. សរសេរសមីការសម្គាល់នៃ (E) រួចរកឫសរបស់វា។
- ខ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)។
- គ. កំណត់ចម្លើយពិសេស $f(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0) = 1$ និង $f'(0) = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ



៧. (បាក់ឌុប ២០២០) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$ ។

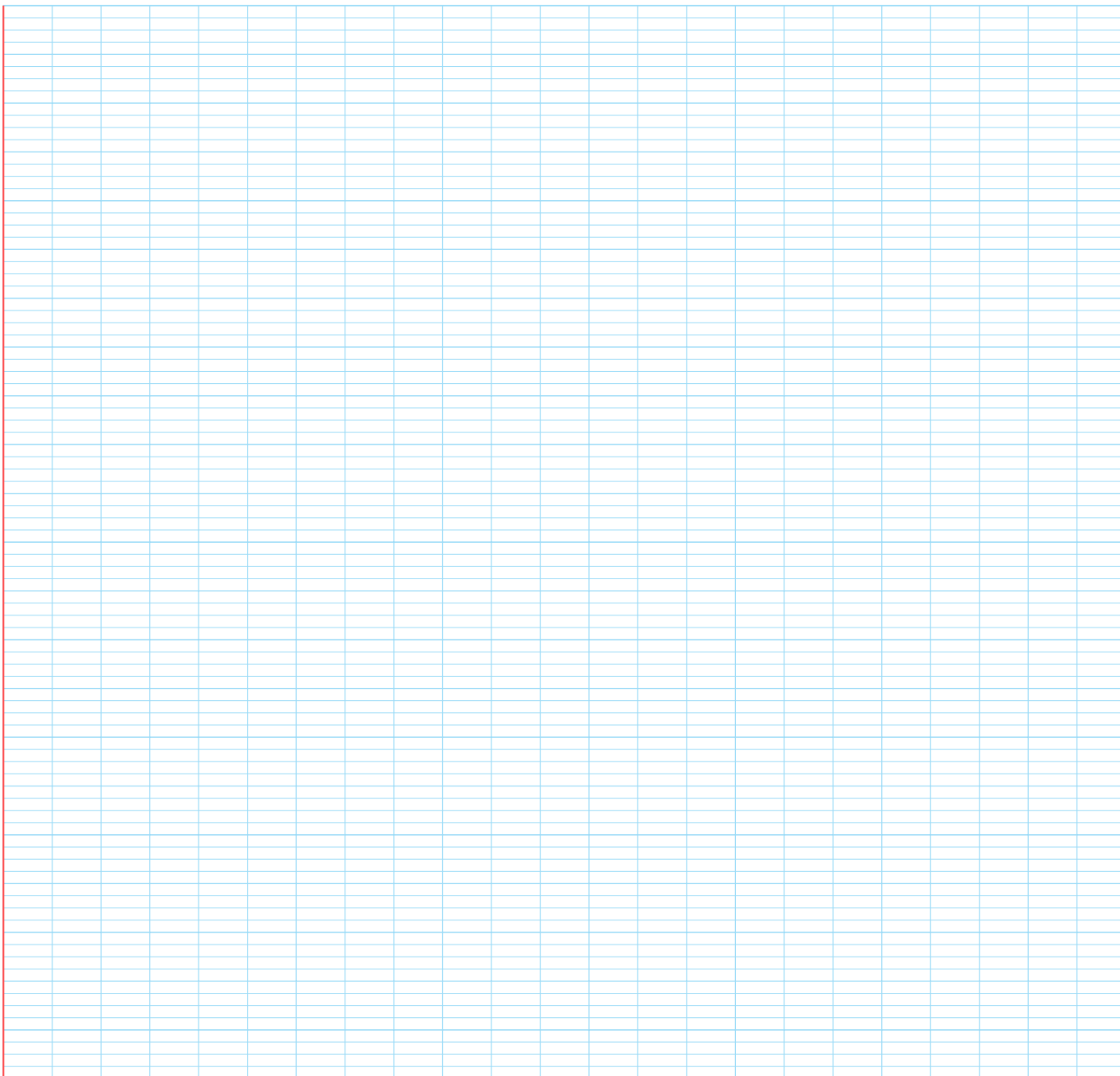
- ក. កំណត់ពហុធាជីក្រេទី១ $P(x) = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។
- ខ. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E_0) : y'' - 5y' + 6y = 0$ ។
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

៨. (បាក់ឌុប ២០២១)

- ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : 2y' + y = 0$ ។
- ខ. កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបរបស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = -x + 2$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ ។

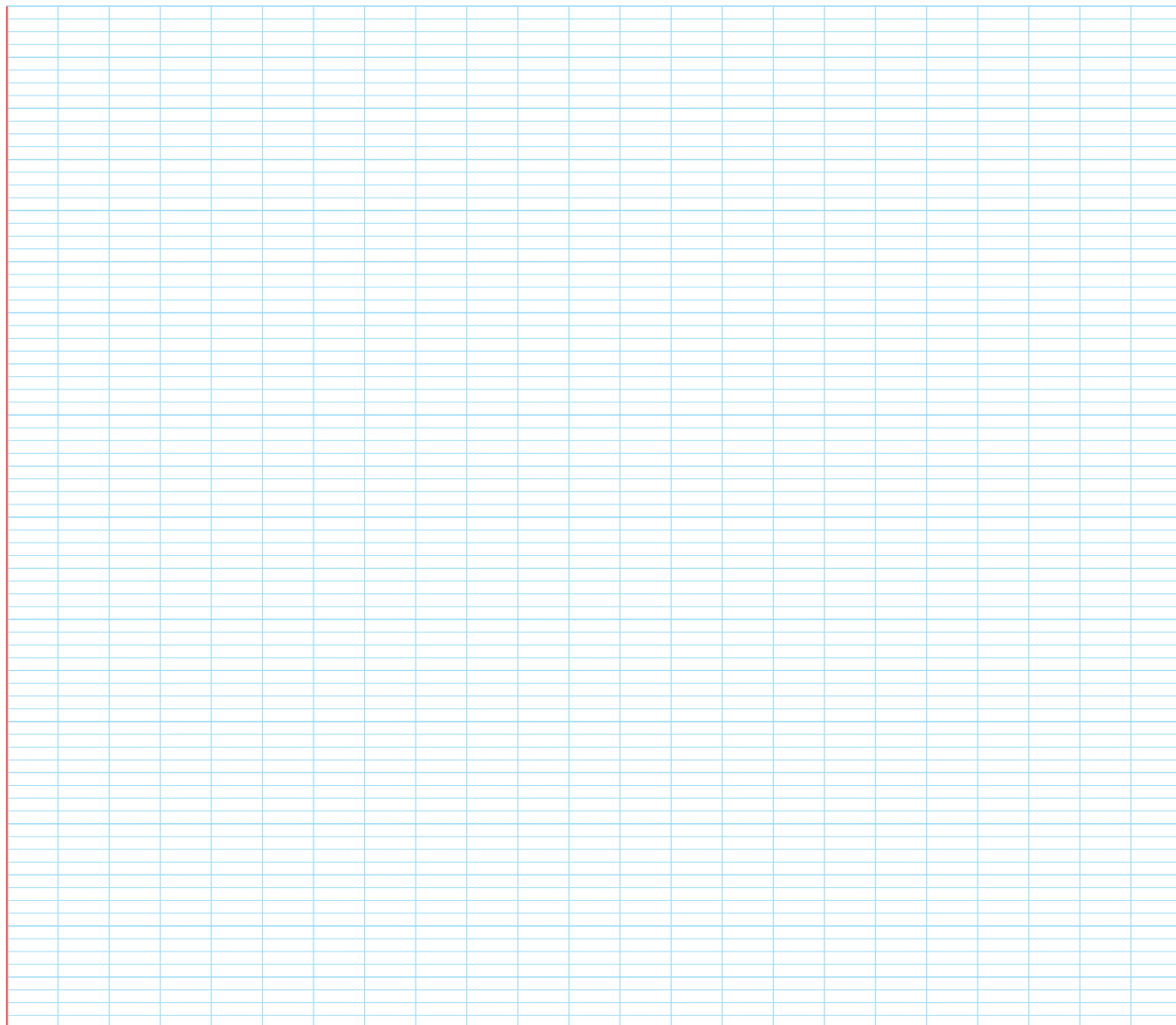
ដំណោះស្រាយ



៩. (បាក់ឌុប ២០២២) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 4y' + 4y = 8e^{2x}$ ។

- ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $(E_0) : y'' + 4y' + 4y = 0$ ។
- ខ. កំណត់ចំនួនពិត A ដើម្បីឱ្យ $y_p = Ae^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 0$ ។

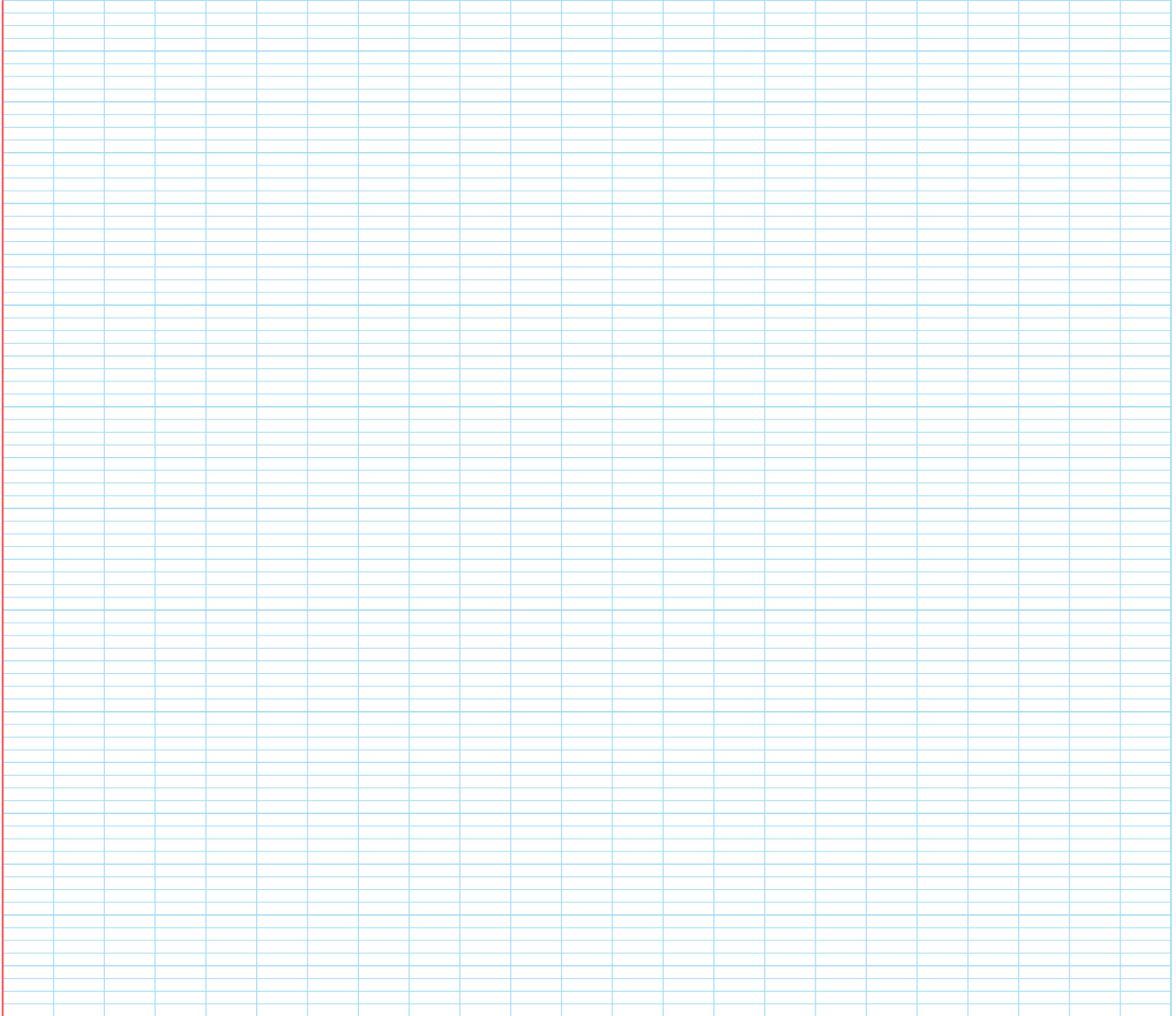
ដំណោះស្រាយ



១០. (បាក់ឌុប ២០២៣) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + 3y = e^{-3x}$ ។

- ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន $y' + 3y = 0$ ។
- ខ. តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ ចូររកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
- គ. កំណត់ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0) = 5$ ។

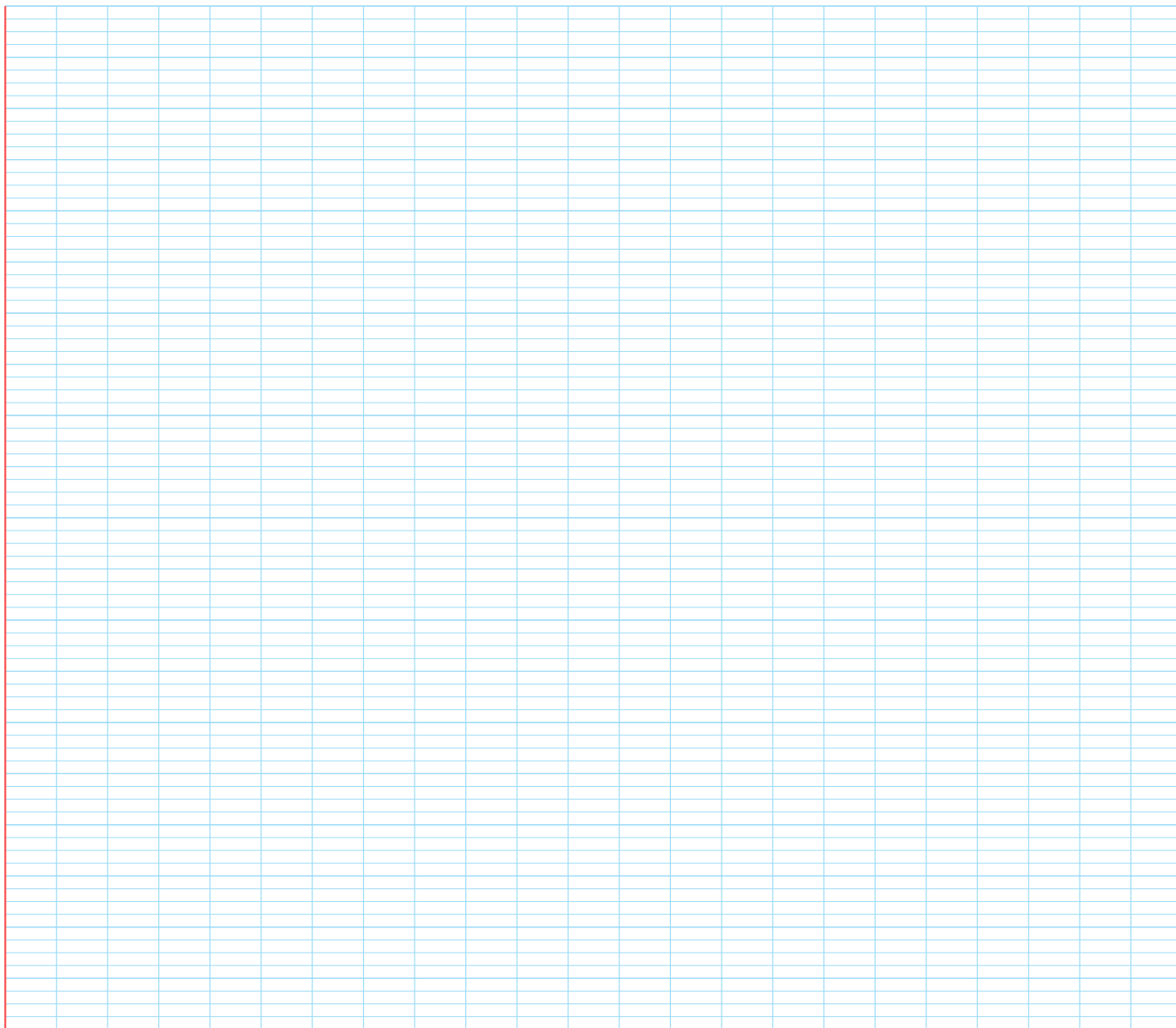
ដំណោះស្រាយ



១១. (បាក់ឌុប ២០២៤) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' + 16y = 4 \cos 2x$ ។

- ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន $y'' + 16y = 0$ ។
- ខ. កំណត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ $y_p = k \cos 2x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)។
- គ. សរសេរចម្លើយទូទៅនៃ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 1$ និង $y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$ ។

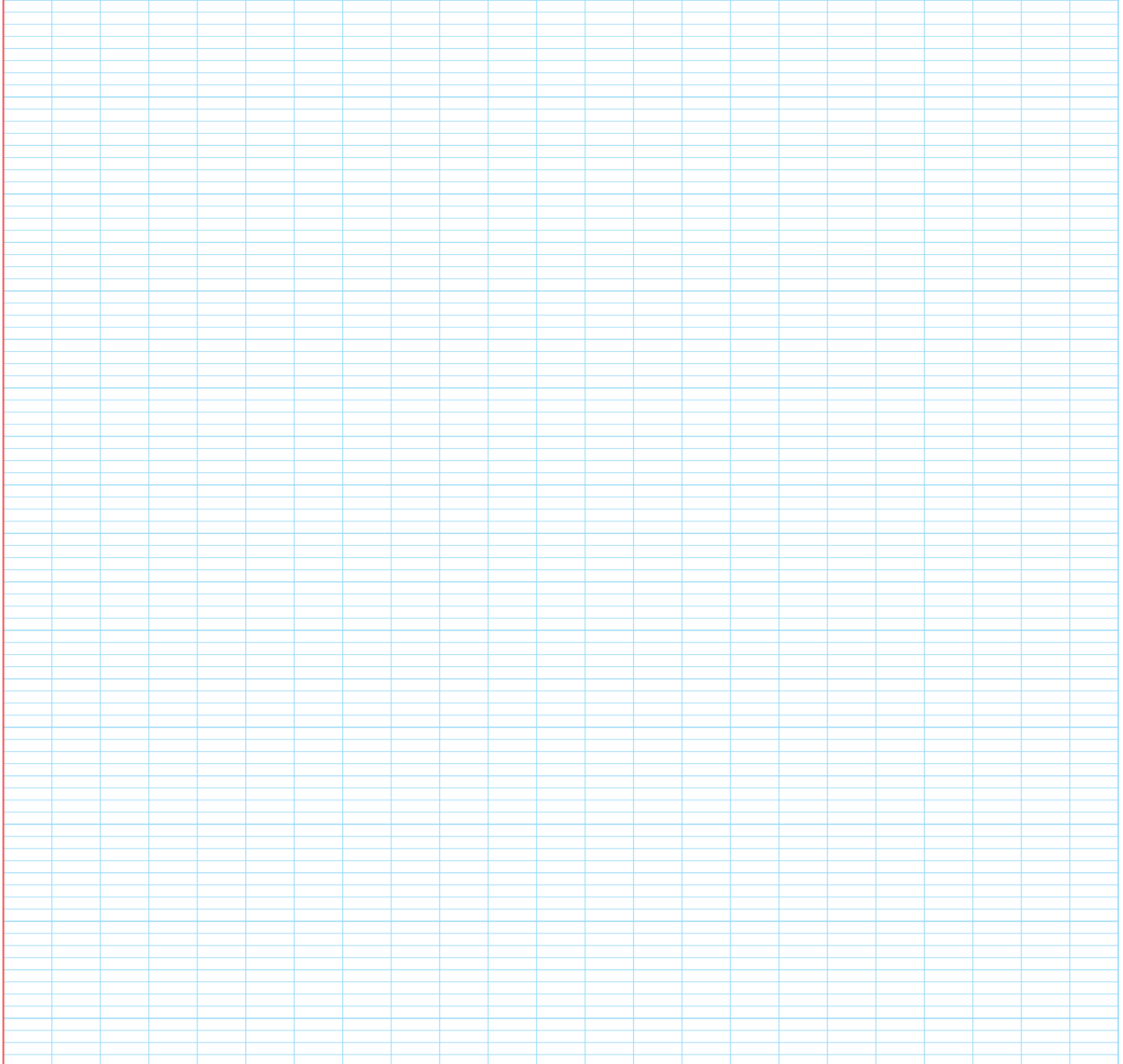
ដំណោះស្រាយ



១២. (បាក់ឌុប ២០២៥) (១០ពិន្ទុ)

- ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' = 3y - 2y'$ ។
 ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = e$ (e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e = 1$)។

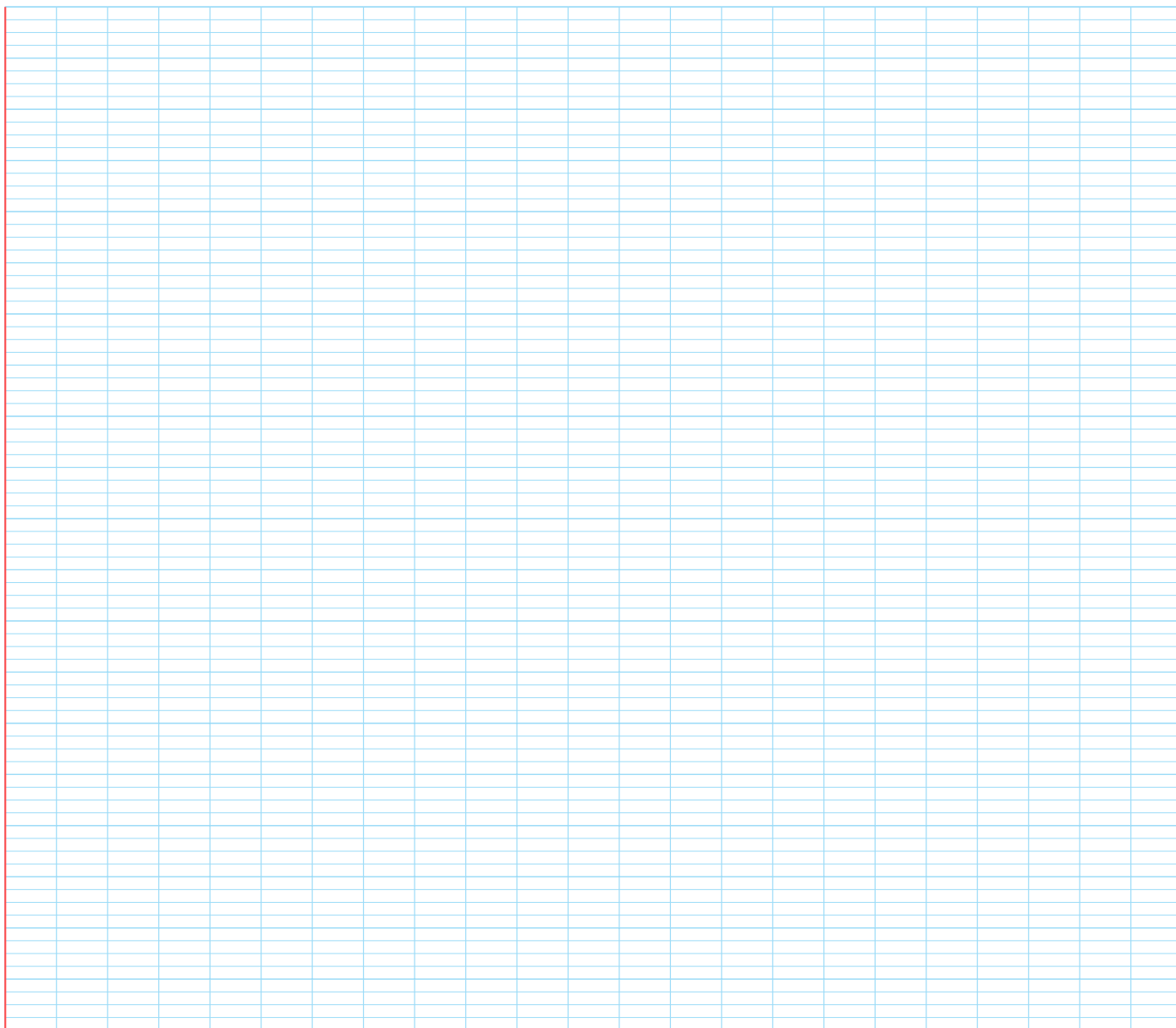
ដំណោះស្រាយ



១៣. (បាក់ឌុប ២០២៦) (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $2y' + y = 0$ ។

១. កំណត់ចម្លើយ $f(x)$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) លើ $\mathbb{R}$ ។
២. កំណត់ចម្លើយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោមបើមាន ៖
 $a. f(1) = 1$; $b. f(2) = (f(1))^2$; $c. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ដំណោះស្រាយ



ផ្នែកទី២ ៖ វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុបជ្រើសរើសពិសេស

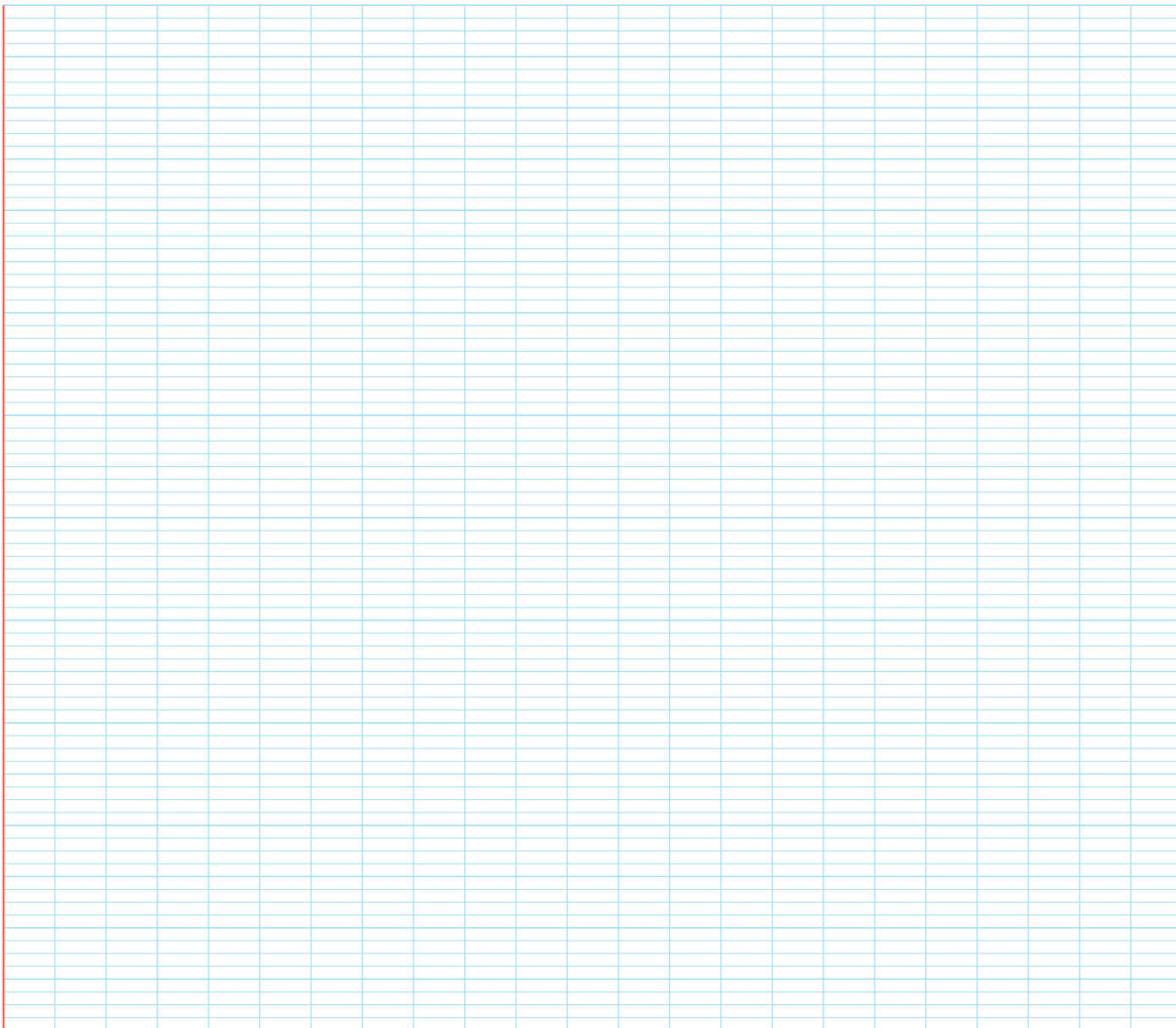
១. (វិញ្ញាសាត្រៀមទី១) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' - 2y = -4x + 6$ ។
- ក. កំណត់ចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យពហុធា $g(x) = mx + n$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។
 - ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y' - 2y = 0$ ។
 - គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែលក្រាបកាត់តាមគល់តម្រុយ $O(0,0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

២. (វិញ្ញាសាត្រៀមទី២) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 6y' + 9y = 0$ ។

- ក. សរសេរសមីការសម្គាល់ និងទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។
- ខ. កំណត់អនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0) = 2$ និង $f'(0) = 7$ ។
- គ. សិក្សាអថេរភាព និងទិសដៅអថេរនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើកម្រិត $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ



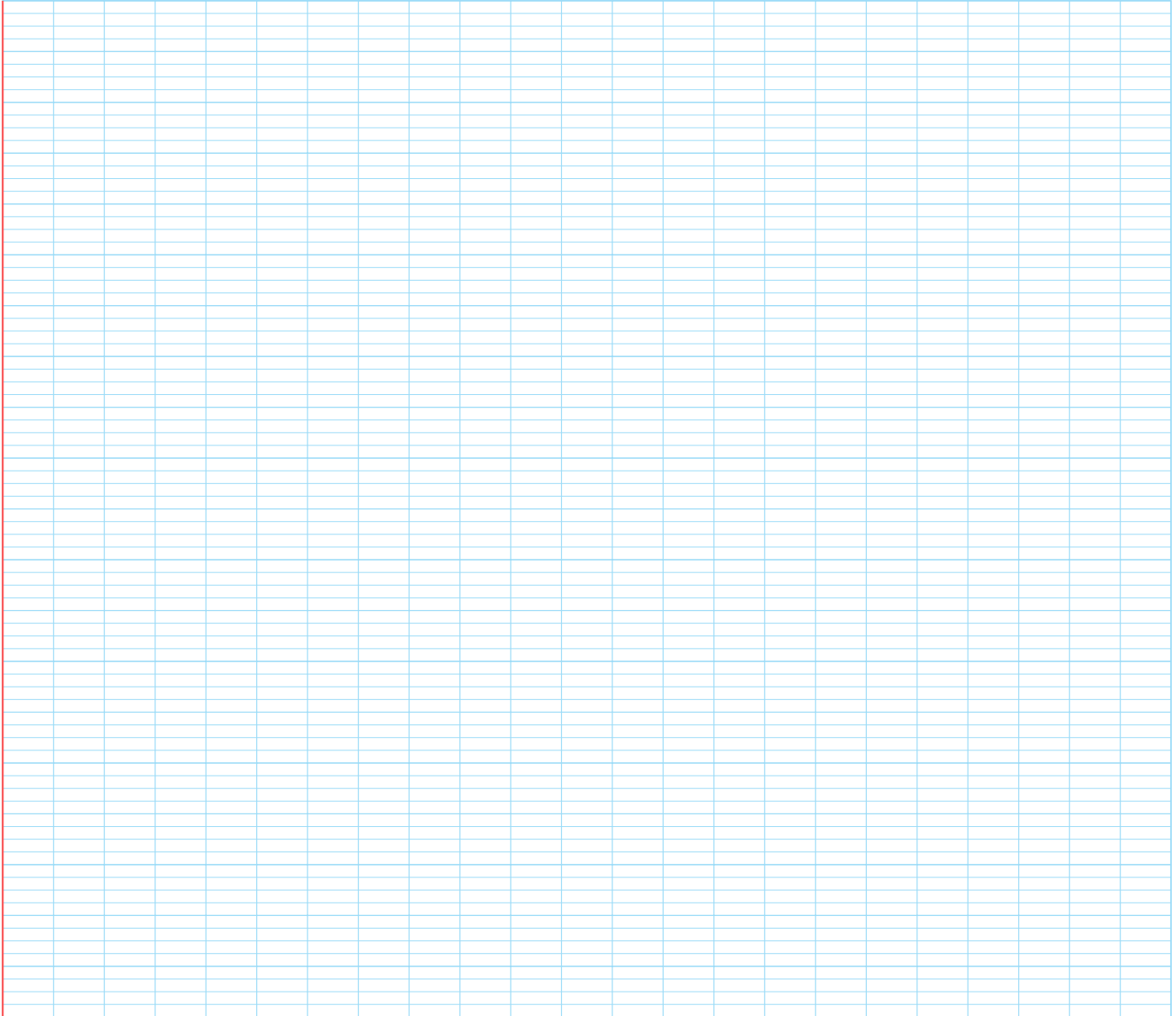
៣. (វិញ្ញាសាត្រៀមទី៣) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 4y = 3 \sin x$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $(E_0) : y'' + 4y = 0$ ។

ខ. រកចំនួនពិត A ដើម្បីឱ្យ $y_p = A \sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 0$ និង $y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ



៤. (វិញ្ញាសាត្រៀមទី៤) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + y = \cos x - \sin x$ ។

- ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y_p = \cos x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ។
- ខ. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
- គ. កំណត់ចម្លើយ $f(x)$ នៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(\pi) = -2$ ។

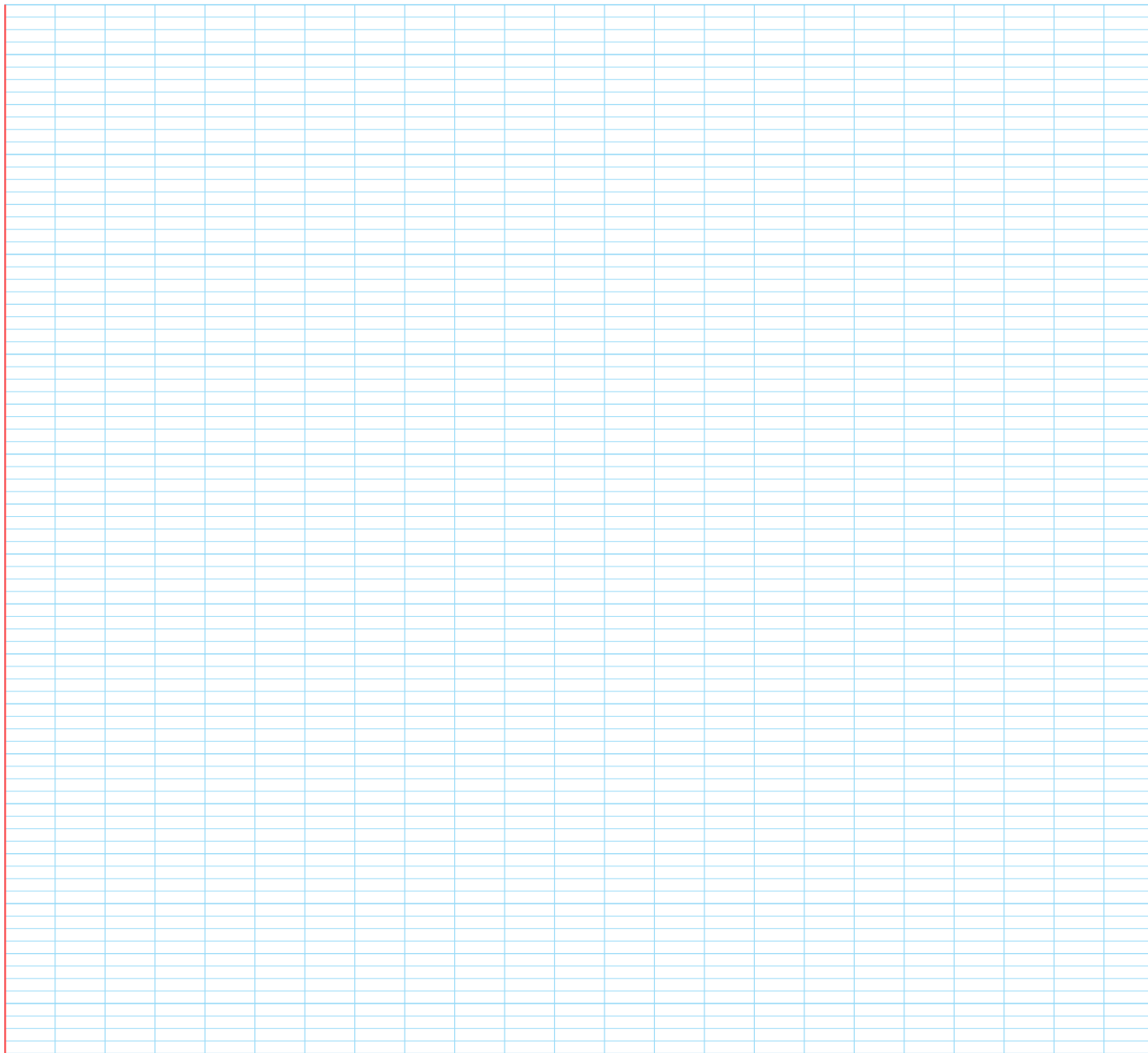
ដំណោះស្រាយ

៥. (វិញ្ញាសាត្រៀមទី៥) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$ ។

ក. រកបូសនៃសមីការសម្គាល់ និងទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ខ. រកចម្លើយ $f(x)$ នៃ (E) ដែលក្រាបកាត់តាម $A(0, 1)$ និងមានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ដំណោះស្រាយ



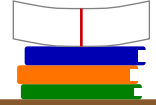


ផ្នែកដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ១ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអែរដាប៌ង់ទី១

តារាង ចម្លើយ សំណួរ ពហុ ជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀន ទី ១

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
១	ខ	២១	ខ	៤១	ខ	៦១	គ	៨១	គ
២	ក	២២	ក	៤២	ក	៦២	ឃ	៨២	ឃ
៣	ឃ	២៣	ឃ	៤៣	ឃ	៦៣	ក	៨៣	ក
៤	ខ	២៤	គ	៤៤	គ	៦៤	ខ	៨៤	ខ
៥	ខ	២៥	ខ	៤៥	ខ	៦៥	គ	៨៥	គ
៦	ខ	២៦	គ	៤៦	គ	៦៦	ឃ	៨៦	ឃ
៧	ខ	២៧	ឃ	៤៧	ឃ	៦៧	ក	៨៧	ក
៨	ក	២៨	ក	៤៨	ក	៦៨	ខ	៨៨	ខ
៩	ខ	២៩	ខ	៤៩	ខ	៦៩	គ	៨៩	គ
១០	ក	៣០	ខ	៥០	ក	៧០	គ	៩០	ឃ
១១	ខ	៣១	ឃ	៥១	ខ	៧១	ក	៩១	ក
១២	ខ	៣២	ក	៥២	ក	៧២	ខ	៩២	ខ
១៣	ក	៣៣	គ	៥៣	គ	៧៣	គ	៩៣	គ
១៤	ខ	៣៤	ឃ	៥៤	ឃ	៧៤	ឃ	៩៤	ឃ
១៥	គ	៣៥	ខ	៥៥	ខ	៧៥	ក	៩៥	ក
១៦	ក	៣៦	ក	៥៦	ក	៧៦	ខ	៩៦	ខ
១៧	ក	៣៧	គ	៥៧	គ	៧៧	គ	៩៧	គ
១៨	ខ	៣៨	ឃ	៥៨	ឃ	៧៨	ឃ	៩៨	ឃ
១៩	ក	៣៩	ខ	៥៩	ខ	៧៩	ក	៩៩	ក
២០	ក	៤០	ក	៦០	ខ	៨០	ខ	១០០	ខ



១. ជំនេរស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្ត

លំហាត់ទី ១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក $y' = 2x^2 - x + 1$
ខ $y' = e^{-2x}$

គ $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

ឃ $y' = \frac{x}{x^2 - 1}$ លើ $(-1, 1)$

ង $xy' = 1$ លើ $(0, +\infty)$

ជំនេរស្រាយ

ក $y' = 2x^2 - x + 1 \implies y = \int (2x^2 - x + 1) dx$ ៖

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

ខ $y' = e^{-2x} \implies y = \int e^{-2x} dx$ ៖

ដូចនេះ ៖ $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

គ $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \implies y = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ ៖

ដូចនេះ ៖ $y = \ln(x^2 + 1) + C$

ឃ $y' = \frac{x}{x^2 - 1}$ លើ $(-1, 1)$ ៖

$y = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C$

ដោយ $x \in (-1, 1) \implies |x^2 - 1| = 1 - x^2$ ៖

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + C$

ង $xy' = 1 \iff y' = \frac{1}{x} \implies y = \ln x + C$

ដូចនេះ ៖ $y = \ln x + C$

លំហាត់ទី ២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ ៖

ក $\frac{y'}{y} = \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

ខ $y' = e^{2x}, y(0) = 5$

គ $(3x^2 - 2)y' = 6x, y(1) = 4$

ឃ $\frac{y'}{\tan x} = 1, y(0) = 0$

ជំនេរស្រាយ

ក $\frac{y'}{y} = \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

$\ln|y| = \sin x + c \iff y = Ce^{\sin x}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ce^1 = e \implies C = 1$ ដូចនេះ ៖ $y = e^{\sin x}$

ខ $y' = e^{2x}, y(0) = 5$

$y = \frac{1}{2}e^{2x} + C \implies \frac{1}{2} + C = 5 \implies C = \frac{9}{2}$

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{9}{2}$

គ $(3x^2 - 2)y' = 6x, y(1) = 4$

$y = \ln|3x^2 - 2| + C \implies \ln|1| + C = 4 \implies C = 4$

ដូចនេះ ៖ $y = \ln|3x^2 - 2| + 4$

ឃ $\frac{y'}{\tan x} = 1 \implies y' = \tan x, y(0) = 0$

$y = -\ln|\cos x| + C \implies -\ln(1) + C = 0 \implies C = 0$

ដូចនេះ ៖ $y = -\ln|\cos x|$

លំហាត់ទី ៣

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរដាច់ទី ១ ($y' + ay = 0$) ៖

ក $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

ខ $3\frac{dy}{dx} + y = 0$

គ $2y' - 3y = 0$

ឃ $y' + y\sqrt{2} = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ ($a = 2$) ៖

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-2x}$ ($C \in \mathbb{R}$)

ខ $3y' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{3}y = 0$ ($a = \frac{1}{3}$) ៖

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-\frac{1}{3}x}$ ($C \in \mathbb{R}$)

គ $2y' - 3y = 0 \iff y' - \frac{3}{2}y = 0$ ($a = -\frac{3}{2}$) ៖

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{\frac{3}{2}x}$ ($C \in \mathbb{R}$)

ឃ $y' + y\sqrt{2} = 0$ ($a = \sqrt{2}$) ៖

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x\sqrt{2}}$ ($C \in \mathbb{R}$)

លំហាត់ទី ៤

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម ៖

ក $-y' + 2y = 0$, $y(3) = -2$

ខ $2y' + y = 0$, $y(\ln 4) = \frac{1}{5}$

គ $7y' + 4y = 0$, $y(7) = e^{-4}$

ឃ $2y' - 5y = 0$, $y(1) = -3$

ដំណោះស្រាយ

ក $-y' + 2y = 0 \iff y' - 2y = 0$ ($a = -2$) ៖
 $y = Ce^{2x}$, $y(3) = -2 \implies C = -2e^{-6}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -2e^{2(x-3)}$

ខ $2y' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{2}y = 0$ ៖

$y = Ce^{-\frac{1}{2}x}$, $y(\ln 4) = \frac{C}{2} = \frac{1}{5} \implies C = \frac{2}{5}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}x}$

គ $7y' + 4y = 0 \iff y' + \frac{4}{7}y = 0$ ៖

$y = Ce^{-\frac{4}{7}x}$, $y(7) = Ce^{-4} = e^{-4} \implies C = 1$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = e^{-\frac{4}{7}x}$

ឃ $2y' - 5y = 0 \iff y' - \frac{5}{2}y = 0$ ៖

$y = Ce^{\frac{5}{2}x}$, $y(1) = Ce^{5/2} = -3 \implies C = -3e^{-5/2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -3e^{\frac{5}{2}(x-1)}$

លំហាត់ទី ៥

បង្ហាញថាអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅខាងស្តាំ ៖

ក $y = x + e^x$, $y' - y = 1 - x$

ខ $y = e^{3x} - x - 1$, $y' - 3y = 3x + 2$

គ $y = \sin x + \cos x$, $y' + y = 2 \cos x$

ឃ $y = x + \ln x$, $xy' - y = 1 - \ln x$

ដំណោះស្រាយ

ក $y = x + e^x \implies y' = 1 + e^x$ ៖
 $y' - y = (1 + e^x) - (x + e^x) = 1 - x$

ដូចនេះ ៖ $y = x + e^x$ ជាចម្លើយ

ខ $y = e^{3x} - x - 1 \implies y' = 3e^{3x} - 1$ ៖
 $y' - 3y = (3e^{3x} - 1) - 3(e^{3x} - x - 1) = 3x + 2$

ដូចនេះ ៖ $y = e^{3x} - x - 1$ ជាចម្លើយ

គ $y = \sin x + \cos x \implies y' = \cos x - \sin x$ ៖
 $y' + y = (\cos x - \sin x) + (\sin x + \cos x) = 2 \cos x$

ដូចនេះ ៖ $y = \sin x + \cos x$ ជាចម្លើយ

ឃ $y = x + \ln x \implies y' = 1 + \frac{1}{x}$ ៖

$xy' - y = x \left(1 + \frac{1}{x} \right) - (x + \ln x) = 1 - \ln x$

ដូចនេះ ៖ $y = x + \ln x$ ជាចម្លើយ

លំហាត់ទី ៦

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + 2y = x^2$

ក កំណត់ ពហុធា $g(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយ នៃ $y' + 2y = 0$

ពិសេសនៃ (E) ។

ខ បង្ហាញ f ជាចម្លើយ $(E) \iff h = f - g$ ជាចម្លើយ (E) ។

គ ដោះស្រាយ $y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ

ដំណោះស្រាយ

ក $g'(x) = 2ax + b$ ។ ជំនួសចូល (E) ៖

$2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = x^2$

$\implies a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះ ៖ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

ខ $h' + 2h = (f' + 2f) - (g' + 2g) = x^2 - x^2 = 0$
 (ពិត) ។

គ $y' + 2y = 0 \implies h(x) = Ce^{-2x}$

ដូចនេះ ៖ $f(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

លំហាត់ទី ៧

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

ក ដោះស្រាយ $y' - 2y = 0$ ដែល $y(0) = 1$ ។

ខ តាង $f(x) = e^{2x}g(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ។

គ បង្ហាញ f ជាចម្លើយ (E) $\iff g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ ។

ឃ រកកន្សោម $g(x)$ រួចទាញរក $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក $y' - 2y = 0 \implies y = Ce^{2x}$ ។

$y(0) = 1 \implies C = 1$ ។ ដូចនេះ ៖ $y = e^{2x}$

ខ ដេរីវេផលគុណ ៖ $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$

គ $f'(x) - 2f(x) = e^{2x}g'(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$$\iff g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

ឃ $g(x) = \int \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} dx = \ln(1 + e^{-2x}) + C$ ។

ដូចនេះ ៖ $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x}) + Ce^{2x}$

លំហាត់ទី ៨

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y' + y = xe^{-x}$

ក ដោះស្រាយសមីការ (E₀) : $y' + y = 0$ (E)។

ខ រក m, n ដើម្បី $g(x) = (mx^2 + nx)e^{-x}$ ជាចម្លើយ គ រកចម្លើយទូទៅនៃ (E) រួចរក f ដែល $y(0) = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក (E₀) : $y' + y = 0 \implies y_0 = Ce^{-x}$

ខ $g'(x) + g(x) = (2mx + n)e^{-x} = xe^{-x}$
 $\implies 2m = 1 \implies m = \frac{1}{2}, n = 0$ ។

ដូចនេះ ៖ $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

គ ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = y_0 + g(x) = \left(C + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$$

$$y(0) = 2 \implies C = 2$$

ដូចនេះ ៖ $f(x) = \left(2 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$

លំហាត់ទី ៩

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមិនអូម៉ូសែន ៖

ក $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$

ខ $\frac{dy}{dx} + y = x - 1$

គ $y' + y = xe^x$

ឃ $y' + y = \sin x$

ជំនោះស្រាយ

ក $y' - y = e^{3x}$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^x$ ។

រកចម្លើយពិសេស $y_p = Ae^{3x} \Rightarrow 3Ae^{3x} - Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^x + \frac{1}{2}e^{3x}$

ខ $y' + y = x - 1$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-x}$ ។

យក $y_p = ax + b \Rightarrow a + ax + b = x - 1 \Rightarrow a = 1, b = -2$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x} + x - 2$

គ $y' + y = xe^x$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-x}$ ។

យក $y_p = (ax + b)e^x \Rightarrow y'_p + y_p = (2ax + a + 2b)e^x = xe^x \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x$

ឃ $y' + y = \sin x$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-x}$ ។

យក $y_p = A \cos x + B \sin x \Rightarrow y'_p + y_p = (B + A) \cos x + (B - A) \sin x = \sin x \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$

លំហាត់ទី ១០

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម ៖

ក $y' - y = 1, y(0) = 1$

ខ $y' + 2y = 1, y(0) = 0$

ជំនោះស្រាយ

ក $y' - y = 1, y(0) = 1$

ចម្លើយទូទៅ ៖ $y = Ce^x - 1$ ។

$y(0) = 1 \Rightarrow C - 1 = 1 \Rightarrow C = 2$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = 2e^x - 1$

ខ $y' + 2y = 1, y(0) = 0$

ចម្លើយទូទៅ ៖ $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}$ ។

$y(0) = 0 \Rightarrow C + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$

លំហាត់ទី ១១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក $y' - 3y = 3x + 2$

ខ $xy' - y = 1 - \ln x$

គ $y' + 2y = e^{-2x}$

ឃ $y' + y = 2e^x$

ង $y' + y = \cos x + \sin x$

ច $y' + 2y = 2x^2 - 3$

ឆ $y' + 5y = 20, y(0) = 2$

ជ $y' + y = 1, y(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក $y' - 3y = 3x + 2$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{3x}$

ចម្លើយពិសេស ៖ $y_p = -x - 1$

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{3x} - x - 1$

ខ $xy' - y = 1 - \ln x$

ចែកនឹង x^2 ៖ $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$

ដូចនេះ ៖ $y = Cx + \ln x$

គ $y' + 2y = e^{-2x}$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-2x}$

ចម្លើយពិសេស ៖ $y_p = xe^{-2x}$

ដូចនេះ ៖ $y = (x + C)e^{-2x}$

ឃ $y' + y = 2e^x$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-x}$

ចម្លើយពិសេស ៖ $y_p = e^x$

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x} + e^x$

ង $y' + y = \cos x + \sin x$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-x}$

ចម្លើយពិសេស ៖ $y_p = \sin x$

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x} + \sin x$

ច $y' + 2y = 2x^2 - 3$

ចម្លើយអូម៉ូសែន ៖ $y_h = Ce^{-2x}$

ចម្លើយពិសេស ៖ $y_p = x^2 - x - 1$

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-2x} + x^2 - x - 1$

ឆ $y' + 5y = 20, y(0) = 2$

ចម្លើយទូទៅ ៖ $y = Ce^{-5x} + 4$

$y(0) = 2 \Rightarrow C + 4 = 2 \Rightarrow C = -2$

ដូចនេះ ៖ $y = 4 - 2e^{-5x}$

ជ $y' + y = 1, y(0) = 0$

ចម្លើយទូទៅ ៖ $y = Ce^{-x} + 1$

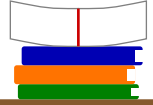
$y(0) = 0 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow C = -1$

ដូចនេះ ៖ $y = 1 - e^{-x}$

មេរៀនទី ២ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអែរអំប៊ាស់ទី២

តារាង ចម្លើយ សំណួរ ពហុ ជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ២

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
១	ក	២១	គ	៤១	ក	៦១	ឃ	៨១	ក
២	ក	២២	ខ	៤២	ខ	៦២	ក	៨២	ខ
៣	ខ	២៣	គ	៤៣	ក	៦៣	គ	៨៣	គ
៤	ក	២៤	ក	៤៤	ឃ	៦៤	ខ	៨៤	ក
៥	គ	២៥	ឃ	៤៥	ក	៦៥	គ	៨៥	ឃ
៦	ខ	២៦	ក	៤៦	ខ	៦៦	ក	៨៦	ក
៧	ក	២៧	ខ	៤៧	គ	៦៧	ឃ	៨៧	ខ
៨	ឃ	២៨	គ	៤៨	ក	៦៨	ខ	៨៨	គ
៩	ក	២៩	ក	៤៩	ឃ	៦៩	ក	៨៩	ក
១០	ខ	៣០	ឃ	៥០	ខ	៧០	គ	៩០	ឃ
១១	គ	៣១	ខ	៥១	ក	៧១	ឃ	៩១	ក
១២	ក	៣២	ក	៥២	គ	៧២	ក	៩២	ខ
១៣	ឃ	៣៣	គ	៥៣	ខ	៧៣	ខ	៩៣	គ
១៤	ខ	៣៤	ក	៥៤	ក	៧៤	គ	៩៤	ឃ
១៥	ក	៣៥	ឃ	៥៥	ឃ	៧៥	ក	៩៥	ក
១៦	គ	៣៦	ខ	៥៦	ក	៧៦	ក	៩៦	ខ
១៧	ក	៣៧	ក	៥៧	ខ	៧៧	ខ	៩៧	គ
១៨	ឃ	៣៨	គ	៥៨	គ	៧៨	គ	៩៨	ក
១៩	ខ	៣៩	ខ	៥៩	ក	៧៩	ក	៩៩	ឃ
២០	ក	៤០	ក	៦០	ឃ	៨០	ខ	១០០	ខ



២. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្ត

លំហាត់ទី ១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន ៖

ក $y'' - 9y' = 0$

ខ $y'' - 3y' + 3y = 0$

គ $2y'' + 3y' - 2y = 0$

ឃ $y'' - 3y' + y = 0$

ង $y'' + 2y' + y = 0$

ច $y'' - 2\sqrt{11}y' + 11y = 0$

ឆ $y'' - 2y' + y = 0$

ជ $y'' + y = 0$

ឈ $9y'' + 6y' + y = 0$

ញ $y'' - 2y' + 4y = 0$

ដ $4y'' + 12y' + 9y = 0$

ប $9y'' - 12y' + 11y = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក $y'' - 9y' = 0$

សមីការសម្គាល់ ៖ $r^2 - 9r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 9$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 + C_2 e^{9x}$

ខ $y'' - 3y' + 3y = 0$

$r^2 - 3r + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ ៖ $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$

គ $2y'' + 3y' - 2y = 0$

$2r^2 + 3r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -2$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-2x}$

ឃ $y'' - 3y' + y = 0$

$r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$

ង $y'' + 2y' + y = 0$

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$ (ប្រសិទ្ធភាព)

ដូចនេះ ៖ $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$

ច $y'' - 2\sqrt{11}y' + 11y = 0$

$r^2 - 2\sqrt{11}r + 11 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \sqrt{11}$

ដូចនេះ ៖ $y = (C_1 x + C_2) e^{x\sqrt{11}}$

ឆ $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r = 1$ (ប្រសិទ្ធភាព)

ដូចនេះ ៖ $y = (C_1 x + C_2) e^x$

ជ $y'' + y = 0 \Rightarrow r = \pm i$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

ឈ $9y'' + 6y' + y = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$ (ប្រសិទ្ធភាព)

ដូចនេះ ៖ $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{1}{3}x}$

ញ $y'' - 2y' + 4y = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i\sqrt{3}$

ដូចនេះ ៖ $y = e^x (C_1 \cos x\sqrt{3} + C_2 \sin x\sqrt{3})$

ដ $4y'' + 12y' + 9y = 0 \Rightarrow r = -\frac{3}{2}$

ដូចនេះ ៖ $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{3}{2}x}$

ប $9y'' - 12y' + 11y = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3} \pm i\frac{\sqrt{7}}{3}$

ដូចនេះ ៖ $y = e^{\frac{2}{3}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{3}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{3}x \right)$

លំហាត់ទី ២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម ៖

- ក. $y'' - 9y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
 ខ. $y'' - 3y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 11$
 គ. $2y'' + 3y' - 2y = 0$, $y(0) = 12$, $y'(0) = -3$
 ឃ. $y'' - 3y' + y = 0$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 11$
 ង. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 15$, $y'(0) = -2$
 ច. $y'' - 2\sqrt{11}y' + 11y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -7$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y = C_1 + C_2 e^{9x} \Rightarrow y' = 9C_2 e^{9x} \text{ ៖}$
 $y(0) = C_1 + C_2 = 3$ និង $y'(0) = 9C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9}, C_1 = \frac{26}{9}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{26}{9} + \frac{1}{9} e^{9x}$

ខ. $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \text{ ៖}$

$y(0) = C_1 = 0$ ។

$y' = C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 11 \Rightarrow C_2 = \frac{22\sqrt{3}}{3}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{22\sqrt{3}}{3} e^{\frac{3}{2}x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$

គ. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-2x} \text{ ៖}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 12$ ។

$y'(0) = \frac{1}{2}C_1 - 2C_2 = -3$ ។

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ ៖ $C_1 = \frac{42}{5}, C_2 = \frac{18}{5}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{42}{5} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{18}{5} e^{-2x}$

ឃ. $r = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ ៖}$

$y = C_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$ ។

$y(0) = C_1 + C_2 = -7$ ។

$y'(0) = \frac{3}{2}(C_1 + C_2) + \frac{\sqrt{5}}{2}(C_1 - C_2) = 11$

$\Rightarrow C_1 = \frac{-35 + 43\sqrt{5}}{10}, C_2 = \frac{-35 - 43\sqrt{5}}{10}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(-7 \cosh \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{43\sqrt{5}}{5} \sinh \frac{\sqrt{5}}{2}x \right)$

ង. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x} \text{ ៖}$

$y(0) = C_2 = 15$ ។

$y'(0) = C_1 - C_2 = -2 \Rightarrow C_1 = 13$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = (13x + 15) e^{-x}$

ច. $r = \sqrt{11}$ (ប្រសូប) ៖

$y = (C_1 x + C_2) e^{x\sqrt{11}}$ ។

$y(0) = C_2 = 5$ ។

$y'(0) = C_1 + C_2 \sqrt{11} = -7 \Rightarrow C_1 = -7 - 5\sqrt{11}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = ((-7 - 5\sqrt{11})x + 5) e^{x\sqrt{11}}$

លំហាត់ទី ៣

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម ៖

- ក $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
 ខ $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
 គ $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$
 ឃ $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

- ង $\frac{1}{4}y'' + y = 0$, $y(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y'(0) = 3\sqrt{2}$
 ច $y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
 ឆ $y'' - 9y = 0$, $y(\ln 2) = 1$, $y'(\ln 2) = -3$
 ជ $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក $r = \pm 1 \implies y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} :$
 $y(0) = C_1 + C_2 = 1$, $y'(0) = C_1 - C_2 = -2$
 $\implies C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x}$

ខ $r = 1 \pm i\sqrt{2} :$
 $y = e^x(C_1 \cos x\sqrt{2} + C_2 \sin x\sqrt{2})$ ។
 $y(0) = C_1 = 2$ ។

$y'(0) = C_1 + C_2\sqrt{2} = 1 \implies C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = e^x \left(2\cos x\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\sqrt{2} \right)$

គ $r = 1, 2 \implies y = C_1 e^{x-1} + C_2 e^{2(x-1)} :$
 $y(1) = C_1 + C_2 = 1$ ។
 $y'(1) = C_1 + 2C_2 = 3 \implies C_2 = 2, C_1 = -1$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -e^{x-1} + 2e^{2(x-1)}$

ឃ $r = -\frac{1}{2}$ (ប្រសិទ្ធភាព) ៖

$y = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{1}{2}x}$

$y(0) = C_2 = 0$ ។

$y'(0) = C_1 = 1$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = xe^{-\frac{1}{2}x}$

ង $y'' + 4y = 0 \implies r = \pm 2i :$
 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ។

$y(0) = C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

$y'(0) = 2C_2 = 3\sqrt{2} \implies C_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

ច $r = \pm i \implies y = C_1 \cos x + C_2 \sin x :$
 $y(\pi/2) = C_2 = 3$ ។

$y'(\pi/2) = -C_1 = 2 \implies C_1 = -2$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -2\cos x + 3\sin x$

ឆ $r = \pm 3 \implies y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} :$
 $y(\ln 2) = 8C_1 + \frac{1}{8}C_2 = 1$ ។

$y'(\ln 2) = 24C_1 - \frac{3}{8}C_2 = -3$ ។

$\implies C_1 = 0, C_2 = 8$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = 8e^{-3x}$

ជ $r = -3 \pm 2i :$
 $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ។
 $y(0) = C_1 = 1$ ។

$y'(0) = -3C_1 + 2C_2 = 0 \implies C_2 = \frac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = e^{-3x} \left(\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x \right)$

លំហាត់ទី ៤

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២ ចម្រុះ ៖

- ក $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
 ខ $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$
 គ $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

- ឃ $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$
 ង $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

ជំនេរស្រាយ

ក $y'' + 4y = 0 \implies r = \pm 2i$ ៖

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y(0) = C_1 = 1$, $y'(0) = 2C_2 = -1 \implies C_2 = -\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$

ខ $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$ ៖

$r = 1 \pm 2i \implies y_h = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ។

យក $y_p = A \cos x + B \sin x \implies A = 2, B = -1$ ។

ដូចនេះ ៖

$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2\cos x - \sin x$

គ $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ ៖

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$

$y(0) = C_1 = 1$, $y'(0) = 2C_2 + \frac{1}{3} = 2 \implies C_2 = \frac{5}{6}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = \cos 2x + \frac{5}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$

ឃ $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$ ៖

$r = -2 \pm i \implies y_h = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ។

$y_p = 7e^{-4x} \implies y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 7e^{-4x}$

$y(0) = -3 \implies C_1 = -10$, $y'(0) = 1 \implies C_2 = 9$ ។

ដូចនេះ ៖

$y = e^{-2x}(-10\cos x + 9\sin x) + 7e^{-4x}$

ង $y'' - 2y' + 5y = 0$ ៖

$r = 1 \pm 2i \implies y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ។

$y(0) = -1 \implies C_1 = -1$, $y'(0) = 1 \implies C_2 = 1$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = e^x(-\cos 2x + \sin 2x)$

លំហាត់ទី ៥

ក ដោះស្រាយសមីការ (E): $y'' + 5y' + 6y = 0$ ។

ខ កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ (D): $y = x - 1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x = 0$ ។

ជំនេរស្រាយ

ក សមីការសម្គាល់ ៖

$r^2 + 5r + 6 = 0 \iff (r+2)(r+3) = 0$

$\implies r_1 = -2, r_2 = -3$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

ខ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (D): $y = x - 1$ ត្រង់ $x = 0$ ៖

$y(0) = -1$ និង $y'(0) = 1$ ។

$y(0) = C_1 + C_2 = -1$

$y'(0) = -2C_1 - 3C_2 = 1$

$\implies C_1 = -2, C_2 = 1$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -2e^{-2x} + e^{-3x}$

លំហាត់ទី ៦

យើងមានសមីការ (E): $y' - y \ln 3 = 0$ ៖

ក. រកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (E)។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1) = 2$ ។

គ. បង្ហាញថា $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកសំណុំចម្លើយនៃ (E) ៖

$$y' - y \ln 3 = 0 \iff \frac{y'}{y} = \ln 3$$

$$\implies \ln |y| = x \ln 3 + C_0 \implies y = C e^{x \ln 3}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{y = C \cdot 3^x \quad (C \in \mathbb{R})}$$

ខ. កំណត់ f ដោយដឹងថា $f(1) = 2$ ៖

$$f(x) = C \cdot 3^x \implies f(1) = 3C = 2 \implies C = \frac{2}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{f(x) = \frac{2}{3} \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x-1}}$$

គ. បង្ហាញថា $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ៖

$$g'(x) = (3^{x-1})' = 3^{x-1} \ln 3$$

ជំនួសចូល (E) ៖

$$g'(x) - g(x) \ln 3 = 3^{x-1} \ln 3 - 3^{x-1} \ln 3 = 0 \quad (\text{ពិត})$$

ដូចនេះ $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E)។

លំហាត់ទី ៧

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f'' + 2f' = 0$ ៖

ក. គេតាង $g = f'$ ។ បង្ហាញថា g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g' + 2g = 0$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $g' + 2g = 0$ រួចទាញរកចម្លើយនៃ $f'' + 2f' = 0$ ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅសំណួរ b ដោយដោះស្រាយសមីការ $f'' + 2f' = 0$ តាមសមីការសម្គាល់។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោយ $g = f' \implies g' = f''$ ៖

ជំនួសចូល $f'' + 2f' = 0$ គេបាន ៖

$$g' + 2g = 0 \quad (\text{ពិត})$$

ដូចនេះ g ជាចម្លើយនៃ $g' + 2g = 0$ ។

ខ. ដោះស្រាយ $g' + 2g = 0$ ៖

$$g(x) = C_1 e^{-2x} \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

ដោយ $f'(x) = g(x) = C_1 e^{-2x}$ នោះ ៖

$$f(x) = \int C_1 e^{-2x} dx = -\frac{C_1}{2} e^{-2x} + C_2$$

តាង $A = -\frac{C_1}{2}$ និង $B = C_2$ ៖

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{f(x) = A e^{-2x} + B \quad (A, B \in \mathbb{R})}$$

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់តាមសមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 + 2r = 0 \iff r(r+2) = 0 \implies r_1 = 0, r_2 = -2$$

ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$f(x) = A e^{-2x} + B e^{0x} = A e^{-2x} + B$$

ចម្លើយទាំងពីរវិធីដូចគ្នាទាំងស្រុង។

លំហាត់ទី ៨

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ ៖

- ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E_1): y'' - 3y' + 2y = 0$ កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E_1) ដែល $f(0) = 3$ និង $f'(0) = 4$ ។
- ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ជំនោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់នៃ (E_1) ៖

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0$$

$$\implies r_1 = 1, r_2 = 2$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅគឺ ៖ } y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$\text{អនុវត្តលក្ខខណ្ឌ } f(0) = 3 \text{ និង } f'(0) = 4 \text{ ៖}$$

$$\begin{cases} f(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ f'(0) = C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases}$$

$$\implies C_2 = 1, C_1 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{f(x) = 2e^x + e^{2x}}$$

ខ. រក a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយ (E) ៖

$$\text{គណនាដេរីវេ ៖ } g'(x) = a \text{ និង } g''(x) = 0$$

$$\text{ជំនួសចូលសមីការ } (E) \text{ ៖}$$

$$0 - 3(a) + 2(ax + b) = 2x + 1$$

$$2ax + (2b - 3a) = 2x + 1$$

$$\text{ធ្វើមេគុណអង្គទាំងពីរ ៖}$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \implies a = 1 \\ 2b - 3a = 1 \implies 2b = 4 \implies b = 2 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{a = 1, b = 2} \quad (\text{ហើយ } g(x) = x + 2)$$

លំហាត់ទី ៩

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 6y' + 8y = 0 \quad (\alpha)$ ។

ខ. រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (α) ដោយដឹងថាក្រាប (C) របស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ចំណុច $E(0, -1)$ ។

ជំនោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - 6r + 8 = 0 \iff (r-2)(r-4) = 0$$

$$\implies r_1 = 2, r_2 = 4$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})}$$

ខ. ប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកត្រង់ $E(0, -1)$ ៖

បន្ទាត់ដេកមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ ០។

$$\text{គេបាន } g(0) = -1 \text{ និង } g'(0) = 0$$

$$g'(x) = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x}$$

$$\begin{cases} g(0) = C_1 + C_2 = -1 \\ g'(0) = 2C_1 + 4C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies C_2 = 1, C_1 = -2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{g(x) = -2e^{2x} + e^{4x}}$$

លំហាត់ទី ១០

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$ ៖

ក. ដោះស្រាយសមីការ (F): $y'' - 2y' + 5y = 0$ ។ រកចម្លើយនៃ (F) បើ $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 6$ ។

ខ. រកចំនួនពិត n, p និង q ដោយដឹងថា $y = 2x^2 + 3x + 1$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)។ រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់នៃ (F) ៖

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \implies \Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$$

$$\implies r = 1 \pm 2i$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅ ៖ } y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$y(0) = C_1 = 2$$

$$y'(0) = C_1 + 2C_2 = 6 \implies 2 + 2C_2 = 6 \implies C_2 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = 2e^x(\cos 2x + \sin 2x)$$

ខ. ស្វែងរក n, p, q ៖

$$y = 2x^2 + 3x + 1 \implies y' = 4x + 3, y'' = 4$$

ជំនួសចូល (E) ៖

$$4 - 2(4x + 3) + 5(2x^2 + 3x + 1) = nx^2 + px + q$$

$$10x^2 + 7x + 3 = nx^2 + px + q$$

$$\implies n = 10, p = 7, q = 3$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2x^2 + 3x + 1$$

លំហាត់ទី ១១

គេឱ្យសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 0$ (E) ៖

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_g នៃសមីការ (E)។

ខ. គេដឹងថា $y_p = a \cos x + b \sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 4 \cos x - 12 \sin x$ (F) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់នៃ (E) ៖

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \implies \Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$$

$$\implies r = 2 \pm i$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y_g = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ខ. រក a និង b ៖

$$y_p' = -a \sin x + b \cos x, y_p'' = -a \cos x - b \sin x$$

ជំនួសចូល (F) ៖

$$y_p'' - 4y_p' + 5y_p = (4a - 4b) \cos x + (4a + 4b) \sin x$$

$$\begin{cases} 4a - 4b = 4 \\ 4a + 4b = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = -3 \end{cases} \implies a = -1, b = -2$$

$$\text{ដូចនេះ } y_p = -\cos x - 2 \sin x$$

ចម្លើយទូទៅនៃ (F) គឺ ៖

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \cos x - 2 \sin x$$

លំហាត់ទី ១២

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1): $-y'' - y' + 6y = 6x^2 - 2x + 4$ ៖

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E_2): $-y'' - y' + 6y = 0$ ។

ខ. រកពហុធា $p(x) = ax^2 + bx + c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1)។ ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E_1)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់នៃ (E_2) ៖

$$-r^2 - r + 6 = 0 \iff r^2 + r - 6 = 0$$

$$\iff (r-2)(r+3) = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = -3$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

ខ. រកពហុធា $p(x) = ax^2 + bx + c$ ៖

$$p'(x) = 2ax + b, p''(x) = 2a$$

ជំនួសចូល (E_1) ៖

$$-2a - (2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 2x + 4$$

$$6ax^2 + (6b - 2a)x + (6c - 2a - b) = 6x^2 - 2x + 4$$

$$\begin{cases} 6a = 6 \implies a = 1 \\ 6b - 2 = -2 \implies b = 0 \\ 6c - 2 = 4 \implies c = 1 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } p(x) = x^2 + 1$$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ ៖

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + 1$$

លំហាត់ទី ១៣

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 4y' + 2y = 4$ (E) ៖

ក. រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 4y' + 2y = 4$ ។

គ. រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 2\sqrt{2}$ និង $y'(0) = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកអនុគមន៍ថេរ k ៖

$$y = k \implies y' = 0, y'' = 0$$

$$\text{ជំនួសចូល } (E) \implies 2k = 4 \implies k = 2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } k = 2$$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$$\text{សមីការសម្គាល់ ៖ } r^2 - 4r + 2 = 0 \implies \Delta' = 2$$

$$\implies r = 2 \pm \sqrt{2}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = C_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})x} + 2$$

គ. រកចម្លើយពិសេស ៖

$$y(0) = C_1 + C_2 + 2 = 2\sqrt{2} \implies C_1 + C_2 = 2\sqrt{2} - 2$$

$$y'(0) = (2 + \sqrt{2})C_1 + (2 - \sqrt{2})C_2 = 0$$

$$\implies 2(C_1 + C_2) + \sqrt{2}(C_1 - C_2) = 0$$

$$\implies C_1 - C_2 = 2\sqrt{2} - 4$$

$$\text{ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ ៖ } C_1 = 2\sqrt{2} - 3, C_2 = 1$$

ដូចនេះ ៖

$$y = (2\sqrt{2} - 3)e^{(2+\sqrt{2})x} + e^{(2-\sqrt{2})x} + 2$$

លំហាត់ទី ១៤

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 3y' = 5$ (E) ៖

- ក. រកប្រសិនសមីការសម្គាល់នៃសមីការ (E)។
- ខ. រកអនុគមន៍ g ដែល $g(x) = ax$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)។
- គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + 3y' = 5$ ។
- ឃ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ កាលណា $y(0) = e^3$ និង $y'(1) = \frac{2}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 + 3r = 0 \iff r(r+3) = 0 \implies r_1 = 0, r_2 = -3$$

ដូចនេះ ប្រសិន ៖ $r_1 = 0, r_2 = -3$

ខ. រក $g(x) = ax$ ៖

$$g'(x) = a, g''(x) = 0 \implies 3a = 5 \implies a = \frac{5}{3}$$

ដូចនេះ ៖ $g(x) = \frac{5}{3}x$

គ. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ៖

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{5}{3}x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ឃ. រកចម្លើយពិសេស ៖

$$y'(x) = -3C_2 e^{-3x} + \frac{5}{3}$$

$$y'(1) = -3C_2 e^{-3} + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \implies C_2 = \frac{e^3}{3}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = C_1 + \frac{e^3}{3} = e^3 \implies C_1 = \frac{2e^3}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = \frac{e^3}{3}(2 + e^{-3x}) + \frac{5}{3}x$$

លំហាត់ទី ១៥

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$ (E) ៖

- ក. រកពហុធានីក្រេទី ២ $p(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)។
- ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) បើ $h = f - p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តាង $p(x) = ax^2 + bx + c$ ៖

$$p'(x) = 2ax + b, p''(x) = 2a$$

ជំនួសចូល (E) ៖

$$2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \implies a = 1 \\ 2b - 6 = -5 \implies b = \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{3}{2} + 2c = 3 \implies c = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } p(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ៖

$$h'' - 3h' + 2h = (f - p)'' - 3(f - p)' + 2(f - p)$$

$$= (f'' - 3f' + 2f) - (p'' - 3p' + 2p) = 0$$

$$\iff f'' - 3f' + 2f = p'' - 3p' + 2p = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\text{សមីការសម្គាល់នៃ } h \text{ គឺ } r^2 - 3r + 2 = 0 \implies r = 1, 2$$

$$\implies h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

ដូចនេះ ៖

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

លំហាត់ទី ១៦

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = \sin x$ (E) ៖

- ក. រកចំនួនពិត α ដែលអនុគមន៍ ϕ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $\phi(x) = \alpha x \cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E)។
- ខ. តាង f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E)។ បង្ហាញថា $(f - \phi)'' + (f - \phi) = 0$ ។
- គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y = 0$ ។ ទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃ (E)។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ ៖

$$\phi'(x) = \alpha \cos x - \alpha x \sin x$$

$$\phi''(x) = -2\alpha \sin x - \alpha x \cos x$$

$$\text{ជំនួសចូល } (E) \Rightarrow -2\alpha \sin x = \sin x \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}} \quad (\phi(x) = -\frac{1}{2}x \cos x)$$

ខ. បង្ហាញសមភាព ៖

$$(f - \phi)'' + (f - \phi) = (f'' + f) - (\phi'' + \phi)$$

$$= \sin x - \sin x = 0 \quad (\text{ពិត})$$

គ. ដោះស្រាយ $y'' + y = 0$ ៖

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ទាញរក $f(x)$ ៖

$$f(x) - \phi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\Rightarrow f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \phi(x)$$

ដូចនេះ ៖

$$\boxed{f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x}$$

លំហាត់ទី ១៧

ក. ដោះស្រាយសមីការ $2y'' - 3y' + y = 0$ (E)។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y = -\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់នៃ (E) ៖

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \Leftrightarrow (2r - 1)(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ខ. ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d): $y = -\frac{1}{2}x$ ត្រង់ $O(0,0)$ ៖

$$g(0) = 0 \text{ និង } g'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$g(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$g'(x) = C_1 e^x + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow g'(0) = C_1 + \frac{1}{2}C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$C_1 - \frac{1}{2}C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } \boxed{g(x) = -e^x + e^{\frac{1}{2}x}}$$

លំហាត់ទី ១៨

- ក. រកចម្លើយទូទៅ y_g នៃសមីការ $y'' - 5y' + 6y = 0$ ។
- ខ. រកចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'' - 5y' + 6y = x^2 + x$ (E)។
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \iff (r-2)(r-3) = 0$$

$$\implies r_1 = 2, r_2 = 3$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

ខ. រក a, b, c ៖

$$y_p' = 2ax + b, y_p'' = 2a$$

$$\text{ជំនួសចូល (E) } \implies 6ax^2 + (6b - 10a)x + (2a - 5b + 6c) = x^2 + x$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \implies a = 1/6 \\ 6b - 10a = 1 \implies b = 4/9 \\ 2a - 5b + 6c = 0 \implies c = 17/54 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } a = \frac{1}{6}, b = \frac{4}{9}, c = \frac{17}{54}$$

គ. ចម្លើយទូទៅនៃ (E) ៖

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{17}{54}$$

លំហាត់ទី ១៩

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 6y' + 5y = xe^{2x}$ ៖

- ក. រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ $y'' - 6y' + 5y = 0$ ។
- ខ. កំណត់ A និង B ដើម្បីឱ្យ $y_p = e^{2x}(Ax + B)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)។
- គ. បង្ហាញថា $y = y_h + y_p$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ ៖

$$r^2 - 6r + 5 = 0 \iff (r-1)(r-5) = 0$$

$$\implies r_1 = 1, r_2 = 5$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_h = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$$

ខ. កំណត់ A និង B ៖

$$y_p' = e^{2x}(2Ax + 2B + A)$$

$$y_p'' = e^{2x}(4Ax + 4B + 4A)$$

$$\text{ជំនួសចូល (E) } \implies e^{2x}[-3Ax - (2A + 3B)] = xe^{2x}$$

$$\begin{cases} -3A = 1 \implies A = -1/3 \\ -2A - 3B = 0 \implies B = 2/9 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } A = -\frac{1}{3}, B = \frac{2}{9}$$

គ. បង្ហាញថា $y = y_h + y_p$ ជាចម្លើយនៃ (E) ៖

$$\begin{aligned} (y_h + y_p)'' - 6(y_h + y_p)' + 5(y_h + y_p) &= (y_h'' - 6y_h' + 5y_h) + (y_p'' - 6y_p' + 5y_p) = 0 + xe^{2x} = \\ &= xe^{2x} \text{ (ពិត) } \end{aligned}$$

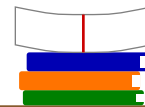
ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + e^{2x} \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \right)$$

មេរៀនទី ៣ ៖ អនុវត្តន៍នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

តារាង ចម្លើយ សំណួរ ពហុ ជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ៣

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
១	គ	២១	គ	៤១	គ	៦១	គ	៨១	ក
២	ក	២២	ខ	៤២	ខ	៦២	ខ	៨២	ខ
៣	ក	២៣	ក	៤៣	ក	៦៣	យ	៨៣	ក
៤	ក	២៤	ក	៤៤	គ	៦៤	ក	៨៤	ក
៥	ខ	២៥	ខ	៤៥	ខ	៦៥	ខ	៨៥	គ
៦	ក	២៦	ក	៤៦	ក	៦៦	ក	៨៦	ខ
៧	ក	២៧	ក	៤៧	ក	៦៧	ក	៨៧	ក
៨	ខ	២៨	គ	៤៨	យ	៦៨	គ	៨៨	ខ
៩	ខ	២៩	ខ	៤៩	ខ	៦៩	ក	៨៩	គ
១០	ក	៣០	ក	៥០	ក	៧០	ខ	៩០	ក
១១	ក	៣១	យ	៥១	គ	៧១	យ	៩១	យ
១២	ក	៣២	ខ	៥២	ក	៧២	ក	៩២	ខ
១៣	ក	៣៣	ក	៥៣	យ	៧៣	គ	៩៣	ក
១៤	ក	៣៤	គ	៥៤	ខ	៧៤	ខ	៩៤	គ
១៥	ក	៣៥	ក	៥៥	ក	៧៥	ក	៩៥	យ
១៦	ខ	៣៦	យ	៥៦	ខ	៧៦	គ	៩៦	ក
១៧	ខ	៣៧	ខ	៥៧	គ	៧៧	ក	៩៧	ខ
១៨	ក	៣៨	ក	៥៨	ក	៧៨	យ	៩៨	គ
១៩	ខ	៣៩	គ	៥៩	ខ	៧៩	ខ	៩៩	ក
២០	ខ	៤០	គ	៦០	ក	៨០	ក	១០០	ខ



៣. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី ១

(វិទ្យុសកម្មកាបូន-១៤) ជាវិទ្យុសកម្មកាបូន ^{14}C មានកន្លះជីវិត $T_{1/2} = 5730$ ឆ្នាំ។ នៅក្នុងកំណាយបុរាណវិទ្យាមួយ គេរកឃើញបំណែកឈើបុរាណមួយ ដែលមានបរិមាណ ^{14}C នៅសល់តែ 35% នៃបរិមាណដើម។ គណនាអាយុកាលនៃបំណែកឈើបុរាណនោះ។

ដំណោះស្រាយ

ច្បាប់បំបែកវិទ្យុសកម្ម ៖ $N(t) = N_0 e^{-kt}$ ។

ថេរ រលាយ ៖ $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1.2097 \times 10^{-4} \text{ ឆ្នាំ}^{-1}$ ។

នៅពេល $N(t) = 0.35N_0$ ៖

$$e^{-kt} = 0.35 \implies t = -\frac{\ln(0.35)}{k} \approx 8679 \text{ ឆ្នាំ} ។$$

ដូចនេះ ៖

$$t \approx 8679 \text{ ឆ្នាំ (ប្រហែល ៨៦៧៩ ឆ្នាំ)}$$

លំហាត់ទី ២

(ល្បឿនធ្លាក់នៃឆ្មាឃ្លា) អ្នកលោតឆ្មាឃ្លាមានម៉ាស់សរុប $m = 80 \text{ kg}$ លោតចេញពីយន្តហោះ។ កម្លាំងទប់ខ្យល់គឺ $F_r = -kv$ ដែល $k = 16 \text{ kg/s}$ ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$) ។

ក. សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងកំណត់ល្បឿន $v(t)$ បើ $v(0) = 0$ ។

ខ. គណនាល្បឿនព្រំដែន (Terminal velocity) ។

គ. គណនាល្បឿននៅខណៈ $t = 5 \text{ s}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តាមច្បាប់ញូតុន ៖ $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$

$$\iff \frac{dv}{dt} + 0.2v = 9.8$$

ចម្លើយទូទៅ ៖ $v(t) = Ce^{-0.2t} + 49$ ។

$$v(0) = 0 \implies C = -49$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } v(t) = 49(1 - e^{-0.2t}) \text{ (m/s)}$$

ខ. ល្បឿនព្រំដែន ៖

$$v_{\text{lim}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k} = 49 \text{ m/s}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } v_{\text{lim}} = 49 \text{ m/s} = 176.4 \text{ km/h}$$

គ. នៅខណៈ $t = 5 \text{ s}$ ៖

$$v(5) = 49(1 - e^{-1}) \approx 30.97 \text{ m/s}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } v(5) \approx 30.97 \text{ m/s}$$

លំហាត់ទី ៣

(សីតុណ្ហភាពដែកក្ដៅ) ដុំដែកដុតកម្ដៅដល់ 800°C ទម្លាក់ក្នុងទឹកបើរ 25°C ។ ក្រោយមក 2 នាទី សីតុណ្ហភាពថយមក 200°C ។

ក កំណត់សមីការ $T(t)$ ។ ខ រក t ពេលសីតុណ្ហភាពថយមក 50°C ។

ដំណោះស្រាយ

ក ច្បាប់ត្រជាក់ញូតុន ៖

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25) \implies T(t) = 25 + Ce^{-kt}$$

$$T(0) = 800 \implies C = 775$$

$$T(2) = 200 \implies 25 + 775e^{-2k} = 200 \implies e^{-2k} = \frac{7}{31}$$

$$\implies k \approx 0.744 \quad \text{ដូចនេះ ៖ } T(t) = 25 + 775e^{-0.744t}$$

ខ រក t ពេល $T(t) = 50^{\circ}\text{C}$ ៖

$$25 + 775e^{-kt} = 50 \implies e^{-kt} = \frac{1}{31}$$

$$\implies t = \frac{\ln 31}{0.744} \approx 4.61 \text{ នាទី}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } t \approx 4.61 \text{ នាទី (៤ នាទី ៣៧ វិនាទី)}$$

លំហាត់ទី ៤

(លំយោលរ៉ឺស័រ) វត្ថុមានម៉ាស់ $m = 2 \text{ kg}$ ភ្ជាប់នឹងរ៉ឺស័រ $k = 50 \text{ N/m}$ និងកកិត $c = 12 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ។ នៅ $t = 0$ គេទាញ 0.5 m ទៅស្តាំ រួចលែងដោយគ្មានល្បឿនដើម។

ក សរសេរសមីការចលនា។ ខ រកទីតាំង $y(t)$ ។ គ រកខណៈឆ្លងកាត់លំនឹងលើកដំបូង។

ដំណោះស្រាយ

ក សមីការចលនា ៖ $2y'' + 12y' + 50y = 0 \implies y'' + 6y' + 25y = 0$

ខ សមីការសម្គាល់ ៖ $r^2 + 6r + 25 = 0 \implies r = -3 \pm 4i$

$$y(t) = e^{-3t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$$

$$y(0) = 0.5 \implies C_1 = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0 \implies C_2 = \frac{3}{8}$$

ដូចនេះ ៖ $y(t) = e^{-3t} \left(\frac{1}{2} \cos 4t + \frac{3}{8} \sin 4t \right)$

គ ឆ្លងកាត់លំនឹងលើកដំបូង ៖

$$y(t) = 0 \implies \tan 4t = -\frac{4}{3} \implies 4t \approx 2.2143$$

$$\implies t = \frac{2.2143}{4} \approx 0.554 \text{ s} \quad \text{ដូចនេះ ៖}$$

$$t \approx 0.554 \text{ s}$$

លំហាត់ទី ៥

(សៀគ្វីអគ្គិសនី RLC) សៀគ្វីស៊េរី $R = 10 \Omega, L = 0.5 \text{ H}, C = 0.02 \text{ F}, E = 12 \text{ V}$ ។ សមីការបន្ទុក ៖ $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$ ដោយ $q(0) = 0, q'(0) = 0$ ។ កំណត់កន្សោមបន្ទុក $q(t)$ និងចរន្ត $i(t) = q'(t)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការបន្ទុក ៖ $0.5q'' + 10q' + 50q = 12$

$$\iff q'' + 20q' + 100q = 24$$

$$r = -10 \implies q_h = (C_1 t + C_2)e^{-10t}, \quad q_p = 0.24 \text{ C}$$

$$q(0) = 0 \implies C_2 = -0.24, \quad q'(0) = 0 \implies C_1 = -2.4$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } q(t) = 0.24 - (2.4t + 0.24)e^{-10t}$$

កន្សោមចរន្តអគ្គិសនី ៖

$$i(t) = q'(t) = 24te^{-10t}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } i(t) = 24te^{-10t} \text{ (A)}$$

ដំណោះស្រាយកម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងឆ្នាំ (២០១៤-២០២៦)

ឆ្នាំ ២០១៤

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y' - 3y = 0$ ៖

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E)

ខ. រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(0) = 2$

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

សមីការមានរាង $y' - ay = 0$ ជាមួយ $a = 3$ ។
ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = Ce^{3x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{3x} \quad (C \in \mathbb{R})$

ខ. រកអនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ ៖

ដោយ $f(0) = 2$ នោះគេបាន ៖

$$Ce^{3(0)} = 2 \iff C = 2$$

ជំនួស $C = 2$ ចូលក្នុងចម្លើយទូទៅ ៖

ដូចនេះ ៖ $f(x) = 2e^{3x}$

ឆ្នាំ ២០១៥

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 4y' + 3y = 0$ ៖

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E)

ខ. រកចម្លើយដែល $y(0) = 1$ និង $y'(0) = 5$

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

សមីការសម្គាល់ ៖ $r^2 - 4r + 3 = 0$
 $(r-1)(r-3) = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = 3$ ។
ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

ខ. រកចម្លើយពិសេស ៖

ដេរីវេ ៖ $y'(x) = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ ។
តាមលក្ខខណ្ឌដើម ៖

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = C_1 + 3C_2 = 5 \end{cases}$$

ដកសមីការទាំងពីរ ៖ $2C_2 = 4 \implies C_2 = 2$ ។

នាំឱ្យ $C_1 = 1 - 2 = -1$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = -e^x + 2e^{3x}$

បាត់ឌុប ២០១៦

គេមានសមីការ (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ ៖

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

ខ. រកចម្លើយ $g(x)$ ដែលក្រាបកាត់តាម $A(0,3)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ស្មើ -1

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ៖

សមីការសម្គាល់ ៖ $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_0 = -1$ (ឫសឌុប)។

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = (C_1x + C_2)e^{-x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = (C_1x + C_2)e^{-x}$

ខ. រកអនុគមន៍ចម្លើយ $g(x)$ ៖

ក្រាបកាត់តាម $A(0,3) \Rightarrow g(0) = C_2 = 3$ ។

ដេរីវេ ៖ $g'(x) = [C_1 - (C_1x + C_2)]e^{-x}$ ។

មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $x = 0$ គឺ $g'(0) = -1$ ៖

$$C_1 - C_2 = -1 \Rightarrow C_1 - 3 = -1 \Rightarrow C_1 = 2$$

ដូចនេះ ៖ $g(x) = (2x + 3)e^{-x}$

បាត់ឌុប ២០១៧

គេឱ្យសមីការ (E) : $y'' + 9y = 0$ ៖

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

ខ. រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ និង $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ៖

សមីការសម្គាល់ ៖ $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$ ។

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

ខ. រកអនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ ៖

$f'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$ ។

ត្រង់ $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2}$ ៖

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_1(0) + C_2(1) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3C_1(1) + 3C_2(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

ដូចនេះ ៖ $f(x) = 2 \sin 3x$

ឆាកខុប ២០១៨

គេមានសមីការ (E) : $y' + 2y = 4x$ ៖

- ក. រក a, b ដើម្បីឱ្យ $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)
- ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E₀) : $y' + 2y = 0$
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 1$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតម្លៃ a និង b ៖

$y'_p = a$ ជំនួសចូល (E) ៖

$$a + 2(ax + b) = 4x \iff 2ax + (a + 2b) = 4x$$

$$\implies \begin{cases} 2a = 4 \implies a = 2 \\ a + 2b = 0 \implies b = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ ៖ $a = 2, b = -1 \implies y_p = 2x - 1$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E₀) ៖

$$y' + 2y = 0 \implies y_h = Ce^{-2x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y_h = Ce^{-2x} \quad (C \in \mathbb{R})$

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ៖

$$y = y_h + y_p = Ce^{-2x} + 2x - 1 \quad (C \in \mathbb{R})$$

តាម $y(0) = 1$ ៖

$$Ce^0 + 2(0) - 1 = 1 \implies C - 1 = 1 \implies C = 2$$

ដូចនេះ ៖ $y = 2e^{-2x} + 2x - 1$

ឆាកខុប ២០១៩

គេមានសមីការ (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$ ៖

- ក. សរសេរសមីការសម្គាល់នៃ (E) រួចរកឫស
- ខ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E)
- គ. កំណត់ចម្លើយពិសេស $f(x)$ ដែល $f(0) = 1$ និង $f'(0) = 3$

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ និងឫស ៖

$$\text{សមីការសម្គាល់ ៖ } r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - 5 = -4 = (2i)^2$$

$$\implies r = 1 \pm 2i \quad (\alpha = 1, \beta = 2)$$

ដូចនេះ ៖ $r = 1 \pm 2i$

ខ. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ៖

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

គ. កំណត់ចម្លើយពិសេស $f(x)$ ៖

$$f(0) = e^0(C_1) = C_1 = 1$$

$$f'(x) = e^x[(C_1 + 2C_2) \cos 2x + (C_2 - 2C_1) \sin 2x]$$

$$f'(0) = C_1 + 2C_2 = 3 \implies 1 + 2C_2 = 3 \implies C_2 = 1$$

ដូចនេះ ៖ $f(x) = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$

បាក់ឌុប ២០២០

គេមានសមីការ (E) : $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$ ៖

- ក. កំណត់ពហុធា $P(x) = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)
- ខ. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E₀) : $y'' - 5y' + 6y = 0$
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E)

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ពហុធា $P(x)$ ៖

$P' = a$, $P'' = 0$ ។ ជំនួសចូល (E) ៖

$$0 - 5a + 6(ax + b) = 6x - 5$$

$$6ax + (6b - 5a) = 6x - 5$$

$$\implies 6a = 6 \implies a = 1$$

$$6b - 5(1) = -5 \implies 6b = 0 \implies b = 0$$

ដូចនេះ ៖ $P(x) = x$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E₀) ៖

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = 3$$

ដូចនេះ ៖ $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ៖

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = y_h + P(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x$$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x$

បាក់ឌុប ២០២១

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $2y' + y = 0$ ៖

- ក. ដោះស្រាយសមីការ (E)
- ខ. កំណត់ $f(x)$ ដោយដឹងថាក្រាបប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = -x + 2$ ត្រង់អាប់ស៊ីស $x = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$$2y' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{2}y = 0$$

ចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-\frac{1}{2}x} \quad (C \in \mathbb{R})$

ខ. កំណត់អនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ ៖

បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 0$ គឺ $y = -x + 2$ ។

នាំឱ្យ $f(0) = -0 + 2 = 2$ ។

ជំនួសចូលក្នុង $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$ ៖

$$Ce^0 = 2 \iff C = 2$$

(ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ $f'(0) = -1$ ត្រូវគ្នានឹងមេគុណប្រាប់ទិស)។

ដូចនេះ ៖ $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$

បាត់ខ្ទប់ ២០២២

គេឱ្យសមីការ (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8e^{2x}$ ៖

- ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$
- ខ. កំណត់ចំនួនពិត A ដើម្បីឱ្យ $y_p = Ae^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ៖

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \iff (r+2)^2 = 0 \implies r_0 = -2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_h = (C_1x + C_2)e^{-2x}$$

ខ. កំណត់តម្លៃ A ៖

$$y_p' = 2Ae^{2x}, y_p'' = 4Ae^{2x} \text{ ជំនួសចូល (E) ៖}$$

$$(4A + 8A + 4A)e^{2x} = 8e^{2x} \iff 16A = 8 \implies A = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } A = \frac{1}{2} \implies y_p = \frac{1}{2}e^{2x}$$

គ. ចម្លើយទូទៅ និងចម្លើយពិសេស ៖

$$y = (C_1x + C_2)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$y(0) = C_2 + \frac{1}{2} = 2 \implies C_2 = \frac{3}{2}$$

$$y'(x) = [C_1 - 2(C_1x + C_2)]e^{-2x} + e^{2x}$$

$$y'(0) = C_1 - 2C_2 + 1 = 0 \implies C_1 - 3 + 1 = 0 \implies C_1 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = \left(2x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

បាត់ខ្ទប់ ២០២៣

គេឱ្យសមីការ (E) : $y' + 3y = e^{-3x}$ ៖

- ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន $y' + 3y = 0$
- ខ. តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ ចូររកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)
- គ. កំណត់ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ដែល $y(0) = 5$

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y' + 3y = 0$ ៖

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_h = Ce^{-3x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

ខ. វិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ ៖

$$\text{តាង } y = C(x)e^{-3x} \implies y' = C'e^{-3x} - 3Ce^{-3x}$$

$$\text{ជំនួសចូល (E) ៖}$$

$$C'e^{-3x} - 3Ce^{-3x} + 3Ce^{-3x} = e^{-3x}$$

$$\implies C'(x) = 1 \implies C(x) = x + K$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = (x + K)e^{-3x} \quad (K \in \mathbb{R})$$

គ. កំណត់ចម្លើយពិសេស ៖

$$\text{តាមលក្ខខណ្ឌដើម } y(0) = 5 ៖$$

$$(0 + K)e^0 = 5 \iff K = 5$$

ជំនួស $K = 5$ ចូលក្នុងចម្លើយទូទៅ ៖

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = (x + 5)e^{-3x}$$

បាក់ឌុប ២០២៤

គេមានសមីការ (E) : $y'' + 16y = 4 \cos 2x$ ៖

- ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) : $y'' + 16y = 0$
- ខ. កំណត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ $y_p = k \cos 2x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)
- គ. សរសេរចម្លើយទូទៅនៃ (E) រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 1$ និង $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយ (E) ៖

$$r^2 + 16 = 0 \implies r = \pm 4i$$

ដូចនេះ ៖ $y_h = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

ខ. កំណត់តម្លៃ k ៖

$$y_p'' = -4k \cos 2x \text{ ជំនួសចូល (E) ៖}$$

$$-4k \cos 2x + 16k \cos 2x = 4 \cos 2x \iff 12k = 4 \implies k = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ ៖ $k = \frac{1}{3} \implies y_p = \frac{1}{3} \cos 2x$

គ. ចម្លើយទូទៅ និងចម្លើយពិសេស ៖

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \frac{1}{3} \cos 2x$$

$$y(0) = C_1 + \frac{1}{3} = 1 \implies C_1 = \frac{2}{3}$$

$$y'(x) = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - \frac{2}{3} \sin 2x$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = -4C_2 - \frac{2}{3} = 0 \implies C_2 = -\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ ៖ $y = \frac{2}{3} \cos 4x - \frac{1}{6} \sin 4x + \frac{1}{3} \cos 2x$

បាក់ឌុប ២០២៥

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' = 3y - 2y'$ ៖

- ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)
- ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = e$ (e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e = 1$)

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$$\text{សមីការសមមូល ៖ } y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់ ៖ } r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$(r-1)(r+3) = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = -3$$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ ៖

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ៖ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$

ខ. រកចម្លើយពិសេស ៖

$$\text{ដេរីវេ ៖ } y'(x) = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x}$$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម ៖

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \implies C_2 = 1 - C_1 \\ y'(1) = C_1 e - 3C_2 e^{-3} = e \end{cases}$$

ជំនួស $C_2 = 1 - C_1$ ចូល ៖

$$C_1 e - 3(1 - C_1) e^{-3} = e$$

$$\iff C_1(e + 3e^{-3}) = e + 3e^{-3} \implies C_1 = 1$$

នាំឱ្យ $C_2 = 1 - 1 = 0$

ដូចនេះ ៖ $y = e^x$

បាត់ខ្ទង់ ២០២៦

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $2y' + y = 0$ ៖

ក. កំណត់ចម្លើយ $f(x)$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) លើ $\mathbb{R}$

ខ. កំណត់ចម្លើយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ a. $f(1) = 1$; b. $f(2) = [f(1)]^2$; c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ចម្លើយ $f(x)$ នៃសមីការ (E) ៖

$$\text{សមីការ } 2y' + y = 0 \iff y' + \frac{1}{2}y = 0$$

ចម្លើយទូទៅលើ $\mathbb{R}$ គឺ ៖

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

២. កំណត់ចម្លើយតាមលក្ខខណ្ឌ ៖

$$\text{a. បើ } f(1) = 1 \implies Ce^{-\frac{1}{2}} = 1 \implies C = \sqrt{e}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } f(x) = \sqrt{e}e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1-x}{2}}$$

b. បើ $f(2) = [f(1)]^2$ ៖

$$f(2) = Ce^{-1} \text{ និង } [f(1)]^2 = C^2e^{-1}$$

$$Ce^{-1} = C^2e^{-1} \iff C(1-C) = 0$$

$$\implies C = 0 \text{ ឬ } C = 1$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } f(x) = 0 \text{ ឬ } f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$$

c. បើ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ៖

$$\text{ពេល } x \rightarrow -\infty \implies e^{-\frac{1}{2}x} \rightarrow +\infty$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff C > 0$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \quad (\forall C > 0)$$

វិញ្ញាសាគ្រឿងទី១

គេឱ្យសមីការ (E) : $y' - 2y = -4x + 6$ ៖

ក. កំណត់ m, n ដើម្បីឱ្យ $g(x) = mx + n$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y' - 2y = 0$

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅ រួចកំណត់ចម្លើយដែលក្រាបកាត់តាម $O(0,0)$

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់តម្លៃ m និង n ៖

$$g' = m \text{ ជំនួសចូល (E) ៖}$$

$$m - 2(mx + n) = -4x + 6 \iff -2mx + (m - 2n) = -4x + 6$$

$$\implies -2m = -4 \implies m = 2$$

$$m - 2n = 6 \implies 2 - 2n = 6 \implies n = -2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } m = 2, n = -2 \implies g(x) = 2x - 2$$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y' - 2y = 0$ ៖

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_h = Ce^{2x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

គ. ចម្លើយទូទៅ និងចម្លើយពិសេស ៖

$$y = Ce^{2x} + 2x - 2 \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\text{កាត់តាម } O(0,0) \implies Ce^0 - 2 = 0 \implies C = 2$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = 2e^{2x} + 2x - 2$$

វិញ្ញាសាត្រៀមទី២

គេឱ្យសមីការ (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$ ៖

- ក. សរសេរសមីការសម្គាល់ និងទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E)
- ខ. កំណត់អនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ ដែល $f(0) = 2$ និង $f'(0) = 7$
- គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើកម្រិត $\mathbb{R}$

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ និងចម្លើយទូទៅ ៖

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2 = 0 \implies r_0 = 3$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = (C_1x + C_2)e^{3x}$$

ខ. កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ៖

$$f(0) = C_2 = 2$$

$$f'(x) = [C_1 + 3(C_1x + C_2)]e^{3x}$$

$$f'(0) = C_1 + 3(2) = 7 \implies C_1 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } f(x) = (x+2)e^{3x}$$

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f(x)$ ៖

$$f'(x) = (1 + 3x + 6)e^{3x} = (3x + 7)e^{3x}$$

$$\text{ដោយ } e^{3x} > 0 \implies f'(x) = 0 \iff x = -\frac{7}{3}$$

$$\text{- លើ } \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \text{ ៖ } f'(x) < 0 \implies f \text{ ចុះ}$$

$$\text{- លើ } \left(-\frac{7}{3}, +\infty\right) \text{ ៖ } f'(x) > 0 \implies f \text{ កើន}$$

$$\text{អប្បបរមាជៀប ៖ } f\left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{-7}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } f \text{ មានអប្បបរមា } -\frac{1}{3}e^{-7} \text{ ត្រង់ } x = -\frac{7}{3}$$

វិញ្ញាសាត្រៀមទី៣

គេឱ្យសមីការ (E) : $y'' + 4y = 3 \sin x$ ៖

- ក. រកចម្លើយទូទៅនៃ (E) : $y'' + 4y = 0$
- ខ. រកចំនួនពិត A ដើម្បីឱ្យ $y_p = A \sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅ រួចកំណត់ចម្លើយដែល $y(0) = 0$ និង $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

ដំណោះស្រាយ

ក. ចម្លើយទូទៅនៃ (E) ៖

$$r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

ខ. កំណត់តម្លៃ A ៖

$$y_p'' = -A \sin x \text{ ជំនួសចូល (E) ៖}$$

$$-A \sin x + 4A \sin x = 3 \sin x \iff 3A = 3 \implies A = 1$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } A = 1 \implies y_p = \sin x$$

គ. ចម្លើយទូទៅ និងចម្លើយពិសេស ៖

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin x$$

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y'(x) = 2C_2 \cos 2x + \cos x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2C_2 \cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} = -2C_2 = 1 \implies C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ ៖ } y = -\frac{1}{2} \sin 2x + \sin x$$

វិធានសម្រាប់ទី៤

គេមានសមីការ (E) : $y' + y = \cos x - \sin x$ ៖

- ក. បង្ហាញថា $y_p = \cos x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E)
- ខ. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)
- គ. កំណត់ចម្លើយ $f(x)$ នៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(\pi) = -2$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $y_p = \cos x$ ជាចម្លើយពិសេស ៖

$y'_p = -\sin x$ ។ ជំនួសចូលអង្គខាងធ្វើនៃ (E) ៖

$$y'_p + y_p = -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$$

ស្មើអង្គខាងស្តាំនៃ (E) (ពិត)។

ដូចនេះ ៖ $y_p = \cos x$ ជាចម្លើយពិសេស

ខ. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ៖

សមីការអូម៉ូសែន ៖ $y' + y = 0 \implies y_h = Ce^{-x}$ ។

ដូចនេះ ៖ $y = Ce^{-x} + \cos x \quad (C \in \mathbb{R})$

គ. កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ៖

តាម $f(\pi) = -2$ ៖

$$Ce^{-\pi} + \cos \pi = -2 \iff Ce^{-\pi} - 1 = -2$$

$$Ce^{-\pi} = -1 \iff C = -e^{\pi}$$

ជំនួស C ចូល ៖ $f(x) = -e^{\pi}e^{-x} + \cos x$ ។

ដូចនេះ ៖ $f(x) = -e^{\pi-x} + \cos x$

វិធានសម្រាប់ទី៥

គេឱ្យសមីការ (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$ ៖

- ក. រកប្រសព្វនៃសមីការសម្គាល់ និងទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E)
- ខ. រកចម្លើយ $f(x)$ ដែលក្រាបកាត់តាម $A(0, 1)$ និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$

ដំណោះស្រាយ

ក. សមីការសម្គាល់ និងចម្លើយទូទៅ ៖

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \implies \Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$$

$$\implies r = -1 \pm i \quad (\alpha = -1, \beta = 1)$$

ដូចនេះ ៖ $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

ខ. កំណត់អនុគមន៍ចម្លើយ $f(x)$ ៖

កាត់តាម $A(0, 1) \implies f(0) = C_1 = 1$ ។

បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A ស្របនឹង $y = x \implies f'(0) = 1$ ។

$$f'(x) = e^{-x}[(-C_1 + C_2) \cos x - (C_1 + C_2) \sin x]$$

$$f'(0) = -C_1 + C_2 = 1 \implies -1 + C_2 = 1 \implies C_2 = 2$$

ដូចនេះ ៖ $f(x) = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x)$

ឧបសម្ព័ន្ធ

ក : តារាងសង្ខេបវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

១. សមីការព្យាករអថេរបាន និងសមីការអូម៉ូសែន

- សមីការទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x) :$ $dy = f(x) dx \Rightarrow y = \int f(x) dx + c$
- សមីការព្យាករអថេរបាន $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) :$ $g(y) dy = f(x) dx \Rightarrow \int g(y) dy = \int f(x) dx + c$
- សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន $y' + ay = 0$ (a ជាចំនួនថេរ) : $y = Ae^{-ax}$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយ)
- សមីការលីនេអ៊ែរទូទៅ $y' + a(x)y = 0 :$ $y = Ce^{-\int a(x) dx}$ (C ជាចំនួនថេរ)

២. សមីការលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែន $y' + ay = p(x)$

ចម្លើយទូទៅមានរាង : $y = y_c + y_p$ ដែល $y_c = Ae^{-ax}$ ជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + ay = 0$ ។

a. វិធីសាស្ត្ររកចម្លើយពិសេស y_p តាមទម្រង់ $p(x) :$

- បើ $p(x) = P_n(x)$ (ពហុធាត្រីក្រ n) $\Rightarrow$ យក $y_p = Q_n(x)$ (ពហុធាត្រីក្រ n)
- បើ $p(x) = ke^{\alpha x}$ ($\alpha \neq -a$) $\Rightarrow$ យក $y_p = Ae^{\alpha x}$
- បើ $p(x) = ke^{-ax} \Rightarrow$ យក $y_p = Axe^{-ax}$
- បើ $p(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x \Rightarrow$ យក $y_p = A \cos \omega x + B \sin \omega x$

b. វិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលចំនួនថេរ (Variation of Constants) :

$$y = e^{-ax} \left[\int e^{ax} p(x) dx + C \right] = Ce^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax} p(x) dx$$

ខ : ការពិសោធន៍វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

១. សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = 0$ ($a \neq 0$)

ពិនិត្យសមីការសម្គាល់ ៖ $ar^2 + br + c = 0$ ដែលមាន $\Delta = b^2 - 4ac$ ៖

លក្ខខណ្ឌ Δ	ប្រភេទឫសនៃសមីការសម្គាល់	ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ y
$\Delta > 0$	ឫសពិតពីរផ្សេងគ្នា $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	ឫសឌុបជាចំនួនពិត $r_1 = r_2 = r_0$	$y = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	ឫសកុំផ្លិចឆ្លងគ្នា $r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

២. សមីការមិនអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = p(x)$ (កំណត់មេគុណ y_p)

ចម្លើយទូទៅគឺ $y = y_h + y_p$ ដែល y_h ជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន ៖

ទម្រង់នៃអង្គទី២ $p(x)$	លក្ខខណ្ឌនៃឫសសមីការសម្គាល់	ទម្រង់ចម្លើយពិសេស y_p
ពហុធា $P_n(x)$	$c \neq 0$ ($r = 0$ មិនមែនជាឫស)	$y_p = Q_n(x)$
ពហុធា $P_n(x)$	$c = 0, b \neq 0$ ($r = 0$ ជាឫសទោល)	$y_p = x Q_n(x)$
$ke^{\gamma x}$	γ មិនមែនជាឫសសមីការសម្គាល់	$y_p = Ae^{\gamma x}$
$ke^{\gamma x}$	γ ជាឫសទោលនៃសមីការសម្គាល់	$y_p = Axe^{\gamma x}$
$ke^{\gamma x}$	γ ជាឫសឌុបនៃសមីការសម្គាល់	$y_p = Ax^2 e^{\gamma x}$
$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$	$\pm i\omega$ មិនមែនជាឫស	$y_p = A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$	$\pm i\omega$ ជាឫស ($ay'' + a\omega^2 y = p$)	$y_p = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

គ : តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវ និងដេរីវេគ្រឹះដែលត្រូវប្រើជាប្រចាំ

១. តារាងរូបមន្តដេរីវេគ្រឹះ

- $(k)' = 0$ (k ជាចំនួនថេរ)
- $(x^n)' = nx^{n-1} \implies (u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(e^u)' = u'e^u \implies (e^{ax})' = ae^{ax}$
- $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$
- $(\sin u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \sin u$
- $(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$

២. តារាងរូបមន្តព្រីមីទីវគ្រឹះ

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \quad (a \neq 0)$
- $\int u' e^u dx = e^u + c$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$
- $\int u dv = uv - \int v du$ (អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

៣. យុទ្ធសាស្ត្រដោះស្រាយលំហាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងវិញ្ញាសាជាក់លាក់

1. កំណត់លំដាប់នៃសមីការ : ពិនិត្យដេរីវេខ្ពស់បំផុត (y' ជាលំដាប់ទី១, y'' ជាលំដាប់ទី២)។
2. ពិនិត្យភាពអូម៉ូសែន : បើអង្គទី២ ស្មើសូន្យ ត្រូវដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែនជាមុនតាមរូបមន្តចម្លើយទូទៅ។
3. សមីការលំដាប់ទី២ : សរសេរសមីការសម្គាល់ $ar^2 + br + c = 0$ ឱ្យបានត្រឹមត្រូវ រួចគណនា Δ ដោយប្រុងប្រយ័ត្ន។ ពិសេសក្នុងករណី $\Delta < 0$ ត្រូវចងចាំថា $r = \alpha \pm i\beta$ នាំឱ្យចម្លើយមានកន្សោម $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ ។
4. លក្ខខណ្ឌដើម : ជំនួស x_0, y_0 និង y'_0 ចូលក្នុងកន្សោមចម្លើយទូទៅ និងដេរីវេរបស់វា ដើម្បីបង្កើតប្រព័ន្ធសមីការទាញរកតម្លៃចំនួនថេរ C_1, C_2 ។
5. ចំណោទអនុវត្តន៍ជាក់ស្តែង : កំណត់អញ្ញាត និងអថេរពេល t , បង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមបម្រាប់ប្រធាន, រកចម្លើយទូទៅ និងប្រើលក្ខខណ្ឌដើម $t = 0$ ដើម្បីរកចម្លើយជាក់ស្តែង។

យ : សទ្ទានុក្រមពាក្យគន្លឹះ និងគំរូម៉ូដែលអនុវត្តក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ និងសេដ្ឋកិច្ច

១. ផ្នែករូបវិទ្យា និងវិស្វកម្ម (Physics & Engineering)

- កម្លាំងទប់ខ្យល់ និងល្បឿនព្រំដែន (Air Resistance & Terminal Velocity) :

អង្គធាតុម៉ាស់ m ធ្លាក់ក្នុងខ្យល់រងកម្លាំងទប់ $F_r = -kv$ ($k > 0$) : $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$

ល្បឿន : $v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ (បើ $v(0) = 0$) ។ ល្បឿនព្រំដែន : $v_{\lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$ ។

- លំយោលមេកានិចនៃប្រព័ន្ធម៉ាស់-រ៉ឺស័រ (Mechanical Vibrations) : $my'' + cy' + ky = 0$

ប្រេកង់កែង : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s), ខួប : $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (s), ប្រេកង់ : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (Hz) ។

របបលំយោល	លក្ខខណ្ឌ Δ	លក្ខណៈនៃចលនា និងទម្រង់ចម្លើយ $y(t)$
គ្មានកកិត (Undamped)	$c = 0$	$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ (យោលខួបមិនថយចុះ, ថាមពលថេរ)
ថយចុះ (Underdamped)	$\Delta < 0$	$y = e^{-\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$ (យោលថយចុះឡើងដោយអំពូលទុតថយចុះ)
ព្រំដែន (Critical)	$\Delta = 0$	$y = (C_1 t + C_2) e^{-\omega_0 t}$ (វិលរកលំនឹងលឿនបំផុតដោយគ្មានលំយោល)
លេចខ្លាំង (Overdamped)	$\Delta > 0$	$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ (វិលរកទីតាំងលំនឹងយឺតៗដោយគ្មានលំយោល)

- បាតុភូតអនុភាព (Resonance) : ក្នុង $y'' + \omega_0^2 y = F_0 \cos \omega t$ បើ $\omega = \omega_0$ នាំឱ្យអំពូលទុតកើនឡើងធំធេងឥតដែនកំណត់ ($y_p \sim t \sin \omega_0 t$) ។

- សៀគ្វីអគ្គិសនី (Electrical Circuits) : ទំនាក់ទំនងចរន្ត និងបន្ទុក : $i(t) = q'(t) = \frac{dq}{dt}$

• សៀគ្វី RL : $L \frac{di}{dt} + Ri = E \implies i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$ (ចរន្តអប្បបរមា $I_{\max} = \frac{E}{R}$)

• សៀគ្វី LC : $Lq'' + \frac{1}{C}q = 0 \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ • សៀគ្វី RLC : $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$

២. ផ្នែកគីមីវិទ្យា និងរូបវិទ្យាមេកានិចនុយក្លេអ៊ែរ (Chemistry & Nuclear Physics)

- ការបំបែកធាតុវិទ្យុសកម្ម (Radioactive Decay) : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \implies N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$ ថេរការបំបែក)

• កន្លះជីវិត (Half-life $T_{1/2}$) : $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.693}{\lambda}$ • កាបូន-១៤ : $t = \frac{5730 \ln(N/N_0)}{-\ln 2}$ ($T_{1/2} = 5730$ ឆ្នាំ)

- ប្រតិកម្មគីមីលំដាប់ទី១ (First-Order Reactions) : $-\frac{d[A]}{dt} = k[A] \implies [A](t) = [A]_0 e^{-kt}$ (k : ថេរល្បឿន) ។

- ច្បាប់ត្រជាក់នៃញូតុន (Newton's Law of Cooling) : $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \implies T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$
ដែល T_m : សីតុណ្ហភាពមជ្ឈដ្ឋាន, T_0 : សីតុណ្ហភាពដើម, k : មេគុណត្រជាក់។ ពេល $t \rightarrow +\infty \implies T(t) \rightarrow T_m$ ។

៣. ផ្នែកជីវវិទ្យា និងប្រជាសាស្ត្រ (Biology & Population Dynamics)

• ម៉ូដែលកំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល (Malthusian Growth Model) ៖

អនុវត្តលើការលូតលាស់នៃបាក់តេរី ឬប្រជាជន ៖ $\frac{dP}{dt} = kP \implies P(t) = P_0 e^{kt}$ ($k > 0$ ជាអត្រាកំណើន)។

• រយៈពេលទ្វេដង (Doubling Time T_d) ៖ $T_d = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0.693}{k}$ • បីដង ៖ $T = \frac{\ln 3}{k} \approx \frac{1.0986}{k}$

• ម៉ូដែលកំណើនឡូជីស្ទិក (Logistic Growth Model / Verhulst) ៖

គិតបញ្ចូលដែនកំណត់នៃធនធាន ៖ $\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \implies P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$ ($A = \frac{K - P_0}{P_0}$)។

• សមត្ថភាពផ្ទុកអតិបរមា (Carrying Capacity K) ៖ $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$ (ធនធានអាចទ្រទ្រង់បាន)។

• ចំណុចរបត់ និងកំណើនលឿនបំផុត (Inflection Point) ៖ $P = \frac{K}{2}$ (អត្រាកំណើន $\frac{dP}{dt}$ អតិបរមា)។

៤. ផ្នែកសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ (Economics & Finance)

• ការប្រាក់សមាសបន្ត (Continuous Compounding Interest) ៖

កំណើនប្រាក់សន្សំ ៖ $\frac{dA}{dt} = rA \implies A(t) = A_0 e^{rt}$ (A_0 : ប្រាក់ដើម, r : អត្រាការប្រាក់)។

រយៈពេលទ្វេដងនៃទុនវិនិយោគ (Rule of 70) ៖ $T_d = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0.70}{r}$

• តម្លៃរំលោះនៃទ្រព្យសកម្ម (Asset Depreciation) ៖

តម្លៃម៉ាស៊ីនថយចុះតាមអត្រារំលោះ $k > 0$ ៖ $\frac{dV}{dt} = -kV \implies V(t) = V_0 e^{-kt}$ (V_0 : តម្លៃដើម)។

• ថ្លៃដើម និងចំណូលបន្ថែម (Marginal Functions) ៖

ថ្លៃដើមសរុបគឺ $C(x) = \int C'(x) dx + C_0$ (C_0 : ថ្លៃដើមថេរ Fixed cost)។

៥. តារាងប្រៀបធៀបគំរូម៉ូដែលគណិតវិទ្យានានា

វិស័យ	បាតុភូតជាក់ស្តែង	សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល	ពាក្យគន្លឹះ និងចម្លើយគោល
រូបវិទ្យា	អង្គធាតុធ្លាក់ក្នុងខ្យល់	$mv' + kv = mg$	ល្បឿនព្រំដែន $v_{\lim} = \frac{mg}{k}$
រូបវិទ្យា	លំយោលប្រព័ន្ធវិស័រ	$my'' + cy' + ky = 0$	Underdamped, Critically, Overdamped
អគ្គិសនី	សៀគ្វីអគ្គិសនី RLC	$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$	$i(t) = q'(t)$, ប្រេកង់កែង $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
គីមី-នុយក្លេអ៊ែរ	បំបែកវិទ្យុសកម្ម	$N' = -\lambda N$	កន្លះជីវិត $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, ^{14}C Dating
កម្ដៅ	ច្បាប់ត្រជាក់ញូតុន	$T' = -k(T - T_m)$	សីតុណ្ហភាពមជ្ឈដ្ឋាន T_m , $T \rightarrow T_m$
ជីវវិទ្យា	កំណើន Malthus	$P' = kP$	រយៈពេលទ្វេដង $T_d = \frac{\ln 2}{k}$, បីដង $T = \frac{\ln 3}{k}$
ជីវវិទ្យា	កំណើន Logistic	$P' = kP(1 - P/K)$	សមត្ថភាពផ្ទុក K , ចំណុចរបត់ $P = K/2$
សេដ្ឋកិច្ច	ការប្រាក់សមាសបន្ត	$A' = rA$	ទុនកើនទ្វេដង $T = \frac{\ln 2}{r}$, តម្លៃរំលោះ $V' = -kV$

ឯកសារយោង

1. ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។
2. ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។
3. ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ៖ សៀវភៅគ្រូ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។
4. នាយកដ្ឋានធានាគុណភាពអប់រំ ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) គណិតវិទ្យា (២០១៤-២០២៦), ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា។
5. នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹតការ ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, រាជធានីភ្នំពេញ។
6. Boyce, William E., DiPrima, Richard C., & Meade, Douglas B. (2021) ៖ *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (12th Edition), John Wiley & Sons, New York, USA.
7. Zill, Dennis G. (2018) ៖ *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (11th Edition), Cengage Learning, Boston, USA.
8. Simmons, George F. (2016) ៖ *Differential Equations with Applications and Historical Notes* (3rd Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.
9. Stewart, James (2016) ៖ *Calculus: Early Transcendentals* (8th Edition), Cengage Learning, Boston, USA.
10. Thomas, George B., Weir, Maurice D., & Hass, Joel (2018) ៖ *Thomas' Calculus* (14th Edition), Pearson Education, New York, USA.