ធរណីមាត្រ

GEOMETRY -- GRADE 12

ថ្នាក់ទី ១២ • GRADE 12

ទ្រឹស្តីសង្ខេប • វិធីសាស្ត្រគណនា • លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងប្រឡងសិស្សពូកែ

រូបមន្តគ្រឹះនៃធរណីមាត្រក្នុងលំហ • CORE SOLID GEOMETRY FORMULAS

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz' = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$S_{\text{ប្រលេឡូក្រាម}} = |\vec{u}\times\vec{v}|, \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{i} - (u_x v_z - u_z v_x)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}$$

$$V_{\text{ប្រលេពីប៉ែត}} = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|, \quad V_{\text{តេត្រាអ៊ែត}} = \frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

$$(P): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$d(M_0,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

អ្នករៀបរៀង ៖ លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០២៦

គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យ

គណៈកម្មការរៀបរៀង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
ត្រួតពិនិត្យខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន
រៀបចំខ្លឹមសារ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រចនាគម្រប និងទំព័រ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
រូបភាព និងតារាង	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
កែសម្រួលអក្ខរាវិរុទ្ធ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
គណៈកម្មការពិនិត្យចុងក្រោយ	លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី
	លោកគ្រូ ឡាយ ចាន់ហេន

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងសម្រិតសម្រាំង សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ក្នុងការស្វ័យសិក្សា និងត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ព្រមទាំងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

ព័ត៌មានសៀវភៅ

កំណែសាកល្បង © ២០២៦

ធរណីមាត្រ ថ្នាក់ទី១២

GEOMETRY - GRADE 12

រៀបរៀងដោយ **លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី**

សម្រាប់បោះពុម្ពផ្សាយៈ **បណ្ណាគារអង្គរ**

ប្រសិទ្ធពរ និងការឧទ្ទិស

សៀវភៅ «**ធរណីមាត្រ ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ
ត្រូវបានបង្កើតឡើង និងឧទ្ទិសជូនយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រចំពោះ ៖

មាតាបិតាជាទីគោរពសក្ការៈដ៏ខ្ពង់ខ្ពស់បំផុត

ដែលបានលះបង់កម្លាំងកាយចិត្ត ឧបត្ថម្ភគាំទ្រ និងផ្តល់ក្តីស្រឡាញ់ឥតព្រំដែន
ក្នុងការផ្តល់ឱកាសឱ្យកូនបានក្រេបជញ្ជក់ចំណេះវិជ្ជា និងរីកចម្រើនរហូតមកដល់បច្ចុប្បន្ន។

លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យគ្រប់ជំនាន់

ដែលជាអ្នកផ្តល់ពន្លឺប្រាជ្ញា ណែនាំមាគ៌ាដ៏ត្រចះត្រចង់
និងបណ្តុះបណ្តាលសិស្សានុសិស្សឱ្យក្លាយជាទំពាំងស្នងឫស្សីដ៏មានសមត្ថភាព។

ប្អូនៗសិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ទាំងអស់

ដែលកំពុងខិតខំប្រឹងប្រែងរៀនសូត្រ ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
និងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស សូមឱ្យទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ៗគ្នា!

ដោយសេចក្តីគោរព និងស្រឡាញ់ដ៏ជ្រាលជ្រៅ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

អារម្ភកថា

គណិតវិទ្យា គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះដ៏មានសារៈសំខាន់បំផុត ក្នុងការអភិវឌ្ឍការគិតបែបស៊ីជម្រៅ ការវិភាគសមហេតុផល និងការដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ បច្ចេកវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច និងជីវភាពរស់នៅជាក់ស្តែង។ ក្នុងចំណោមប្រធានបទគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ «**ធរណីមាត្រក្នុងលំហ**» (Solid Geometry) ឬ «**វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ**» គឺជាផ្នែកមួយដ៏មានអត្ថន័យ និងជាស្ពានតភ្ជាប់យ៉ាងរឹងមាំរវាងពិជគណិត និងធរណីមាត្រ។ ការសិក្សាអំពីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ មិនត្រឹមតែបណ្តុះនូវការស្រមើស្រមៃក្នុងលំហវិមាត្របី និងការគិតបែបតក្កវិជ្ជាប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែថែមទាំងជាមូលដ្ឋានគ្រឹះមិនអាចខ្វះបានសម្រាប់រូបវិទ្យា វិស្វកម្ម ស្ថាបត្យកម្ម បច្ចេកវិទ្យាកុំព្យូទ័រ និងការស្រាវជ្រាវវិទ្យាសាស្ត្រទំនើប។ លើសពីនេះ ប្រធានបទធរណីមាត្រក្នុងលំហតែងតែមានវត្តមានជាប្រចាំនៅក្នុងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) និងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស។

សៀវភៅ «**ធរណីមាត្រ ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងហ្មត់ចត់ ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាផ្លូវការនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដោយបែងចែកខ្លឹមសារជា ៣ មេរៀនចម្បងៗ ៖

- **មេរៀនទី១ ៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ** — សិក្សាលម្អិតអំពីប្រព័ន្ធកូអរដោនេក្នុងលំហ, លក្ខណៈនៃកូអរដោនេ, ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ, ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ និងលក្ខណៈរបស់វា, ផលគុណស្កាលែក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់, កូអរដោនេចំណុចកណ្តាល ព្រមទាំងលំហាត់អនុវត្តន៍គ្រឹះជាច្រើន។
- **មេរៀនទី២ ៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ** — ផ្តោតលើនិយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ (ផលគុណវ៉ិចទ័រ), លក្ខណៈធរណីមាត្រ និងពិជគណិត, ការគណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ, ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ (Mixed Product) និងការគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែត និងមាឌតេត្រាអែត (ចតុមុខ)។
- **មេរៀនទី៣ ៖ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ** — អនុវត្តផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងការរកសមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ (សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការឆ្លុះ), សមីការប្លង់, សមីការស្វ៊ែ, ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច, ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់, ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់, ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា និងបន្ទាត់ពីរខ្វែងគ្នា, មុំរវាងបន្ទាត់និងប្លង់, មុំរវាងប្លង់ពីរ ព្រមទាំងកម្រងលំហាត់វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុបជាក់ស្តែងរាប់សិបឆ្នាំ។

សៀវភៅនេះត្រូវបានរចនាឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់តាមក្បួនខ្នាតបោះពុម្ពទំនើប មានគំនូសក្រាហ្វិក TikZ 3D ច្បាស់ត្រឹមត្រូវ ប្លង់ទំព័រស្អាតបាត និងមានក្រឡាក្នុងការអនុវត្តដោះស្រាយ (Workspace Grid) យ៉ាងងាយស្រួលដល់ការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមគ្គុទេសក៍ និងជាកម្រងឯកសារជំនួយស្មារតីដ៏មានតម្លៃបំផុតសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្អូនៗសិស្សានុសិស្សក្នុងការបង្រៀននិងរៀន។ ទោះបីជាមានការខិតខំប្រឹងប្រែងយ៉ាងណាក្តី ក៏សៀវភៅនេះប្រាកដជាមិនអាចជៀសផុតពីកំហុសអចេតនាណាមួយឡើយ។ ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិរិះគន់ស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកអានដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី.......... ខែ.......... ឆ្នាំ២០២៦

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ដើម្បីសម្រេចបាននូវស្នាដៃសៀវភៅ «**ធរណីមាត្រ ថ្នាក់ទី១២**» មួយក្បាលនេះឡើង ប្រកបដោយគុណភាព និងភាពសុក្រឹត ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតចំពោះ ៖

- **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** ដែលបានបង្កើតកម្មវិធីសិក្សាគណិតវិទ្យា និងឯកសារមេរៀនគ្រឹះដ៏មានតម្លៃសម្រាប់សិស្សានុសិស្សទូទាំងប្រទេសកម្ពុជា។
- **គណៈកម្មការរៀបរៀង និងត្រួតពិនិត្យខ្លឹមសារ** ជាពិសេស លោកគ្រូ **ឡាយ ចាន់ហេន** ដែលបានចំណាយពេលវេលាដ៏មានតម្លៃក្នុងការជួយពិនិត្យ កែលម្អ និងផ្តល់នូវជាតុចូលយ៉ាងល្អិតល្អន់ទាំងផ្នែកទ្រឹស្តី និងលំហាត់។
- **លោកគ្រូ-អ្នកគ្រូគណិតវិទ្យាគ្រប់រូប** ដែលតែងតែបានលះបង់កម្លាំងកាយចិត្តក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលចំណេះដឹង និងផ្តល់ការគាំទ្រ លើកទឹកចិត្តដល់ការស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងឯកសារនេះ។
- **ក្រុមគ្រួសារ និងមិត្តភក្តិទាំងអស់** ដែលតែងតែផ្តល់នូវការលើកទឹកចិត្ត ភាពកក់ក្តៅ និងការគាំទ្រគ្រប់បែបយ៉ាងជានិច្ចកាល។

ដោយក្តីគោរព និងដឹងគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ

លោកគ្រូ ខែម ពុទ្ធី

តារាងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ និងនិយមន័យ
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$	សំណុំចំនួនពិត និងលំហវិមាត្របី
$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$	តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ក្នុងលំហ
$M(x,y,z)$	កូអរដោនេនៃចំណុច M ក្នុងលំហ (x: អាប់ស៊ីស, y: អរដោនេ, z: កូត)
$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$	វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
$\overrightarrow{AB}$	វ៉ិចទ័រមានចំណុចដើម A និងចំណុចចុង B
$\lvert\vec{u}\rvert$ ឬ $\lVert\vec{u}\rVert$	ណម ឬប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$
$\vec{u}\cdot\vec{v}$	ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$
$\vec{u}\times\vec{v}$	ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ (ផលគុណវ៉ិចទ័រ) នៃ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$
$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$	ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$
$\vec{u}\perp\vec{v}$	វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ កែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ $(\vec{u}\cdot\vec{v}=0)$
$\vec{u}\parallel\vec{v}$	វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ $(\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0})$
(L)	បន្ទាត់ក្នុងលំហ
(P) ឬ (α)	ប្លង់ក្នុងលំហ
(S)	ស្វ៊ែក្នុងលំហដែលមានផ្ចិត I និងកាំ R
$d(A,B)$	ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B
$d(M,(P))$	ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅប្លង់ (P)
$d(M,(L))$	ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់ (L)
$d((L_1),(L_2))$	ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ពីរខ្វែងគ្នា (L_1) និង (L_2)
S	ផ្ទៃក្រឡា (ត្រីកោណ, ប្រលេឡូក្រាម, ...)
V	មាឌ (ប្រលេពីប៉ែត, តេត្រាអ៊ែត, ស្វ៊ែ, ...)
$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$	កូស៊ីនុសទិសដៅនៃវ៉ិចទ័រធៀបនឹងអ័ក្សកូអរដោនេទាំងបី

មាតិការ

ខ្លឹមសារ ទំព័រ

មេរៀនទី ១ : មេរៀនទី១ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ . . . 8

១ និយមន័យកូអរដោនេ . . . 8

២ លក្ខណៈកូអរដោនេ . . . 9

៣ ទិសដៅកូស៊ីនុស . . . 10

៤ និយមន័យផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ . . . 11

៥ លក្ខណៈនៃផលគុណស្កាលែ . . . 11

៦ ផលគុណស្កាលែក្នុងគោលអរតូកូណាល់ . . . 12

៧ កូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃពីរចំណុច . . . 14

៨ សំណួរពហុជ្រើសរើស (Multiple Choice Questions) . . . 16

មេរៀនទី ២ : មេរៀនទី២ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ . . . 36

១ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ . . . 36

២ លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ . . . 39

៣ ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ . . . 39

៤ សំណួរពហុជ្រើសរើស (Multiple Choice Questions) . . . 40

មេរៀនទី ៣ : មេរៀនទី៣ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ . . . 58

១ ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច . . . 58

២ សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ . . . 58

៣ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុច និងស្គាល់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស . . . 59

៤ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចក្នុងលំហ . . . 60

៥ សមីការបន្ទាត់ដែលកំណត់ដោយប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា . . . 61

៦ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចមួយហើយកែងទៅនឹងប្លង់មួយ . . . 62

៧ សមីការប្លង់ . . . 63

៨ មុំរវាងប្លង់ពីរ . . . 74

៩ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយ . . . 76

១០ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ . . . 77

១១ សមីការស្វ៊ែ . . . 77

១២ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុង . . . 80

១៣ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅ . . . 80

១៤ ទីតាំងរវាងស្វ៊ែ (S) និងប្លង់ (P) . . . 82

១៥ ទីតាំងរវាងស្វ៊ែពីរមានកាំ r និង r' . . . 82

១៦ សំណួរពហុជ្រើសរើស (Multiple Choice Questions) . . . 83

ផ្នែកដំណោះស្រាយ . . . 192

ឧបសម្ពន្ធ . . . 257

ឯកសារយោង . . . 265

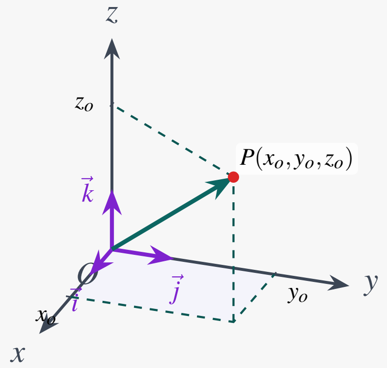
១ និយមន័យកូអរដោនេ

និយមន័យ ១

គេ មាន តម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយ ក្នុង លំហ។
ចំពោះគ្រប់ចំណុច P មានត្រីធាតុ (x,y,z) តែមួយគត់ ដែល $\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$។

ត្រីធាតុ (x,y,z) ហៅថា **កូអរដោនេនៃចំណុច** P គេកំណត់សរសេរដោយ $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ ដែល៖

- x ជាអាប់ស៊ីស
- y ជាអរដោនេ
- z ជាកូត



សម្គាល់៖ $\vec{i}=(1,0,0)$; $\vec{j}=(0,1,0)$; $\vec{k}=(0,0,1)$ ហៅថា **វិចទ័រឯកតា**។

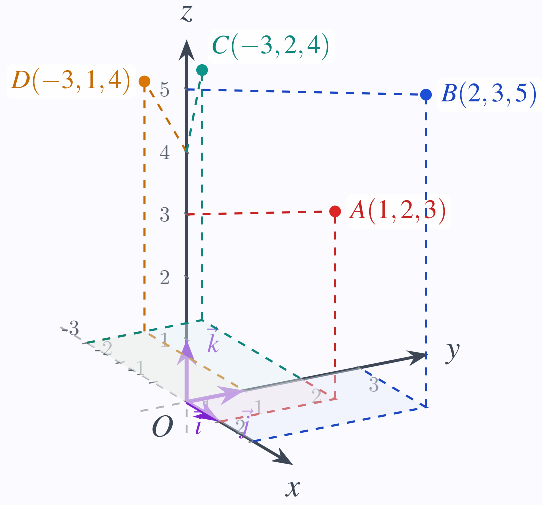
លំហាត់គំរូ ១

គេឲ្យចំណុច $A(1,2,3), B(2,3,5), C(-3,2,4)$ និង $D(-3,1,4)$។ ចូរដៅចំណុចទាំងនេះនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីដៅចំណុច $M(x,y,z)$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ យើងអនុវត្តដូចខាងក្រោម៖

- រាប់ប្រវែង x ឯកតាតាមបណ្តោយអ័ក្ស (Ox)
- រាប់ប្រវែង y ឯកតាស្របតាមទិសដៅអ័ក្ស (Oy)
- រាប់ប្រវែង z ឯកតាស្របតាមទិសដៅអ័ក្ស (Oz)។



២ លក្ខណៈកូអរដោនេ

ជាទូទៅ ១

គេមានចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ និង $B(x_B, y_bB, z_B)$ នោះកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - x_A, z_B - z_A)$។

ជាទូទៅ ២

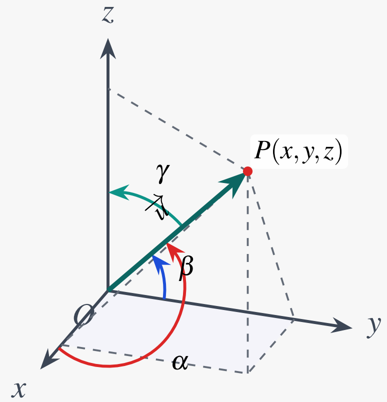
បើ $\vec{u}(x,y,z)$ និង $\vec{u}'(x',y',z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ គេបាន

- $\vec{u}=\vec{u}' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$
- $\vec{u}\neq\vec{u}' \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\neq x' \\ y\neq y' \\ z\neq z' \end{array}\right.$
- $\vec{u}+\vec{u}'=(x+x',y+y',z+z')$
- $\vec{u}-\vec{u}'=(x-x',y-y',z-z')$
- $\forall k\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \; k\cdot\vec{u}=(kx,ky,kz)$
- $\forall (k,k')\in\mathbb{R}^{\nvDash} \quad \Rightarrow \; k\vec{u}+k'\vec{u}'=(kx+k'x',ky+k'y',kz+k'z')$
- ចំណាំ៖ ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ គឺ ណមនៃ$\vec{u}$ កំណត់ដោយ $|u|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

៣ ទិសដៅកូស៊ីនុស

ជាទូទៅ ៣

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x,y,z)$ មួយ និងចំណុច P នៅក្នុងលំហដែល $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$។



- α ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និងអ័ក្ស (Ox)
- β ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និងអ័ក្ស (Oy)
- γ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និងអ័ក្ស (Oz) (មានបង្ហាញក្នុងរូប)

តាមទំនាក់ទំនងត្រីកោណមាត្រយើងបាន៖

- $\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OP}|} \quad \Rightarrow \; x=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\alpha$
- $\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OP}|} \quad \Rightarrow \; y=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\beta$

- $\cos\gamma = \frac{z}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} \quad \Rightarrow \quad z = \left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\gamma$

គេបាន

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = x^2+y^2+z^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = \frac{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2}{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2} = 1$$

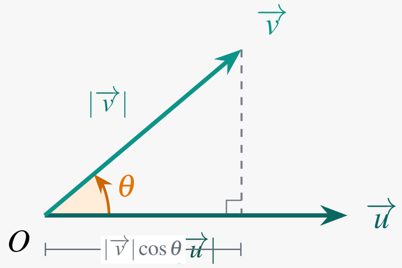
តម្លៃ $\cos\alpha$; $\cos\beta$ និង $\cos\gamma$ នេះ គឺបញ្ជាក់ពីទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ ។

៤ និយមន័យផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

និយមន័យ ២

ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហ គឺជាចំនួនពិត k មួយដែលកំណត់ដោយ៖

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$



៥ លក្ខណៈនៃផលគុណស្កាលែ

ជាទូទៅ ៤

- ចំពោះបីចំណុច A ; B ; C ដែល $A \neq B$ និង $A \neq C$ គេបាន
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

  – ចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

– ណមនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺជាចម្ងាយពី A ទៅ B៖
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \quad (\overrightarrow{u}\neq 0;\ \overrightarrow{v}\neq 0)$
- $(m\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = m(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
- $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|$ ហៅថា **វិសមភាពកូស៊ី**
- $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$ ហៅថា **វិសមភាពត្រីកោណ**

៦ ផលគុណស្កាលែក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់

និយមន័យ ៣

គោលអរតូណរម៉ាល់នៃវ៉ិចទ័រ គឺគ្រប់ត្រីធាតុ $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ ដែល $\left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = \left|\overrightarrow{k}\right| = 1$
និង $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{i} = 0$

ជាទូទៅ ៥

គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ និង $\overrightarrow{v} = (x',y',z')$ ស្ថិតក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ គេបាន

- $\overrightarrow{u} = (x,y,z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\overrightarrow{u} /\!/ \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = k\cdot\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$
- $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$
- $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

ខាទូនៅ ៦

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(m\vec{v})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

លំហាត់គំរូ ២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{6}\vec{k}$។

ក. គណនា $|\vec{u}|,|\vec{v}|$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ។

ខ. គណនាមុំស្រួចដែលផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $|\vec{u}|,|\vec{v}|$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ៖

- វ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(1,1,1)$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

- វ៉ិចទ័រ $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{6}\vec{k}=(1,-1,\sqrt{6})$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{1+1+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

- ផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ៖

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1)(1)+(1)(-1)+(1)(\sqrt{6})=1-1+\sqrt{6}=\sqrt{6}$$

ខ. គណនាមុំស្រួច θ ដែលផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ៖

តាមរូបមន្តកូស៊ីនុសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ៖

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

ដោយសារ θ ជាមុំស្រួច $(0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$ នាំឱ្យយើងបាន៖

$$\theta=60^\circ \quad \left(\text{ឬ } \theta=\frac{\pi}{3} \text{ រ៉ាដ្យង់}\right)$$

៧ កូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលនៃពីរចំណុច

ជាទូទៅ ៧

គេមានចំណុច $A(x_1,y_1,z_1)$; $B(x_2,y_2,z_2)$ យើងបាន កូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AB]$ គឺ ៖

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

លំហាត់គំរូ ៣

រកកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលនៃពីរចំណុចខាងក្រោម៖

ក. $A(2,1,1)$ និង $B(4,3,1)$

ខ. $A(-2,3,5)$ និង $B(3,-1,1)$

គ. $A(-2,-3,0)$ និង $B(0,-1,-3)$

ឃ. $A(3,-11,-6)$ និង $B(-4,0,1)$

ង. $A(-\sqrt{3},1,\sqrt{2})$ និង $B(3\sqrt{3},3,2\sqrt{2})$

ច. $A(-2,-3,4)$ និង $B(2,-1,-3)$

ដំណោះស្រាយ

រូបមន្តកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាល I នៃអង្កត់ $[AB]$ គឺ $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ ៖

ក. ចំពោះ $A(2,1,1)$ និង $B(4,3,1)$ ៖

$$I\left(\frac{2+4}{2},\frac{1+3}{2},\frac{1+1}{2}\right) \Longrightarrow I(3,2,1)$$

ខ. ចំពោះ $A(-2,3,5)$ និង $B(3,-1,1)$ ៖

$$I\left(\frac{-2+3}{2},\frac{3+(-1)}{2},\frac{5+1}{2}\right) \Longrightarrow I\left(\frac{1}{2},1,3\right)$$

គ. ចំពោះ $A(-2,-3,0)$ និង $B(0,-1,-3)$ ៖

$$I\left(\frac{-2+0}{2},\frac{-3+(-1)}{2},\frac{0+(-3)}{2}\right) \Longrightarrow I\left(-1,-2,-\frac{3}{2}\right)$$

ឃ. ចំពោះ $A(3,-11,-6)$ និង $B(-4,0,1)$ ៖

$$I\left(\frac{3+(-4)}{2},\frac{-11+0}{2},\frac{-6+1}{2}\right) \Longrightarrow I\left(-\frac{1}{2},-\frac{11}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

ង. ចំពោះ $A(-\sqrt{3},1,\sqrt{2})$ និង $B(3\sqrt{3},3,2\sqrt{2})$ ៖

$$I\left(\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2},\frac{1+3}{2},\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow I\left(\sqrt{3},2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

ច. ចំពោះ $A(-2,-3,4)$ និង $B(2,-1,-3)$ ៖

$$I\left(\frac{-2+2}{2},\frac{-3+(-1)}{2},\frac{4+(-3)}{2}\right) \Longrightarrow I\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$$

៨ សំណួរពហុជ្រើសរើស (Multiple Choice Questions)

ចូរបញ្ជាក់ចម្លើយត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ, និង ឃ ៖

១. ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ចំណុច $M(2,-3,5)$ មានកូអរដោនេតាមអ័ក្សកូត (z) ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. -3 គ. 5 ឃ. -5

២. ចំណោលកែងនៃចំណុច $A(3,4,-2)$ លើប្លង់ (Oxy) គឺ៖

ក. $(3,4,0)$ ខ. $(3,0,-2)$ គ. $(0,4,-2)$ ឃ. $(0,0,-2)$

៣. ចំណោលកែងនៃចំណុច $B(-1,5,7)$ លើប្លង់ (Oyz) គឺ៖

ក. $(-1,5,0)$ ខ. $(0,5,7)$ គ. $(-1,0,7)$ ឃ. $(0,0,7)$

៤. ចំណោលកែងនៃចំណុច $C(6,-2,4)$ លើប្លង់ (Oxz) គឺ៖

ក. $(6,0,4)$ ខ. $(6,-2,0)$ គ. $(0,-2,4)$ ឃ. $(0,0,4)$

៥. ចំណោលកែងនៃចំណុច $M(4,-5,3)$ លើអ័ក្ស (Ox) គឺ៖

ក. $(0,-5,3)$ ខ. $(4,0,0)$ គ. $(0,-5,0)$ ឃ. $(0,0,3)$

៦. ចំណោលកែងនៃចំណុច $N(-2,8,-6)$ លើអ័ក្ស (Oy) គឺ៖

ក. $(-2,0,0)$ ខ. $(0,0,-6)$ គ. $(0,8,0)$ ឃ. $(0,-8,0)$

៧. ចំណោលកែងនៃចំណុច $P(7,1,-9)$ លើអ័ក្ស (Oz) គឺ៖

ក. $(0,0,-9)$ ខ. $(7,0,0)$ គ. $(0,1,0)$ ឃ. $(7,1,0)$

៨. ចំណុចឆ្លុះនៃ $A(1,-2,3)$ ធៀបនឹងគល់តម្រុយ O គឺ៖

ក. $(-1,2,-3)$ ខ. $(-1,-2,3)$ គ. $(1,2,-3)$ ឃ. $(1,-2,-3)$

៩. ចំណុចឆ្លុះនៃ $M(3,4,5)$ ធៀបនឹងប្លង់ (Oxy) គឺ៖

ក. $(-3,-4,5)$ ខ. $(3,4,-5)$ គ. $(-3,4,5)$ ឃ. $(3,-4,5)$

១០. ចម្ងាយពីចំណុច $A(3,-4,0)$ ទៅគល់តម្រុយ $O(0,0,0)$ គឺ៖

ក. 7 ខ. 5 គ. 25 ឃ. $\sqrt{7}$

១១. ចម្ងាយពីចំណុច $M(1,2,2)$ ទៅគល់តម្រុយ O គឺ៖

ក. 3 ខ. 5 គ. 9 ឃ. $\sqrt{5}$

១២. ចម្ងាយពីចំណុច $P(2,3,6)$ ទៅគល់តម្រុយ O គឺ៖

ក. 7 ខ. 6 គ. 11 ឃ. $\sqrt{13}$

១៣. ចម្ងាយពីចំណុច $M(a,b,c)$ ទៅប្លង់ (Oxy) ស្មើនឹង៖

ក. $|a|$ ខ. $|b|$ គ. $|c|$ ឃ. $\sqrt{a^2+b^2}$

១៤. ចម្ងាយពីចំណុច $M(2,-3,4)$ ទៅអ័ក្ស (Oz) ស្មើនឹង៖

ក. 4 ខ. $\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ គ. $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ ឃ. 3

១៥. ចំណុចណាដែលស្ថិតនៅលើប្លង់ (Oxz) ក្នុងចំណោមចំណុចខាងក្រោម?

ក. $A(1,2,0)$ ខ. $B(0,3,4)$ គ. $C(5,0,-2)$ ឃ. $D(0,0,7)$

១៦. គេឱ្យចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(4,6,8)$។ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺ៖

ក. $(3,4,5)$ ខ. $(-3,-4,-5)$ គ. $(5,8,11)$ ឃ. $(4,12,24)$

១៧. គេឱ្យ $A(-2,3,1)$ និង $B(1,-1,5)$។ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}$ គឺ៖

ក. $(3,-4,4)$ ខ. $(-3,4,-4)$ គ. $(-1,2,6)$ ឃ. $(1,-2,-6)$

១៨. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,-1,3)$ និង $\vec{v}=(1,4,-2)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}+\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(3,3,1)$ ខ. $(1,-5,5)$ គ. $(3,-5,1)$ ឃ. $(2,-4,-6)$

១៩. គេឱ្យ $\vec{u}=(4,-2,6)$ និង $\vec{v}=(1,3,-1)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}-\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(3,-5,7)$ ខ. $(5,1,5)$ គ. $(3,1,7)$ ឃ. $(-3,5,-7)$

២០. គេឱ្យ $\vec{u}=(-3,2,-1)$។ វ៉ិចទ័រ $2\vec{u}$ គឺ៖

ក. $(-6,4,-2)$ ខ. $(-1,4,1)$ គ. $(-6,2,-2)$ ឃ. $(6,-4,2)$

២១. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,-2,3)$ និង $\vec{v}=(3,0,-1)$។ វ៉ិចទ័រ $2\vec{u}-3\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(-7,-4,9)$ ខ. $(11,-4,3)$ គ. $(-7,-4,3)$ ឃ. $(7,4,-9)$

២២. បើ $\overrightarrow{AB}=(2,-1,4)$ និង $A(1,3,-2)$ នោះកូអរដោនេនៃចំណុច B គឺ៖

ក. $(3,2,2)$ ខ. $(1,-4,6)$ គ. $(-1,4,-6)$ ឃ. $(3,-2,2)$

២៣. បើ $\overrightarrow{AB}=(-3,5,2)$ និង $B(2,1,4)$ នោះកូអរដោនេនៃចំណុច A គឺ៖

ក. $(5,-4,2)$ ខ. $(-1,6,6)$ គ. $(5,4,2)$ ឃ. $(-5,4,-2)$

២៤. វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u}=(2,-4,6)$ និង $\vec{v}=(1,m,3)$ កូលីនេអ៊ែរគ្នាកាលណា m ស្មើនឹង៖

ក. -2 ខ. 2 គ. -4 ឃ. 4

២៥. វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u}=(3,-6,9)$ និង $\vec{v}=(-1,2,k)$ ស្របគ្នាកាលណា k ស្មើនឹង៖

ក. 3 ខ. -3 គ. 9 ឃ. -9

២៦. បើ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ នោះកូអរដោនេនៃ $\vec{u}$ គឺ៖

ក. $(2,-3,4)$ ខ. $(2,3,4)$ គ. $(-2,3,-4)$ ឃ. $(4,-3,2)$

២៧. បើ $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{k}$ នោះកូអរដោនេនៃ $\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(5,-1,0)$ ខ. $(5,0,-1)$ គ. $(0,5,-1)$ ឃ. $(5,1,0)$

២៨. បីចំណុច $A(1,2,3),B(2,4,5),C(4,8,9)$ ៖

ក. រត់ត្រង់ជួរគ្នា ព្រោះ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$ ខ. មិនរត់ត្រង់ជួរគ្នាទេ

គ. បង្កើតបានជាត្រីកោណកែង ឃ. បង្កើតបានជាត្រីកោណសម័ង្ស

២៩. វ៉ិចទ័រឯកតានៃអ័ក្ស (Oz) គឺ៖

ក. $\vec{i}=(1,0,0)$ ខ. $\vec{j}=(0,1,0)$ គ. $\vec{k}=(0,0,1)$ ឃ. $\vec{0}=(0,0,0)$

៣០. ម៉ូឌុលនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,-2,2)$ គឺ៖

ក. 3 ខ. 9 គ. $\sqrt{5}$ ឃ. 5

៣១. ម៉ូឌុលនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(0,-3,4)$ គឺ៖

ក. 5 ខ. 7 គ. 25 ឃ. $\sqrt{7}$

៣២. វ៉ិចទ័រឯកតាស្របនឹង $\vec{u}=(3,0,4)$ គឺ៖

ក. $(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})$ ខ. $(3,0,4)$ គ. $(\frac{3}{7},0,\frac{4}{7})$ ឃ. $(\frac{3}{25},0,\frac{4}{25})$

៣៣. បើ α,β,γ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ជាមួយអ័ក្ស Ox,Oy,Oz នោះទំនាក់ទំនងត្រឹមត្រូវគឺ៖

ក. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$ ខ. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

គ. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ ឃ. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=0$

៣៤. ទំនាក់ទំនងរវាង $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 3 ឃ. 0

៣៥. ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,2,2)$ គឺ៖

ក. $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3}$ ខ. $\cos\alpha=1,\cos\beta=2,\cos\gamma=2$

គ. $\cos\alpha=\frac{1}{9},\cos\beta=\frac{2}{9},\cos\gamma=\frac{2}{9}$ ឃ. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\gamma=0$

៣៦. ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{i}=(1,0,0)$ គឺ៖

ក. $\cos\alpha = 1, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 0$

ខ. $\cos\alpha = 0, \cos\beta = 1, \cos\gamma = 0$

គ. $\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 1$

ឃ. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

៣៧. បើ $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ និង $\cos\beta = \frac{1}{2}$ នោះតម្លៃ $\cos^2\gamma$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{2}$ ខ. $\frac{1}{4}$ គ. $\frac{3}{4}$ ឃ. 0

៣៨. បើ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\cos\beta = \frac{1}{2}$ ហើយ γ ជាមុំស្រួច នោះ γ ស្មើនឹង៖

ក. $30°$ ខ. $45°$ គ. $60°$ ឃ. $90°$

៣៩. វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ បង្កើតបានមុំស្មើៗគ្នាជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេទាំងបី។ តម្លៃ $|\cos\alpha|$ គឺ៖

ក. $\frac{1}{3}$ ខ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ គ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ឃ. $\frac{1}{2}$

៤០. ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = (0, 0, -5)$ គឺ៖

ក. $\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1$

ខ. $\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 1$

គ. $\cos\alpha = 0, \cos\beta = -5, \cos\gamma = 0$

ឃ. $\cos\alpha = 1, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1$

៤១. បើ $\vec{u}$ មានទិសដៅកូស៊ីនុស $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ នោះវ៉ិចទ័រ $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ជា៖

ក. វ៉ិចទ័រសូន្យ

ខ. វ៉ិចទ័រឯកតា $(\|\vec{e}\| = 1)$

គ. វ៉ិចទ័រមានម៉ូឌុលស្មើ 3

ឃ. វ៉ិចទ័រគ្មានទិសដៅ

៤២. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{AB}$ ដែល $A(1, 1, 1)$ និង $B(2, 3, 3)$ ៖

ក. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ខ. $(1, 2, 2)$

គ. $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$

ឃ. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

៤៣. បើ $\alpha = 60°, \beta = 60°$ នោះមុំ γ អាចមានតម្លៃ៖

ក. $45°$ ឬ $135°$ ខ. $30°$ ឬ $150°$ គ. $60°$ ឬ $120°$ ឃ. $90°$

៤៤. វ៉ិចទ័រមួយស្ថិតក្នុងប្លង់ (Oxy)។ ទិសដៅកូស៊ីនុស $\cos\gamma$ របស់វាស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. -1 ឃ. $\frac{1}{2}$

៤៥. វ៉ិចទ័រមួយស្របនឹងអ័ក្ស (Oy) និងមានទិសដៅដូចគ្នា។ មុំ α, β, γ រៀងគ្នាគឺ៖

ក. $90°, 0°, 90°$

ខ. $0°, 90°, 90°$

គ. $90°, 90°, 0°$

ឃ. $0°, 0°, 0°$

៤៦. និយមន័យផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺ៖

ក. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ ខ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

គ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ ឃ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\tan\theta$

៤៧. បើ $\|\vec{u}\|=3,\|\vec{v}\|=4$ និងមុំ $\theta=60^\circ$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 6 ខ. 12 គ. $6\sqrt{3}$ ឃ. 3

៤៨. បើ $\|\vec{u}\|=5,\|\vec{v}\|=2$ និងមុំ $\theta=90^\circ$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 10 ខ. 0 គ. 5 ឃ. -10

៤៩. បើ $\|\vec{u}\|=4,\|\vec{v}\|=3$ និងមុំ $\theta=180^\circ$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 12 ខ. -12 គ. 0 ឃ. 7

៥០. បើ $\|\vec{u}\|=6,\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$ និងមុំ $\theta=45^\circ$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 6 ខ. $6\sqrt{2}$ គ. 12 ឃ. 3

៥១. ផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{u}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\|\vec{u}\|$ ខ. $\|\vec{u}\|^2$ គ. $2\|\vec{u}\|$ ឃ. 0

៥២. បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ នោះមុំ θ រវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរជា៖

ក. មុំកែង ខ. មុំស្រួច $(0^\circ\leq\theta<90^\circ)$ គ. មុំទាល $(90^\circ<\theta\leq 18$ ឃ. មុំរាប

៥៣. បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ នោះមុំ θ រវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរជា៖

ក. មុំកែង ខ. មុំស្រួច គ. មុំទាល $(90^\circ<\theta\leq 18$ ឃ. មុំសូន្យ

៥៤. តម្លៃអតិបរមានៃ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ គឺស្មើនឹង៖

ក. $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ខ. 0 គ. $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ឃ. 1

៥៥. តម្លៃអប្បបរមានៃ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ គឺស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ គ. $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ឃ. -1

៥៦. សម្រាប់គ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{0}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\vec{0}$ ខ. 0 គ. 1 ឃ. $\|\vec{u}\|$

៥៧. បើ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=5$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$ នោះមុំ θ ស្មើនឹង៖

ក. 30° ខ. 45° គ. 60° ឃ. 90°

៥៨. បើ $\|\vec{u}\|=3,\|\vec{v}\|=2$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\sqrt{3}$ នោះមុំ θ ស្មើនឹង៖

ក. 120° ខ. 135° គ. 150° ឃ. 180°

៥៩. លក្ខណៈត្រឡប់នៃផលគុណស្កាលែគឺ៖

ក. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ខ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-(\vec{v}\cdot\vec{u})$

គ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{\vec{v}\cdot\vec{u}}$ ឃ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\cdot\vec{u}\|$

៦០. លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ $(\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0})$ គឺ៖

ក. $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ ខ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ គ. $\vec{u}=k\vec{v}$ ឃ. $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

៦១. កន្សោម $(\vec{u}+\vec{v})^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ ខ. $\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

គ. $\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ឃ. $2\|\vec{u}\|+2\|\vec{v}\|$

៦២. កន្សោម $(\vec{u}-\vec{v})^2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ ខ. $\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

គ. $\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ឃ. $(\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|)^2$

៦៣. កន្សោម $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ ស្មើនឹង៖

ក. $\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ ខ. 0 គ. $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ ឃ. $2\vec{u}\cdot\vec{v}$

៦៤. បើ $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$ នោះគេទាញបាន៖

ក. $\vec{u}\perp\vec{v}$ ខ. $\vec{u}\parallel\vec{v}$ គ. $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ ឃ. $\vec{u}=\vec{v}$

៦៥. បើ $\|\vec{u}\|=3,\|\vec{v}\|=4$ និង $\vec{u}\perp\vec{v}$ នោះ $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ ស្មើនឹង៖

ក. 7 ខ. 5 គ. 1 ឃ. 25

៦៦. បើ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=3$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ នោះ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ ស្មើនឹង៖

ក. 13 ខ. 15 គ. 14 ឃ. 16

៦៧. បើ $\|\vec{u}\|=1,\|\vec{v}\|=2$ និង $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{7}$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 2 គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. 3

៦៨. ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ផលគុណ $\vec{i}\cdot\vec{j}$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. $\vec{k}$ ឃ. -1

៦៩. ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ផលគុណ $\vec{k}\cdot\vec{k}$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. $\vec{k}$ ឃ. -1

៧០. តម្លៃនៃ $\vec{i}\cdot\vec{i}+\vec{j}\cdot\vec{j}+\vec{k}\cdot\vec{k}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 3 ឃ. 0

៧១. គេឱ្យ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$។ កន្សោមវិភាគនៃ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ គឺ៖

ក. $xx'+yy'+zz'$ ខ. $xy'+yz'+zx'$

គ. $(x+x')+(y+y')+(z+z')$ ឃ. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

៧២. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,2,3)$ និង $\vec{v}=(4,-1,2)$។ ផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ គឺ៖

ក. 8 ខ. 6 គ. 12 ឃ. 4

៧៣. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,-3,1)$ និង $\vec{v}=(3,1,-2)$។ ផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 0 គ. -1 ឃ. 7

៧៤. គេឱ្យ $\vec{u}=(m,2,-1)$ និង $\vec{v}=(3,-1,4)$។ រក m ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ ៖

ក. $m=2$ ខ. $m=-2$ គ. $m=6$ ឃ. $m=1$

៧៥. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,-3,2)$ និង $\vec{v}=(2,k,4)$។ រក k ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}\perp\vec{v}$ ៖

ក. $k=\frac{10}{3}$ ខ. $k=-\frac{10}{3}$ គ. $k=3$ ឃ. $k=4$

៧៦. គេឱ្យ $A(1,0,2),B(2,1,3),C(0,2,1)$។ ផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. 2 ឃ. -1

៧៧. ពីសំណួរខាងលើ ត្រីកោណ ABC ជាប្រភេទត្រីកោណអ្វី?

ក. ត្រីកោណកែងត្រង់ A ខ. ត្រីកោណសមបាត គ. ត្រីកោណសម័ង្ស ឃ. ត្រីកោណកែងត្រង់ B

៧៨. គណនាមុំ θ រវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,1,0)$ និង $\vec{v}=(0,1,1)$ ៖

ក. 30° ខ. 45° គ. 60° ឃ. 90°

៧៩. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំរវាង $\vec{u}=(1,2,2)$ និង $\vec{v}=(2,1,-2)$ ៖

ក. 0 ខ. $\frac{1}{9}$ គ. $\frac{2}{9}$ ឃ. $-\frac{2}{9}$

៨០. វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u}=(1,2,2)$ និង $\vec{v}=(2,1,-2)$ ៖

ក. កែងគ្នា ខ. ស្របគ្នា គ. មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា ឃ. មានប្រវែងស្មើគ្នា និងកែងគ្នា

៨១. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(3,0,2)$ គឺ៖

ក. 3 ខ. 9 គ. $\sqrt{5}$ ឃ. $\sqrt{7}$

៨២. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $M(-1,3,2)$ និង $N(2,-1,2)$ គឺ៖

ក. 5 ខ. 25 គ. $\sqrt{7}$ ឃ. $\sqrt{41}$

៨៣. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $P(0,0,0)$ និង $Q(2,-3,6)$ គឺ៖

ក. 7 ខ. 49 គ. 5 ឃ. $\sqrt{13}$

៨៤. រកតម្លៃ x បើចម្ងាយរវាង $A(x,1,2)$ និង $B(1,1,2)$ ស្មើនឹង 3 ៖

ក. $x=4$ ឬ $x=-2$ ខ. $x=2$ ឬ $x=-4$ គ. $x=3$ ឬ $x=-3$ ឃ. $x=1$

៨៥. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,1,1)$ និង $\vec{v}=(1,-1,0)$។ មុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺ៖

ក. 0° ខ. 45° គ. 60° ឃ. 90°

៨៦. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,0,0)$ និង $\vec{v}=(1,1,0)$។ មុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺ៖

ក. 30° ខ. 45° គ. 60° ឃ. 90°

៨៧. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,0,1)$ និង $\vec{v}=(-1,0,1)$។ ផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 2 គ. -2 ឃ. 1

៨៨. បើ $\vec{u}=(2,-1,3)$ នោះ $\|\vec{u}\|^2$ ស្មើនឹង៖

ក. 14 ខ. $\sqrt{14}$ គ. 4 ឃ. 12

៨៩. កូអរដោនេចំណុចកណ្ដាល I នៃអង្កត់ $[AB]$ ដែល $A(1,2,3)$ និង $B(3,4,5)$ គឺ៖

ក. $(2,3,4)$ ខ. $(4,6,8)$ គ. $(1,1,1)$ ឃ. $(2,2,2)$

៩០. កូអរដោនេចំណុចកណ្ដាល I នៃអង្កត់ $[AB]$ ដែល $A(-3,5,2)$ និង $B(1,-1,4)$ គឺ៖

ក. $(-1,2,3)$ ខ. $(-2,4,6)$ គ. $(2,3,1)$ ឃ. $(-1,3,2)$

៩១. បើ $I(2,1,-1)$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ហើយ $A(1,3,0)$ នោះកូអរដោនេនៃ B គឺ៖

ក. $(3,-1,-2)$ ខ. $(3,4,-1)$ គ. $(1.5,2,-0.5)$ ឃ. $(0,-2,-1)$

៩២. បើ $M(0,2,4)$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ហើយ $B(2,-1,3)$ នោះកូអរដោនេនៃ A គឺ៖

ក. $(-2,5,5)$ ខ. $(2,1,7)$ គ. $(-1,3,5)$ ឃ. $(1,0.5,3.5)$

៩៣. ទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃត្រីកោណ ABC ដែល $A(1,2,0), B(3,0,4), C(2,4,5)$ គឺ៖

ក. $(2,2,3)$ ខ. $(6,6,9)$ គ. $(3,3,4.5)$ ឃ. $(1,1,1.5)$

៩៤. ទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃត្រីកោណ ABC ដែល $A(-1,3,2), B(4,1,-5), C(0,-1,3)$ គឺ៖

ក. $(1,1,0)$ ខ. $(3,3,0)$ គ. $(1,1,1)$ ឃ. $(0,1,1)$

៩៥. ចំណុច M នៅលើអង្កត់ $[AB]$ ដែល $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ មានន័យថា៖

ក. M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$

ខ. M ចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$

គ. A ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[MB]$

ឃ. B ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AM]$

៩៦. គេឱ្យ $A(1,2,3)$ និង $B(4,5,6)$។ ចំណុច M ចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$ មានកូអរដោនេ៖

ក. $(3,4,5)$ ខ. $(2,3,4)$ គ. $(5,6,7)$ ឃ. $(2.5,3.5,4.5)$

៩៧. ទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃតេត្រាអែត $ABCD$ កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

ក. $\vec{OG}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4}$

ខ. $\vec{OG}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{3}$

គ. $\vec{OG}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}$

ឃ. $\vec{OG}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}$

៩៨. គេឱ្យ $A(1,0,1),B(0,2,1),C(2,1,0),D(1,1,2)$។ ទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃតេត្រាអែត $ABCD$ គឺ៖

ក. $(1,1,1)$ ខ. $(4,4,4)$ គ. $(2,2,2)$ ឃ. $(0.5,0.5,0.5)$

៩៩. ចំណុច M ស្ថិតនៅលើប្លង់ (Oxy) ស្មើចម្ងាយពីចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(1,2,-3)$ ៖

ក. គ្រប់ចំណុច $M(x,y,0)$ សុទ្ធតែស្មើចម្ងាយពី A និង B

ខ. គ្មានចំណុចណាមួយឡើយ

គ. មានតែចំណុច $(1,2,0)$ មួយគត់

ឃ. មានតែគល់តម្រុយ $O(0,0,0)$ មួយគត់

១០០. ចំណុច C ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស (Oz) ដែលស្មើចម្ងាយពី $A(2,-1,0)$ និង $B(0,1,2)$ មានកូអរដោនេ៖

ក. $(0,0,\frac{3}{4})$ ខ. $(0,0,\frac{1}{2})$ គ. $(0,0,1)$ ឃ. $(0,0,2)$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឲ្យ $\vec{u}=(4,-2,5)$ និង $\vec{v}=(7,9,-8)$។ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម៖

ក. $2\vec{u}+\vec{x}=3\vec{v}$

ខ. $4\vec{x}-\vec{u}=3\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{x}$។

ដំណោះស្រាយ

២. គេឲ្យ $\vec{u}=(1,1,0), \vec{v}=(1,0,1), \vec{w}=(0,1,1)$ និង $\vec{p}=(5,6,7)$។
បង្ហាញថា $\vec{p}$ ជាទម្រង់ $\vec{p}=l\vec{u}+m\vec{v}+n\vec{w}$។

ដំណោះស្រាយ

៣. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u} = (3, -4, 5)$

ខ. $\vec{v} = (-3, 2, 2\sqrt{3})$។

ដំណោះស្រាយ

៤. គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(2,-1,5), \vec{v}=(3x,5,4y-2)$ និង $\vec{w}=(z-1,2,z+1)$។

ក. រកតម្លៃ x និង y ដែល $\vec{u}\parallel\vec{v}$។

ខ. រកតម្លៃ z ដែល $\vec{u}\perp\vec{w}$។

ដំណោះស្រាយ

៥. រកតម្លៃ x, y និង z ដែលវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x, 4, 6), \vec{v} = (2, y, 6)$ និង $\vec{w} = (2, 4, z)$ កែងគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

៦. គេឲ្យ $\vec{u}=(1,2,-3), \vec{v}=(2,-1,-2)$ និង $\vec{w}=(1,-3,1)$។ បើវ៉ិចទ័រ $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ អរតូកូណាល់នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$។ រក x_1,x_2,x_3 ដែល $\vec{x}\neq 0$។

ដំណោះស្រាយ

៧. គេឲ្យ $\vec{u}=(2,-2,1)$ និង $\vec{v}=(2,3,-4)$។ តាង $\vec{v}-k\vec{u}=\vec{w}$ ដែល k ជាចំនួនពិត។ បើ $\vec{w}$ និង $\vec{u}$ កែងគ្នា។ កំណត់តម្លៃ k និង $\vec{w}$។

ដំណោះស្រាយ

៨. គេឲ្យចំណុច $A(0,3,0), B(0,1,-2)$ និង $C(2,3,-2)$។ តើ $\triangle ABC$ ជាប្រភេទត្រីកោណអ្វី ?

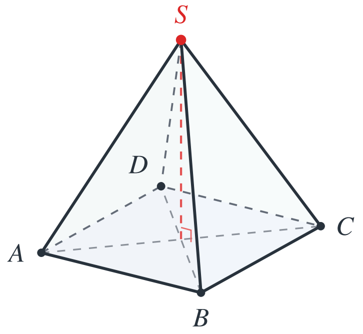
ដំណោះស្រាយ

៩. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាគោលអរតូណរម៉ាល់មួយ។ គណនា $\vec{u}\cdot\vec{v},\vec{v}\cdot\vec{w},\vec{w}\cdot\vec{u}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(1+\sqrt{2})\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j},\vec{v}=(1-\sqrt{2})\vec{i}-\vec{k},\vec{w}=\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{6}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k},\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-2\vec{j}+\frac{2}{5}\vec{k},\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$

ដំណោះស្រាយ



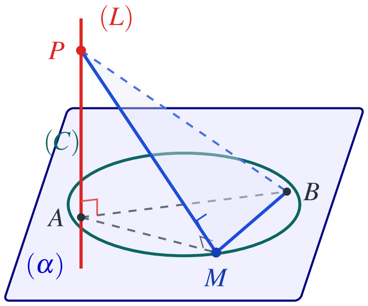
១០. $SABCD$ ជាពីរ៉ាមីតដែលមានបាតជាការេមានកំពូល S និង ទ្រនុងមានរង្វាស់ a ស្មើគ្នាទាំងអស់។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោមនេះជាអនុគមន៍នៃ a ៖

ក. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$

ខ. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$

គ. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$

ដំណោះស្រាយ



១១. គេឱ្យរង្វង់ (C) មានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ នៅក្នុងប្លង់ (α)។ បន្ទាត់ (L) កែងប្លង់ (α) ត្រង់ A។ យក P ជាចំណុចមួយនៅលើបន្ទាត់ (L)។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M \in (C)$ គេបាន $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$។

ដំណោះស្រាយ

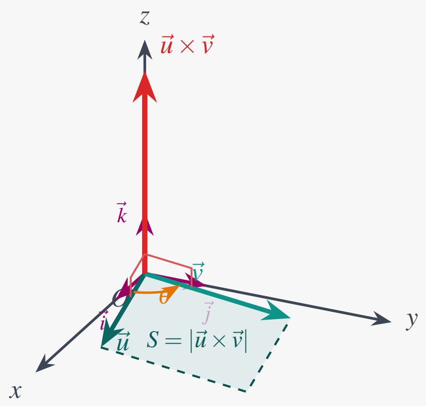
១ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

និយមន័យ ១

ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\,(u_x, u_y, u_z)$ និង $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ គឺកំណត់ដោយ

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (u_y v_z - v_y u_z)\,\vec{i} - (u_x v_z - v_x u_z)\,\vec{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\,\vec{k}$$



- $\vec{u} \times \vec{v}$ អរតូកូណាល់(កែង)ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin\theta$

- $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ គេបាន $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា (ស្របគ្នា)
- A,B,C ជាបីចំណុចក្នុងលំហ៖
  - បើ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=0$ គេបាន ចំណុច A,B,C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ
  - បើ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\neq 0$ គេបាន ចំណុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ
- $|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម
- $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

លំហាត់គំរូ ១

គេឱ្យ $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ។ រកវ៉ិចទ័រ

ក. $\vec{u}\times\vec{v}$ ខ. $\vec{v}\times\vec{u}$ គ. $\vec{v}\times\vec{v}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}=(1,-2,1)$ និង $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(3,1,-2)$ ៖

ក. រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ៖

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(4-1)\vec{i}-(-2-3)\vec{j}+(1-(-6))\vec{k}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}=(3,5,7)$$

ខ. រក $\vec{v}\times\vec{u}$ ៖

តាមលក្ខណៈត្រឡប់នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ យើងបាន៖

$$\vec{v}\times\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{v})=-(3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k})=-3\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}=(-3,-5,-7)$$

គ. រក $\vec{v}\times\vec{v}$ ៖

ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រមួយជាមួយខ្លួនវាផ្ទាល់ តែងតែស្មើនឹងវ៉ិចទ័រសូន្យ៖

$$\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}=(0,0,0)$$

លំហាត់គំរូ ២

គេឱ្យ $\overrightarrow{u}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{i}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ និង $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$។ គណនា $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ និង $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}$ រួចគណនា $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ និង $|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}|$ រួចធ្វើសេចក្ដីសន្និដ្ឋាន។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\overrightarrow{u}=(\sqrt{2},\sqrt{3},2)$ និង $\overrightarrow{v}=(-1,1,0)$ ៖

- គណនា $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ ៖

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0-2)\overrightarrow{i}-(0-(-2))\overrightarrow{j}+(\sqrt{2}-(-\sqrt{3}))\overrightarrow{k}$$

$$=-2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+(\sqrt{2}+\sqrt{3})\overrightarrow{k}=(-2,-2,\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

- គណនា $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}$ ៖

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}=(0,0,0)$$

- គណនា $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ ៖

$$|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+4+(2+2\sqrt{6}+3)}=\sqrt{13+2\sqrt{6}}$$

- គណនា $|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}|$ ៖

$$|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{0}|=0$$

- **សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន៖**
  - ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រមួយជាមួយខ្លួនវាផ្ទាល់ តែងតែស្មើនឹងវ៉ិចទ័រសូន្យ $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ និងមានម៉ូឌុលស្មើ 0។
  - វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមួយដែលកែង (អរតូកូណាល់) ទៅនឹងវ៉ិចទ័រទាំងពីរ $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$។

២ លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

ជាទូទៅ ១

បើ $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ហើយ $c \in \mathbb{R}$ គេបាន៖

- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- $c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

៣ ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ

ជាទូទៅ ២

ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\,(u_x, u_y, u_z)$; $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$; $\vec{w}\,(w_x, w_y, w_z)$ គឺជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

- បើ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ គេបាន $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ
- បើ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0$ គេបាន $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ហើយទាញបាន៖
  - មាឌប្រលេពីប៉ែតសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ គឺ $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$
  - មាឌតេត្រាអែតគឺ $V = \dfrac{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{6}$ (តេត្រាអែត = ចតុមុខ)
- ចំពោះបួនចំណុច A, B, C, D ក្នុងលំហ (មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ) គេបាន៖
  - មាឌប្រលេពីប៉ែតសង់លើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ គឺ $V = \left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|$
  - មាឌតេត្រាអែត $ABCD$ គឺ $V_{ABCD} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|}{6}$
  - បើ B ជាកំពូលនៃតេត្រាអែត និងបាតជាត្រីកោណ ACD គេបាន៖

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ACD} \cdot h \implies h = d(B, (ACD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right\|}$$

៤ សំណួរពហុជ្រើសរើស (Multiple Choice Questions)

ចូរបញ្ជាក់ចម្លើយត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ, និង ឃ ៖

១. ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ផលគុណ $\vec{i}\times\vec{j}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\vec{k}$ ខ. $-\vec{k}$ គ. $\vec{0}$ ឃ. 1

២. ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{j}\times\vec{i}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\vec{k}$ ខ. $-\vec{k}$ គ. $\vec{0}$ ឃ. -1

៣. ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{j}\times\vec{k}$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\vec{i}$ ខ. $\vec{i}$ គ. $\vec{0}$ ឃ. 1

៤. ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{k}\times\vec{j}$ ស្មើនឹង៖

ក. $\vec{i}$ ខ. $\vec{0}$ គ. $-\vec{i}$ ឃ. -1

៥. ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{k}\times\vec{i}$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\vec{j}$ ខ. $\vec{0}$ គ. 1 ឃ. $\vec{j}$

៦. ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{i}\times\vec{k}$ ស្មើនឹង៖

ក. $-\vec{j}$ ខ. $\vec{j}$ គ. $\vec{0}$ ឃ. -1

៧. ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រមួយជាមួយខ្លួនវាផ្ទាល់ $\vec{u}\times\vec{u}$ តែងតែស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. $\vec{0}$ គ. $\|\vec{u}\|^2$ ឃ. $\vec{u}$

៨. ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{i}\times\vec{i}$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. $\vec{k}$ គ. $\vec{0}$ ឃ. 0

៩. ផលគុណវ៉ិចទ័រនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ ជា៖

ក. ចំនួនពិត (ស្កាលែ) ខ. ផ្ទៃក្រឡា

គ. មុំមួយ ឃ. វ៉ិចទ័រមួយ

១០. វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ មានទិសដៅ៖

ក. កែងនឹង $\vec{u}$ ផង និងកែងនឹង $\vec{v}$ ផង ខ. ស្របនឹង $\vec{u}$

គ. ស្របនឹង $\vec{v}$ ឃ. ស្ថិតក្នុងប្លង់កំណត់ដោយ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

១១. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,0,0)$ និង $\vec{v}=(0,1,0)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(0,0,-1)$ ខ. $(0,0,1)$ គ. $(1,1,0)$ ឃ. $(0,0,0)$

១២. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,0,0)$ និង $\vec{v}=(0,3,0)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(0,0,-6)$ ខ. $(6,0,0)$ គ. $(0,0,6)$ ឃ. $(0,6,0)$

១៣. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,2,0)$ និង $\vec{v}=(0,0,1)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(-2,1,0)$ ខ. $(2,1,0)$ គ. $(0,0,2)$ ឃ. $(2,-1,0)$

១៤. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,1,1)$ និង $\vec{v}=(1,1,1)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(0,0,0)$ ខ. $(1,1,1)$ គ. $(3,3,3)$ ឃ. 3

១៥. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,-1,2)$ និង $\vec{v}=(2,1,-1)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(1,-5,-3)$ ខ. $(-1,5,3)$ គ. $(-1,3,5)$ ឃ. $(3,5,-1)$

១៦. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,-3,1)$ និង $\vec{v}=(1,-2,1)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(1,1,1)$ ខ. $(-1,1,-1)$ គ. $(-1,-1,-1)$ ឃ. $(1,-1,1)$

១៧. គេឱ្យ $\vec{u}=(3,2,-1)$ និង $\vec{v}=(1,0,2)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(4,7,-2)$ ខ. $(-4,7,2)$ គ. $(2,-7,-2)$ ឃ. $(4,-7,-2)$

១៨. គេឱ្យ $\vec{u}=(0,1,2)$ និង $\vec{v}=(3,-1,0)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(2,6,-3)$ ខ. $(-2,-6,3)$ គ. $(2,-6,-3)$ ឃ. $(-2,6,-3)$

១៩. ផលគុណស្កាលែ $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. $\|\vec{u}\|^2$ ឃ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

២០. ផលគុណស្កាលែ $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. $\|\vec{v}\|^2$ គ. 0 ឃ. $-\|\vec{v}\|^2$

២១. វ៉ិចទ័រមួយដែលកែងនឹង $\vec{u}=(1,0,0)$ និង $\vec{v}=(0,2,0)$ គឺ៖

ក. $(1,2,0)$ ខ. $(2,0,0)$ គ. $(0,1,0)$ ឃ. $(0,0,5)$

២២. វ៉ិចទ័រឯកតាដែលកែងនឹង $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ គឺ៖

ក. $\pm\vec{k}$ ខ. $\vec{i}+\vec{j}$ គ. $\vec{0}$ ឃ. $\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$

២៣. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,1,0)$ និង $\vec{v}=(0,1,2)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺ៖

ក. $(-2,4,-2)$ ខ. $(2,-4,2)$ គ. $(2,4,2)$ ឃ. $(4,-2,2)$

២៤. ម៉ូឌុលនៃ $\vec{u}\times\vec{v}$ ដែល $\vec{u}=(2,0,0)$ និង $\vec{v}=(0,3,0)$ គឺ៖

ក. 5 ខ. 0 គ. 6 ឃ. 13

២៥. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,1,0)$ និង $\vec{v}=(1,0,1)$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺៈ

ក. $(-1,1,1)$ ខ. $(1,1,-1)$ គ. $(0,1,1)$ ឃ. $(1,-1,-1)$

២៦. ម៉ូឌុលនៃ $\vec{u}\times\vec{v}$ ក្នុងសំណួរខាងលើគឺៈ

ក. $\sqrt{3}$ ខ. 3 គ. 1 ឃ. $\sqrt{2}$

២៧. គេឱ្យ $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$។ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ គឺៈ

ក. $(-1,-1,-1)$ ខ. $(1,1,1)$ គ. $(1,-1,1)$ ឃ. $(0,0,1)$

២៨. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,-1,3)$។ គណនា $\vec{u}\times(2\vec{u})$ ៖

ក. $2\|\vec{u}\|^2$ ខ. $(4,-2,6)$ គ. $\vec{0}$ ឃ. 2

២៩. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=(3,-2,6)$ នោះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ស្មើនឹងៈ

ក. 49 ខ. 11 គ. 5 ឃ. 7

៣០. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=(0,4,-3)$ នោះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ស្មើនឹងៈ

ក. 5 ខ. 7 គ. 25 ឃ. 1

៣១. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=(1,2,2)$ នោះ $\vec{v}\times\vec{u}$ ស្មើនឹងៈ

ក. $(1,2,2)$ ខ. $(-1,-2,-2)$ គ. $(2,2,1)$ ឃ. $(0,0,0)$

៣២. គេឱ្យ $\vec{u}=3\vec{i}$ និង $\vec{v}=2\vec{k}$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺៈ

ក. $6\vec{j}$ ខ. $6\vec{i}$ គ. $-6\vec{j}$ ឃ. $5\vec{k}$

៣៣. គេឱ្យ $\vec{u}=-2\vec{j}$ និង $\vec{v}=4\vec{k}$។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ គឺៈ

ក. $8\vec{i}$ ខ. $-8\vec{j}$ គ. $2\vec{i}$ ឃ. $-8\vec{i}$

៣៤. វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់កំណត់ដោយ $\vec{u}=(1,2,0)$ និង $\vec{v}=(0,1,1)$ គឺៈ

ក. $(2,-1,1)$ ខ. $(-2,1,-1)$ គ. $(2,1,1)$ ឃ. $(1,1,1)$

៣៥. វ៉ិចទ័រឯកតាណរម៉ាល់នៃប្លង់កំណត់ដោយ $\vec{i}$ និង $\vec{j}+\vec{k}$ គឺៈ

ក. $(0,-1,1)$ ខ. $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ គ. $(1,1,1)$ ឃ. $(1,0,0)$

៣៦. លក្ខណៈត្រឹមត្រូវនៃផលគុណវ៉ិចទ័រគឺៈ

ក. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{u}$ ខ. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}$

គ. $-(\vec{v}\times\vec{u})=\vec{u}\times\vec{v}$ ឃ. $\vec{u}\times\vec{v}=\frac{\vec{u}}{\vec{v}}$

៣៧. ទំនាក់ទំនងរវាងម៉ូឌុលផលគុណវ៉ិចទ័រ និងមុំ θ គឺ៖

ក. $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ ខ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\tan\theta$
គ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}{\sin\theta}$ ឃ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$

៣៨. លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $(\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0})$ គឺ៖

ក. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ ខ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ គ. $\vec{u}\times\vec{v}=1$ ឃ. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

៣៩. បើ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ នោះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ឃ. -1

៤០. បើ $\vec{u} \perp \vec{v}$ នោះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. $\frac{1}{2}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ គ. $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ឃ. 1

៤១. ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ៖

ក. $S=\frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ខ. $S=\vec{u}\cdot\vec{v}$
គ. $S=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ ឃ. $S=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

៤២. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលសង់លើពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ៖

ក. $S=\frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ខ. $S=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$
គ. $S=\frac{1}{6}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ឃ. $S=2\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

៤៣. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

ក. $S=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$ ខ. $S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$
គ. $S=\frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$ ឃ. $S=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

៤៤. បើ $\|\vec{u}\|=4, \|\vec{v}\|=5$ និងមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរគឺ $\theta=30^\circ$ នោះផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមគឺ៖

ក. 20 ខ. $10\sqrt{3}$ គ. 10 ឃ. 5

៤៥. បើ $\|\vec{u}\|=6, \|\vec{v}\|=8$ និងមុំ $\theta=30^\circ$ នោះផ្ទៃត្រីកោណសង់លើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺ៖

ក. 24 ខ. $24\sqrt{3}$ គ. 48 ឃ. 12

៤៦. ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលមានវិមាត្រ $\vec{u}=(2,0,0)$ និង $\vec{v}=(0,5,0)$ គឺ៖

ក. 10 ខ. 5 គ. 20 ឃ. 7

៤៧. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ដែល $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-2,1)$ គឺ៖

ក. 3 ខ. $\frac{3}{2}$ គ. 9 ឃ. $\frac{9}{2}$

៤៨. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ដែល $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,6,8)$ គឺ៖

ក. 10 ខ. 14 គ. 5 ឃ. 7

៤៩. គេឱ្យ $A(1,1,0),B(3,1,0),C(1,4,0)$។ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ៖

ក. 6 ខ. 1.5 គ. 12 ឃ. 3

៥០. គេឱ្យ $A(0,0,0),B(2,0,0),C(0,3,0)$។ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ៖

ក. 3 ខ. 6 គ. 5 ឃ. 1.5

៥១. បីចំណុច A,B,C រត់ត្រង់ជួរគ្នាកាលណា៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ខ. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

គ. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ ឃ. $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$

៥២. គេឱ្យ $A(1,2,3),B(2,3,4),C(3,4,5)$។ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ គឺ៖

ក. $(1,1,1)$ ខ. $(-1,2,-1)$ គ. $(0,0,0)$ ឃ. $(2,2,2)$

៥៣. ពីលទ្ធផលសំណួរខាងលើ បញ្ជាក់ថាបីចំណុច A,B,C ៖

ក. បង្កើតបានត្រីកោណសម័ង្ស ខ. បង្កើតបានត្រីកោណកែង

គ. មិនរត់ត្រង់ជួរគ្នាទេ ឃ. រត់ត្រង់ជួរគ្នា

៥៤. កន្សោម $(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{v}\times\vec{u})$ ស្មើនឹង៖

ក. $\vec{0}$ ខ. $2(\vec{u}\times\vec{v})$ គ. 0 ឃ. 2

៥៥. កន្សោម $c(\vec{u}\times\vec{v})$ ស្មើនឹង៖

ក. $(c\vec{u})\times(c\vec{v})$ ខ. $(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$

គ. $c^2(\vec{u}\times\vec{v})$ ឃ. $c\vec{u}\cdot\vec{v}$

៥៦. សមភាពឡាហ្គ្រង់ (Lagrange's Identity) គឺ៖

ក. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ ខ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|-\vec{u}\cdot\vec{v}$

គ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ ឃ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2=(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

៥៧. បើ $\|\vec{u}\|=3,\|\vec{v}\|=5$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=9$ នោះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ស្មើនឹង៖

ក. 144 ខ. 6 គ. 15 ឃ. 12

៥៨. បើ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=4$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ នោះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ស្មើនឹង៖

ក. 8 ខ. 0 គ. 6 ឃ. 16

៥៩. បើ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=6$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$ នោះ $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ស្មើនឹង៖

ក. 14 ខ. 10 គ. 100 ឃ. 48

៦០. គេឱ្យ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$។ ផលគុណស្កាលែ $\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$ ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. $\|\vec{w}\|^2$ គ. 0 ឃ. 1

៦១. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ និង $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ដោយ $\vec{u}\neq\vec{0}$ នោះគេទាញបាន៖

ក. $\vec{u}=\vec{v}$ ខ. $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ គ. $\vec{u}\perp\vec{v}$ ឃ. $\vec{v}=\vec{0}$

៦២. ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មានកំពូល $A(0,0,0),B(1,2,0),D(0,1,3)$ គឺ៖

ក. $\sqrt{46}$ ខ. 7 គ. 6 ឃ. $\sqrt{41}$

៦៣. ក្នុងត្រីកោណ ABC កម្ពស់ h_A គូសចេញពីកំពូល A មកជ្រុង BC កំណត់ដោយ៖

ក. $h_A=\frac{2\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$ ខ. $h_A=\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$

គ. $h_A=\frac{\|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$ ឃ. $h_A=\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2\|\overrightarrow{BC}\|}$

៦៤. បើ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,0,3)$ និង $\|\overrightarrow{BC}\|=5$ នោះកម្ពស់ h_A ស្មើនឹង៖

ក. 5 ខ. 2 គ. 1 ឃ. 0.5

៦៥. ផ្ទៃក្រឡាពហុកោណប៉ោងមួយអាចគណនាបានដោយ៖

ក. យកផលគុណជ្រុងទាំងអស់ ខ. គណនាផលបូកប្រវែងទ្រនុងទាំងអស់

គ. គ្មានរូបមន្តគណនាទេ ឃ. បំបែកពហុកោណជាបណ្តាត្រីកោណ រួចបូកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណទាំងនោះ

៦៦. ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ គឺកំណត់ដោយ៖

ក. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ ខ. $\vec{u}\times(\vec{v}\cdot\vec{w})$

គ. $(\vec{u}\cdot\vec{v})\times\vec{w}$ ឃ. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}$

៦៧. ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រផ្តល់លទ្ធផលជា៖

ក. វ៉ិចទ័រ ខ. ចំនួនពិត (ស្កាលែ)

គ. ម៉ាទ្រីស ឃ. មុំ

៦៨. ផលគុណចម្រុះ $\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. -1 គ. 1 ឃ. $\vec{i}$

៦៩. ផលគុណចម្រុះ $\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. $\vec{j}$ ឃ. -1

៧០. ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ តែងតែស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 1 គ. $\|\vec{u}\|^2$ ឃ. $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

៧១. ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})$ ស្មើនឹង៖

ក. -1 ខ. 0 គ. 1 ឃ. $\|\vec{u}\|^2$

៧២. លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ (កូប្លាណែ) គឺ៖

ក. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=1$ ខ. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{0}$

គ. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$ ឃ. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$

៧៣. លក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យបួនចំណុច A,B,C,D ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ (កូប្លាណែ) គឺ៖

ក. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ ខ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

គ. $\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{AD}\|$ ឃ. $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0$

៧៤. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,0,0),\vec{v}=(0,2,0),\vec{w}=(0,0,3)$។ ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ គឺ៖

ក. 6 ខ. 5 គ. 0 ឃ. -6

៧៥. មាឌប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ គឺ៖

ក. $V=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ ខ. $V=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

គ. $V=\frac{1}{3}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ ឃ. $V=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

៧៦. មាឌតេត្រាអែត (ចតុមុខ) ដែលសង់លើបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ គឺ៖

ក. $V=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ ខ. $V=\frac{1}{3}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

គ. $V=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ ឃ. $V=\frac{1}{2}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

៧៧. មាឌតេត្រាអែត $ABCD$ កំណត់ដោយរូបមន្ត៖

ក. $V=|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$ ខ. $V=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$

គ. $V=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$ ឃ. $V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$

៧៨. ផលធៀបរវាងមាឌតេត្រាអែត និងមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រដូចគ្នា គឺស្មើនឹង៖

ក. $\frac{1}{6}$ ខ. $\frac{1}{3}$ គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. 6

៧៩. គណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតសង់លើ $\vec{u}=(1,1,0),\vec{v}=(0,1,1),\vec{w}=(1,0,1)$ ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 4 ឃ. 6

៨០. គណនាមាឌតេត្រាអែតសង់លើ $\vec{u}=(1,1,0), \vec{v}=(0,1,1), \vec{w}=(1,0,1)$ ៖

ក. $\frac{1}{6}$ ខ. 1 គ. $\frac{1}{3}$ ឃ. 2

៨១. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,0,0), \vec{v}=(0,3,0), \vec{w}=(0,0,4)$។ មាឌតេត្រាអែតគឺ៖

ក. 24 ខ. 8 គ. 12 ឃ. 4

៨២. គេឱ្យ $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,2,0), D(0,0,3)$។ មាឌតេត្រាអែត $ABCD$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 6 គ. 2 ឃ. 3

៨៣. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,2,3), \vec{v}=(2,4,6), \vec{w}=(1,0,1)$។ ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ គឺ៖

ក. 6 ខ. 0 (ព្រោះ $\vec{v}=2\vec{u}$) គ. 12 ឃ. -6

៨៤. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,-1,1), \vec{v}=(2,0,1), \vec{w}=(3,-1,2)$។ ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ គឺ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. 0 (ព្រោះ $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$) ឃ. -1

៨៥. គេឱ្យ $\vec{u}=(1,1,m), \vec{v}=(0,2,1), \vec{w}=(3,1,0)$។ រក m ដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រទាំងបីកូប្លាណែ៖

ក. $m=1$ ខ. $m=-\frac{1}{3}$ គ. $m=3$ ឃ. $m=\frac{1}{3}$

៨៦. គេឱ្យ $A(1,0,1), B(2,1,0), C(0,1,2), D(k,1,1)$។ រក k ដើម្បីឱ្យ A,B,C,D ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ៖

ក. $k=1$ ខ. $k=2$ គ. $k=0$ ឃ. $k=-1$

៨៧. ទំនាក់ទំនងវដ្តនៃផលគុណចម្រុះគឺ៖

ក. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=-\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$

ខ. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

គ. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})$

ឃ. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$

៨៨. ប្តូរទីតាំងវ៉ិចទ័រពីរជាប់គ្នា $(\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v}))$ នាំឱ្យលទ្ធផល៖

ក. ស្មើគ្នានឹង $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

ខ. ស្មើនឹង 0

គ. ផ្ទុយសញ្ញានឹង $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

ឃ. មិនអាចកំណត់បាន

៨៩. កម្ពស់ h នៃតេត្រាអែត $ABCD$ ចេញពីកំពូល A មកបាត BCD កំណត់ដោយ៖

ក. $h=\frac{V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}}$

ខ. $h=\frac{6V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}}$

គ. $h=\frac{3V_{ABCD}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

ឃ. $h=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|}{\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\|}$

៩០. បើ $V_{ABCD}=6$ និង $S_{\triangle BCD}=3$ នោះកម្ពស់ h ចេញពីកំពូល A ស្មើនឹង៖

ក. 6 ខ. 2 គ. 18 ឃ. 3

៩១. បើ $V_{ABCD}=10$ និង $h=5$ នោះផ្ទៃក្រឡាបាត S ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. 6 គ. 50 ឃ. 15

៩២. មាឌតេត្រាអែត $OABC$ ដែល $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ គឺ៖

ក. $V=\frac{1}{3}|abc|$ ខ. $V=|abc|$ គ. $V=\frac{1}{6}|abc|$ ឃ. $V=\frac{1}{2}|abc|$

៩៣. ពីសំណួរខាងលើ បើ $a=3, b=4, c=5$ នោះមាឌតេត្រាអែត $OABC$ ស្មើនឹង៖

ក. 60 ខ. 20 គ. 30 ឃ. 10

៩៤. បើប្រលេពីប៉ែតមួយមានមាឌស្មើនឹង 48 នោះតេត្រាអែតសង់លើវិមាត្រទាំងបីដូចគ្នានឹងមានមាឌស្មើ៖

ក. 8 ខ. 16 គ. 24 ឃ. 4

៩៥. ចំណុច A, B, C, D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយកាលណា៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0$ ខ. $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})\neq 0$

គ. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ឃ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

៩៦. ក្នុងប្រលេពីប៉ែត $ABCD.A'B'C'D'$ ដែលមានបាត $ABCD$ និងកំពូល A' មាឌរបស់វាគឺ៖

ក. $V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})|$ ខ. $V=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})|$

គ. $V=|\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})|$ ឃ. $V=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\|$

៩៧. ដេទែមីណង់លំដាប់ ៣ នៃផលគុណចម្រុះ $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&2\end{vmatrix}$ ស្មើនឹង៖

ក. 0 ខ. 6 គ. 24 ឃ. 2

៩៨. បើ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ បង្កើតបានជាគោលអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន នោះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. -1 គ. 0 ឃ. 3

៩៩. បើ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ បង្កើតបានជាគោលអរតូណរម៉ាល់អវិជ្ជមាន នោះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. -1 គ. 0 ឃ. -3

១០០. ផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$ មានន័យធរណីមាត្រថា៖

ក. បីវ៉ិចទ័រនោះមានប្រវែងស្មើគ្នា ខ. បីវ៉ិចទ័រនោះកែងគ្នាពីរៗ

គ. បីវ៉ិចទ័រនោះកូប្លាណែ (ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ) ឃ. បីវ៉ិចទ័រនោះជាគោលអរតូណរម៉ាល់

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ រួចគូសរូបតាង

ក. $\vec{j}\times\vec{i}$ ខ. $\vec{i}\times\vec{j}$ គ. $\vec{j}\times\vec{k}$ ឃ. $\vec{k}\times\vec{j}$ ង. $\vec{i}\times\vec{k}$ ច. $\vec{k}\times\vec{i}$

ដំណោះស្រាយ

២. រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(2,-3,1),\vec{v}=(1,-2,1)$

ខ. $\vec{u}=(-1,1,2),\vec{v}=(0,1,0)$

គ. $\vec{u}=(12,-3,0),\vec{v}=(-2,5,0)$

ឃ. $\vec{u}=(-10,0,6),\vec{v}=(7,0,0)$

ង. $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(2,1,-1)$

ច. $\vec{u}=(0,1,6),\vec{v}=(1,-2,1)$

ដំណោះស្រាយ

៣. រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(4,-3.5,7),\vec{v}=(-1,8,4)$

ខ. $\vec{u}=(-8,-6,4),\vec{v}=(10,-12,-2)$

គ. $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k},\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{1}{10}\vec{k}$

ឃ. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{k},\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+6\vec{j}$

ដំណោះស្រាយ

៤. រកផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាជ្រុងជាប់ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=\vec{j}, \vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$

គ. $\vec{u}=(3,2,-1), \vec{v}=(1,2,3)$

ឃ. $\vec{u}=(2,-1,0), \vec{v}=(-1,2,0)$

ដំណោះស្រាយ

៥. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំណុចខាងក្រោម ជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាមរួចរកផ្ទៃក្រឡា៖

ក. $(1,1,1),(2,3,4),(6,5,2),(7,7,5)$ ខ. $(2,-1,1),(5,1,4),(0,1,1),(3,3,4)$

ដំណោះស្រាយ

៦. រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $(0,0,0),(1,2,3),(-3,0,0)$

គ. $(1,3,5),(3,3,0),(-2,0,5)$

ខ. $(2,-3,4),(0,1,2),(-1,2,0)$

ឃ. $(1,2,0),(-2,1,0),(0,0,0)$

ដំណោះស្រាយ

៧. រក $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=\vec{i},\vec{v}=\vec{j},\vec{w}=\vec{k}$

គ. $\vec{u}=(2,0,1),\vec{v}=(0,3,0),\vec{w}=(0,0,1)$

ខ. $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(2,1,0),\vec{w}=(0,0,1)$

ឃ. $\vec{u}=(2,0,0),\vec{v}=(1,1,1),\vec{w}=(0,2,2)$

ដំណោះស្រាយ

៨. ដោយប្រើផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ចូរគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាជ្រុងជាប់ដូចខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j},\vec{v}=\vec{j}+\vec{k},\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=(1,3,1),\vec{v}=(0,5,5),\vec{w}=(4,0,4)$

ដំណោះស្រាយ

៩. រកមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $(0,0,0),(3,0,0),(0,5,1),(3,5,1),(2,0,5),(5,0,5),(2,5,6),(5,5,6)$

ខ. $(0,0,0),(1,1,0),(1,0,2),(0,1,1),(2,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(2,2,3)$

ដំណោះស្រាយ

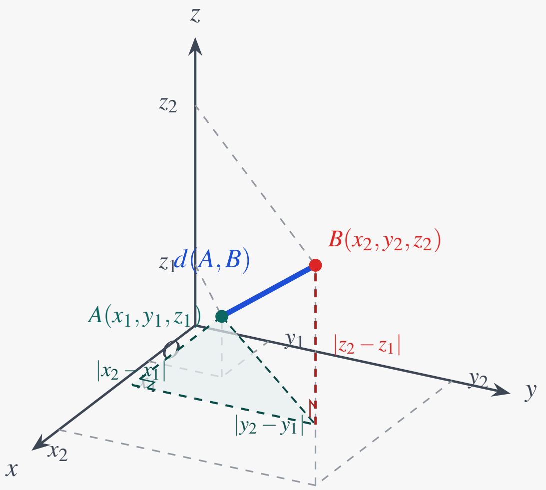
មេរៀនទី៣ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវិចទ័រ

១ ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច

ជាទូទៅ ១

គេមានចំណុច $A(x_1,y_1,z_1)$; $B(x_2,y_2,z_2)$ គេបានចម្ងាយ ពី A ទៅ B គឺកំណត់ដោយ

$$d(A,B)=AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



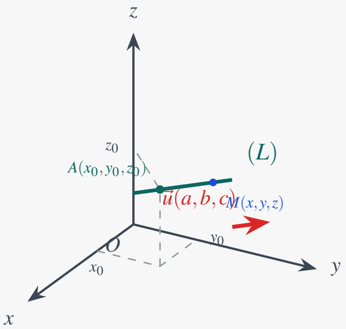
២ សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

៣ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុច និងស្គាល់វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

និយមន័យ ១

- សមីការបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_o,y_o,z_o)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$ គឺកំណត់ដោយ

$$(L):\begin{cases} x-x_o=at \\ y-y_o=bt \\ z-z_o=ct \end{cases} \quad ;t\in\mathbb{R}$$



សមីការខាងលើនេះ គេហៅថា **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់** (L)

- បើ $a\neq 0;\ b\neq 0;\ c\neq 0$ គេអាចសរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) ជា

$$(L):\ \frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c}$$

គេហៅទម្រង់នេះថាជា **សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់** (L)

លំហាត់គំរូ ១

រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,-2,3)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(-1,2,-3)$

ដំណោះស្រាយ

បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(x_0,y_0,z_0)=(1,-2,3)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)=(-1,2,-3)$ ៖

- **សមីការឆ្លុះ៖**

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\iff\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$$

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖

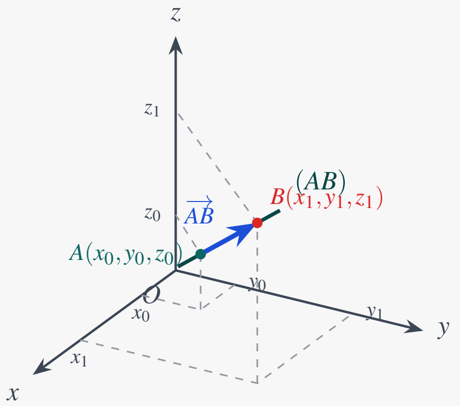
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

៤ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចក្នុងលំហ

ជាទូទៅ ២

សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ និង $B(x_1, y_1, z_1)$ កំណត់ដោយ

$$(AB): \quad \frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}$$



លំហាត់គំរូ ២

រកសមីការបន្ទាត់ (AB) កាត់តាមចំណុច $A(-2, 1, -3)$ និង $B(3, -2, -1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បន្ទាត់ (AB) កាត់តាម $A(-2, 1, -3)$ និង $B(3, -2, -1)$ ៖

- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) គឺ៖

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3 - (-2), -2 - 1, -1 - (-3)) = (5, -3, 2)$$

- សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB)៖

$$(AB):\frac{x-(-2)}{5}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-(-3)}{2}\iff\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{2}$$

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖

$$\begin{cases}x=-2+5t\\ y=1-3t\\ z=-3+2t\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

៥ សមីការបន្ទាត់ដែលកំណត់ដោយប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា

គេឱ្យ សមីការប្លង់ $(P_1):a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ និងសមីការប្លង់ $(P_2):a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$ និង $\vec{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ ។ បើវ៉ិចទ័រ $\vec{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$ និង $\vec{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា(មិនស្របគ្នា) នោះប្លង់ (P_1) និង (P_2) ប្រសព្វគ្នាបានបន្ទាត់ (L) មួយ។
ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់ (L) គេត្រូវ៖

- យក $z=t$ (ឬយក x,y) ជំនួសក្នុងសមីការ (P_1) និង (P_2)
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$
- រកទំនាក់ទំនងគ្មាន t រវាង x,y,z នោះគេទទួលបាន សមីការឆ្លុះរបស់បន្ទាត់ (L)
- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

លំហាត់គំរូ ៣

គេឱ្យប្លង់ពីរ $(P):x+2y+5z-2=0$ និង $(Q):2x-2y+z-1=0$ ។ ចូររកសមីការបន្ទាត់ (L) កំណត់ដោយប្លង់ទាំងពីរខាងលើប្រសព្វគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

- វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ទាំងពីរគឺ $\vec{n_1}=(1,2,5)$ និង $\vec{n_2}=(2,-2,1)$។

- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប្រសព្វ (L) គឺ៖

$$\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=(2-(-10))\vec{i}-(1-10)\vec{j}+(-2-4)\vec{k}$$

$$=12\vec{i}+9\vec{j}-6\vec{k}=3(4,3,-2)$$

យក $\vec{u}=(4,3,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)។

- រកចំណុចមួយដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L)៖
តាង $z=0$ ជំនួសក្នុងសមីការប្លង់ទាំងពីរ៖

$$\begin{cases}x+2y-2=0\\ 2x-2y-1=0\end{cases}\implies 3x-3=0\implies x=1\implies y=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ចំណុច $M\left(1,\frac{1}{2},0\right)\in(L)$។

- គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គឺ៖

$$(L):\begin{cases}x=1+4t\\ y=\frac{1}{2}+3t\\ z=-2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

សមីការឆ្លុះ៖ $(L):\frac{x-1}{4}=\frac{2y-1}{6}=\frac{z}{-2}$។

៦ សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចមួយហើយកែងទៅនឹងប្លង់មួយ

ជាទូទៅ ៣

ឧបមាថាគេមានប្លង់ $(P):ax+by+cz+d=0$ និងចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។ រកសមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ P

- ដោយបន្ទាត់ $(L)\perp(P)$ នោះ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស របស់បន្ទាត់ (L) ។

- បើ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (L) នោះគេបាន $\vec{u}=(a,b,c)$
- បន្ទាប់មកប្រើរូបមន្ត : $(L):\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$

លំហាត់គំរូ ៤

គេឱ្យប្លង់មួយមានសមីការ $(P): 2x+2y-z+1=0$ និងចំណុច $A(4,1,2)$ ។ ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

- ប្លង់ $(P): 2x+2y-z+1=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,2,-1)$។
- ដោយបន្ទាត់ $(L)\perp(P)$ នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)៖

$$\vec{u}_L=\vec{n}=(2,2,-1)$$

- បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $A(4,1,2)$ ដូចនេះគេបាន៖
  - **សមីការឆ្លុះ៖**

$$(L):\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

  - **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖**

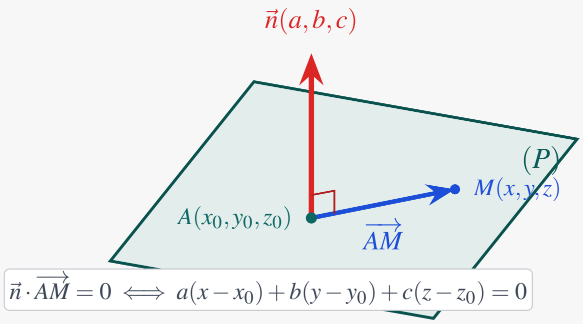
$$\begin{cases} x=4+2t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

៧ សមីការប្លង់

៧.១ សមីការប្លង់កាត់តាមមួយចំណុច និងស្គាល់វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

និយមន័យ ២

សមីការ ប្លង់ P កាត់តាម ចំណុច $A(x_o,y_o,z_o)$ ហើយ មាន វ៉ិចទ័រ ណ រម៉ាល់ $\vec{n}(a,b,c)$ កំណត់ ដោយ $(P):\ a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ មានទម្រង់ទូទៅ $ax+by+cz+d=0$



លំហាត់គំរូ ៥

ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1,2,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-3,6)$

ដំណោះស្រាយ

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(x_0,y_0,z_0)=(1,2,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)=(2,-3,6)$ កំណត់ដោយ៖

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\iff 2(x-1)-3(y-2)+6(z-3)=0$$

$$\iff 2x-2-3y+6+6z-18=0$$

$$\iff (P):2x-3y+6z-14=0$$

៧.២ សមីការប្លង់កាត់តាមបន្ទាត់មួយ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់មួយទៀត

ជាទូទៅ ៤

គេមានបន្ទាត់ពីរ $(L_1): \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ និង $(L_2): \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$

(L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នាគឺ $\vec{u_1}=(a_1,b_1,c_1)$ និង $\vec{u_2}=(a_2,b_2,c_2)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2)

គេបាន $\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(a,b,c)$; យក $A\in(L_1)$ នោះ $A(x_1,y_1,z_1)$ គេបាន $A\in(P)$ នោះ

សមីការប្លង់ $(P): a(x-x-1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

លំហាត់គំរូ ៦

គេឱ្យបន្ទាត់ពីរមានសមីការ $(L_1): \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{-2}$ និង $(L_2): \frac{x+2}{4}=y-2=\frac{z+3}{-3}$ ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមបន្ទាត់ (L_1) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L_1) គឺ $\vec{u_1}=(2,-3,-2)$ និងចំណុច $A(3,-1,2)\in(L_1)$។
- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L_2) គឺ $\vec{u_2}=(4,1,-3)$។
- ដោយប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2) នាំឱ្យវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ៖

$$\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & -2\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}=(9-(-2))\vec{i}-(-6-(-8))\vec{j}+(2-(-12))\vec{k}$$

$$=11\vec{i}-2\vec{j}+14\vec{k}=(11,-2,14)$$

- ដោយ $A(3,-1,2)\in(L_1)\implies A\in(P)$ នាំឱ្យសមីការប្លង់ (P) គឺ៖

$$11(x-3)-2(y-(-1))+14(z-2)=0$$

$$\iff 11(x-3)-2(y+1)+14(z-2)=0$$

$$\iff 11x-33-2y-2+14z-28=0$$

$$\iff (P): 11x-2y+14z-63=0$$

លំហាត់គំរូ ៧

គេឱ្យបន្ទាត់ពីរដែលមានសមីការ $(L_1): \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$ និង $(L_2): \frac{x+6}{-2}=\frac{y-4}{6}=-z+3$ ។

ក. រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **រកចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ៖**

សរសេរសមីការបន្ទាត់ទាំងពីរជាទម្រង់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖

$$(L_1): \begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=-1+5t \end{cases} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x=-6-2s \\ y=4+6s \\ z=3-s \end{cases}$$

ដើម្បីរកចំណុចប្រសព្វ យើងផ្ទឹមផ្ទងកូអរដោនេ៖

$$\begin{cases} 1-t=-6-2s \implies 2s-t=-7 \quad (1) \\ 2+3t=4+6s \implies 3t-6s=2 \quad (2) \\ -1+5t=3-s \implies s+5t=4 \quad (3) \end{cases}$$

ពី (1) យើងបាន $t=2s+7$។ ជំនួសចូល (2)៖

$$3(2s+7)-6s=2 \iff 6s+21-6s=2 \iff 21=2 \quad (\text{មិនពិត})$$

ដោយប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ នាំឱ្យបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) គ្មានចំណុចប្រសព្វឡើយ (ជាបន្ទាត់ទ្វេរ)។

ខ. **សមីការប្លង់ (P)៖**

ដោយសារបន្ទាត់ទាំងពីរ (L_1) និង (L_2) មិនកាត់គ្នា និងមិនស្របគ្នា (បន្ទាត់ទ្វេរ) នោះបន្ទាត់ទាំងពីរមិនអាចកំណត់ប្លង់តែមួយបានឡើយ។

(ករណីប្លង់កាត់តាម (L_1) ហើយស្រប (L_2)៖ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=(-1,3,5)\times(-2,6,-1)=(-33,-11,0)=-11(3,1,0)$ ដែលកាត់តាម $M(1,2,-1)\in(L_1)$ គឺ $(P): 3x+y-5=0$)។

៧.៣ សមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចមួយ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់មួយ

ជាទូទៅ ៥

គេមានបន្ទាត់ $(L): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ និងចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$
ដោយ $(P) \perp (L)$ នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់ (L) ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គេបាន ៖ $\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{n_l} = (a, b, c)$
នោះសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (L) កំណត់ដោយ៖ $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$

លំហាត់គំរូ ៨

គេឱ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{7}$ ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $A(-3, 1, 0)$ ហើយកែងបន្ទាត់ (L)។

ដំណោះស្រាយ

- ដោយប្លង់ $(P) \perp (L)$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)៖

$$\vec{n} = \vec{u}_L = (-4, 3, 7)$$

- ប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(-3, 1, 0)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) គឺ៖

$$-4(x-(-3))+3(y-1)+7(z-0) = 0$$

$$\iff -4(x+3)+3(y-1)+7z = 0$$

$$\iff -4x-12+3y-3+7z = 0$$

$$\iff (P): -4x+3y+7z-15 = 0 \quad (\text{ឬ } 4x-3y-7z+15 = 0)$$

៧.៤ សមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាក្នុងប្លង់តែមួយ

ជាទូទៅ ៦

គេមានបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា $(L_1): \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ និង $(L_2): \frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$ ។ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ $\vec{u}=(a,b,c)$

យក $A(x_1,y_1,z_1)\in(L_1)$ និង $B(x_2,y_2,z_2)\in(L_2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) នោះគេបាន $\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}$

ឧបមាថា $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$

ដោយ $A\in(P)$ នោះសមីការប្លង់ (P) កំណត់សរសេរដោយ ៖ $(P): \alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

លំហាត់គំរូ ៩

គេឱ្យបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា $(L_1): \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{6}$ និង $(L_2): \frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{6}$ ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កំណត់ដោយបន្ទាត់ ស្របគ្នា (L_1) និង (L_2)។

ដំណោះស្រាយ

- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរួមនៃបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ $\vec{u}=(2,3,6)$។
- យកចំណុច $A(-1,1,2)\in(L_1)$ និងចំណុច $B(2,-5,4)\in(L_2)$។
- គណនាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ៖

$$\overrightarrow{AB}=(2-(-1),-5-1,4-2)=(3,-6,2)$$

- វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ៖

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\end{vmatrix}=(6-(-36))\vec{i}-(4-18)\vec{j}+(-12-9)\vec{k}$$

$$=42\vec{i}+14\vec{j}-21\vec{k}=7(6,2,-3)$$

យក $\vec{n}=(6,2,-3)$។

- សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(-1,1,2)$ គឺ៖

$$6(x-(-1))+2(y-1)-3(z-2)=0$$

$$\iff 6(x+1)+2(y-1)-3(z-2)=0$$

$$\iff 6x+6+2y-2-3z+6=0$$

$$\iff (P): 6x+2y-3z+10=0$$

៧.៥ សមីការប្លង់ដែលជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់មួយ $[AB]$

ជាទូទៅ ៧

ដើម្បីរកសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ គេត្រូវ៖

- រកកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ $[AB]$ គឺ $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ប្លង់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(a,b,c)$
- គេបានសមីការប្លង់ $(P): a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$

លំហាត់គំរូ ១០

គេឱ្យចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(-3,4,1)$ ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់មេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់ $[AB]$ ។

ដំណោះស្រាយ

- រកកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាល I នៃអង្កត់ $[AB]$ ៖

$$I\left(\frac{1+(-3)}{2},\frac{2+4}{2},\frac{3+1}{2}\right) \implies I(-1,3,2)$$

- វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់មេដ្យាទ័រគឺ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ ៖

$$\overrightarrow{AB}=(-3-1,4-2,1-3)=(-4,2,-2)=-2(2,-1,1)$$

យក $\vec{n} = (2,-1,1)$។

- សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រកាត់តាមចំណុច $I(-1,3,2)$ គឺ៖

$$2(x-(-1))-1(y-3)+1(z-2)=0$$

$$\iff 2(x+1)-(y-3)+(z-2)=0$$

$$\iff 2x+2-y+3+z-2=0$$

$$\iff (P): 2x-y+z+3=0$$

៧.៦ សមីការប្លង់កាត់តាមបីចំណុចផ្សេងគ្នា

ជាទូទៅ ៨

គេមានបីចំណុច $A(x_A,y_A,z_A), B(x_B,y_B,z_B)$ និង $C(x_C,y_C,z_C)$ ។ ឧបមាថាបីចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់ជួរ ដែលបង្កើតបានប្លង់ (ABC) បើប្លង់កាត់តាម A នោះមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(a,b,c)$ គេបានសមីការប្លង់ $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

លំហាត់គំរូ ១១

គេឱ្យបីចំណុច $A(1,2,1), B(-1,3,2)$ និង $C(5,2,2)$ ។ ចូររកសមីការប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

- គណនាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ៖

$$\overrightarrow{AB}=(-1-1,3-2,2-1)=(-2,1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(5-1,2-2,2-1)=(4,0,1)$$

- វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ៖

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1-0)\overrightarrow{i}-(-2-4)\overrightarrow{j}+(0-4)\overrightarrow{k}$$

$$=\overrightarrow{i}+6\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}=(1,6,-4)$$

- សមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(1,2,1)$ គឺ៖

$$1(x-1)+6(y-2)-4(z-1)=0$$

$$\iff x-1+6y-12-4z+4=0$$

$$\iff (ABC): x+6y-4z-9=0$$

៧.៧ សមីការប្លង់ប៉ះស្វ៊ែត្រង់ចំណុចមួយ

គេឱ្យស្វ៊ែ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ និងចំណុច $A\in(S)$ ដែល $A(x_A,y_A,z_A)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A។ ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ ដោយប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A នោះវ៉ិចទ័រ ដែលភ្ជាប់ពីផ្ចិត I ទៅចំណុចប៉ះ A គឺជាវ៉ិចទ័រដែលភ្ជាប់ពីផ្ចិត I ទៅចំណុច ប៉ះ A គឺជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (P) គឺ $\overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{IA}=(x_A-a,y_A-b,z_A-c)=(a',b',c')$ ។ ដោយ $A\in(P)$ ដូចនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ ៖ $(P): a'(x-x_A)+b'(y-y_A)+c'(z-z_A)=0$។

លំហាត់គំរូ ១២

គេឱ្យស្វ៊ែ $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ ។ បង្ហាញថាចំណុច $A(1,-3,3)\in(S)$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A។

ដំណោះស្រាយ

- បង្ហាញថា $A(1,-3,3)\in(S)$ ៖
  ជំនួសកូអរដោនេនៃចំណុច A ចូលក្នុងសមីការស្វ៊ែ (S)៖

$$(1-2)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2=(-1)^2+(-2)^2+2^2=1+4+4=9$$

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ ដូចនេះចំណុច $A(1,-3,3) \in (S)$ ពិតប្រាកដមែន។

- **សរសេរសមីការប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ A ៖**

  ផ្ចិតនៃស្វ៊ែ (S) គឺ $I(2,-1,1)$។

  វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ប៉ះត្រង់ A គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{IA}$៖

$$\overrightarrow{IA} = (1-2, -3-(-1), 3-1) = (-1,-2,2)$$

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $A(1,-3,3)$ គឺ៖

$$-1(x-1) - 2(y-(-3)) + 2(z-3) = 0$$

$$\iff -(x-1) - 2(y+3) + 2(z-3) = 0$$

$$\iff -x+1-2y-6+2z-6 = 0$$

$$\iff (P): -x-2y+2z-11 = 0 \quad (\text{ឬ } x+2y-2z+11 = 0)$$

៧.៨ សមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នា

លំហាត់គំរូ ១៣

គេឱ្យបន្ទាត់ $(L_1): \frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+5}{4}$ និង $(L_2): \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{-1}$។

ក. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (L_1) និង (L_2)

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កំណត់ដោយ (L_1) និង (L_2) ប្រសព្វគ្នា

ដំណោះស្រាយ

ក. **រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (L_1) និង (L_2) ៖**

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ទាំងពីរ៖

$$(L_1):\begin{cases}x=5-2t\\ y=-4+3t\\ z=-5+4t\end{cases} \quad \text{និង} \quad (L_2):\begin{cases}x=-1+2s\\ y=5-3s\\ z=4-s\end{cases}$$

ផ្ទឹមផ្ទងកូអរដោនេនៃបន្ទាត់ទាំងពីរ៖

$$\begin{cases}5-2t=-1+2s \implies 2t+2s=6 \implies t+s=3 \quad (1)\\ -4+3t=5-3s \implies 3t+3s=9 \implies t+s=3 \quad (2)\\ -5+4t=4-s \implies 4t+s=9 \quad (3)\end{cases}$$

យក (3) ដក (1) យើងបាន៖ $3t=6 \implies t=2$។
ជំនួស $t=2$ ចូល (1) យើងបាន $s=3-2=1$។
ជំនួស $t=2$ ចូលសមីការនៃ (L_1) ៖

$$\begin{cases}x=5-2(2)=1\\ y=-4+3(2)=2\\ z=-5+4(2)=3\end{cases} \implies A(1,2,3)$$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ $A(1,2,3)$។

២. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កំណត់ដោយ (L_1) និង (L_2) ប្រសព្វគ្នា៖
វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L_1) និង (L_2) គឺ $\vec{u_1}=(-2,3,4)$ និង $\vec{u_2}=(2,-3,-1)$។
វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ៖

$$\vec{n}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=(-3-(-12))\vec{i}-(2-8)\vec{j}+(6-6)\vec{k}$$

$$=9\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k}=(9,6,0)=3(3,2,0)$$

យក $\vec{n}=(3,2,0)$។

ដោយប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុចប្រសព្វ $A(1,2,3)$ នាំឱ្យសមីការប្លង់ (P) គឺ៖

$$3(x-1)+2(y-2)+0(z-3)=0 \iff 3x-3+2y-4=0$$

$$\iff (P): 3x+2y-7=0$$

៨ មុំរវាងប្លង់ពីរ

ជាទូទៅ ៩

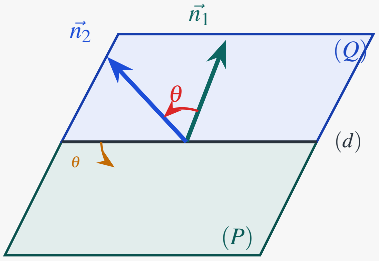
គេមានប្លង់ពីរផ្សេងគ្នា គឺ

- ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n_1}$
- និង ប្លង់ (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n_2}$
  នោះគេបាន ប្លង់ទាំងពីរ៖
- ប្រសព្វគ្នា $(P)\cap(Q)$ ដែលមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរគឺ

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

(ដែល θ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ $\vec{n_1}$ និង $\vec{n_2}$)

- កែងគ្នា $(P)\perp(Q)$ បើ $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$
- ស្របគ្នា $(P)//(Q)$ បើ $\vec{n_1}=k\vec{n_2}$; $k\in\mathbb{R}$; $k\neq 0$



លំហាត់គំរូ ១៩

ក. រកមុំរវាងប្លង់ $\alpha_1: x-2y+z=0$ និងប្លង់ $\alpha_2: 2x+3y-2z=0$ ។ (គេយក $\cos 53.55^\circ = 0.5941$)

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ α_1 និង α_2 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. **រកមុំ θ រវាងប្លង់ α_1 និង α_2 ៖**

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ទាំងពីរគឺ $\overrightarrow{n_1}=(1,-2,1)$ និង $\overrightarrow{n_2}=(2,3,-2)$ ៖

$$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(1)(2)+(-2)(3)+(1)(-2)=2-6-2=-6$$

មុំរវាងប្លង់ទាំងពីរ $(0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ)$ កំណត់ដោយ៖

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|-6|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{17}}=\frac{6}{\sqrt{102}}\approx 0.5941$$

ដោយ $\cos 53.55^\circ\approx 0.5941$ ដូចនេះមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរគឺ $\theta\approx 53.55^\circ$។

❷. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $L=\alpha_1\cap\alpha_2$ ៖

- វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L គឺ៖

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=(4-3)\overrightarrow{i}-(-2-2)\overrightarrow{j}+(3-(-4))\overrightarrow{k}=(1,4,7)$$

- ដោយសមីការប្លង់ទាំងពីរគ្មានតួថេរ $(d=0)$ នោះគល់កូអរដោនេ $O(0,0,0)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការទាំងពីរ នាំឱ្យ $O(0,0,0)\in L$។
- ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ៖

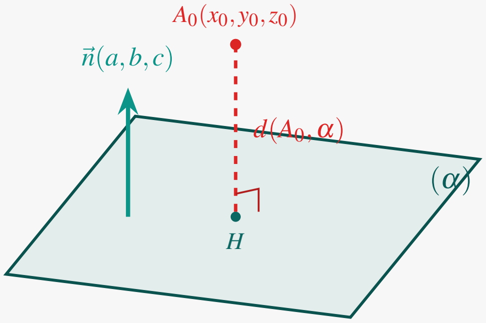
$$(L):\begin{cases}x=t\\ y=4t\\ z=7t\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

៩ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយ

ជាទូទៅ ១០

ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_o,y_o,z_o)$ ទៅប្លង់ (α) : $ax+by+cz+d=0$ កំណត់ដោយ

$d(A_o,\alpha) = \frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



លំហាត់គំរូ ១៥

គណនាចម្ងាយពីចំណុច P_0 ទៅប្លង់ (P) ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $P_0(-1,3,5)$ និង $(P): x-2y+2z+3=0$

ខ. $P_0(2,\sqrt{2},1)$ និង $(P): x-\sqrt{2}y+z+3=0$

ដំណោះស្រាយ

រូបមន្តចម្ងាយពីចំណុច $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅប្លង់ $(P): ax+by+cz+d=0$ គឺ៖

$$d(P_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ក. ចំពោះ $P_0(-1,3,5)$ និង $(P): x-2y+2z+3=0$ ៖

$$d(P_0,P)=\frac{|1(-1)-2(3)+2(5)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|-1-6+10+3|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|6|}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}=2$$

ខ. ចំពោះ $P_0(2,\sqrt{2},1)$ និង $(P): x-\sqrt{2}y+z+3=0$ ៖

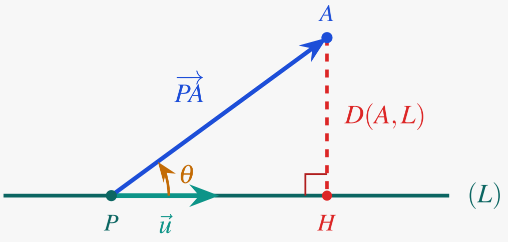
$$d(P_0,P)=\frac{|1(2)-\sqrt{2}(\sqrt{2})+1(1)+3|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}}=\frac{|2-2+1+3|}{\sqrt{1+2+1}}=\frac{|4|}{\sqrt{4}}=\frac{4}{2}=2$$

១០ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ

ជាទូទៅ ១១

គេមានចំណុចA និង បន្ទាត់(L) ក្នុងលំហ ដែល $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(L) ហើយចំណុចP ជាចំណោលកែងនៃចំណុចA លើបន្ទាត់(L) គេបាន ចម្ងាយពីចំណុចA ទៅបន្ទាត់(L) គឺ

$$D(A,L)=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$

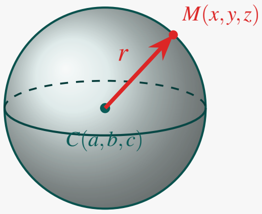


១១ សមីការស្វ៊ែ

និយមន័យ ៣

សមីការនៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ចំណុច $C(a,b,c)$ និង កាំស្មើ r កំណត់ដោយ

- សមីការស្តង់ដារ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$
- សមីការទូទៅ $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ ដែល A,B,C,D ជាចំនួនពិត។



លំហាត់គំរូ ១៦

កំណត់សមីការស្វ៊ែ ផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែ

១. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែល៖

ក. មានផ្ចិតត្រង់ចំណុច $C(2,-3,1)$ និងកាំ $r=4$

ខ. មានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $A(1,2,3)$ និង $B(3,0,1)$

គ. មានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុច $C(1,-2,-1)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (xz)

២. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែដែលមានសមីការដូចខាងក្រោម៖

ក. $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=5$

ខ. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$

ដំណោះស្រាយ

១. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ៖

ក. ផ្ចិត $C(2,-3,1)$ និងកាំ $r=4$ ៖

$$(S):(x-2)^2+(y-(-3))^2+(z-1)^2=4^2 \iff (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16$$

ខ. អង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ដែល $A(1,2,3)$ និង $B(3,0,1)$ ៖

- ផ្ចិត I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$៖

$$I\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+0}{2},\frac{3+1}{2}\right) \Longrightarrow I(2,1,2)$$

- កាំ $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2+(1-3)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4+4}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$
- សមីការស្វ៊ែ (S)៖

$$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(\sqrt{3})^2=3$$

គ. ផ្ចិត $C(1,-2,-1)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (xz) (សមីការប្លង់ (xz) គឺ $y=0$)៖

- កាំ r ស្មើនឹងចម្ងាយពីផ្ចិត C ទៅប្លង់ (xz)៖ $r=|y_C|=|-2|=2$
- សមីការស្វ៊ែ (S)៖

$$(S):(x-1)^2+(y-(-2))^2+(z-(-1))^2=2^2 \iff (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$$

២. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែ៖

ក. $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=5$ ៖
សរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដា៖ $(x-2)^2+(y-(-3))^2+(z-0)^2=(\sqrt{5})^2$
ដូចនេះ ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(2,-3,0)$ និងកាំ $r=\sqrt{5}$។

ខ. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$ ៖

បំប្លែងជាផលបូកការេពេញលេញ៖

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-6z+9)=-10+1+4+9$$

$$\iff (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4=2^2$$

ដូចនេះ ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1,-2,3)$ និងកាំ $r=2$។

ប្រតិបត្តិ ១

១. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែល៖

ក. មានផ្ចិតត្រង់គល់ O និងកាំ $r=\sqrt{10}$

ខ. មានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $A(3,-1,2)$ និង $B(0,3,2)$

គ. មានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុច $C(2,-1,5)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (xy)

ឃ. កាត់តាមចំណុច $D(-5,1,4)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់កូអរដោនេទាំងបី។

២. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែដែលមានសមីការដូចខាងក្រោម៖

ក. $x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2-16=0$

ខ. $x^2+y^2+z^2-10x+6y+4z+13=0$

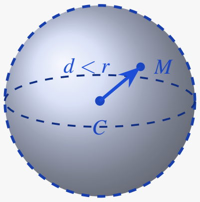
ដំណោះស្រាយ

១២ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុង

ជាទូទៅ ១២

វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុង នៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ (a,b,c) និងមានកាំ r គឺកំណត់ដោយ

$\{(x,y,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2\}$

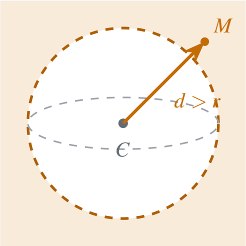


១៣ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅ

ជាទូទៅ ១៣

វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅ នៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ (a,b,c) និងមានកាំ r គឺកំណត់ដោយ

$\{(x,y,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2\}$



លំហាត់គំរូ ១៧

ចូរសរសេរសមីការផ្នែកខាងក្នុង និងក្រៅនៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(-1,-2,1)$ និងកាំ $r=\sqrt{13}$។

ដំណោះស្រាយ

- សមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(-1,-2,1)$ និងកាំ $r=\sqrt{13}$ គឺ៖

$$(x-(-1))^2+(y-(-2))^2+(z-1)^2=(\sqrt{13})^2 \iff (x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=13$$

- **វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែ៖**

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 < 13\}$$

- **វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ៖**

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 > 13\}$$

ប្រតិបត្តិ ២

សរសេរសមីការនៃចំណុចស្ថិតនៅចន្លោះស្វ៊ែពីរមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់ O ហើយមានកាំរៀងគ្នា $r = 2$ និង $R = 5$ ។

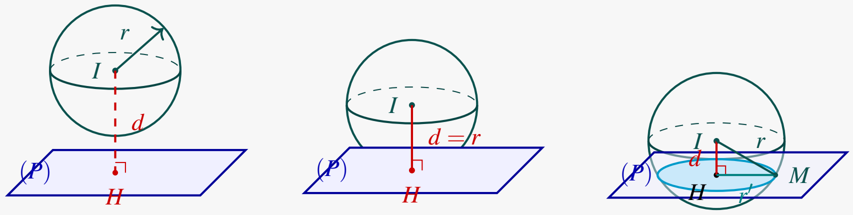
ដំណោះស្រាយ

១៤ ទីតាំងរវាងស្វ៊ែ (S) និងប្លង់ (P)

ជាទូទៅ ១៤

ឧបមាថា d ជាចម្ងាយពីផ្ចិត $I(a,b,c)$ នៃស្វ៊ែ (S) ដែលមានកាំ r ទៅប្លង់ (P) គេបាន៖

- បើ $d>r$ នោះប្លង់ (P) មិនកាត់ស្វ៊ែ (S) ទេ។
- បើ $d=r$ នោះប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច H មួយ (ប្លង់ប៉ះ)។
- បើ $d<r$ នោះប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) បានរង្វង់មួយ (ផ្ចិត H និងកាំ $r'=\sqrt{r^2-d^2}$)។



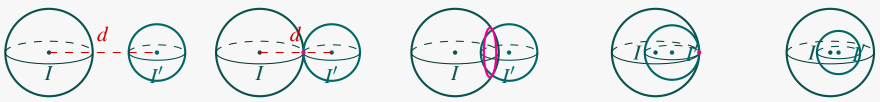
$d>r$ (មិនកាត់ស្វ៊ែ) $d=r$ (ប៉ះត្រង់ H) $d<r$ ($r'=\sqrt{r^2-d^2}$)

១៥ ទីតាំងរវាងស្វ៊ែពីរមានកាំ r និង r'

ជាទូទៅ ១៥

យើងសន្មតថា d ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតនៃស្វ៊ែ (S) និង (S') ដែលមានកាំ r និង r' រៀងគ្នាគេបាន៖

- បើ $d>r+r'$ នោះស្វ៊ែ (S) និង (S') នៅក្រៅគ្នា
- បើ $d=r+r'$ នោះស្វ៊ែ (S) និង (S') ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ
- បើ $|r-r'|<d<r+r'$ នោះស្វ៊ែ (S) និង (S') កាត់គ្នាបានរង្វង់មួយ
- បើ $d=|r-r'|$ នោះស្វ៊ែ (S) និង (S') ប៉ះគ្នាខាងក្នុង
- បើ $d<|r-r'|$ នោះស្វ៊ែ (S) និង (S') នៅក្នុងគ្នា



$d>r+r'$ (នៅក្រៅគ្នា) $d=r+r'$ (ប៉ះក្រៅ) $|r-r'|<d<r+r'$ (កាត់គ្នាបានរង្វង់) $d=|r-r'|$ (ប៉ះក្នុង) $d<|r-r'|$ (នៅក្នុងគ្នា)

១៦ សំណួរពហុជ្រើសរើស (Multiple Choice Questions)

ចូរបញ្ជាក់ចម្លើយត្រឹមត្រូវតែមួយគត់ក្នុងចំណោមជម្រើស ក, ខ, គ, និង ឃ ៖

១. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(4,6,3)$ គឺ៖

ក. 5 ខ. 25 គ. 7 ឃ. $\sqrt{5}$

២. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(0,0,0)$ និង $B(2,-3,6)$ គឺ៖

ក. 49 ខ. 7 គ. $\sqrt{13}$ ឃ. 5

៣. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $M(1,-1,2)$ និង $N(3,1,1)$ គឺ៖

ក. 3 ខ. $\sqrt{11}$ គ. 9 ឃ. $\sqrt{5}$

៤. បើចម្ងាយរវាង $A(x,0,0)$ និង $B(0,3,4)$ ស្មើនឹង $5\sqrt{2}$ នោះ x ស្មើនឹង៖

ក. ± 3 ខ. ± 4 គ. ± 5 ឃ. ± 25

៥. កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាល I នៃអង្កត់ $[AB]$ ដែល $A(2,4,-6)$ និង $B(4,-2,2)$ គឺ៖

ក. $(6,2,-4)$ ខ. $(2,-6,8)$ គ. $(1,-3,4)$ ឃ. $(3,1,-2)$

៦. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម $A(1,2,3)$ និង $B(3,5,7)$ គឺ៖

ក. $(2,3,4)$ ខ. $(4,7,10)$ គ. $(2,2,2)$ ឃ. $(-2,-3,-4)$

៧. ត្រីកោណ ABC ដែល $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ ជាត្រីកោណ៖

ក. សមបាត ខ. សម័ង្ស គ. កែង ឃ. កែងសមបាត

៨. ប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណសម័ង្ស ABC ក្នុងសំណួរខាងលើគឺ៖

ក. 1 ខ. 2 គ. $\sqrt{2}$ ឃ. $\sqrt{3}$

៩. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ខាងលើគឺ៖

ក. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ខ. $\frac{1}{2}$ គ. $\sqrt{3}$ ឃ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

១០. ចំណុច $M(x,y,z)$ ស្មើចម្ងាយពី $A(1,0,0)$ និង $B(-1,0,0)$ លុះត្រាតែ៖

ក. $x=0$ ខ. $y=0$ គ. $z=0$ ឃ. $x+y+z=0$

១១. សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កាត់តាម $M_0(x_0,y_0,z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$ គឺ៖

ក. $x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct$ ខ. $x=x_0-at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0-ct$

គ. $ax+by+cz+d=0$ ឃ. $\frac{x-x_0}{a}+\frac{y-y_0}{b}+\frac{z-z_0}{c}=0$

១២. សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់កាត់តាម $M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b,c)$ $(abc\neq 0)$ គឺ៖

ក. $\frac{x+x_0}{a}=\frac{y+y_0}{b}=\frac{z+z_0}{c}$ ខ. $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$

គ. $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ឃ. $\frac{a}{x-x_0}=\frac{b}{y-y_0}=\frac{c}{z-z_0}$

១៣. បន្ទាត់ $(L):\begin{cases}x=1+2t\\y=-3+4t\\z=5-t\end{cases}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសគឺ៖

ក. $(1,-3,5)$ ខ. $(-1,3,-5)$ គ. $(2,4,-1)$ ឃ. $(2,4,1)$

១៤. បន្ទាត់ (L) ក្នុងសំណួរខាងលើកាត់តាមចំណុចណា?៖

ក. $(2,4,-1)$ ខ. $(-1,3,-5)$ គ. $(0,0,0)$ ឃ. $(1,-3,5)$

១៥. សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កាត់តាម $A(2,-1,3)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(3,0,-2)$ គឺ៖

ក. $\begin{cases}x=2+3t\\y=-1\\z=3-2t\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}x=3+2t\\y=-t\\z=-2+3t\end{cases}$

គ. $\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=3-2t\end{cases}$ ឃ. $\begin{cases}x=2-3t\\y=-1\\z=3+2t\end{cases}$

១៦. សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់កាត់តាម $A(1,-2,4)$ និង $B(2,1,3)$ គឺ៖

ក. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{1}$ ខ. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$

គ. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}$ ឃ. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-1}$

១៧. ចំណុចណាដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $(L):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$?៖

ក. $(1,1,2)$ ខ. $(2,3,-1)$ គ. $(3,2,1)$ ឃ. $(0,0,0)$

១៨. បើចំណុច $M(5,y_0,0)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ខាងលើ នោះ y_0 ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. -1 គ. 3 ឃ. 5

១៩. បន្ទាត់ពីរ $(L_1):\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ និង $(L_2):\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z}{2}$ ជាបន្ទាត់៖

ក. ស្របគ្នា ខ. កែងគ្នា គ. កាត់គ្នា ឃ. ទ្រួតគ្នា

២០. បន្ទាត់ពីរ $(L_1):\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3t\end{cases}$ និង $(L_2):\begin{cases}x=2s\\y=1+s\\z=-1-s\end{cases}$ កែងគ្នាកាលណាផលគុណស្កាលែនៃវិចទ័រប្រាប់ទិសស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 0 គ. -1 ឃ. 2

២១. ពីសំណួរខាងលើ បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ៖

ក. ស្របគ្នា ខ. កាត់គ្នា គ. កែងគ្នា ឃ. មិនកែងគ្នាទេ

២២. បន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្ស (Oz) មានវិចទ័រប្រាប់ទិសគឺ៖

ក. $(1,0,0)$ ខ. $(0,1,0)$ គ. $(1,1,0)$ ឃ. $(0,0,1)$

២៣. សមីការបន្ទាត់តំណាងអ័ក្ស (Ox) គឺ៖

ក. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$

គ. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ ឃ. $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}$

២៤. បន្ទាត់ពីរស្របគ្នាកាលណា វិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់វាទាំងពីរ៖

ក. កែងគ្នា ខ. កូលីនេអ៊ែរគ្នា គ. ស្មើគ្នានឹងសូន្យ ឃ. គ្មានទំនាក់ទំនង

២៥. បន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2) កាត់គ្នាកាលណា៖

ក. វិចទ័រប្រាប់ទិសកូលីនេអ៊ែរគ្នា ខ. គ្មានចំណុចរួម គ. មានចំណុចរួមតែមួយគត់ ឃ. ស្ថិតក្នុងប្លង់ពីរផ្សេងគ្នា

២៦. បន្ទាត់កាត់តាម $A(1,0,-1)$ និងកែងនឹងប្លង់ $(P): 2x-y+3z-5=0$ មានវិចទ័រប្រាប់ទិសគឺ៖

ក. $(1,0,-1)$ ខ. $(-2,1,-3)$ គ. $(2,1,3)$ ឃ. $(2,-1,3)$

២៧. សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ក្នុងសំណួរខាងលើគឺ៖

ក. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=-1+3t\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}x=2+t\\y=-1\\z=3-t\end{cases}$

គ. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = t \\ z = -1-3t \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -1+3t \end{cases}$

២៨. បន្ទាត់ (L) កាត់តាម $A(0,0,0)$ និង $B(1,1,1)$ មានសមីការឆ្លុះគឺ៖

ក. $x = y-1 = z$ ខ. $x = y = z$ គ. $x+y+z = 0$ ឃ. $x-y = z$

២៩. បន្ទាត់ (L) កាត់តាម $A(2,3,4)$ និងស្របនឹងអ័ក្ស (Oy) មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ៖

ក. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4+t \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3+t \\ z = 4 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 4t \end{cases}$

៣០. បន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ (Oxy) និង (Oxz) គឺ៖

ក. អ័ក្ស (Oy) ខ. អ័ក្ស (Oz) គ. បន្ទាត់ $x = y = z$ ឃ. អ័ក្ស (Ox)

៣១. សមីការទូទៅនៃប្លង់ក្នុងលំហមានទម្រង់៖

ក. $Ax+By+Cz+D = 0$ ខ. $y = ax+b$

គ. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$ ឃ. $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

៣២. វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ $(P): 3x-2y+5z-7 = 0$ គឺ៖

ក. $(3,2,5)$ ខ. $(3,-2,5)$ គ. $(-3,2,5)$ ឃ. $(3,-2,-7)$

៣៣. ប្លង់ (P) កាត់តាម $A(1,2,3)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (2,-1,4)$ មានសមីការគឺ៖

ក. $2x-y+4z-14 = 0$ ខ. $2x-y+4z+12 = 0$

គ. $2x-y+4z-12 = 0$ ឃ. $x+2y+3z-12 = 0$

៣៤. ប្លង់កាត់តាមគល់តម្រុយ $O(0,0,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (1,2,3)$ មានសមីការគឺ៖

ក. $x+2y+3z = 6$ ខ. $x+2y+3z = 1$ គ. $x+2y-3z = 0$ ឃ. $x+2y+3z = 0$

៣៥. សមីការប្លង់កូអរដោនេ (Oxy) គឺ៖

ក. $z = 0$ ខ. $x = 0$ គ. $y = 0$ ឃ. $x+y = 0$

៣៦. សមីការប្លង់កូអរដោនេ (Oyz) គឺៈ

ក. $z=0$ ខ. $x=0$ គ. $y=0$ ឃ. $y+z=0$

៣៧. សមីការប្លង់កូអរដោនេ (Oxz) គឺៈ

ក. $z=0$ ខ. $x=0$ គ. $y=0$ ឃ. $x+z=0$

៣៨. ប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (Oxy) និងកាត់តាម $A(1,2,5)$ មានសមីការគឺៈ

ក. $x=1$ ខ. $y=2$ គ. $x+y=3$ ឃ. $z=5$

៣៩. ប្លង់ស្របនឹងប្លង់ $(P): 2x-3y+z-1=0$ ត្រូវតែមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់កូលីនេអ៊ែរនឹងៈ

ក. $(2,-3,1)$ ខ. $(2,3,1)$ គ. $(1,-3,2)$ ឃ. $(-2,-3,1)$

៤០. ប្លង់កាត់តាម $A(1,1,1)$ និងស្របនឹងប្លង់ $(P): x+2y-3z+4=0$ មានសមីការគឺៈ

ក. $x+2y-3z=4$ ខ. $x+2y-3z=0$ គ. $x+2y-3z+1=0$ ឃ. $x+2y-3z-2=0$

៤១. ប្លង់ (P) កាត់អ័ក្សទាំងបីត្រង់ $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ $(abc\neq 0)$ មានសមីការតាមកង់គឺៈ

ក. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ ខ. $ax+by+cz=1$

គ. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ឃ. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$

៤២. ប្លង់កាត់តាម $A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6)$ មានសមីការគឺៈ

ក. $3x+2y+z-1=0$ ខ. $6x+3y+2z-6=0$ គ. $3x+2y+z+6=0$ ឃ. $3x+2y+z-6=0$

៤៣. ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ ជាប្លង់ដែលៈ

ក. កែងនឹង $[AB]$ ត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ខ. កាត់តាមចំណុច A និងកែងនឹង $[AB]$

គ. កាត់តាមចំណុច B និងកែងនឹង $[AB]$ ឃ. ស្របនឹង $[AB]$

៤៤. គេឱ្យ $A(1,2,3)$ និង $B(3,4,1)$។ ចំណុចកណ្ដាល I នៃ $[AB]$ គឺៈ

ក. $(1,1,-1)$ ខ. $(2,3,2)$ គ. $(4,6,4)$ ឃ. $(2,2,2)$

៤៥. ពីសំណួរខាងលើ សមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ គឺៈ

ក. $x+y+z-7=0$ ខ. $x-y+z-1=0$ គ. $x+y-z-3=0$ ឃ. $2x+2y-2z-5=0$

៤៦. ប្លង់កាត់តាមបីចំណុច $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់គឺៈ

ក. $(1,0,1)$ ខ. $(0,1,1)$ គ. $(-1,1,0)$ ឃ. $(1,1,1)$

៤៧. សមីការប្លង់កាត់តាមបីចំណុចក្នុងសំណួរខាងលើគឺៈ

ក. $x+y+z-1=0$ ខ. $x+y+z+1=0$ គ. $x+y-z-1=0$ ឃ. $x-y+z-1=0$

៤៨. ប្លង់ពីរ $(P_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ និង $(P_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ កែងគ្នាកាលណា៖

ក. $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=1$ ខ. $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

គ. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ ឃ. $D_1=D_2$

៤៩. ប្លង់ $(P): 2x-y+3z-4=0$ និង $(Q): x+2y+mz+1=0$ កែងគ្នាកាលណា m ស្មើនឹង៖

ក. $m=1$ ខ. $m=-1$ គ. $m=0$ ឃ. $m=2$

៥០. ប្លង់ពីរ $(P): 3x-6y+9z-2=0$ និង $(Q): x-2y+3z+5=0$ ជាប្លង់៖

ក. កាត់គ្នា ខ. កែងគ្នា គ. ត្រួតគ្នា ឃ. ស្របគ្នាដាច់ខាត

៥១. កូស៊ីនុសនៃមុំរវាងប្លង់ពីរដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ កំណត់ដោយ៖

ក. $\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$ ខ. $\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$

គ. $\cos\theta=\frac{\|\vec{n}_1\times\vec{n}_2\|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$ ឃ. $\cos\theta=|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|$

៥២. មុំរវាងប្លង់ $(P): x+y-2=0$ និង $(Q): y+z-3=0$ គឺ៖

ក. 30° ខ. 60° គ. 45° ឃ. 90°

៥៣. មុំរវាងប្លង់ $(P): x=0$ និង $(Q): y=0$ គឺ៖

ក. 0° ខ. 45° គ. 90° ឃ. 180°

៥៤. ប្លង់ (P) កាត់តាម $A(1,2,-1)$ និងកែងនឹងបន្ទាត់ $(L): \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-4}$ មានសមីការគឺ៖

ក. $3x+2y-4z-10=0$ ខ. $3x+2y-4z+11=0$ គ. $3x-2y+4z-11=0$ ឃ. $3x+2y-4z-11=0$

៥៥. បន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (P) កាលណា៖

ក. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កូលីនេអ៊ែរនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (P) ខ. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កែងនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (P)

គ. បន្ទាត់ (L) ស្ថិតក្នុងប្លង់ (P) ឃ. គ្មានចំណុចរួម

៥៦. បន្ទាត់ (L) ស្របនឹងប្លង់ (P) កាលណា៖

ក. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កូលីនេអ៊ែរនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (P) ខ. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កែងនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (P)

គ. បន្ទាត់ (L) កាត់ប្លង់ (P) ត្រង់មួយចំណុច ឃ. វ៉ិចទ័រទាំងពីរបូកចូលគ្នាស្មើ $\vec{0}$

៥៧. បន្ទាត់ $(L): \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ និងប្លង់ $(P): 2x-y-3=0$ ៖

ក. កាត់គ្នាត្រង់មួយចំណុច ខ. កែងគ្នា គ. ស្របគ្នា ឃ. ត្រួតគ្នា

៥៨. ប្រព័ន្ធសមីការតំណាងបន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ពីរ $(P): x+y+z-1=0$ និង $(Q): 2x-y+z-2=0$ គឺ៖

ក. $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ ខ. $x+y+z=2x-y+z$

គ. $(x+y+z-1)(2x-y+z-2)=0$ ឃ. $\frac{x+y+z-1}{2x-y+z-2}=1$

៥៩. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ខាងលើកំណត់ដោយៈ

ក. $\vec{n}_P+\vec{n}_Q$ ខ. $\vec{n}_P\times\vec{n}_Q$ គ. $\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q$ ឃ. $\vec{n}_P-\vec{n}_Q$

៦០. វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (Oxy) និងប្លង់ (Oyz) គឺៈ

ក. $(1,0,0)$ ខ. $(0,1,0)$ គ. $(0,0,1)$ ឃ. $(1,1,0)$

៦១. ប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $M(1,-2,3)$ និងស្របនឹងអ័ក្ស (Ox) និង (Oy) មានសមីការគឺៈ

ក. $x=1$ ខ. $y=-2$ គ. $x+y=-1$ ឃ. $z=3$

៦២. ប្លង់កាត់តាម $A(1,0,0)$ និងផ្ទុកអ័ក្ស (Oy) មានសមីការគឺៈ

ក. $z=0$ ខ. $y=0$ គ. $x=0$ ឃ. $x+z=1$

៦៣. ប្លង់កាត់តាម $A(0,0,2)$ និងផ្ទុកអ័ក្ស (Ox) មានសមីការគឺៈ

ក. $x=0$ ខ. $y=0$ គ. $z=2$ ឃ. $x+y=2$

៦៤. ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $(L):\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}$ និងប្លង់ $(P):x+y+z-8=0$ គឺៈ

ក. $(2,2,0)$ ខ. $(3,3,2)$ គ. $(3,4,1)$ ឃ. $(4,2,2)$

៦៥. តាង t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ចំណុចប្រសព្វក្នុងសំណួរខាងលើត្រូវនឹងតម្លៃ t ស្មើនឹងៈ

ក. $t=0$ ខ. $t=1$ គ. $t=3$ ឃ. $t=2$

៦៦. ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅប្លង់ $(P):Ax+By+Cz+D=0$ គឺៈ

ក. $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ខ. $d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

គ. $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}$ ឃ. $d=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}$

៦៧. ចម្ងាយពីគល់តម្រុយ $O(0,0,0)$ ទៅប្លង់ $(P):2x-2y+z-6=0$ គឺៈ

ក. 3 ខ. 2 គ. 6 ឃ. 1

៦៨. ចម្ងាយពីចំណុច $A(1,2,3)$ ទៅប្លង់ $(P):2x+y-2z+8=0$ គឺៈ

ក. 1 ខ. 3 គ. 2 ឃ. 6

៦៩. ចម្ងាយពីចំណុច $M(2,-1,1)$ ទៅប្លង់ (Oxy) គឺ៖

ក. 2 ខ. 1 គ. 3 ឃ. 1

៧០. ចម្ងាយពីចំណុច $M(2,-3,4)$ ទៅប្លង់ (Oxz) គឺ៖

ក. 3 ខ. 2 គ. 4 ឃ. 5

៧១. ចម្ងាយរវាងប្លង់ស្របគ្នាពីរ $(P): 2x-y+2z-1=0$ និង $(Q): 2x-y+2z+8=0$ គឺ៖

ក. 9 ខ. 3 គ. 6 ឃ. 1

៧២. ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់ (L) កាត់តាម A មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ គឺ៖

ក. $d=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$ ខ. $d=\frac{\|\overrightarrow{AM}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|^2}$

គ. $d=\frac{\|\overrightarrow{AM}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ ឃ. $d=\|\overrightarrow{AM}\times\vec{u}\|$

៧៣. ចម្ងាយពីគល់តម្រុយ $O(0,0,0)$ ទៅបន្ទាត់ $(L):\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ (អ័ក្ស Ox) គឺ៖

ក. 1 ខ. $\sqrt{2}$ គ. ∞ ឃ. 0

៧៤. ចម្ងាយពីចំណុច $M(1,2,0)$ ទៅអ័ក្ស (Oz) គឺ៖

ក. $\sqrt{5}$ ខ. 1 គ. 2 ឃ. 5

៧៥. ចម្ងាយពីចំណុច $M(3,0,4)$ ទៅអ័ក្ស (Oy) គឺ៖

ក. 7 ខ. 5 គ. 3 ឃ. 4

៧៦. ចម្ងាយពី $M(0,1,0)$ ទៅបន្ទាត់ $(L): \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ គឺ៖

ក. 0 ខ. 2 គ. 1 ឃ. $\sqrt{2}$

៧៧. ចម្ងាយពីចំណុច $M(1,1,1)$ ទៅប្លង់ $(P): x+y+z-3=0$ គឺ៖

ក. 3 ខ. $\sqrt{3}$ គ. 1 ឃ. 0

៧៨. ពីសំណួរខាងលើ បញ្ជាក់ថាចំណុច $M(1,1,1)$ ៖

ក. ស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) ខ. នៅក្រៅប្លង់ (P)

គ. ជាចំណោលកែងលើប្លង់ (P) ឃ. គ្មានន័យ

៧៩. រកតម្លៃ m បើចម្ងាយពី $A(1,0,1)$ ទៅប្លង់ $(P): 2x-y+2z+m=0$ ស្មើនឹង 2 ៖

ក. $m=2$ ឬ $m=-10$ ខ. $m=2$ ឬ $m=-6$
គ. $m=0$ ឃ. $m=6$ ឬ $m=-6$

៨០. ប្លង់ (P) មួយប៉ះស្វ៊ែ (S) កាលណាចម្ងាយពីផ្ចិត I ទៅប្លង់ (P) ៖
ក. ធំជាងកាំ r ខ. ស្មើនឹងកាំ r គ. តូចជាងកាំ r ឃ. ស្មើនឹងសូន្យ

៨១. សមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ r គឺ៖
ក. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r$ ខ. $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=r^2$
គ. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ឃ. $x^2+y^2+z^2=r^2$

៨២. ផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$ គឺ៖
ក. $I(-1,2,-3),\ r=16$ ខ. $I(1,-2,3),\ r=16$
គ. $I(-1,2,-3),\ r=4$ ឃ. $I(1,-2,3),\ r=4$

៨៣. ស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $O(0,0,0)$ និងកាំ $r=5$ មានសមីការគឺ៖
ក. $x^2+y^2+z^2=25$ ខ. $x^2+y^2+z^2=5$ គ. $(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=0$ ឃ. $x+y+z=25$

៨៤. សមីការទូទៅ $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ មានផ្ចិតគឺ៖
ក. $(-1,2,-3)$ ខ. $(1,-2,3)$ គ. $(2,-4,6)$ ឃ. $(-2,4,-6)$

៨៥. កាំនៃស្វ៊ែក្នុងសំណួរខាងលើគឺ៖
ក. $r=14$ ខ. $r=4$ គ. $r=3$ ឃ. $r=9$

៨៦. លក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យសមីការ $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ ជាសមីការស្វ៊ែគឺ៖
ក. $A^2+B^2+C^2-D>0$ ខ. $A^2+B^2+C^2-4D=0$
គ. $A^2+B^2+C^2+4D>0$ ឃ. $A^2+B^2+C^2-4D>0$

៨៧. វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែផ្ចិត $I(a,b,c)$ កាំ r គឺ៖
ក. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2$ ខ. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2$
គ. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le r$ ឃ. $x^2+y^2+z^2<r^2$

៨៨. វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែផ្ចិត $I(a,b,c)$ កាំ r គឺ៖
ក. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2$ ខ. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2$
គ. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ឃ. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\ge r$

៨៩. ចំណុច $M(1,1,1)$ ធៀបនឹងស្វ៊ែ $(S): x^2+y^2+z^2=9$ ស្ថិតនៅ៖

ក. លើស្វ៊ែ ខ. ក្រៅស្វ៊ែ គ. ក្នុងស្វ៊ែ ឃ. ត្រង់ផ្ចិតស្វ៊ែ

៩០. ចំណុច $P(2,2,2)$ ធៀបនឹងស្វ៊ែ $(S): x^2+y^2+z^2=9$ ស្ថិតនៅ៖

ក. ក្នុងស្វ៊ែ ខ. លើស្វ៊ែ គ. ត្រង់ផ្ចិត ឃ. ក្រៅស្វ៊ែ

៩១. បើចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែទៅប្លង់គឺ $d>r$ នោះប្លង់ និងស្វ៊ែ៖

ក. មិនកាត់គ្នា ខ. ប៉ះគ្នាត្រង់មួយចំណុច គ. កាត់គ្នាបានរង្វង់មួយ ឃ. កាត់គ្នាបានបន្ទាត់មួយ

៩២. បើចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែទៅប្លង់គឺ $d=r$ នោះប្លង់ និងស្វ៊ែ៖

ក. មិនកាត់គ្នា ខ. ប៉ះគ្នាត្រង់មួយចំណុច គ. កាត់គ្នាបានរង្វង់មួយ ឃ. មានចំណុចរួមច្រើនរាប់មិនអស់

៩៣. បើចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែទៅប្លង់គឺ $d<r$ នោះប្លង់កាត់ស្វ៊ែបាន៖

ក. ចំណុចមួយ ខ. បន្ទាត់មួយ គ. រង្វង់មួយ ឃ. ពងក្រពើមួយ

៩៤. កាំ r' នៃរង្វង់ប្រសព្វរវាងស្វ៊ែកាំ r និងប្លង់ដែលមានចម្ងាយ d $(d<r)$ គឺ៖

ក. $r'=r-d$ ខ. $r'=\sqrt{r^2+d^2}$ គ. $r'=r^2-d^2$ ឃ. $r'=\sqrt{r^2-d^2}$

៩៥. ស្វ៊ែកាំ $r=5$ ត្រូវបានកាត់ដោយប្លង់មួយនៅចម្ងាយ $d=3$ ពីផ្ចិត។ កាំរង្វង់ប្រសព្វគឺ៖

ក. $r'=4$ ខ. $r'=2$ គ. $r'=16$ ឃ. $r'=\sqrt{34}$

៩៦. ស្វ៊ែកាំ $r=10$ ត្រូវបានកាត់ដោយប្លង់មួយនៅចម្ងាយ $d=6$ ពីផ្ចិត។ ផ្ទៃក្រឡារង្វង់ប្រសព្វគឺ៖

ក. 64π ខ. 8π គ. 16π ឃ. 100π

៩៧. បើចម្ងាយរវាងផ្ចិតនៃស្វ៊ែពីរគឺ $d>r+r'$ នោះស្វ៊ែទាំងពីរ៖

ក. ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ ខ. នៅក្រៅគ្នា គ. កាត់គ្នាបានរង្វង់មួយ ឃ. នៅក្នុងគ្នា

៩៨. បើចម្ងាយរវាងផ្ចិតនៃស្វ៊ែពីរគឺ $d=r+r'$ នោះស្វ៊ែទាំងពីរ៖

ក. នៅក្រៅគ្នា ខ. កាត់គ្នា គ. ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ ឃ. ប៉ះគ្នាខាងក្នុង

៩៩. បើ $|r-r'|<d<r+r'$ នោះស្វ៊ែទាំងពីរ៖

ក. នៅក្រៅគ្នា ខ. ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ គ. នៅក្នុងគ្នា ឃ. កាត់គ្នាបានរង្វង់មួយ

១០០. បើ $d=|r-r'|$ $(r\neq r')$ នោះស្វ៊ែទាំងពីរ៖

ក. ប៉ះគ្នាខាងក្នុង ខ. ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ គ. កាត់គ្នា ឃ. មានផ្ចិតរួមគ្នា

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. $ABCD$ ជាចតុមុខមួយដែលមានទ្រនុងទាំង 6 ប៉ុនៗគ្នា។ A' ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (BCD) ។ O ជាចំណុចមួយនៃ $[AA']$ ដែល $OA = OB = 3 \cdot OA' = x(cm)$ ។

ក. ចូរគណនា $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. ចូរគណនា $\cos AOB$ រួចទាញរក AB ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

❷. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(2,2,2), B(2,0,1)$ និង $C(0,-1,3)$ ។

ក. ចូរសង់រូប។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង។

ដំណោះស្រាយ

៣. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យចំណុច $A(1,-3,2)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{w}=(2,1,3)$។(បេក្ខជនមិនបាច់គូសរូប)

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{w}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងប្លង់ (Q) ដែលមានសមីការ $2x-y+5z+3=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

៤. រកចំនួនពិតxដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រ$\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ កែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{c}=x\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$។

ដំណោះស្រាយ

៥. រកចំនួនពិតyដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រ$\vec{a}(-2,1,7)$ កែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ$\vec{e}(1,y,4)$។

ដំណោះស្រាយ

៦. បង្ហាញថាចំណុច$P(1,7,2)$;$Q(0,7,-2)$ និង $R(-1,6,1)$ ជាកំពូលត្រីកោណកែង។

ដំណោះស្រាយ

៧. រកប្រវែង និង ទិសដៅស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}(-1,1,1)$

ខ. $\vec{u}(3,0,0)$

គ. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

ឃ. $\vec{u}=4\vec{i}-\vec{j}$

ង. $\vec{u}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

ច. $\vec{u}=-3\vec{i}-3\vec{j}+8\vec{k}$

ឆ. $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$

ជ. $\vec{u}=-2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$

ដំណោះស្រាយ

៨. រកមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}(4,2,4)$ និង $\vec{v}(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$

ខ. $\vec{u}(2,1,-2)$ និង $\vec{v}(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$

គ. $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ និង $\vec{v}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

ឃ. $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ និង $\vec{v}=\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}$

ដំណោះស្រាយ

៩. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(0,1,-4),B(-2,1,-1)$ និង $C(1,1,1)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. រកប្រវែងអង្កត់AB និង BC។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$។

ឃ. រកមុំ $\angle ABC$រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ$\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

១០. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,2,6),B(2+2\sqrt{2},0,4)$ និង $C(2+2\sqrt{2},4,4)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$។

ខ. រកប្រវែងអង្កត់AB និង AC។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$។

ឃ. រកមុំ $\angle BAC$រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ$\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ៣ មេរៀនទី៣ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ

១១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(4,2,3), B(-2,1,-1), C(3,8,7)$ និង $D(-6,2,z)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. រកប្រវែងអង្កត់ AB, AC និង BC។

គ. បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត។

ឃ. កំណត់ចំនួនពិត z ដើម្បី ABD ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B។

ង. រកកូអរដោនេទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ $\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

១២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(0,6,2)$, $B(3,4,1)$ និង $C(1,3,4)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. រកប្រវែងអង្កត់AB, AC និង BC។

គ. តើ$\triangle ABC$ ជាត្រីកោណ សមបាត ត្រីកោណសម័ង្ស ឬជាត្រីកោណកែង ?

ដំណោះស្រាយ

១៣. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,1,0), B(0,2,1)$ និង $C(0,-1,4)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$។

ខ. រកប្រវែងអង្កត់ AB និង AC។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$។

ឃ. គណនាមុំ θ ដែលផ្គុំឡើងរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$។

ដំណោះស្រាយ

១៤. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$M(3,1,5),N(3,5,1)$ និង $P(-1,5,5)$។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$។

ខ. គណនាមុំ θដែលផ្គុំឡើងរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MP}$។

គ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ$\triangle MNP$។

ដំណោះស្រាយ

១៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,1),B(2,1,0)$ និង វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}(-1,2,1)$។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចC។

គ. គេគូសមេដ្យានBMនៃត្រីកោណABC។រកកូអរដោនេចំណុចM។

ឃ. រកទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណABC។

ដំណោះស្រាយ

១៦. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

ក. កាត់តាមចំណុច$A(-1,-1,4)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$។

ខ. កាត់តាមចំណុច$B(1,3,-2)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ $x-y+2z=5$។

គ. កាត់តាមចំណុច$C(1,-1,2)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ $5x-y+3z=7$។

ឃ. កាត់តាមចំណុច$D(1,5,10)$ ហើយស្របនឹងអ័ក្សកូដ។

ង. កាត់តាម$E(2,-1,0)$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់$(d): x=3+2t, y=5-2t, z=-7+5t, t\in\mathbb{R}$។

ច. កាត់តាមចំណុច$F(0,4,-2)$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់$(d): \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$។

ដំណោះស្រាយ

១៧. ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(L)កាត់តាមចំណុច$P(2,-3,7)$ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}(1,1,-4)$។

ខ. រកវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $(d): 2x-6=4-y=z-5$។

គ. រកមុំផ្គុំរវាងបន្ទាត់(L) និង (d)។

ដំណោះស្រាយ

១៨. រកសមីការប្លង់ α ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. ប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $A(2,1,3)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ $(P): 2x+2y+z-6=0$។

ខ. ប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $A(-1,3,5)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ $(P): 6x-3y-2z+9=0$។

គ. ប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $O(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ $(P): 3x-7y+z=4$។

ឃ. ប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $A(4,-2,1)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P(2,-1,2)$ និង $Q(3,2,-1)$។

ង. ប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $A(-1,3,2)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ (yoz)។

ច. ប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $A(-7,8,9)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ (xoz)។

ឆ. ប្លង់ α កាត់តាមគល់តម្រុយហើយស្របនឹងប្លង់ (xoy)។

ដំណោះស្រាយ

១៩. គេមានប្លង់ α កាត់តាមចំណុច$P(1,2,-3)$ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់$\vec{n}(3,-2,5)$។

ក. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់α។

ខ. តើ$\vec{a}(4,1,-2)$ជាវ៉ិចទ័រស្របឬកែងទៅនឹងប្លង់α?

គ. តើ$\vec{a}(15,-10,25)$ជាវ៉ិចទ័រស្របឬកែងទៅនឹងប្លង់α?

ឃ. រកវ៉ិចទ័រមួយផ្សេងទៀតដែលកែងទៅនឹងប្លង់α។

ដំណោះស្រាយ

២០. គេមានប្លង់ $(\alpha): x+2y-z-8=0$។

ក. តើ$A(1,3,-1), B(3,5,1)$ និង $C(1,6,5)$ជាចំណុចនៅលើប្លង់(α)ឬទេ?

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់នឹងអ័ក្សទាំងបី។

គ. រកពីរវ៉ិចទ័រដែលស្របទៅនឹងប្លង់(α)។

ដំណោះស្រាយ

២១. គណនាចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់ខាងក្រោម៖

ក. ពីចំណុច$A(3,2,-1)$ ទៅប្លង់$(\alpha): 7x-6y+6z=8$។

ខ. ពីចំណុច$O(0,0,0)$ ទៅប្លង់$(\alpha): 2x+y-2z+7=0$។

គ. ពីចំណុច$Q(-2,8,-3)$ ទៅប្លង់$(\alpha): 9x-y-4z=0$។

ឃ. ពីចំណុច$R(-1,2,-1)$ ទៅប្លង់$(\alpha): x+y=6$។

ង. ពីចំណុច$R(0,-3,0)$ ទៅប្លង់$(\alpha): 2x-7y+z-1=0$។

ច. ពីចំណុច$R(4,-4,1)$ ទៅប្លង់$(\alpha): 2x+y-z=3$។

ដំណោះស្រាយ

២២. គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ពីរស្របគ្នា៖

ក. $(\alpha): 8x+y-4z+6=0$ និង $(\beta): 8x+y-4z=24$ ។

ខ. $(\alpha): 2x+y-z=12$ និង $(\beta): 2x+y-z=7$ ។

ដំណោះស្រាយ

២៣. រកមុំរវាងប្លង់ខាងក្រោម៖

ក. $(\alpha): x-2y+3z-4=0$ និង $(\beta): -2x+2y-z=3$។

ខ. $(\alpha): 3x-z=7$ និង $(\beta): 2y+4z=5$។

គ. $(\alpha): 4x-4y+7z=31$ និង $(\beta): 3x-2y-6z=11$។

ឃ. $(\alpha): 2x+3y+5z=17$ និង $(\beta): x=4$។

ដំណោះស្រាយ

២៤. រកសមីការស្វ៊ែក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. ស្វ៊ែSមានផ្ចិត $I(0,1,2)$និង កាំ$r=\sqrt{3}$។

ខ. ស្វ៊ែSមានផ្ចិត $I(0,-1,3)$ ហើយកាត់តាមចំណុច$M(2,1,1)$។

គ. ស្វ៊ែSមានអង្កត់ផ្ចិតABដែលចំណុច$A(4,0,5)$ និង $B(0,4,5)$។

ឃ. ស្វ៊ែSមានផ្ចិត $I(3,-1,4)$ ហើយកាំជាចម្ងាយពី$Q(0,2,1)$ទៅប្លង់$(\alpha): x-2y+3z-1=0$។

ង. ស្វ៊ែSមានផ្ចិត $I(2,2,-1)$ ហើយប៉ះនិងប្លង់$(P): 2x+y-z-3=0$។

ច. ស្វ៊ែSមានផ្ចិត $I(-5,1,1)$ ហើយប៉ះស្វ៊ែ $S': x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$។

ឆ. ស្វ៊ែSមានផ្ចិត $I(1,0,-1)$ ហើយប៉ះស្វ៊ែ$S': x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$។

ដំណោះស្រាយ

២៥. រកកូអរដោនេផ្ចិត និង កាំនៃស្វ៊ែនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$

ខ. $x^2+y^2+z^2+2x+14y-10z+74=0$

គ. $2x^2+2y^2+2z^2+4x-4y-14=0$

ឃ. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-19=0$

ង. $x^2+y^2+z^2-8x+4y+10z+9=0$

ច. $x^2+y^2+z^2-4=0$

ដំណោះស្រាយ

២៦. កំណត់ទីតាំងរវាងស្វ៊ែS' និង S៖

ក. $S: x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$ និង $S': x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-19=0$

ខ. $S: x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z+4=0$ និង $S': x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+5=0$

គ. $S: 2x^2+2y^2+2z^2+4x-4y-14=0$ និង $S': x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$

ដំណោះស្រាយ

២៧. កំណត់ទីតាំងរវាងស្វ៊ែ S' និង ប្លង់ P៖

ក. $S: x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ និង $(P): 2x-2y+z-1=0$

ខ. $S: x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z-22=0$ និង $(P): x+2y-2z-5=0$

គ. $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+2=0$ និង $(P): x+y-2z-11=0$

ដំណោះស្រាយ

២៨. ក្នុងសំណេរខាងក្រោមមួយណាជាបញ្ញាក់វិសមភាព៖

ក. $\vec{j}\times\vec{i}$ ខ. $\vec{i}\times\vec{j}$ គ. $\vec{j}\times\vec{k}$ ឃ. $\vec{k}\times\vec{j}$ ង. $\vec{i}\times\vec{k}$ ច. $\vec{k}\times\vec{i}$

ដំណោះស្រាយ

២៩. រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ កែងនឹង $\vec{u}$ ផង ហើយកែងនឹង $\vec{v}$ ផងក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(2,-3,1);\vec{v}=(1,-2,1)$

ខ. $\vec{u}=(12,-3,0);\vec{v}=(-2,5,0)$

គ. $\vec{u}=(1,1,1);\vec{v}=(2,1,-1)$

ឃ. $\vec{u}=(-1,1,2);\vec{v}=(0,1,0)$

ង. $\vec{u}=(2,-3,1);\vec{v}=(1,-2,1)$

ច. $\vec{u}=(0,1,6);\vec{v}=(1,-2,1)$

ដំណោះស្រាយ

៣០. រក $\vec{u}(4,-2,,5)$ និង $\vec{v}(7,9,-8)$។ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម៖

ក. $2\vec{u}+\vec{x}=3\vec{v}$

ខ. $4\vec{x}-\vec{u}=3\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{x}$

ដំណោះស្រាយ

៣១. គេឱ្យ $\vec{u}(2,-1,5);\vec{v}(3x,5,4y-2)$ និង $\vec{w}(z-1,2,z+1)$។

ក. រកតម្លៃ x និង y ដែល $\vec{u}\parallel\vec{v}$។

ខ. រកតម្លៃ z ដែល $\vec{u}\perp\vec{v}$។

ដំណោះស្រាយ

៣២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1,-1,-4);B(3,-4,2)$ នឹង $C(4,5,-2)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ នឹង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ រួចប្រាប់ឈ្មោះរបស់ត្រីកោណ ABC។

ដំណោះស្រាយ

៣៣. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(x,2,-1);B(0,y,1)$ នឹង $C(3,4,-2)$។ កំណត់ x និង yដើម្បីឱ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងបាតកំពូល A។

ដំណោះស្រាយ

៣៤. គេឱ្យ $\vec{a}=(1,-2,1);\vec{b}=(-1,1,3)$ នឹង $\vec{c}=(2,3,-1)$។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ និង $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$។

ខ. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{S}=(1,3,6)$។ កំណត់ចំនួនពិត α,β,γ ដោយដឹងថា $\vec{S}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$។

ដំណោះស្រាយ

៣៥. រក $\vec{u}\times\vec{v}$ រួចបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ផង នឹង$\vec{v}$ ផងក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(4,3,5);\vec{v}=(-1,8,4)$

ខ. $\vec{u}=(-3,2,-5);\vec{v}=(11,2,5)$

គ. $\vec{u}=(-8,-6,4);\vec{v}=(10,-12,-2)$

ឃ. $\vec{u}=(-1,3,1);\vec{v}=(0,3,7)$

ដំណោះស្រាយ

៣៦. គេឱ្យបីចំណុច $A(1,-1,2);B(2,1,4)$ នឹង $C(4,-2,-2)$។

ក. កំណត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AC}$។

ខ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចD ដោយដឹងថា$ABCD$ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

៣៧. គេឱ្យបីចំណុច $\vec{a}=(1,-2,2);\vec{b}=(-1,4,8)$ នឹង $\vec{c}(x,y,4)$។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}.\vec{b}$។

ខ. គណនា $|\vec{a}|,|\vec{b}|$ នឹងកូស៊ីនុសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ នឹង $\vec{b}$។

គ. កំណត់ x នឹង y ដើម្បីឱ្យ $\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}$ នឹង $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=52$។

ដំណោះស្រាយ

៣៨. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1,2,3);B(0,-1,1)$ នឹង $C(2,3,5)$។

ក. ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ នឹង សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L)ដែលកាត់តាមចំណុច B នឹង C។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P)។

គ. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ $\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

៣៩. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច $A(4,0,0);B(0,-2,0),C(0,0,2)$ នឹង $D(4,2,2)$។

ក. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) នឹង សមីការនៃប្លង់ដែលកាត់តាមបីចំណុច A,Bនឹង C។

គ. យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH នឹងផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$។

ឃ. គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA)កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$។

ដំណោះស្រាយ

៤០. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(1,2,3)$ នឹង $(\alpha): x+2y-2z-8=0$។

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ(Δ) គូសចេញពីចំណុច Aហើយកែងនឹងប្លង់ (β)ត្រង់ចំណុច H។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច Hនឹងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α)។

គ. កំណត់សមីការប្លង់ (β)កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់ (α) ខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

៤១. គេឱ្យ $(\alpha): 2x+2y+z-9=0$ នឹង $(\Delta): \begin{cases} x=2-t \\ y=6-4t \\ z=2+t, t\in IR \end{cases}$

ក. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) នឹងប្លង់ (α)។

ខ. កំណត់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) នឹងប្លង់ (α)។

គ. កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A។

ឃ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (Δ) នឹងប្លង់ (α)។

ដំណោះស្រាយ

៤២. គេឱ្យប្លង់ $(\Delta) : 2x - 2y + z - 1 = 0$ នឹងស្វ៊ែ $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y - 4z + 12 = 0$។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំណុច Aមួយ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប៉ះ A។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (α)ត្រង់ចំណុច A។

ឃ. ក្រៅពីចំណុច A បន្ទាត់ (Δ) ប្រសព្វស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច Bមួយទៀត។ ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុច Bរួចកំណត់សមីការនៃប្លង់(β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ B។

ដំណោះស្រាយ

៤៣. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(4,-2,0),B(1,2,2),C(2,-1,0)$ និង $D(2,-2,-1)$។

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d)ដែលកាត់តាមចំណុចAហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{CD}$។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមចំណុចBហើយកែងនឹងបន្ទាត់CD។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(d) និង (P)។

ដំណោះស្រាយ

៤៤. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(3,0,1),B(2,4,0)$ និង $C(0,3,3)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច$A,B$ និង C ជាកំពូលនៃត្រីកោណមួយ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់(ABC)។

គ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d)ដែលកាត់តាមចំណុចOហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ$\vec{u}(1,1,1)$។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(d) និង (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

៤៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានពីរចំណុច$A(1,1,1),B(0,-2,1)$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB)។

ខ. គណនា $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ$OAB$។ រកសមីការប្លង់$(OBA)$។

គ. រកសមីការស្វ៊ែដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAB។

ដំណោះស្រាយ

៤៦. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,0,2),B(1,2,0)$ និង $C(0,2,3)$។

ក. ចូរសង់ត្រីកោណABC។

ខ. គណនា AB និង AC រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណABC។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច$A,B$ និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ។

ឃ. កំណត់សមីការប្លង់(ABC)។

ង. រកមាឌតេត្រា$OABC$។ ទាញរកចម្ងាយពីOទៅប្លង់(ABC)។

ដំណោះស្រាយ

៤៧. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(3,2,0)$ និង $K(0,-1,3)$។

ក. រកសមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមចំណុចAហើយកែងនឹងបន្ទាត់(AK)។

ខ. គេមាន $B(5,0,0),C(0,5,0)$ និង $D(0,0,-5)$។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាB,C និង D នៅលើប្លង់P។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណBCD។

ឃ. គណនាAKរួចរកមាឌនៃត្រាអ៊ែត$KBCD$។

ដំណោះស្រាយ

៤៨. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(0,2,2)$ និងបន្ទាត់(D) មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ$x=1+t, y=1-t, z=2-t, t\in\mathbb{R}$។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ $(\alpha): x-y-z+4=0$ កាត់តាមចំណុចAហើយកែងនឹងបន្ទាត់(D)។

ខ. ប្លង់(α) កាត់អ័ក្ស$\overrightarrow{ox}$ត្រង់M កាត់អ័ក្ស$\overrightarrow{oy}$ត្រង់N កាត់អ័ក្ស$\overrightarrow{oz}$ត្រង់P ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចM,N និង P រួចសង់ចំណុចA,M,N,P។

គ. បង្ហាញថា$\triangle MNP$ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនា $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណMNP។

ដំណោះស្រាយ

៤៩. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,1,0), B(0,2,2)$ និងបន្ទាត់ $C(1,-2,3)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច $D(1,-2,0)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (L)។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមចំណុច A,B,C និង D។

ដំណោះស្រាយ

៥០. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,0,1),B(0,1,3)$ និង$C(1,2,0)$។

ក. ចូរដៅចំណុចA,B និង C។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច$A,B$និង Cមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណABC។

គ. រកសមីការប្លង់(ABC)ដែលកាត់តាមចំណុចA ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$។

ឃ. គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$។ រកមាឌតេត្រាអ៊ែត$OABC$។

ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ៣ មេរៀនទី៣ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ

៥១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,-2),B(0,2,0)$ និង$C(0,0,3)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។

ខ. រកសមីការប្លង់(ABC)។ កំណត់ចម្ងាយពីគល់ Oទៅប្លង់(ABC)។

គ. កំណត់សមីការស្វ៊ែ(S)ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAB។ កំណត់សមីការប្លង់(P)ដែលប៉ះនិងស្វ៊ែ(S) ត្រង់A។

ដំណោះស្រាយ

៥២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,1)$ និង$\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$។

ក. គណនាកូអរដោនេចំណុច B។រកសមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមAហើយកែងនឹង$\overrightarrow{AB}$។

ខ. គេឱ្យចំណុច $C(2,1,0)$និង $D(1,3,1)$ ។ រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{CD}$។ គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា$ABCD$ជាចតុកោណកែង។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ទាញរកក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ$ABDC$។

ឃ. រកមាឌចតុមុខ$OABC$។ទាញរកចម្ងាយពី Oទៅប្លង់(ABC)។

ដំណោះស្រាយ

៥៣. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,0,1),B(0,1,3)$ និង$C(0,3,2)$។

ក. រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$។ បង្ហាញថា$\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នា។

ខ. គណនាផលគុណ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d)ដែលកាត់តាមចំណុច Cហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$។

ឃ. រកសមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមចំណុចAហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{BC}$។

ង. រកសមីការស្វ៊ែ(S)ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAC។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុចBនៅលើស្វ៊ែ(S)។

ដំណោះស្រាយ

៥៤. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,1,1),B(2,0,3),C(-1,2,0)$ និង$D(2,4,2)$។

ក. គណនាផលគុណ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ$ABC$។

ខ. សមីការប្លង់(ABC)។ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកាត់តាមចំណុចDហើយកែងនឹងប្លង់(ABC)។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ។ ទាញថា DAជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែត$ABCD$។

ឃ. គណនាប្រវែងDAរួចគណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត$ABCD$។

ដំណោះស្រាយ

៥៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$S(0,0,3)$ និង$\vec{u}(1,1,1)$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់Dដែលកាត់តាមចំណុចSហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$។

ខ. $M(x,y,z)$ ជាចំណុចនៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។ គណនាផលគុណស្កាលែ$\vec{u}\cdot\overrightarrow{SM}$។ កំណត់សមីការមួយដែលជាប់ទាក់ទងx,y,zដើម្បីឱ្យ$\overrightarrow{SM}$អរតូកូណាល់នៃ$\vec{u}$។ តើសំណុំចំណុចMជាអ្វី?

គ. គេឱ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និង $B(0,3,0)$។ បង្ហាញថាSABជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនាផលគុណ $\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}$។ គណនាផ្ទៃនៃត្រីកោណ$SAB$។

ង. រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតOហើយកាត់តាមចំណុចS,A និង B។

ដំណោះស្រាយ

៥៦. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(-1,1,0),B(2,0,1),C(1,2,2),D(0,1,-2)$ និង$\vec{u}(x,y,z)$។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងx,y,zដើម្បីឱ្យ$\overrightarrow{AM}$ កែងនឹង $\overrightarrow{BM}$។ តើសំណុំនៃចំណុចM ជាអ្វី?

ខ. គណនា $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$។ រកចំនួនពិត$m$ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡា$S$នៃត្រីកោណ$BCD$ផ្ទៀងផ្ទាត់ $S=\sqrt[3]{e^m}$។

គ. រកសមីការប្លង់(BCD)។រកកូអរដោនេប្រសព្វNរវាងប្លង់(BCD) និងបន្ទាត់$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុចAទៅប្លង់(BCD)រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត$ABCD$។

ដំណោះស្រាយ

៥៧. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានប្លង់ពីរ $(P): 3x+4y+6z-12=0$ និង $(Q): x+y+z=0$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ដោយយក $z=t$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (t ជាចំនួនពិត)។ បញ្ជាក់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ នៃបន្ទាត់ (D)។

ខ. តាង $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) និង $\vec{q}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q)។ គណនាផលគុណនៃ $\vec{p}\times\vec{q}$។ បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{p}\times\vec{q}$ ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$។

គ. យក A, B និង C ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង អ័ក្ស $\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}, \overrightarrow{oz}$ រៀងគ្នា។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC។

ឃ. គណនាចម្ងាយ d ពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P)។ គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$។

ដំណោះស្រាយ

៥៨. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,0,0),B(2,3,0)$ និង$C(0,0,2)$។

ក. ដៅចំណុចA,B និង C។ រកសមីការស្វ៊ែរSដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAC។

ខ. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញបញ្ជាក់ថា$A\neq(BC)$។គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ$ABC$។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$។ ទាញបញ្ជាក់ថា$ABC$ជាត្រីកោណកែងត្រង់$A$។

ឃ. រកសមីការប្លង់Pដែលកាត់តាមចំណុចC ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់$\vec{n}$។

ង. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់Pនិង បន្ទាត់$(L): x=2t, y=1+3t, z=-t \quad (t\in\mathbb{R})$។

ដំណោះស្រាយ

៥៩. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,2,0),B(0,2,2)$ និង$C(1,0,1)$។

ក. ដៅចំណុចA,B និង C។ រកសមីការស្វ៊ែរSដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAB។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែរSនិង បន្ទាត់(d): $x=1+t, y=1, z=1+t, \quad t\in\mathbb{R}$។

ខ. រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ$\triangle ABC$។ រកសមីការប្លង់$(ABC)$។

គ. ប្លង់(ABC)ជួប$\overrightarrow{ox}$ ត្រង់M និង ជួប$\overrightarrow{oz}$ ត្រង់N។ រកកូអរដោនេចំណុចM និង N។ បង្ហាញថា$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}=0$។ ទាញបញ្ជាក់ថា$ABMN$ជាចតុកោណកែង។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច$D(0,2,0)$ទៅប្លង់ (ABC)។ ទាញរកមាឌតេត្រាអ៊ែត$DBCA$។

ដំណោះស្រាយ

៦០. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,2,-2),B(2,3,-2),C(0,3,-2)$ និង$D(1,2,-2+\sqrt{2})$។

ក. ចូរដៅកំពូលតេត្រាអ៊ែត A,B,C,D នៃតេត្រាអ៊ែត$ABCD$។

ខ. បង្ហាញថា$AB=AC=AD$ហើយបង្ហាញថាបន្ទាត់$(AB),(AC),(AD)$កែងគ្នាពីរៗ។

គ. បង្ហាញថាADជាកម្ពស់ចំពោះបាតនៃតេត្រាអ៊ែត$ABCD$ហើយទាញរកមាឌតេត្រាអ៊ែត$ABCD$។

ឃ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{N}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ ។ និងផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណBCD។ រកសមីការប្លង់(BCD)។

ង. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) កាត់តាមចំណុចAហើយកែងប្លង់(BCD)ត្រង់ចំណុចH។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចH។

ដំណោះស្រាយ

៦១. គេឱ្យប្រលេពីប៉ែតកែង$ABCD-EFGH$គេមាន$\overrightarrow{DA}=i,\overrightarrow{DC}=3\vec{j}$ និង $\overrightarrow{DH}=2\vec{k}$។យក$(D,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

ក. គូសរូបប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCD-EFGH$ ។បញ្ជាក់កូអរដោនេចំណុចA,B,C,E,F,G,H។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AH}$រួចសរសេរសមីការប្លង់$(ACH)$។

គ. d_1ជាចម្ងាយពីចំណុចFទៅប្លង់(ACH)និង d_2ជាចម្ងាយពីចំណុចDទៅប្លង់(ACH)។ បង្ហាញថា $d_1=2d_2$។

ឃ. ប្រៀបធៀបមាឌV_1 នៃចតុមុខ$FACH$ និង មាឌV_2នៃចតុមុខ$DACH$។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ$\triangle ACH$រួចគណនាមាឌV_2។ ទាញរកមាឌV_1។

ដំណោះស្រាយ

៦២. នៅក្នុង$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានចំណុច$A(-2,0,1);B(0,10,3)$;$C(2,0,-1)$ និង $D(5,3,-1)$។

ក. រកសមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមចំណុចA,B,C។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកាត់តាមចំណុចDហើយកែងនឹងប្លង់(P)។

គ. រកសមីការស្វ៊ែរSមានផ្ចិតDហើយប៉ះនឹងប្លង់(P)។

ដំណោះស្រាយ

៦៣. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,0),B(0,1,0)$ និង$C(0,0,1)$។

ក. បង្ហាញថា$\triangle ABC$ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ខ. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។

គ. រកសមីការស្វ៊ែ(S)ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAC។

ឃ. រកសមីការប្លង់(P)ដែលប៉ះស្វ៊ែ(S)ត្រង់ចំណុចC។

ដំណោះស្រាយ

៦៤. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,2,6),B(2+2\sqrt{2},0,4)$ និង$C(2+2\sqrt{2},4,4)$។

ក. គណនា AB,AC និង $\angle BAC$រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណABC។

ខ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណABC។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)កែងនឹងប្លង់(ABC) ត្រង់ចំណុចA។

ឃ. ស្វ៊ែSមានអង្កត់ផ្ចិតAB។រកសមីការប្លង់Pប៉ះស្វ៊ែSត្រង់ចំណុចA។

ដំណោះស្រាយ

៦៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$M(-1,0,1),N(0,1,2),P(1,2,-1)$ និង $(\alpha): x-2y+z-4=0$។

ក. គណនា $\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណMNP។

ខ. រកសមីការប្លង់βកាត់តាមចំណុចM,N,P។ គណនាចម្ងាយពីចំណុចOទៅប្លង់(β)។ រកមាឌតេត្រាអ៊ែត$ONMP$។

គ. រកសមីការស្វ៊ែរSមានផ្ចិតMហើយកាត់តាមចំណុចN។ តើប្លង់(α)កាត់ស្វ៊ែរSដែរឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

៦៦. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមាន$(P): x+2y+2z+5=0$ និង$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និង កាំនៃស្វ៊ែ(S)។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ Pកាត់ស្វ៊ែ (S)។

គ. រកគ្រប់សមីការប្លង់ដែលស្របនឹងប្លង់Pហើយប៉ះស្វ៊ែS។

ដំណោះស្រាយ

៦៧. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,2);B(-1,1,4)$ និង$C(5,-1,3)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។រកសមីការប្លង់$(ABC)$។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចDដើម្បីឱ្យ$ABDC$ជាប្រលេឡូក្រាម។
គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម$ABDC$។

គ. គេឱ្យចំណុច$F(3,10,-2)$។ បង្ហាញថាបន្ទាត់(OF)កែងនឹងប្លង់(ABC)។

ឃ. រកមាឌតេត្រាអ៊ែត$FABC$។ ទាញរកកម្ពស់hគូសចេញពីកំពូលFនៃតេត្រាអ៊ែត។

ដំណោះស្រាយ

៦៨. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,2,2);B(2,0,1)$ និង$C(4,1,-1)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$។បង្ហាញថា$(ABC)$ជាត្រីកោណកែង។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)កាត់តាមចំណុចAហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រBC។

គ. រកសមីការPកាត់តាមចំណុចCហើយកែងនឹងបន្ទាត់(L)។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(L) និង ប្លង់P។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែSមានផ្ចិត$I(1,1,1)$និង កាំ$r=\sqrt{10}$។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់Lនិង ស្វ៊ែS។ រកចម្ងាយពីចំណុចIទៅប្លង់P។

ដំណោះស្រាយ

៦៩. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,1,1);B(-1,-2,-1)$ និង$C(1,2,0)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$។ រកសមីការប្លង់$(\alpha)$ដែលកាត់តាមចំណុច$A,B$និង C។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណABC។ គណនាចម្ងាយពីគល់Oនៃតម្រុយទៅប្លង់(α)។ រកមាឌតេត្រាអ៊ែត$OABC$។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកែងនឹងប្លង់(α)ត្រង់ A។ រកចម្ងាយពីចំណុចCទៅបន្ទាត់(L)។

ឃ. រកសំណុំនៃចំណុច Mដែលផ្ទៀងផ្ទាត់$MA^2-MB^2=2$។

ដំណោះស្រាយ

៧០. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(-2,0,1);B(0,10,3);C(2,0,-1)$ និង$D(5,3,-1)$។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ$ABC$។

ខ. រកសមីការប្លង់Pកាត់តាមចំណុចA,B,C។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)កាត់តាមចំណុចDហើយកែងនឹងប្លង់P។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែS មានផ្ចិតDហើយប៉ះនឹងប្លង់P។

ដំណោះស្រាយ

៧១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(0,2,0);B(1,0,0)$ និង$C(0,0,3)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$។ រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ$ABC$។

ខ. រកសមីការប្លង់Pកាត់តាមចំណុចO ហើយស្របនឹងប្លង់ABC។

គ. គណនា $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}$។ ទាញរកមាឌចតុមុខ$OABC$និងចម្ងាយពីកំពូល$O$មកប្លង់បាត$ABC$

ដំណោះស្រាយ

៧២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(0,1,1);B(2,0,2)$ និង$C(3,-1,-1)$។

ក. គណនា$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថាចំណុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ខ. រកសមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមដែលកាត់តាមចំណុចA,B,C។

គ. បង្ហាញថាOមិនស្ថិតនៅលើប្លង់P។ គណនាចម្ងាយពីគល់Oទៅប្លង់P។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABCរួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត$OABC$។

ឃ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកាត់តាមចំណុច$D(1,1,2)$ហើយកែងនឹងប្លង់P។រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វMរវាងប្លង់(P) និង បន្ទាត់(L)។

ង. រកសមីការស្វ៊ែរSដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAB។

ដំណោះស្រាយ

៧៣. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,0,0);B(0,2,0)$ និង $C(0,0,3)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

ខ. រកសមីការប្លង់ (ABC)។ គណនាចម្ងាយពី OH ពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC)។
ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H។ គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែរដែលកាត់តាមចំណុច $OABC$។

ដំណោះស្រាយ

៧៤. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$I(1,2,-2)$ និងប្លង់$(P): 2x+2y+z+5=0$។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកាត់តាមIហើយកែងនឹងប្លង់(P)។

ខ. រកចំណុចប្រសព្វJរវាងប្លង់(P)និង បន្ទាត់(L)។

គ. គេឱ្យSជាស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតI។ ដោយដឹងថាប្លង់(P)កាត់ស្វ៊ែ(S)មានរង្វង់មួយមានមរិមាត្រ8π ចូររកសមីការស្វ៊ែ(S)។

ឃ. ស្រាយថាស្វ៊ែSប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{2}$។

ដំណោះស្រាយ

៧៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(-1,3,2);B(-9,4,9)$ និងប្លង់$(P): 2x-y+z+1=0$។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកាត់តាមAហើយកែងនឹងប្លង់(P)។

ខ. រកចំណុចប្រសព្វHរវាងប្លង់(P)និង បន្ទាត់(L)។

គ. រកកូអរដោនេចំណុចA' ឆ្លុះនឹងចំណុចAធៀបនឹងប្លង់(P)។

ឃ. រកចំណុចប្រសព្វKរវាងប្លង់(P)នឹងបន្ទាត់$(A'B)$។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញប្រឡងមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិនាឆ្នាំកន្លងមក

១. (២០០២) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេឱ្យចំណុច $A(3,0,1);B(2,4,0)$ និង $C(0,3,3)$។(បេក្ខជនមិនចាំបាច់សង់រូបទេ)។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(D)ដែលកាត់តាមចំណុចOនិងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស$\vec{u}(1,1,1)$។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ទាញថាចំណុច$A,B,C$ មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ. រកសមីការប្លង់ (ABC)ដោយយកវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់។

ឃ. រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណABC។

ង. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(D) និង ប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

២. (២០០៣) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន (ឯកតាលើអ័ក្ស$1cm$) ចូរដៅចំណុច$A(2,0,2);B(1$
និង $C(0,2,3)$។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(D)ដែលកាត់តាមAហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{BC}$។

ខ. គណនា $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$។ រួចប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណABC។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច A,B,Cមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ រកសមីការប្លង់ (ABC)។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណABC។

ឃ. រកមាឌតេត្រាអែត$OABC$។ទាញរកចម្ងាយពីចំណុចOទៅប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

៣. (២០០៤) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន(ឯកតាលើអ័ក្ស$1cm$) គេឲ្យចំណុច$A(3,2,0)$, $K(0$

ក. រកសមីការប្លង់(P) ដែលកាត់តាមAហើយកែងនឹងបន្ទាត់AK។

ខ. គេឱ្យចំណុច$B(5,0,0)$;$C(0,5,0)$ និង $D(0,0,-5)$។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុចB,C និង Dជាចំណុចនៅលើប្លង់P។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណBCD។

ឃ. គណនាប្រវែងAKរួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត$KBCD$។

ដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ៣ មេរៀនទី៣ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ

៤. (២០០៥) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(0,2,2)$ និងបន្ទាត់(D) មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ$x=1+t, y=1-t, z=2-t, t\in\mathbb{R}$។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ $(\alpha): x-y-z+4=0$ កាត់តាមចំណុចAហើយកែងនឹងបន្ទាត់(D)។

ខ. ប្លង់(α) កាត់អ័ក្ស$\overrightarrow{ox}$ត្រង់M កាត់អ័ក្ស$\overrightarrow{oy}$ត្រង់N កាត់អ័ក្ស$\overrightarrow{oz}$ត្រង់P ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចM,N និង P រួចសង់ចំណុចA,M,N,P។

គ. បង្ហាញថា$\triangle MNP$ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនា $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណMNP។

ដំណោះស្រាយ

៥. (២០០៦) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,1)$ និង$\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចB។ រកសមីការប្លង់(P)ដែលកាត់តាមចំណុចAនិង មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់$\overrightarrow{AB}$។

ខ. គេឱ្យ$C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$។ រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{CD}$។ គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា$ABCD$ជាចតុកោណកែង។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ$ABCD$។

ឃ. រកមាឌចតុមុខ$OABC$។ ទាញរកចម្ងាយពីគល់Oទៅប្លង់ABC។

ដំណោះស្រាយ

៦. (២០០៧) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$S(0,0,3)$ និង$\vec{u}=(1,1,1)$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(D)ដែលកាត់តាមចំណុចS ហើយស្របនឹង$\vec{u}$។

ខ. $M(x,y,z)$ជាចំណុចមួយនៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\overrightarrow{SM}$។ កំណត់រកសមីការមួយដែលជាប់ទាក់ទងនឹងx,y,zដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{SM}$ អរតូកូណាល់នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$។ តើសំណុំចំណុចMជាអ្វី?

គ. គេឱ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និង $B(0,3,0)$។ បង្ហាញថាត្រីកោណSABជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}$។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ$SAB$។

ង. រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតO ហើយកាត់តាមចំណុចS,A និង B។

ដំណោះស្រាយ

៧. (២០០៨)ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(-1,1,0)$, $B(2,0,1)$, $C(1,2,2)$, $D(0,1,-2)$ និង$\vec{u}(x,y,z)$។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងx,y,zដើម្បីឱ្យ$\overrightarrow{AM}$ កែងនឹង $\overrightarrow{BM}$។ តើសំណុំនៃចំណុចM ជាអ្វី?

ខ. គណនា $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$។ រកចំនួនពិត$m$ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡា$S$នៃត្រីកោណ$BCD$ផ្ទៀងផ្ទាត់ $S=\sqrt[3]{e^m}$។

គ. រកសមីការប្លង់(BCD)។រកកូអរដោនេប្រសព្វNរវាងប្លង់(BCD) និងបន្ទាត់$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុចAទៅប្លង់(BCD)រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត$ABCD$។

ដំណោះស្រាយ

៨. (២០០៩)ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,2,0),B(0,2,2,)$ និង$C(1,0,1)$។

ក. រកសមីការស្វ៊ែរSដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAB។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ និង បន្ទាត់(d)ដែលមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ$x=1+t,y=2,z=1+t$ដែល$t\in\mathbb{R}$។

ខ. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ$\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណABC។រកសមីការប្លង់ABC។

គ. ប្លង់ABC ជួប$\overrightarrow{ox}$ ត្រង់M នឹង ជួប$\overrightarrow{oz}$ ត្រង់N។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចM នឹងN។ បង្ហាញថា$ABNM$ ជាចតុកោណកែង។

ឃ. រកចម្ងាយពីចំណុច$D(0,2,0)$ ទៅប្លង់(ABC)។ ទាញរកមាឌតេត្រាអែត$DCBA$។

ដំណោះស្រាយ

៩. (២០១០)ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(-1,2,1),B(1,-6,-1)$ និង$C(2,2,2)$។

ក. គណនា$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ កំណត់សមីការប្លង់Pដែលកាត់តាមចំណុចA,B និង Cហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់$\vec{n}$។កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d)កាត់តាមចំណុច$J(-2,0,0)$និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស$\vec{u}=(3,0,1)$។

ខ. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិតIនិងកាំrនៃស្វ៊ែដែលមានសមីការ$x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែSនិងបន្ទាត់(d)។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណABC។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច$D(0,1,-1)$ទៅប្លង់P។

ដំណោះស្រាយ

១០. (២០១១) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,2,4);B(2,-1,3)$ និង$C(-2,3,-2)$។

ក. រកសមីការស្វ៊ែរS ដែលមានផ្ចិតAនិង កាំ$r=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{2}$។

ខ. រកសមីការប្លង់Pដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់$\overrightarrow{AC}$ហើយកាត់តាមចំណុចB។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d)ដែលកាត់តាមចំណុចCហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស$\overrightarrow{AB}$។

ឃ. រកចម្ងាយD_{BA}ពីចំណុចBទៅA។ រកចម្ងាយD_{Bd}ពីចំណុចBទៅបន្ទាត់(d)។

ង. រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ដំណោះស្រាយ

១១. (២០១២) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$M(-1,0,1),N(0,1,2)$ និង$P(1,2,-1)$ និងមានប្លង់$\alpha : x-2y+z-4=0$។

ក. រកកូអរដោនេ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់β ដែលកាត់តាមចំណុចM,N និង P។

ខ. រកសមីការស្វ៊ែរSមួយមានផ្ចិតMហើយកាត់តាមចំណុចN។ តើαជួបស្វ៊ែរSឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

១២. (២០១៣) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,0,1),B(0,2,2)$ និង$C(2,1,0)$។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណABCជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូលA។

ខ. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់(ABC)។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d) ដែលកាត់តាមចំណុច$D(1,-1,3)$ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់M។ រកកូអរដោនេចំណុចM។

ដំណោះស្រាយ

១៣. (២០១៤លើកទី២)

ក. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(2,2,1),B(4,-2,0),C(3,1,1)$ និង$D(1,5,2)$។ បង្ហាញថា ចតុកោណ$ABCD$ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមនេះ។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចAនិងB។

គ. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមបីចំណុចA,B និង D។

ដំណោះស្រាយ

១៤. (២០១៥) គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}, \vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$។ រកវ៉ិចទ័រ៖

ក. $\vec{u}+\vec{v}$ ខ. $\vec{w}\times\vec{u}$ គ. $\vec{w}\times\vec{v}$

ដំណោះស្រាយ

១៥. (២០១៦) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$M(2,3,4), N(3,5,6), P(4,6,7)$ និង$Q(3,4,5)$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{QP}$។

ខ. ទាញបង្ហាញថា$MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

១៦. (២០១៧) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(-2,1,0),B(0,1,1),C(1,2,2)$ និង$D(0,3,-4)$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$។

ខ. គណនាប្រវែងAB,AC,AD,BC,BD និង CD។ ទាញថាត្រីកោណABD និង ACD កែងត្រង់A។

ដំណោះស្រាយ

១៧. (២០១៨) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច$A(1,2,3),B(3,0,1),C(-1,0,1)$ និង$D(2,1,2)$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(0,1,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់(ABC)។

ដំណោះស្រាយ

១៨. (២០១៩)

A : ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេមានចំណុច $A(1,-1,4)$, $B(7,-1,-2)$ និង $C(1,5,-2)$។

ក. ⓐ. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

ⓑ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A , B , C កំណត់បានប្លង់មួយ។

ⓒ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនិងប្លង់(ABC)

ⓓ. ទាញបង្ហាញថាសមីការប្លង់របស់ (ABC)

ខ. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

B : គេមានប៉ារ៉ាបូល ដែលមានសមីការទូទៅ : $y^2+4y-8x-12=0$ ។ ចូរបម្លែងសមីការនេះជាទម្រង់សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ។ ចូររកកូអរដោនេនៃ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

ដំណោះស្រាយ

១៩. (២០២១)

ក. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណាម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុចៈ $A(0;-2;0)$,$B(-4;1;2)$ $C(0;3;7)$ និង $D(4;0;5)$ ។
រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណកែងតែមិនមែនជាការេ។

ខ. គេមានសមីការ $9y^2=25(3-x)(3+x)$។ បង្ហាញថា សមីការនេះជាអេលីប។
រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេកំណុំទាំងពីររបស់អេលីប ។ សង់អេលីបនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

២០. (២០២២)

ក. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $M(0,1,1), N(1,2,2), P(0,3,-4)$ និង $Q(-2,1,0)$ ។

ⓐ. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{PQ}$ និងរកប្រវែងវ៉ិចទ័រទាំងបួននេះ។

ⓑ. បង្ហាញថាត្រីកោណ NPQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ Q និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ។

ខ. រកកូអរដោនេកំពូល កុំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ $(y+2)^2 = -8(x-2)$ ។ សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

២១. (២០២៣)

ក. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(5,-5,2), B(-1,1,0), C(0,1,2)$ និង $(6,6,-1)$

ⓐ. បង្ហាញថាចំណុច A,B,C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ⓑ. បង្ហាញថាត្រីកោណ BCD ជាត្រីកោណកែង និង រកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ។

ខ. គេឲ្យសមីការ $12(xy+3)-(3x+2y)^2=0$

ⓐ. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។

ⓑ. ចូររកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និង កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។ រួចសង់អេលីបនេះ។

ដំណោះស្រាយ

២២. (២០២៤)

ក. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(2,0,0);B(-1,\sqrt{3},0)$ និង $C(-1,-\sqrt{3},0)$ ។ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ និង $\vec{BC}$ ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់វា ។

ខ. គេឱ្យសមីការ $(2x-3y)^2=6(3y^2-2xy-6)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាអ៊ីពែរបូល ។ កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និងកំណុំរបស់អ៊ីពែរបូល ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល ។ ចូរសង់អ៊ីពែរបូលនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

២៣. (២០២៥) (២០ពិន្ទុ)

A. : ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,-2,0), B(-2,0,-1), C(-2,-1,2)$, $D(-2,1,-2), E(2,5,-2)$ និង $F(-1,0,-2)$។

១. គណនាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BF}$ និង $\overrightarrow{DF}$។

២. បង្ហាញថាត្រីកោណ ACE កែងត្រង់ A និង ត្រីកោណ BDF សម័ង្ស។

B. : ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំណុំ F នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងកំពូល $O(0,0)$ ។ រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើវាកាត់តាមចំណុច $A(2,4)$។ រកតម្លៃ x_1 បើ $B(x_1,-8)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ។

ដំណោះស្រាយ

២៤. (២០២៦) (២០ពិន្ទុ)

១. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(-3;1;4)$, $B(-2;-1;7)$, $C(-4;-1;-2)$, និង $D(-2;-5;4)$ ។ គេដឹងថាវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ នៅក្នុងប្លង់តែមួយលុះត្រាតែមានចំនួនពិត a និង b ដែល $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}$ ។

ខ. រកចំនួនពិត a និង b ដែល $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AD}$ ។ ទាញបង្ហាញថាចំណុច A,B,C,D នៅលើប្លង់តែមួយ ។

២. នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $O(0;0)$ និងកំនុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាឆ្លងកាត់ចំណុច $A(-2;6)$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ x_1 បើគេដឹងថាប៉ារ៉ាបូលនេះកាត់តាមចំណុច $B(x_1;6)$ ដែលអាប់ស៊ីស x_1 វិជ្ជមាន ។ សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

មេរៀនទី ១ ៖ ឌីចន័ក្នុងលំហ

តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ១

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ក	21	ក	41	ក	61	ក	81	ក
2	ខ	22	ខ	42	ខ	62	ខ	82	ខ
3	គ	23	គ	43	គ	63	គ	83	គ
4	ឃ	24	ឃ	44	ឃ	64	ឃ	84	ឃ
5	ក	25	ក	45	ក	65	ក	85	ក
6	ខ	26	ខ	46	ខ	66	ខ	86	ខ
7	គ	27	គ	47	គ	67	គ	87	គ
8	ឃ	28	ឃ	48	ឃ	68	ឃ	88	ឃ
9	ក	29	ក	49	ក	69	ក	89	ក
10	ខ	30	ខ	50	ខ	70	ខ	90	ខ
ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
11	គ	31	គ	51	គ	71	គ	91	គ
12	ឃ	32	ឃ	52	ឃ	72	ឃ	92	ឃ
13	ក	33	ក	53	ក	73	ក	93	ក
14	ខ	34	ខ	54	ខ	74	ខ	94	ខ
15	គ	35	គ	55	គ	75	គ	95	គ
16	ឃ	36	ឃ	56	ឃ	76	ឃ	96	ឃ
17	ក	37	ក	57	ក	77	ក	97	ក
18	ខ	38	ខ	58	ខ	78	ខ	98	ខ
19	គ	39	គ	59	គ	79	គ	99	គ
20	ឃ	40	ឃ	60	ឃ	80	ឃ	100	ឃ

១. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍ (មេរៀនទី ១)

លំហាត់ទី ១

គេឲ្យ $\vec{u}=(4,-2,5)$ និង $\vec{v}=(7,9,-8)$។ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម៖

ក. $2\vec{u}+\vec{x}=3\vec{v}$

ខ. $4\vec{x}-\vec{u}=3\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{x}$

ដំណោះស្រាយ

ក $2\vec{u}+\vec{x}=3\vec{v} \implies \vec{x}=3\vec{v}-2\vec{u}$

$\vec{x}=3(7,9,-8)-2(4,-2,5)$

$=(21-8,27+4,-24-10)=(13,31,-34)$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{x}=(13,31,-34)}$

ខ $4\vec{x}-\vec{u}=3\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{x}$

$\implies 2\vec{x}=4\vec{u}-4\vec{v} \implies \vec{x}=2(\vec{u}-\vec{v})$

ដោយ $\vec{u}-\vec{v}=(-3,-11,13)$

$\implies \vec{x}=2(-3,-11,13)=(-6,-22,26)$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{x}=(-6,-22,26)}$

លំហាត់ទី ២

គេឲ្យ $\vec{u}=(1,1,0),\vec{v}=(1,0,1),\vec{w}=(0,1,1)$ និង $\vec{p}=(5,6,7)$។ បង្ហាញថា $\vec{p}=l\vec{u}+m\vec{v}+n\vec{w}$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\vec{p}=l\vec{u}+m\vec{v}+n\vec{w}$ $(l,m,n\in\mathbb{R})$៖

$$(5,6,7)=(l+m,l+n,m+n)$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} l+m=5 & (1)\\ l+n=6 & (2)\\ m+n=7 & (3)\end{cases}$$

បូកសមីការ $(1)+(2)+(3)$ អង្គនិងអង្គ៖

$$2(l+m+n)=18 \implies l+m+n=9$$

ទាញរកតម្លៃមេគុណនីមួយៗ៖

- $l=9-(m+n)=9-7=2$
- $m=9-(l+n)=9-6=3$
- $n=9-(l+m)=9-5=4$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{p}=2\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w}\ (\text{ពិត})}$

លំហាត់ទី ៣

រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(3,-4,5)$

ខ. $\vec{v}=(-3,2,2\sqrt{3})$

ដំណោះស្រាយ

ក ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\vec{u}=(3,-4,5)$ ៖

$\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\cos\alpha=\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\cos\beta=\frac{-4}{5\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\cos\gamma=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ខ ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\vec{v}=(-3,2,2\sqrt{3})$ ៖

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(-3)^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{25}=5$

$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$\cos\beta=\frac{2}{5}$

$\cos\gamma=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

ដូចនេះ $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

លំហាត់ទី ៤

គេឲ្យ $\vec{u}=(2,-1,5),\vec{v}=(3x,5,4y-2)$ និង $\vec{w}=(z-1,2,z+1)$។

ក. រក x,y ដែល $\vec{u}\parallel\vec{v}$

ខ. រក z ដែល $\vec{u}\perp\vec{w}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\parallel\vec{v}\iff\frac{3x}{2}=\frac{5}{-1}=\frac{4y-2}{5}$

- $\frac{3x}{2}=-5\implies x=-\frac{10}{3}$
- $\frac{4y-2}{5}=-5\implies y=-\frac{23}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\frac{10}{3},\quad y=-\frac{23}{4}}$

ខ $\vec{u}\perp\vec{w}\iff\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ ៖

$2(z-1)-1(2)+5(z+1)=0$

$\iff 7z+1=0\implies z=-\frac{1}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{z=-\frac{1}{7}}$

លំហាត់ទី ៥

រកតម្លៃ x, y និង z ដែលវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,4,6), \vec{v} = (2,y,6)$ និង $\vec{w} = (2,4,z)$ កែងគ្នាពីរៗ។

ដំណោះស្រាយ

វ៉ិចទ័រកែងគ្នាពីរៗ $\iff \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$៖

$$\begin{cases} 2x+4y+36=0 \implies x+2y=-18 & (1) \\ 2x+16+6z=0 \implies x+3z=-8 & (2) \\ 4+4y+6z=0 \implies 2y+3z=-2 & (3) \end{cases}$$

យក $(1)-(2) \implies 2y-3z=-10 \quad (4)$

បូក $(3)+(4) \implies 4y=-12 \implies y=-3$

ជំនួសចូល (1) និង (3)៖

- $x=-18-2(-3)=-12$
- $3z=-2-2(-3)=4 \implies z=\frac{4}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=-12, \quad y=-3, \quad z=\frac{4}{3}}$

លំហាត់ទី ៦

គេឲ្យ $\vec{u}=(1,2,-3), \vec{v}=(2,-1,-2)$ និង $\vec{w}=(1,-3,1)$។ បើ $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$។ រក x_1,x_2,x_3 ដែល $\vec{x}\neq\vec{0}$។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\vec{u}-\vec{v}=(-1,3,-1)=-\vec{w}$ នាំឱ្យបីវ៉ិចទ័រកូប្លាណែ។ គេអាចជ្រើសយក $\vec{x}$ កូលីនេអ៊ែរនឹង $\vec{u}\times\vec{v}$៖

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-4-3,-(-2+6),-1-4)=(-7,-4,-5)$$

យក $\vec{x}=-(\vec{u}\times\vec{v})=(7,4,5)$។

ដូចនេះ $\boxed{(x_1,x_2,x_3)=(7,4,5)}$

(ជាទូទៅ $\vec{x}=(7k,4k,5k)$ ចំពោះគ្រប់ $k\neq 0$)

លំហាត់ទី ៧

គេឲ្យ $\vec{u}=(2,-2,1)$ និង $\vec{v}=(2,3,-4)$។ តាង $\vec{w}=\vec{v}-k\vec{u}$។ បើ $\vec{w}\perp\vec{u}$ កំណត់តម្លៃ k និង $\vec{w}$។

ដំណោះស្រាយ

$\vec{w}\cdot\vec{u}=0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v}-k\|\vec{u}\|^2=0 \implies k=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=4-6-4=-6,\ \|\vec{u}\|^2=4+4+1=9$

$\implies k=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$

$\vec{w}=\vec{v}+\frac{2}{3}\vec{u}=(2,3,-4)+\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

$=\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{10}{3}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{k=-\frac{2}{3},\quad \vec{w}=\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{10}{3}\right)}$

លំហាត់ទី ៨

គេឲ្យចំណុច $A(0,3,0),B(0,1,-2)$ និង $C(2,3,-2)$។ តើ $\triangle ABC$ ជាប្រភេទត្រីកោណអ្វី?

ដំណោះស្រាយ

គណនាប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ៖

- $AB=\sqrt{0+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
- $BC=\sqrt{2^2+2^2+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
- $AC=\sqrt{2^2+0+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ដោយ $AB=BC=AC=2\sqrt{2}$ នាំឱ្យជ្រុងទាំងបីមានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

ដូចនេះ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស (Equilateral)}}$

លំហាត់ទី ៩

គណនា $\vec{u}\cdot\vec{v},\vec{v}\cdot\vec{w},\vec{w}\cdot\vec{u}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=(1+\sqrt{2})\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j},\vec{v}=(1-\sqrt{2})\vec{i}-\vec{k},\vec{w}=\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{6}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k},\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-2\vec{j}+\frac{2}{5}\vec{k},\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=(-1)(1)=-1$

$\vec{w}\cdot\vec{u}=\sqrt{3}(\sqrt{3})=3$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=-1,\ \vec{v}\cdot\vec{w}=-1,\ \vec{w}\cdot\vec{u}=3}$

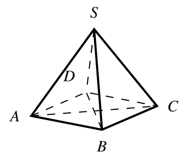
ខ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$

$\vec{w}\cdot\vec{u}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{13}{15},\ \vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{9}{10},\ \vec{w}\cdot\vec{u}=\frac{7}{6}}$

លំហាត់ទី ១០



$SABCD$ ជាពីរ៉ាមីតដែលមានបាតជាការេមានកំពូល S និង ទ្រនុងមានរង្វាស់ a ស្មើគ្នាទាំងអស់។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោមនេះជាអនុគមន៍នៃ a ៖

ក. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$

ខ. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$

គ. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\triangle SAB$ សម័ង្ស $\angle ASB = 60°$៖

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = a\cdot a\cos 60° = \frac{a^2}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = \dfrac{a^2}{2}}$

ខ $ABCD$ ការេជ្រុង $a \implies AC = a\sqrt{2}$

$SA^2 + SC^2 = 2a^2 = AC^2 \implies \angle ASC = 90°$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0}$

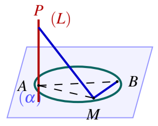
គ បំបែក $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$៖

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA}\cdot(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA})$

$= \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} - \|\overrightarrow{SA}\|^2 = 0 - a^2 = -a^2$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = -a^2}$

លំហាត់ទី ១១



គេឱ្យរង្វង់ (C) មានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ នៅក្នុងប្លង់ (α)។ បន្ទាត់ (L) កែងប្លង់ (α) ត្រង់ A។ យក $P \in (L)$។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $M \in (C)$ គេបាន $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$។

ដំណោះស្រាយ

បំបែក $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM}$ គេបាន៖

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}$

- $(L) \perp (\alpha) \implies \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$
- $[AB]$ អង្កត់ផ្ចិត $\implies \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

ជំនួសចូល៖

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 + 0 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \text{ (ពិត)}}$

មេរៀនទី ២ ៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ២

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ក	21	ឃ	41	ឃ	61	ឃ	81	ឃ
2	ខ	22	ក	42	ក	62	ក	82	ក
3	ខ	23	ខ	43	ខ	63	ខ	83	ខ
4	គ	24	គ	44	គ	64	គ	84	គ
5	ឃ	25	ឃ	45	ឃ	65	ឃ	85	ឃ
6	ក	26	ក	46	ក	66	ក	86	ក
7	ខ	27	ខ	47	ខ	67	ខ	87	ខ
8	គ	28	គ	48	គ	68	គ	88	គ
9	ឃ	29	ឃ	49	ឃ	69	ឃ	89	ឃ
10	ក	30	ក	50	ក	70	ក	90	ក

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
11	ខ	31	ឃ	51	ឃ	71	ឃ	91	ឃ
12	គ	32	ក	52	ក	72	ក	92	ក
13	ក	33	ខ	53	ខ	73	ខ	93	ខ
14	ខ	34	គ	54	គ	74	គ	94	គ
15	គ	35	ឃ	55	ឃ	75	ឃ	95	ឃ
16	ឃ	36	ក	56	ក	76	ក	96	ក
17	ក	37	ខ	57	ខ	77	ខ	97	ខ
18	ខ	38	គ	58	គ	78	គ	98	គ
19	គ	39	ឃ	59	ឃ	79	ឃ	99	ឃ
20	ឃ	40	ក	60	ក	80	ក	100	ក

២. ដំណោះស្រាយលំហាត់នៃលំហាត់អនុវត្តន៍ (មេរៀនទី ២)

លំហាត់ទី ១

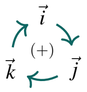
រកផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ រួចគូសរូបតាង៖

ក. $\vec{j}\times\vec{i}$ ខ. $\vec{i}\times\vec{j}$ គ. $\vec{j}\times\vec{k}$ ឃ. $\vec{k}\times\vec{j}$ ង. $\vec{i}\times\vec{k}$ ច. $\vec{k}\times\vec{i}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ ខ $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ គ $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$

ឃ $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ ង $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ ច $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$



លំហាត់ទី ២

រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង ក្នុងករណីនីមួយៗ៖

ក. $\vec{u}=(2,-3,1),\vec{v}=(1,-2,1)$

ខ. $\vec{u}=(-1,1,2),\vec{v}=(0,1,0)$

គ. $\vec{u}=(12,-3,0),\vec{v}=(-2,5,0)$

ឃ. $\vec{u}=(-10,0,6),\vec{v}=(7,0,0)$

ង. $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(2,1,-1)$

ច. $\vec{u}=(0,1,6),\vec{v}=(1,-2,1)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\times\vec{v}=(-3+2,-1,-4+3)=\boxed{(-1,-1,-1)}$

- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ខ $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,0,-1-0)=\boxed{(-2,0,-1)}$

- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

គ $\vec{u}\times\vec{v}=(0,0,60-6)=\boxed{(0,0,54)}$

- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ឃ $\vec{u}\times\vec{v}=(0,42,0)=\boxed{(0,42,0)}$

- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ង $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,3,1-2)=\boxed{(-2,3,-1)}$

- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ច $\vec{u}\times\vec{v}=(13,6,-1)=\boxed{(13,6,-1)}$

- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

លំហាត់ទី ៣

រក $\vec{u}\times\vec{v}$ ហើយបង្ហាញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង ក្នុងករណីនីមួយៗ៖

ក. $\vec{u}=(4,-3.5,7),\vec{v}=(-1,8,4)$

ខ. $\vec{u}=(-8,-6,4),\vec{v}=(10,-12,-2)$

គ. $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k},\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{1}{10}\vec{k}$

ឃ. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{k},\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+6\vec{j}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\times\vec{v}=(-14-56,-(16+7),32-3.5)$

$=(-70,-23,28.5)$

• $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=(-70,-23,28.5)}$

ខ $\vec{u}\times\vec{v}=(12+48,-(16-40),96+60)$

$=(60,24,156)$

• $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=(60,24,156)}$

គ $\vec{u}\times\vec{v}=\left(\frac{1}{5}-\frac{15}{4},-\left(-\frac{3}{10}+\frac{5}{2}\right),\frac{9}{4}-1\right)$

$=\left(-\frac{71}{20},-\frac{11}{5},\frac{5}{4}\right)$

• $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\left(-\frac{71}{20},-\frac{11}{5},\frac{5}{4}\right)}$

ឃ $\vec{u}=\left(0,0,\frac{2}{3}\right),\vec{v}=\left(\frac{1}{2},6,0\right)$៖

$\vec{u}\times\vec{v}=\left(0-4,-\left(0-\frac{1}{3}\right),0\right)=\left(-4,\frac{1}{3},0\right)$

• $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0\implies\perp\vec{u},\perp\vec{v}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\left(-4,\frac{1}{3},0\right)}$

លំហាត់ទី ៤

រកផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាជ្រុងជាប់៖

ក. $\vec{u}=\vec{j},\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$

គ. $\vec{u}=(3,2,-1),\vec{v}=(1,2,3)$

ឃ. $\vec{u}=(2,-1,0),\vec{v}=(-1,2,0)$

ដំណោះស្រាយ

រូបមន្តផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $S=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$៖

ក $\vec{u}\times\vec{v}=(1,0,0)=\vec{i}\implies\boxed{S=\|\vec{i}\|=1}$

ខ $\vec{u}\times\vec{v}=(0,-1,1)\implies\boxed{S=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}}$

គ $\vec{u}\times\vec{v}=(8,-10,4)\implies\boxed{S=\sqrt{180}=6\sqrt{5}}$

ឃ $\vec{u}\times\vec{v}=(0,0,3)\implies\boxed{S=3\text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

លំហាត់ទី ៥

ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំណុចខាងក្រោមជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡា៖

ក. $A(1,1,1), B(2,3,4), C(6,5,2), D(7,7,5)$

ខ. $A(2,-1,1), B(5,1,4), C(0,1,1), D(3,3,4)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{CD}=(1,2,3)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Longrightarrow ABDC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

$\overrightarrow{AC}=(5,4,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-10,14,-6)$

ដូចនេះ $\boxed{S=\sqrt{100+196+36}=\sqrt{332}=2\sqrt{83}}$

ខ $\overrightarrow{AB}=(3,2,3)$, $\overrightarrow{CD}=(3,2,3)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Longrightarrow ABDC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-6,10)$

ដូចនេះ $\boxed{S=\sqrt{36+36+100}=\sqrt{172}=2\sqrt{43}}$

លំហាត់ទី ៦

រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(0,0,0), B(1,2,3), C(-3,0,0)$

ខ. $A(2,-3,4), B(0,1,2), C(-1,2,0)$

គ. $A(1,3,5), B(3,3,0), C(-2,0,5)$

ឃ. $A(1,2,0), B(-2,1,0), C(0,0,0)$

ដំណោះស្រាយ

រូបមន្ត $S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$៖

ក $\overrightarrow{AB}=(1,2,3), \overrightarrow{AC}=(-3,0,0)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,-9,6) \Longrightarrow \boxed{S=\frac{\sqrt{117}}{2}=\frac{3\sqrt{13}}{2}}$

ខ $\overrightarrow{AB}=(-2,4,-2), \overrightarrow{AC}=(-3,5,-4)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-2,2) \Longrightarrow \boxed{S=\frac{\sqrt{44}}{2}=\sqrt{11}}$

គ $\overrightarrow{AB}=(2,0,-5), \overrightarrow{AC}=(-3,-3,0)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-15,15,-6) \Longrightarrow \boxed{S=\frac{\sqrt{486}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}}$

ឃ $\overrightarrow{CA}=(1,2,0), \overrightarrow{CB}=(-2,1,0)$

$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=(0,0,5) \Longrightarrow \boxed{S=\frac{5}{2}\text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

លំហាត់ទី ៧

រកផលគុណចម្រុះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}=\vec{i},\vec{v}=\vec{j},\vec{w}=\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(2,1,0),\vec{w}=(0,0,1)$

គ. $\vec{u}=(2,0,1),\vec{v}=(0,3,0),\vec{w}=(0,0,1)$

ឃ. $\vec{u}=(2,0,0),\vec{v}=(1,1,1),\vec{w}=(0,2,2)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{i}\implies \boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{i}\cdot\vec{i}=1}$

ខ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=1(1)-1(2)+1(0)=\boxed{-1}$

គ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=2(3-0)+1(0)=\boxed{6}$

ឃ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=2(2-2)=\boxed{0}$

លំហាត់ទី ៨

ដោយប្រើផលគុណចម្រុះ ចូរគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមាន $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ជាជ្រុងជាប់៖

ក. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j},\vec{v}=\vec{j}+\vec{k},\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$

ខ. $\vec{u}=(1,3,1),\vec{v}=(0,5,5),\vec{w}=(4,0,4)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=1(1)-1(-1)=2\implies \boxed{V=2\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

ខ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=1(20)-3(-20)+1(-20)=60\implies \boxed{V=60\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

លំហាត់ទី ៩

រកមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(0,0,0),B(3,0,0),C(0,5,1),D(3,5,1),E(2,0,5),F(5,0,5),G(2,5,6),H(5,5,6)$

ខ. $A(0,0,0),B(1,1,0),C(1,0,2),D(0,1,1),E(2,1,2),F(1,1,3),G(1,2,1),H(2,2,3)$

ដំណោះស្រាយ

ក ជ្រុងចេញពី $A(0,0,0)$៖ $\vec{u}=(3,0,0),\vec{v}=(0,5,1),\vec{w}=(2,0,5)$៖

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=3(25)=75\implies \boxed{V=75}$

ខ ជ្រុងចេញពី $A(0,0,0)$៖ $\vec{u}=(1,1,0),\vec{v}=(1,0,2),\vec{w}=(0,1,1)$៖

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=1(-2)-1(1)=-3\implies \boxed{V=|-3|=3}$

មេរៀនទី ៣ ៖ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវិចទ័រ

តារាងចម្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស (MCQ 100) — មេរៀនទី ៣

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
1	ក	21	គ	41	គ	61	ឃ	81	ឃ
2	ខ	22	ឃ	42	ឃ	62	ក	82	ក
3	ក	23	ក	43	ក	63	ខ	83	ខ
4	គ	24	ខ	44	ខ	64	គ	84	គ
5	ឃ	25	គ	45	គ	65	ឃ	85	ឃ
6	ក	26	ឃ	46	ឃ	66	ក	86	ក
7	ខ	27	ក	47	ក	67	ខ	87	ខ
8	គ	28	ខ	48	ខ	68	គ	88	គ
9	ឃ	29	គ	49	គ	69	ឃ	89	ឃ
10	ក	30	ឃ	50	ឃ	70	ក	90	ក

ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ	ល.រ	ចម្លើយ
11	ក	31	គ	51	ឃ	71	ឃ	91	គ
12	ខ	32	ឃ	52	ក	72	ក	92	ឃ
13	ក	33	ក	53	ខ	73	ខ	93	ក
14	គ	34	ខ	54	គ	74	គ	94	ខ
15	ឃ	35	គ	55	ឃ	75	ឃ	95	គ
16	ក	36	ឃ	56	ក	76	ក	96	ឃ
17	ខ	37	ក	57	ខ	77	ខ	97	ក
18	គ	38	ខ	58	គ	78	គ	98	ខ
19	ឃ	39	គ	59	ឃ	79	ឃ	99	គ
20	ក	40	ឃ	60	ក	80	ក	100	ឃ

៣. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់អនុវត្តន៍ (មេរៀនទី ៣)

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១

$ABCD$ ជាចតុមុខដែលមានទ្រនុងទាំង 6 ប៉ុនៗគ្នា។ A' ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (BCD)។ O ជាចំណុចមួយនៃ $[AA']$ ដែល $OA = OB = 3\cdot OA' = x$ (cm)។

ក. គណនា $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ ជាអនុគមន៍នៃ x។

ខ. គណនា $\cos\angle AOB$ រួចទាញរក AB ជាអនុគមន៍នៃ x។

ដំណោះស្រាយ

ក ដោយ $ABCD$ ជារូបចតុមុខទៀងទាត់ A' ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\triangle BCD$៖

$A'B = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (ដែល $a = AB$)។

ក្នុង $\triangle OA'B$ កែងត្រង់ A'៖ $OA' = \frac{x}{3}$, $OB = x$៖

$A'B^2 = OB^2 - OA'^2 = x^2 - \frac{x^2}{9} = \frac{8}{9}x^2$

$\Longrightarrow a^2 = 3A'B^2 = \frac{8}{3}x^2$។

ក្នុង $\triangle OAB$៖ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$

$= \frac{1}{2}(2x^2 - \frac{8}{3}x^2) = \boxed{-\frac{1}{3}x^2}$

ខ គណនា $\cos\angle AOB$ និង AB៖

- $\cos\angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA\cdot OB} = \frac{-\frac{1}{3}x^2}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{3}}$
- $AB = a = \sqrt{\frac{8}{3}x^2} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}x \text{ (cm)}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យ $A(2,2,2), B(2,0,1)$ និង $C(0,-1,3)$។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង។

ដំណោះស្រាយ

ក រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$៖

- $\overrightarrow{AB} = (2-2, 0-2, 1-2) = \boxed{(0,-2,-1)}$
- $\overrightarrow{BC} = (0-2, -1-0, 3-1) = \boxed{(-2,-1,2)}$

ខ គណនាផលគុណស្កាលែ៖

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0(-2) + (-2)(-1) + (-1)(2) = \boxed{0}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } B}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣

ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យ $A(1,-3,2)$ និង $\vec{w}=(2,1,3)$។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាម A មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{w}$។

ខ. រកកូអរដោនេប្រសព្វរវាង (D) និងប្លង់ $(Q): 2x-y+5z+3=0$។

ដំណោះស្រាយ

ក សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (D)៖

$$(D):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-3+t \qquad (t\in\mathbb{R})\\ z=2+3t\end{cases}$$

ខ ជំនួស (D) ក្នុង (Q)៖

$$2(1+2t)-(-3+t)+5(2+3t)+3=0$$

$$\iff 18t+18=0 \implies t=-1$$

$$\implies \boxed{I(-1,-4,-1)}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤ និង ទី ៥

លំហាត់ ៤៖ រក x ដើម្បីឱ្យ $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ កែងនឹង $\vec{c}=x\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$។

លំហាត់ ៥៖ រក y ដើម្បីឱ្យ $\vec{a}(-2,1,7)$ កែងនឹង $\vec{e}(1,y,4)$។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៤៖

$$\vec{u}\perp\vec{c} \iff \vec{u}\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff 3(x)+1(1)+(-4)(-5)=0$$

$$\iff 3x+21=0 \implies \boxed{x=-7}$$

លំហាត់ ៥៖

$$\vec{a}\perp\vec{e} \iff \vec{a}\cdot\vec{e}=0$$

$$\iff -2(1)+1(y)+7(4)=0$$

$$\iff -2+y+28=0 \implies \boxed{y=-26}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦

បង្ហាញថាចំណុច $P(1,7,2), Q(0,7,-2)$ និង $R(-1,6,1)$ ជាកំពូលនៃត្រីកោណកែង។

ដំណោះស្រាយ

គណនាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{RP}$ និង $\overrightarrow{RQ}$ ចេញពីកំពូល R៖

- $\overrightarrow{RP}=(1-(-1),7-6,2-1)=(2,1,1)$
- $\overrightarrow{RQ}=(0-(-1),7-6,-2-1)=(1,1,-3)$

ផលគុណស្កាលែ៖

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=2(1)+1(1)+1(-3)=2+1-3=0$$

$$\implies \overrightarrow{RP}\perp\overrightarrow{RQ} \implies \boxed{\triangle PQR \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } R}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧

រកប្រវែង និងកូស៊ីនុសទិសដៅនៃវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}(-1,1,1)$ គ. $\vec{u}(1,1,1)$ ង. $\vec{u}(-1,-1,-1)$ ឆ. $\vec{u}(3,-1,-4)$

ខ. $\vec{u}(3,0,0)$ ឃ. $\vec{u}(4,-1,0)$ ច. $\vec{u}(-3,-3,8)$ ជ. $\vec{u}(-2,-3,-4)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}(-1,1,1)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+1} = \boxed{\sqrt{3}}$

$\cos = \boxed{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

ខ $\vec{u}(3,0,0)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+0+0} = \boxed{3}$

$\cos = \boxed{(1,0,0)}$

គ $\vec{u}(1,1,1)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+1} = \boxed{\sqrt{3}}$

$\cos = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

ឃ $\vec{u}(4,-1,0)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{16+1+0} = \boxed{\sqrt{17}}$

$\cos = \boxed{\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}, 0\right)}$

ង $\vec{u}(-1,-1,-1)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+1} = \boxed{\sqrt{3}}$

$\cos = \boxed{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

ច $\vec{u}(-3,-3,8)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+9+64} = \boxed{\sqrt{82}}$

$\cos = \boxed{\left(-\frac{3}{\sqrt{82}}, -\frac{3}{\sqrt{82}}, \frac{8}{\sqrt{82}}\right)}$

ឆ $\vec{u}(3,-1,-4)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+1+16} = \boxed{\sqrt{26}}$

$\cos = \boxed{\left(\frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{4}{\sqrt{26}}\right)}$

ជ $\vec{u}(-2,-3,-4)$៖

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9+16} = \boxed{\sqrt{29}}$

$\cos = \boxed{\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{3}{\sqrt{29}}, -\frac{4}{\sqrt{29}}\right)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៨

រកមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u}(4,2,4)$ និង $\vec{v}(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$

ខ. $\vec{u}(2,1,-2)$ និង $\vec{v}(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$

គ. $\vec{u}(1,-2,2)$ និង $\vec{v}(-2,1,2)$

ឃ. $\vec{u}(-2,1,2)$ និង $\vec{v}(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 4, \vec{u}\cdot\vec{v} = 12\sqrt{2}$៖

$\cos\theta = \frac{12\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \boxed{\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$

ខ $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 2, \vec{u}\cdot\vec{v} = -3\sqrt{2}$៖

$\cos\theta = \frac{-3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \boxed{\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}}$

គ $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 3, \vec{u}\cdot\vec{v} = -2-2+4 = 0$៖

$\cos\theta = 0 \implies \boxed{\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}}$

ឃ $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 2, \vec{u}\cdot\vec{v} = -3\sqrt{2}$៖

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \boxed{\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៩

ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមាន $A(0,1,-4), B(-2,1,-1)$ និង $C(1,1,1)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. រកប្រវែង AB និង BC។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$។

ឃ. រកមុំ $\angle ABC$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទ $\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (-2,0,3)$, $\overrightarrow{BC} = (3,0,2)$

ខ $AB = \sqrt{4+0+9} = \boxed{\sqrt{13}}$

$BC = \sqrt{9+0+4} = \boxed{\sqrt{13}}$

គ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -6+0+6 = \boxed{0}$

ឃ ដោយ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\implies \cos\angle ABC = 0 \implies \boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

ដោយ $AB = BC = \sqrt{13}$ និង $\angle B = 90^\circ$៖

$\implies$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ } B}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១០

ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យ $A(2,2,6), B(2+2\sqrt{2},0,4)$ និង $C(2+2\sqrt{2},4,4)$។

ក. រកកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$។

ខ. រកប្រវែង AB និង AC។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$។

ឃ. រកមុំ $\angle BAC$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទ $\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},-2,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{2},2,-2)$

ខ $AB=\sqrt{8+4+4}=\sqrt{16}=\boxed{4}$

$AC=\sqrt{8+4+4}=\sqrt{16}=\boxed{4}$

គ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8-4+4=\boxed{8}$

ឃ $\cos\angle BAC=\frac{8}{4\times4}=\frac{1}{2}\implies\boxed{\angle BAC=60^\circ}$

ដោយ $AB=AC=4$ និង $\angle A=60^\circ$៖

$\implies$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១១

គេមាន $A(4,2,3), B(-2,1,-1), C(3,8,7)$ និង $D(-6,2,z)$។

ក. រកកូអរដោនេ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$។

ខ. រកប្រវែង AB,AC,BC។

ខ. បង្ហាញ $\triangle ABC$ សមបាត។

ឃ. រក z ដើម្បីឱ្យ ABD សមបាតកំពូល B។

គ. រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(-6,-1,-4)$

$\overrightarrow{AC}=(-1,6,4)$, $\overrightarrow{BC}=(5,7,8)$

ខ $AB=\sqrt{36+1+16}=\boxed{\sqrt{53}}$

$AC=\sqrt{1+36+16}=\boxed{\sqrt{53}}$

$BC=\sqrt{25+49+64}=\boxed{\sqrt{138}}$

គ ដោយ $AB=AC=\sqrt{53}\implies\boxed{\triangle ABC \text{ សមបាតកំពូល } A}$

ឃ ABD សមបាតកំពូល $B\iff BD^2=BA^2$៖

$\overrightarrow{BD}=(-4,1,z+1)\implies BD^2=17+(z+1)^2$

$17+(z+1)^2=53\iff(z+1)^2=36$

$\implies z+1=\pm6\implies\boxed{z=5 \text{ ឬ } z=-7}$

ង ទីប្រជុំទម្ងន់ $G=\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\dots\right)$៖

$G=\left(\frac{4-2+3}{3},\frac{2+1+8}{3},\frac{3-1+7}{3}\right)=\boxed{\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},3\right)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១២

គេឱ្យ $A(0,6,2), B(3,4,1)$ និង $C(1,3,4)$។

ក. រក $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ និងប្រវែងជ្រុង។

ខ. បញ្ជាក់ប្រភេទនៃ $\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (3,-2,-1) \implies AB = \boxed{\sqrt{14}}$

$\overrightarrow{AC} = (1,-3,2) \implies AC = \boxed{\sqrt{14}}$

$\overrightarrow{BC} = (-2,-1,3) \implies BC = \boxed{\sqrt{14}}$

ខ ដោយ $AB = AC = BC = \sqrt{14}$

$\implies$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១៣

គេមាន $A(2,1,0), B(0,2,1)$ និង $C(0,-1,4)$។

ក. រក $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ និងប្រវែង។

ខ. គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ និងមុំ θ រវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរ។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (-2,1,1) \implies AB = \boxed{\sqrt{6}}$

$\overrightarrow{AC} = (-2,-2,4) \implies AC = \boxed{2\sqrt{6}}$

ខ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4-2+4 = \boxed{6}$

$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \implies \boxed{\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១៤ និង ទី ១៥

លំហាត់ ១៤៖ គេឱ្យ $M(3,1,5), N(3,5,1), P(-1,5,5)$។ គណនា $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ មុំ θ និងប្រភេទ $\triangle MNP$។

លំហាត់ ១៥៖ គេឱ្យ $A(1,0,1), B(2,1,0), \overrightarrow{AC}(-1,2,1)$។ គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, រកចំណុច C, មេដ្យាន M, ទីប្រជុំទម្ងន់ G។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១៤៖

$\overrightarrow{MN} = (0,4,-4), \overrightarrow{MP} = (-4,4,0) \implies MN = MP = 4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 16 \implies \cos\theta = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \implies \boxed{\theta = 60^\circ}$

$NP = 4\sqrt{2} \implies \boxed{\triangle MNP \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

លំហាត់ ១៥៖

$\overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \implies \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1+2-1 = \boxed{0}$

- $C = A + \overrightarrow{AC} = \boxed{(0,2,2)}$
- M ជាចំណុចកណ្តាល $AC \implies \boxed{M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)}$
- $G = \frac{A+B+C}{3} = \boxed{(1,1,1)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១៦

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

ក. កាត់តាម $A(-1,-1,4)$ ស្រប $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

ខ. កាត់តាម $B(1,3,-2)$ កែង $x-y+2z=5$

គ. កាត់តាម $C(1,-1,2)$ កែង $5x-y+3z=7$

ឃ. កាត់តាម $D(1,5,10)$ ស្របនឹងអ័ក្សកូត (Oz)

ង. កាត់តាម $E(2,-1,0)$ ស្រប (d): $x=3+2t, y=5-2t, z=-7+5t$

ច. កាត់តាម $F(0,4,-2)$ ស្រប (d): $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក កាត់ $A(-1,-1,4), \vec{u}=(1,1,-2)$៖

$\boxed{(L): x=-1+t,\ y=-1+t,\ z=4-2t}$

ខ កាត់ $B(1,3,-2), \vec{u}=\vec{n}_P=(1,-1,2)$៖

$\boxed{(L): x=1+t,\ y=3-t,\ z=-2+2t}$

គ កាត់ $C(1,-1,2), \vec{u}=\vec{n}_P=(5,-1,3)$៖

$\boxed{(L): x=1+5t,\ y=-1-t,\ z=2+3t}$

ឃ កាត់ $D(1,5,10), \vec{u}=\vec{k}=(0,0,1)$៖

$\boxed{(L): x=1,\ y=5,\ z=10+t}$

ង កាត់ $E(2,-1,0), \vec{u}=(2,-2,5)$៖

$\boxed{(L): x=2+2t,\ y=-1-2t,\ z=5t}$

ច កាត់ $F(0,4,-2), \vec{u}=(5,-2,2)$៖

$\boxed{(L): x=5t,\ y=4-2t,\ z=-2+2t}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១៧

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់ $P(2,-3,7)$ ស្របនឹង $\vec{v}(1,1,-4)$។

ខ. រកវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (d): $2x-6=4-y=z-5$។

គ. រកមុំរវាង (L) និង (d)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\boxed{(L): x=2+t,\ y=-3+t,\ z=7-4t}$

ខ $\frac{x-3}{1/2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-5}{1} \implies \boxed{\vec{u}_d=(1,-2,2)}$

គ $\vec{v}\cdot\vec{u}_d=1-2-8=-9$

$\|\vec{v}\|=3\sqrt{2}, \|\vec{u}_d\|=3 \implies \cos\theta=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\implies \boxed{\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១៨

រកសមីការប្លង់ α ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. កាត់ $A(2,1,3)$ ស្រប (P): $2x+2y+z-6=0$

ខ. កាត់ $A(-1,3,5)$ ស្រប (P): $6x-3y-2z+9=0$

គ. កាត់ $O(0,0,0)$ ស្រប (P): $3x-7y+z=4$

ឃ. កាត់ $A(4,-2,1)$ កែង (PQ) ត្រង់ $P(2,-1,2),Q(3,2,-1)$

ង. កាត់ $A(-1,3,2)$ ស្រប (yOz)

ច. កាត់ $A(-7,8,9)$ ស្រប (xOz)

ឆ. កាត់ $O(0,0,0)$ ស្រប (xOy)

ដំណោះស្រាយ

ក $2(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0$

$\iff \boxed{2x+2y+z-9=0}$

ខ $6(x+1)-3(y-3)-2(z-5)=0$

$\iff \boxed{6x-3y-2z+25=0}$

គ $3(x-0)-7(y-0)+1(z-0)=0$

$\iff \boxed{3x-7y+z=0}$

ឃ $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(1,3,-3)$៖

$1(x-4)+3(y+2)-3(z-1)=0 \iff \boxed{x+3y-3z+5=0}$

ង ស្រប $(yOz) \implies \vec{n}=(1,0,0) \implies \boxed{x=-1}$

ច ស្រប $(xOz) \implies \vec{n}=(0,1,0) \implies \boxed{y=8}$

ឆ ស្រប (xOy) កាត់ $O \implies \boxed{z=0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ១៩

គេមានប្លង់ α កាត់តាមចំណុច $P(1,2,-3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(3,-2,5)$។

ក. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ α។

ខ. តើ $\vec{a}(4,1,-2)$ ស្រប ឬកែងនឹងប្លង់ α?

គ. តើ $\vec{a}(15,-10,25)$ ស្រប ឬកែងនឹងប្លង់ α?

ឃ. រកវ៉ិចទ័រមួយផ្សេងទៀតដែលកែងនឹងប្លង់ α។

ដំណោះស្រាយ

ក $3(x-1)-2(y-2)+5(z+3)=0$

$\iff \boxed{3x-2y+5z+16=0}$

ខ $\vec{a}\cdot\vec{n}=12-2-10=0 \implies \vec{a}\perp\vec{n}$៖

$\implies$ $\boxed{\vec{a}(4,1,-2)}$ ស្របនឹងប្លង់ α

គ $\vec{a}(15,-10,25)=5\vec{n} \implies \vec{a}\parallel\vec{n}$៖

$\implies$ $\vec{a}$ កែងនឹងប្លង់ α

ឃ វ៉ិចទ័រកែងនឹង α គឺពហុគុណនៃ $\vec{n}$៖

$\boxed{-\vec{n}=(-3,2,-5)}$ (ឬ $2\vec{n}=(6,-4,10)$)

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២០

គេមានប្លង់ $(\alpha): x+2y-z-8=0$។

ក. តើ $A(1,3,-1), B(3,5,1)$ និង $C(1,6,5)$ ជាចំណុចនៅលើប្លង់ (α) ឬទេ?

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់នឹងអ័ក្សទាំងបី។

គ. រកពីរវ៉ិចទ័រដែលស្របទៅនឹងប្លង់ (α)។

ដំណោះស្រាយ

ក ជំនួសកូអរដោនេក្នុង (α)៖

- $1+6-(-1)-8=0 \implies \boxed{A\in(\alpha)}$
- $3+10-1-8=4\neq 0 \implies \boxed{B\notin(\alpha)}$
- $1+12-5-8=0 \implies \boxed{C\in(\alpha)}$

ខ ប្រសព្វជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ៖

- Ox: $\boxed{(8,0,0)}$ • Oy: $\boxed{(0,4,0)}$
- Oz: $\boxed{(0,0,-8)}$

គ វ៉ិចទ័រកែងនឹង $\vec{n}(1,2,-1)$៖

$\boxed{\vec{u}=(2,-1,0)}$ និង $\boxed{\vec{v}=(1,0,1)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២១

គណនាចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់ខាងក្រោម៖

ក. $A(3,2,-1)$ ទៅ $(\alpha): 7x-6y+6z=8$

ខ. $O(0,0,0)$ ទៅ $(\alpha): 2x+y-2z+7=0$

គ. $Q(-2,8,-3)$ ទៅ $(\alpha): 9x-y-4z=0$

ឃ. $R(-1,2,-1)$ ទៅ $(\alpha): x+y=6$

ង. $R(0,-3,0)$ ទៅ $(\alpha): 2x-7y+z-1=0$

ច. $R(4,-4,1)$ ទៅ $(\alpha): 2x+y-z=3$

ដំណោះស្រាយ

រូបមន្ត៖ $d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ក $d=\frac{|21-12-6-8|}{\sqrt{49+36+36}}=\frac{5}{11} \Longrightarrow \boxed{d=\frac{5}{11}}$

ខ $d=\frac{|7|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{3} \Longrightarrow \boxed{d=\frac{7}{3}}$

គ $d=\frac{|-18-8+12|}{\sqrt{81+1+16}}=\frac{14}{\sqrt{98}}=\boxed{\sqrt{2}}$

ឃ $d=\frac{|-1+2-6|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

ង $d=\frac{|21-1|}{\sqrt{4+49+1}}=\frac{20}{3\sqrt{6}}=\boxed{\frac{10\sqrt{6}}{9}}$

ច $d=\frac{|8-4-1-3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=\boxed{0}\ (R\in\alpha)$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២២

គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ពីរស្របគ្នា៖

ក. $(\alpha): 8x+y-4z+6=0$ និង $(\beta): 8x+y-4z=24$ ខ. $(\alpha): 2x+y-z=12$ និង $(\beta): 2x+y-z=7$

ដំណោះស្រាយ

ក រូបមន្ត៖ $d=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$d=\frac{|6-(-24)|}{\sqrt{64+1+16}}=\frac{30}{\sqrt{81}}=\boxed{\frac{10}{3}}$

ខ $d=\frac{|-12-(-7)|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\boxed{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២៣

រកមុំរវាងប្លង់ខាងក្រោម៖

ក. $(\alpha): x-2y+3z-4=0$ និង $(\beta): -2x+2y-z=3$

គ. $(\alpha): 4x-4y+7z=31$ និង $(\beta): 3x-2y-6z=11$

ខ. $(\alpha): 3x-z=7$ និង $(\beta): 2y+4z=5$

ឃ. $(\alpha): 2x+3y+5z=17$ និង $(\beta): x=4$

ដំណោះស្រាយ

ក $\cos\theta=\frac{|-2-4-3|}{\sqrt{14\cdot 3}}=\frac{3}{\sqrt{14}}\Longrightarrow \boxed{\theta=\arccos\frac{3\sqrt{14}}{14}}$

ខ $\cos\theta=\frac{|-4|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}}=\frac{4}{10\sqrt{2}}\Longrightarrow \boxed{\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{5}}$

គ $\cos\theta=\frac{|12+8-42|}{9\cdot 7}=\frac{22}{63}\Longrightarrow \boxed{\theta=\arccos\frac{22}{63}}$

ឃ $\cos\theta=\frac{|2|}{\sqrt{38\cdot 1}}=\frac{2}{\sqrt{38}}\Longrightarrow \boxed{\theta=\arccos\frac{\sqrt{38}}{19}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២៤

រកសមីការស្វ៊ែក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. ផ្ចិត $I(0,1,2)$, កាំ $r=\sqrt{3}$

ឃ. ផ្ចិត $I(3,-1,4), r=d(Q(0,2,1), x-2y+3z-1=0)$

ខ. ផ្ចិត $I(0,-1,3)$, កាត់ $M(2,1,1)$

ង. ផ្ចិត $I(2,2,-1)$, ប៉ះ $(P): 2x+y-z-3=0$

គ. អង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $A(4,0,5), B(0,4,5)$

ច. ផ្ចិត $I(-5,1,1)$, ប៉ះ $S': x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$

ដំណោះស្រាយ

ក $\boxed{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3}$

ខ $r^2=IM^2=4+4+4=12$៖

$\boxed{x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12}$

គ ផ្ចិត $I(2,2,5), r^2=8$៖

$\boxed{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=8}$

ឃ $r=\frac{|-4+3-1|}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}\Longrightarrow r^2=\frac{2}{7}$៖

$\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=\frac{2}{7}}$

ង $r=\frac{|4+2+1-3|}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}\Longrightarrow r^2=\frac{8}{3}$៖

$\boxed{(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\frac{8}{3}}$

ច $S': I'(1,-2,3), R'=3$ ។ $II'=7$៖

ប៉ះក្រៅ $r=7-3=4\Longrightarrow \boxed{(x+5)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២៥

រកកូអរដោនេផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$

ខ. $x^2+y^2+z^2+2x+14y-10z+74=0$

គ. $2x^2+2y^2+2z^2+4x-4y-14=0$

ឃ. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-19=0$

ង. $x^2+y^2+z^2-8x+4y+10z+9=0$

ច. $x^2+y^2+z^2-4=0$

ដំណោះស្រាយ

ក $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$

$\Longrightarrow \boxed{I(1,0,-2),\ R=3}$

ខ $(x+1)^2+(y+7)^2+(z-5)^2=1$

$\Longrightarrow \boxed{I(-1,-7,5),\ R=1}$

គ $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$

$\Longrightarrow \boxed{I(-1,1,0),\ R=3}$

ឃ $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=33$

$\Longrightarrow \boxed{I(3,-1,2),\ R=\sqrt{33}}$

ង $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=36$

$\Longrightarrow \boxed{I(4,-2,-5),\ R=6}$

ច $x^2+y^2+z^2=4$

$\Longrightarrow \boxed{I(0,0,0),\ R=2}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២៦

កំណត់ទីតាំងធៀបរវាងស្វ៊ែ S និង S'៖

ក. $S: x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$ និង $S': x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-19=0$

ខ. $S: x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z+4=0$ និង $S': x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+5=0$

គ. $S: 2x^2+2y^2+2z^2+4x-4y-14=0$ និង $S': x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$

ដំណោះស្រាយ

ក $S: I(1,0,-2), R=3$ និង $S': I'(3,-1,2), R'=\sqrt{33}$៖

$II'=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$។

ដោយ $|R-R'|<II'<R+R'$

$\Longrightarrow$ $\boxed{S \text{ និង } S' \text{ កាត់គ្នាបង្កើតជារង្វង់}}$

ខ $S: I(4,-2,1), R=\sqrt{17}$ និង $S': I'(-2,1,2), R'=2$៖

$II'=\sqrt{36+9+1}=\sqrt{46}>R+R'$

$\Longrightarrow$ $\boxed{S \text{ និង } S' \text{ នៅក្រៅគ្នា (មិនជួបគ្នា)}}$

គ $S: I(-1,1,0), R=3$ និង $S': I'(1,0,-2), R'=3$៖

$II'=\sqrt{4+1+4}=3<R+R'=6$

$\Longrightarrow$ $\boxed{S \text{ និង } S' \text{ កាត់គ្នាបង្កើតជារង្វង់}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២៧

កំណត់ទីតាំងធៀបរវាងស្វ៊ែ S និងប្លង់ (P)៖

ក. $S: x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ និង $(P): 2x-2y+z-1=0$

ខ. $S: x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z-22=0$ និង $(P): x+2y-2z-5=0$

គ. $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+2=0$ និង $(P): x+y-2z-11=0$

ដំណោះស្រាយ

ក $S: I(-1,4,2), R=3$៖

$d(I,P)=\frac{|-2-8+2-1|}{3}=3=R$

$\Longrightarrow$ ប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ S

ខ $S: I(1,-3,-2), R=6$៖

$d(I,P)=\frac{|1-6+4-5|}{3}=2<R$

$\Longrightarrow$ ប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ S តាមរង្វង់

គ $S: I(-1,2,1), R=2$៖

$d(I,P)=\frac{|-1+2-2-11|}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}>R$

$\Longrightarrow$ ប្លង់ (P) មិនជួបស្វ៊ែ S

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ២៨, ២៩ និង ទី ៣០

លំហាត់ ២៨៖ ផលគុណខ្វែងវ៉ិចទ័រខ្នាត៖ $\vec{i}\times\vec{j}, \vec{j}\times\vec{k}, \vec{k}\times\vec{i}, \vec{j}\times\vec{i}, \vec{k}\times\vec{j}, \vec{i}\times\vec{k}$។

លំហាត់ ២៩៖ គណនា $\vec{u}\times\vec{v}$ នៃ៖ **a.** $(2,-3,1)\times(1,-2,1)$ **b.** $(12,-3,0)\times(-2,5,0)$ **c.** $(1,1,1)\times(2,1,-1)$។

លំហាត់ ៣០៖ $\vec{u}(4,-2,5), \vec{v}(7,9,-8)$។ រក $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖ **a.** $2\vec{u}+\vec{x}=3\vec{v}$ **b.** $4\vec{x}-\vec{u}=3\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{x}$។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ២៨៖

- $\vec{i}\times\vec{j}=\boxed{\vec{k}}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\boxed{\vec{i}}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\boxed{\vec{j}}$
- $\vec{j}\times\vec{i}=\boxed{-\vec{k}}$, $\vec{k}\times\vec{j}=\boxed{-\vec{i}}$, $\vec{i}\times\vec{k}=\boxed{-\vec{j}}$

លំហាត់ ២៩៖

ក $(2,-3,1)\times(1,-2,1)=\boxed{(-1,-1,-1)}$

ខ $(12,-3,0)\times(-2,5,0)=\boxed{(0,0,54)}$

គ $(1,1,1)\times(2,1,-1)=\boxed{(-2,3,-1)}$

លំហាត់ ៣០៖

ក $\vec{x}=3\vec{v}-2\vec{u}$៖

$=3(7,9,-8)-2(4,-2,5)$

$=(21-8, 27+4, -24-10)$

$=\boxed{(13,31,-34)}$

ខ $2\vec{x}=4(\vec{u}-\vec{v}) \Longrightarrow \vec{x}=2(\vec{u}-\vec{v})$៖

$=2(-3,-11,13)=\boxed{(-6,-22,26)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣១

គេឱ្យ $\vec{u}(2,-1,5),\vec{v}(3x,5,4y-2)$ និង $\vec{w}(z-1,2,z+1)$។

ក. រកតម្លៃ x និង y ដែល $\vec{u}\parallel\vec{v}$។

ខ. រកតម្លៃ z ដែល $\vec{u}\perp\vec{w}$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\parallel\vec{v} \iff \frac{3x}{2}=\frac{5}{-1}=\frac{4y-2}{5}=-5$៖

- $\frac{3x}{2}=-5 \implies \boxed{x=-\frac{10}{3}}$
- $\frac{4y-2}{5}=-5 \implies 4y=-23 \implies \boxed{y=-\frac{23}{4}}$

ខ $\vec{u}\perp\vec{w} \iff \vec{u}\cdot\vec{w}=0$៖

$2(z-1)-1(2)+5(z+1)=0$

$\iff 7z+1=0 \implies \boxed{z=-\frac{1}{7}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣២ និង ទី ៣៣

លំហាត់ ៣២៖ គេឱ្យ $A(1,-1,-4),B(3,-4,2),C(4,5,-2)$។ គណនា $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ និងផលគុណ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចប្រាប់ឈ្មោះ $\triangle ABC$។

លំហាត់ ៣៣៖ គេឱ្យ $A(x,2,-1),B(0,y,1),C(3,4,-2)$។ រក x,y ដើម្បីឱ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ A។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៣២៖

$\overrightarrow{AB}=(2,-3,6) \implies AB=7$

$\overrightarrow{AC}=(3,6,2) \implies AC=7$

$\overrightarrow{BC}=(1,9,-4) \implies BC=\sqrt{98}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-18+12=0 \implies \angle A=90^\circ$

$\implies$ $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ A

លំហាត់ ៣៣៖

$\overrightarrow{AB}=(-x,y-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(3-x,2,-1)$

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \iff x^2-3x+2y-6=0$
- $AB^2=AC^2 \iff (y-2)^2+6x-10=0$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\implies \boxed{x=1,\ y=4}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣៤

គេឱ្យ $\vec{a}=(1,-2,1),\vec{b}=(-1,1,3)$ និង $\vec{c}=(2,3,-1)$។

ក. រក $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ និង $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$។

ខ. រកចំនួនពិត α,β,γ បើ $\vec{S}=(1,3,6)=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$។

ដំណោះស្រាយ

ក គណនាវ៉ិចទ័រ៖

- $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\boxed{(2,2,3)}$
- $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}=\boxed{(9,4,-4)}$
- $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}=\boxed{(31,16,-6)}$

ខ ប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases}\alpha-\beta+2\gamma=1\\ -2\alpha+\beta+3\gamma=3\\ \alpha+3\beta-\gamma=6\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=1}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣៥

គណនាផលគុណខ្វែង $\vec{u}\times\vec{v}$៖

ក. $\vec{u}=(4,3,5),\vec{v}=(-1,8,4)$

ខ. $\vec{u}=(-3,2,-5),\vec{v}=(11,2,5)$

គ. $\vec{u}=(-8,-6,4),\vec{v}=(10,-12,-2)$

ឃ. $\vec{u}=(-1,3,1),\vec{v}=(0,3,7)$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u}\times\vec{v}=(12-40,-(16+5),32+3)$
$=\boxed{(-28,-21,35)}$

ខ $\vec{u}\times\vec{v}=(10+10,-(-15+55),-6-22)$
$=\boxed{(20,-40,-28)}$

គ $\vec{u}\times\vec{v}=(12+48,-(16-40),96+60)$
$=\boxed{(60,24,156)}$

ឃ $\vec{u}\times\vec{v}=(21-3,-(-7-0),-3-0)$
$=\boxed{(18,7,-3)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣៦

គេឱ្យ $A(1,-1,2), B(2,1,4)$ និង $C(4,-2,-2)$។

ក. កំណត់កូអរដោនេ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$។

ខ. គណនាប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃ $\triangle ABC$។

គ. កំណត់កូអរដោនេ D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = \boxed{(1,2,2)}$

$\overrightarrow{BC} = \boxed{(2,-3,-6)}$, $\overrightarrow{AC} = \boxed{(3,-1,-4)}$

ខ $AB = \sqrt{1+4+4} = \boxed{3}$

$BC = \sqrt{4+9+36} = \boxed{7}$

$AC = \sqrt{9+1+16} = \boxed{\sqrt{26}}$

គ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម $\iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$៖

$D = A + \overrightarrow{BC} = (1+2, -1-3, 2-6)$

$\Longrightarrow \boxed{D(3,-4,-4)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣៧

គេឱ្យ $\vec{a} = (1,-2,2), \vec{b} = (-1,4,8)$ និង $\vec{c}(x,y,4)$។

ក. គណនា $\vec{a}\cdot\vec{b}$។

ខ. គណនា $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|$ និង $\cos(\vec{a},\vec{b})$។

គ. កំណត់ x,y ដើម្បីឱ្យ $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}$ និង $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = 52$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1-8+16 = \boxed{7}$

ខ $\|\vec{a}\| = \sqrt{1+4+4} = \boxed{3}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{1+16+64} = \boxed{9}$

$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{7}{3\times 9} = \boxed{\frac{7}{27}}$

គ • $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} \iff x - 3y = 12$

• $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = 52 \iff (0,2,10)\cdot(x,y,4) = 52$

$\iff 2y + 40 = 52 \Longrightarrow \boxed{y = 6}$

$x = 12 + 3(6) \Longrightarrow \boxed{x = 30}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣៨

គេមាន $A(-1,2,3), B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$។

ក. រកសមីការប្លង់ (P) កាត់ A កែង $\overrightarrow{BC}$ និងបន្ទាត់ (BC)។

ខ. រកកូអរដោនេ $H=(BC)\cap(P)$។

គ. រកប្រភេទនៃ $\triangle ABC$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{BC}=(2,4,4)=2(1,2,2)$៖

• $(P):\ 1(x+1)+2(y-2)+2(z-3)=0 \iff \boxed{x+2y+2z-9=0}$

• $(BC):\ \boxed{x=t,\ y=-1+2t,\ z=1+2t}$

ខ ជំនួស (BC) ក្នុង (P)៖ $9t-9=0 \implies t=1$

$\implies \boxed{H(1,1,3)}$

គ H ជាចំណុចកណ្ដាល BC និង $AH\perp BC$៖

$\implies$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល } A}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៣៩

គេមាន $A(4,0,0), B(0,-2,0), C(0,0,2), D(4,2,2)$។

ក. បង្ហាញ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ (BC) និងប្លង់ (ABC)។

ខ. រកចំណោល H នៃ A លើ (BC) និងផ្ទៃ S_{ABCD}។

ឃ. បើ $S(1,6,-6)$ រកមាឌពីរ៉ាមីត $SABCD$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(-4,-2,0) \implies \boxed{ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$

ខ $(BC):\ x=0, y=-2+t, z=t$

$(ABC):\ \boxed{x-2y+2z-4=0}$

គ $H(0,-1,1) \implies AH=3\sqrt{2}$

$S_{ABCD}=BC\cdot AH=2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=\boxed{12}$

ឃ $\overrightarrow{AS}=(-3,6,-6)=-3(1,-2,2)\parallel \vec{n}_{ABC}$

$\implies (SA)\perp(ABCD)$ មានកម្ពស់ $h=SA=9$៖

$$\boxed{V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=\frac{1}{3}(12)(9)=36}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤០ និង ទី ៤១

លំហាត់ ៤០៖ គេឱ្យ $A(1,2,3), (\alpha): x+2y-2z-8=0$។ រកចំណោល H, ចំណុចឆ្លុះ A' និងប្លង់ (β) កាត់ A' ស្រប (α)។

លំហាត់ ៤១៖ គេឱ្យ $(\alpha): 2x+2y+z-9=0, (\Delta): x=2-t, y=6-4t, z=2+t$។ រកប្រសព្វ A, មុំ θ, ប្លង់ $(\beta)\perp(\Delta)$ ត្រង់ A។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៤០៖

- $H=(\Delta)\cap(\alpha) \implies \boxed{H(2,4,1)}$
- $A'=2H-A=\boxed{(3,6,-1)}$
- $(\beta): \boxed{x+2y-2z-17=0}$

លំហាត់ ៤១៖

- $A=(\Delta)\cap(\alpha) \implies \boxed{A(1,2,3)}$
- $\sin\theta=\frac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \boxed{\theta=45^\circ}$
- $(\beta): \boxed{x+4y-z-6=0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤២

គេឱ្យ $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ និង $(S): x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$។

ក. បង្ហាញ (α) ប៉ះ (S) ត្រង់ A។ រកកូអរដោនេ A។ ខ. រកបន្ទាត់ $(\Delta)\perp(\alpha)$ ត្រង់ A។ រកចំណុច B និងប្លង់ (β) ប៉ះស្វ៊ែត្រង់ B។

ដំណោះស្រាយ

ក $(S): I(-1,4,2), R=3$៖

$d(I,\alpha)=\frac{|-2-8+2-1|}{3}=3=R \implies \boxed{(\alpha)\text{ ប៉ះស្វ៊ែ } S}$

ចំណុចប៉ះ $\boxed{A(1,2,3)}$

ខ $(\Delta): \boxed{x=1+2t,\ y=2-2t,\ z=3+t}$

B ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ធៀបនឹង I៖

$B=2I-A=\boxed{(-3,6,1)}$

ប្លង់ (β) ប៉ះស្វ៊ែត្រង់ B៖ $\boxed{2x-2y+z+17=0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤៣

គេមាន $A(4,-2,0), B(1,2,2), C(2,-1,0)$ និង $D(2,-2,-1)$។

ក. រក $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$។ ខ. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$។ គ. រកសមីការប្លង់ (BCD)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (-3,4,2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2,1,0)$, $\overrightarrow{AD} = (-2,0,-1)$

ខ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,5)$

$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 4+0-5 = -1$

$\Longrightarrow \boxed{V = \frac{1}{6}|-1| = \frac{1}{6} \text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

គ $\overrightarrow{BC} = (1,-3,-2), \overrightarrow{BD} = (1,-4,-3)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (1,1,-1)$

$(BCD): 1(x-1)+1(y-2)-1(z-2) = 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{x+y-z-1=0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤៤

គេឱ្យ $A(3,0,1), B(2,4,0)$ និង $C(0,3,3)$។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ (D) កាត់ O ស្រប $\vec{u}(1,1,1)$។ ខ. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ និងសមីការប្លង់ (ABC)។

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាង (D) និងប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\boxed{(D): x=t,\ y=t,\ z=t \quad (t \in \mathbb{R})}$

ខ $\overrightarrow{AB} = (-1,4,-1), \overrightarrow{AC} = (-3,3,2)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boxed{(11,5,9)}$

$(ABC): 11(x-3)+5y+9(z-1) = 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{11x+5y+9z-42=0}$

គ ជំនួស (D) ក្នុង (ABC)៖

$11t+5t+9t-42 = 0 \iff 25t = 42$

$\Longrightarrow t = \frac{42}{25}$

$\Longrightarrow \boxed{I\left(\frac{42}{25}, \frac{42}{25}, \frac{42}{25}\right)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤៥ និង ទី ៤៦

លំហាត់ ៤៥៖ គេឱ្យ $A(1,1,1), B(0,-2,1)$។ រកប្រវែង AB, បន្ទាត់ (AB) និងស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AB។

លំហាត់ ៤៦៖ គេឱ្យ $A(2,0,2), B(1,2,0), C(0,2,3)$។ រក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, ផ្ទៃ S_{ABC}, ប្លង់ (ABC) និងមាឌ V_{OABC}។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៤៥៖

- $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,0) \implies \boxed{AB=\sqrt{10}}$
- $(AB): \boxed{x=1-t,\ y=1-3t,\ z=1}$
- $I(1/2,-1/2,1), R^2=5/2$៖

$\boxed{(x-1/2)^2+(y+1/2)^2+(z-1)^2=5/2}$

លំហាត់ ៤៦៖

- $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boxed{(6,5,2)}$
- $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{36+25+4}=\boxed{\frac{\sqrt{65}}{2}}$
- $(ABC): \boxed{6x+5y+2z-16=0}$
- $d(O)=\frac{16}{\sqrt{65}} \implies \boxed{V=\frac{8}{3}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤៧

គេមាន $A(3,2,0)$ និង $K(0,-1,3)$។

ក. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ផ្ចិត A កាត់ K។

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ K។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AK}=(-3,-3,3) \implies R^2=AK^2=9+9+9=27$៖

$\boxed{(S): (x-3)^2+(y-2)^2+z^2=27}$

ខ $\vec{n}=\overrightarrow{AK}=-3(1,1,-1)$៖

$(P): 1(x-0)+1(y+1)-1(z-3)=0 \iff \boxed{x+y-z+4=0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៤៨ និង ទី ៤៩

លំហាត់ ៤៨៖ គេឱ្យ $A(0,2,2)$ និង $(D): x=1+t, y=1-t, z=2-t$។ រកប្លង់ $(P)\perp(D)$ ត្រង់ A, ចំណោល H, និងចម្ងាយ $d(A,D)$។

លំហាត់ ៤៩៖ គេឱ្យ $A(1,1,0), B(0,2,2), C(1,-2,3)$។ រក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, ប្លង់ (ABC) និងមាឌ V_{OABC}។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៤៨៖

- $(P): 1(x-0)-1(y-2)-1(z-2)=0 \iff \boxed{x-y-z+4=0}$
- $H=(P)\cap(D) \implies 3t+2=0 \implies \boxed{H\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)}$
- $d(A,D)=AH=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

លំហាត់ ៤៩៖

- $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boxed{(9,3,3)=3(3,1,1)}$
- $(ABC): \boxed{3x+y+z-4=0}$
- $d(O)=\frac{4}{\sqrt{11}}, S=\frac{3\sqrt{11}}{2} \implies \boxed{V=2}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥០

គេឱ្យ $A(2,0,1), B(0,1,3)$ និង $C(1,2,0)$។

ក. រក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃ S_{ABC}។ ខ. រកប្លង់ (ABC)។ គ. រក $d(D(1,1,1),ABC)$ និងមាឌ V_{DABC}។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(-2,1,2), \overrightarrow{AC}=(-1,2,-1)$

$\implies \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boxed{(-5,-4,-3)}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{25+16+9}=\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

ខ $(ABC): \boxed{5x+4y+3z-13=0}$

គ $d(D,ABC)=\frac{|5+4+3-13|}{\sqrt{50}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{10}}$

$V_{DABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot d=\frac{1}{3}\frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{10}=\boxed{\frac{1}{6}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥១ និង ទី ៥២

លំហាត់ ៥១៖ គេឱ្យ $A(1,0,-2), B(0,2,0), C(0,0,3)$។ រកប្លង់ (ABC), ចម្ងាយ $d(O,ABC)$ និងមាឌ V_{OABC}។
លំហាត់ ៥២៖ គេឱ្យ $A(1,0,1)$ និង $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$។ រកចំណុច B, បន្ទាត់ (AB), ស្វ៊ែ (S) ផ្ចិត A កាំ AB, និងប្លង់ប៉ះ (S) ត្រង់ B។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៥១៖

- $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(10,3,2) \implies \boxed{(ABC):\ 10x+3y+2z-6=0}$
- $d(O)=\frac{6}{\sqrt{100+9+4}}=\boxed{\frac{6}{\sqrt{113}}}$
- $V_{OABC}=\frac{1}{6}|1(2)(3)|=\boxed{1}$

លំហាត់ ៥២៖

- $B=A+\overrightarrow{AB}=\boxed{(0,2,2)}$
- $(AB):\ \boxed{x=1-t,\ y=2t,\ z=1+t}$
- $(S):\ \boxed{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=6}$
- ប្លង់ប៉ះត្រង់ B: $\boxed{x-2y-z+6=0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៣

គេឱ្យ $A(2,0,1), B(0,1,3)$ និង $C(0,3,2)$។

ក. រក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងប្លង់ (ABC)។

ខ. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(-2,1,2), \overrightarrow{AC}=(-2,3,1)$

$\implies \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-5,-2,-4)=-(5,2,4)$

$(ABC):\ 5(x-2)+2(y-0)+4(z-1)=0$

$\iff \boxed{5x+2y+4z-14=0}$

ខ ស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AB៖

- ផ្ចិត $I=\frac{A+B}{2}=(1,\frac{1}{2},2)$
- កាំ $R=\frac{AB}{2}=\frac{3}{2} \implies R^2=\frac{9}{4}$

$\implies \boxed{(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៤

គេមាន $A(1,1,1), B(2,0,3), C(-1,2,0)$ និង $D(2,4,2)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$។ ទាញថា DA ជាកម្ពស់តេត្រាអ៊ែត $ABCD$។

ខ. គណនាប្រវែង DA និងមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(1,-1,2), \overrightarrow{AC}=(-2,1,-1), \overrightarrow{AD}=(1,3,1)$៖

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1-3+2=0 \implies AB\perp AD$

• $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-2+3-1=0 \implies AC\perp AD$

$\implies AD\perp(ABC) \implies$ DA ជាកម្ពស់តេត្រាអ៊ែត

ខ • $DA=\sqrt{1+9+1}=\boxed{\sqrt{11}}$

• $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,-3,-1) \implies S_{ABC}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

• $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DA=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{11}}{2}\sqrt{11}=\boxed{\dfrac{11}{6}}$ (ឯកតាមាឌ)

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៥

គេឱ្យ $S(0,0,3)$ និង $\vec{u}(1,1,1)$។

ក. រកបន្ទាត់ (D) កាត់ S ស្រប $\vec{u}$។ រកលក្ខខណ្ឌលើ $M(x,y,z)$ ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{SM}\perp\vec{u}$។

ខ. បង្ហាញ SAB សម័ង្ស $(A(3,0,0),B(0,3,0))$។ រកផ្ទៃ S_{SAB} និងស្វ៊ែផ្ចិត O កាត់ S,A,B។

ដំណោះស្រាយ

ក • (D): $\boxed{x=t,\ y=t,\ z=3+t}$

• $\overrightarrow{SM}\perp\vec{u} \iff x+y+z-3=0$៖

$\implies$ សំណុំចំណុច M ជាប្លង់ $x+y+z-3=0$

ខ $SA=SB=AB=3\sqrt{2} \implies$ $\triangle SAB$ សម័ង្ស

• $\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}=(9,9,9) \implies \boxed{S_{SAB}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}}$

• ស្វ៊ែផ្ចិត O: $\boxed{x^2+y^2+z^2=9}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៦

គេមាន $A(-1,1,0), B(2,0,1), C(1,2,2)$ និង $D(0,1,-2)$។

ក. រកសំណុំ M ដែល $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$។ គណនា $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ និងផ្ទៃ S_{BCD}។

ខ. រកសមីការប្លង់ (BCD) និងប្រសព្វ N ជាមួយ $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$។ គណនាមាឌ V_{ABCD}។

ដំណោះស្រាយ

ក • $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \implies$ $\boxed{\text{ស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត } AB}$

$(x+1)(x-2)+y(y-1)+z(z-1)=0$

• $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \boxed{(-7,-5,3)}$

$\implies S_{BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{49+25+9} = \boxed{\frac{\sqrt{83}}{2}}$

ខ • (BCD): $\boxed{7x+5y-3z-11=0}$

• $N = (BCD) \cap (d) \implies \boxed{N(-8,8,-9)}$

• $d(A,BCD) = \frac{13}{\sqrt{83}}$

$\implies \boxed{V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{83}}{2}\frac{13}{\sqrt{83}} = \frac{13}{6}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៧

គេឱ្យ $(P): 3x+4y+6z-12=0$ និង $(Q): x+y+z=0$។

ក. រកបន្ទាត់ $(D) = (P) \cap (Q)$ យក $z=t$។ បង្ហាញ $\vec{p} \times \vec{q} \parallel \vec{u}$។

ខ. រក $A,B,C = (P) \cap$ អ័ក្ស។ រកផ្ទៃ S_{ABC}, ចម្ងាយ $d(O,P)$ និងមាឌ V_{OABC}។

ដំណោះស្រាយ

ក $z=t \implies \boxed{(D): x=2t-12,\ y=12-3t,\ z=t}$

$\vec{u} = (2,-3,1)$

$\vec{p} \times \vec{q} = (3,4,6) \times (1,1,1) = (-2,3,-1) = -\vec{u} \parallel \vec{u}$

ខ $A(4,0,0), B(0,3,0), C(0,0,2)$

• $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,8,12) \implies \boxed{S_{ABC} = \sqrt{61}}$

• $d(O,P) = \frac{12}{\sqrt{61}} \implies \boxed{V_{OABC} = 4}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៨

គេឱ្យ $A(2,0,0), B(2,3,0)$ និង $C(0,0,2)$។

ក. រកស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AC។ គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃ S_{ABC}។

ខ. បង្ហាញ $\triangle ABC$ កែងត្រង់ A។ រកប្លង់ (P) កាត់ C កែង $\vec{n}$ និងប្រសព្វជាមួយ $(L): x = 2t, y = 1 + 3t, z = -t$។

ដំណោះស្រាយ

ក • (S): $\boxed{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2}$

• $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boxed{(6,0,6) = 6(1,0,1)}$

• $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{36+36} = \boxed{3\sqrt{2}}$

ខ • $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies$ $\boxed{\triangle ABC \text{ កែងត្រង់ } A}$

• (P): $1(x-0) + 1(z-2) = 0 \iff \boxed{x + z - 2 = 0}$

• $2t - t - 2 = 0 \implies t = 2 \implies \boxed{M(4,7,-2)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៥៩

គេឱ្យ $A(2,2,0), B(0,2,2)$ និង $C(1,0,1)$។

ក. រកស្វ៊ែ S អង្កត់ផ្ចិត AB។ រក $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ ផ្ទៃ S_{ABC} និងប្លង់ (ABC)។

ខ. រក $M = (ABC) \cap Ox, N = (ABC) \cap Oz$។ បង្ហាញ $ABMN$ ចតុកោណកែង។ រក V_{DBCA} $(D(0,2,0))$។

ដំណោះស្រាយ

ក • (S): $\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2}$

• $\vec{n} = \boxed{(4,0,4) = 4(1,0,1)}$

• $S_{ABC} = \boxed{2\sqrt{2}}$

• (ABC): $\boxed{x + z - 2 = 0}$

ខ • $M(2,0,0), N(0,0,2)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = (-2,0,2)$ និង $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$

$\implies$ $\boxed{ABMN \text{ ជាចតុកោណកែង}}$

• $d(D, ABC) = \sqrt{2} \implies \boxed{V = \frac{4}{3}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦០

គេឱ្យ $A(1,2,-2), B(2,3,-2), C(0,3,-2)$ និង $D(1,2,-2+\sqrt{2})$។

ក. បង្ហាញ $AB = AC = AD$ និង $(AB) \perp (AC) \perp (AD)$។ គណនាមាឌ V_{ABCD}។

ខ. រក $\vec{N} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$, ផ្ទៃ S_{BCD}, ប្លង់ (BCD) និងចំណោល H នៃ A លើ (BCD)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (1,1,0), \overrightarrow{AC} = (-1,1,0), \overrightarrow{AD} = (0,0,\sqrt{2})$

$AB = AC = AD = \sqrt{2}$ និងកែងគ្នាពីរៗ។

$\Longrightarrow \boxed{V = \frac{1}{6}(\sqrt{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}}$

ខ • $\vec{N} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \boxed{(0, 2\sqrt{2}, 2)}$

• $S_{BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{8+4} = \boxed{\sqrt{3}}$

• $(BCD) : \boxed{\sqrt{2}y + z - 3\sqrt{2} + 2 = 0}$

• $\boxed{H\left(1, \frac{8}{3}, -2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦១

ប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCD-EFGH$ មាន $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 3\vec{j}, \overrightarrow{DH} = 2\vec{k}$ ក្នុងតម្រុយ $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$។

ក. រកកូអរដោនេកំពូលទាំង ៨។

ខ. រកសមីការប្លង់ (ACH) និងចម្ងាយពី D ទៅ (ACH)។

ដំណោះស្រាយ

ក $D(0,0,0), A(1,0,0), C(0,3,0), B(1,3,0)$

$H(0,0,2), E(1,0,2), G(0,3,2), F(1,3,2)$

ខ $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \iff \boxed{6x + 2y + 3z - 6 = 0}$

$d(D, ACH) = \frac{6}{\sqrt{36+4+9}} = \boxed{\frac{6}{7}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦២ និង ទី ៦៣

លំហាត់ ៦២៖ គេឱ្យ $A(-2,0,1), B(0,10,3), C(2,0,-1), D(5,3,-1)$។ រកប្លង់ (ABC) និងបង្ហាញ $D \notin (ABC)$។
លំហាត់ ៦៣៖ គេឱ្យ $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$។ បង្ហាញ $\triangle ABC$ សម័ង្ស, រក $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, ស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AC, និងប្លង់ប៉ះស្វ៊ែត្រង់ C។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៦២៖

- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4(-5,3,-10)$៖

(ABC): $\boxed{5x - 3y + 10z = 0}$

- $5(5) - 3(3) + 10(-1) = 6 \neq 0 \implies \boxed{D \notin (ABC)}$

លំហាត់ ៦៣៖

- $AB = BC = AC = \sqrt{2} \implies \boxed{\triangle ABC \text{ សម័ង្ស}}$
- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boxed{(1,1,1)}$
- (S): $\boxed{(x-1/2)^2 + y^2 + (z-1/2)^2 = 1/2}$
- ប្លង់ប៉ះត្រង់ C: $\boxed{x - z + 1 = 0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦៤

គេមាន $A(2,2,6), B(2+2\sqrt{2},0,4)$ និង $C(2+2\sqrt{2},4,4)$។

ក. គណនា $AB, AC, \angle BAC$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទ $\triangle ABC$។

ខ. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃ S_{ABC}។

ដំណោះស្រាយ

ក $AB = 4, AC = 4, BC = 4$

$\cos \angle BAC = \frac{1}{2} \implies \angle BAC = 60^\circ$

$\implies \boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ខ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boxed{8\sqrt{2}(1,-1,1)}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2 = \boxed{4\sqrt{3} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦៥

គេឱ្យ $M(-1,0,1), N(0,1,2), P(1,2,-1)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$ និងផ្ទៃ S_{MNP}។

ខ. រកប្លង់ (MNP), ចម្ងាយ $d(O,MNP)$ និងមាឌ V_{OMNP}។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{MN} = (1,1,1), \overrightarrow{MP} = (2,2,-2)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \boxed{(-4,4,0)}$

$S_{MNP} = \frac{1}{2}\sqrt{16+16} = \boxed{2\sqrt{2}}$

ខ $(MNP):\ -(x+1)+y=0 \iff \boxed{x-y+1=0}$

- $d(O,MNP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$
- $V_{OMNP} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦៦

គេឱ្យ $(P): x+2y+2z+5=0$ និង $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$។

ក. រកផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែ (S)។

ខ. បង្ហាញប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) រួចរកកាំរង្វង់ប្រសព្វ។

ដំណោះស្រាយ

ក $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$

$\Longrightarrow \boxed{I(1,2,-2),\ R=3}$

ខ $d(I,P) = \frac{|1+4-4+5|}{3} = 2 < R = 3$

$\Longrightarrow$ ប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) តាមរង្វង់

កាំរង្វង់ប្រសព្វ៖ $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{9-4} = \boxed{\sqrt{5}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦៧

គេឱ្យ $A(1,0,2), B(-1,1,4)$ និង $C(5,-1,3)$។

ក. រក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងប្លង់ (ABC)។

ខ. រក D ដើម្បីឱ្យ $ABDC$ ជាប្រលេឡូក្រាម និងផ្ទៃវា។

គ. គេឱ្យ $F(3,10,-2)$។ រកចម្ងាយពី F ទៅ (ABC) និងមាឌតេត្រាអ៊ែត $FABC$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \boxed{(3,10,-2)}$

$(ABC):\ \boxed{3x+10y-2z+1=0}$

ខ $D = B+\overrightarrow{AC} = \boxed{(3,0,5)}$

$S_{ABDC} = \sqrt{9+100+4} = \boxed{\sqrt{113}}$

គ $d(F,ABC) = \frac{|9+100+4+1|}{\sqrt{113}} = \boxed{\frac{114}{\sqrt{113}}}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{113}}{2}$

$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{113}}{2}\frac{114}{\sqrt{113}} = \boxed{19}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦៨

គេឱ្យ $A(2,2,2), B(2,0,1)$ និង $C(4,1,-1)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ និងបង្ហាញ $\triangle ABC$ កែង។

ខ. រកបន្ទាត់ (L) កាត់ A ស្រប $\overrightarrow{BC}$។

គ. រកប្លង់ (P) កាត់ C កែង (L) និងប្រសព្វ $(L)\cap(P)$។

ឃ. រកស្វ៊ែ S ផ្ចិត $I(1,1,1), r=\sqrt{10}$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0+2-2 = \boxed{0} \implies \boxed{\triangle ABC \text{ កែងត្រង់ } B}$

ខ $(L):\ \boxed{x=2+2t,\ y=2+t,\ z=2-2t}$

គ $(P):\ 2(x-4)+1(y-1)-2(z+1)=0 \iff \boxed{2x+y-2z-11=0}$

ប្រសព្វ $9t-9=0 \implies t=1 \implies \boxed{(4,3,0)}$

ឃ $\boxed{(S):\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៦៩

គេឱ្យ $A(1,1,1), B(-1,-2,-1)$ និង $C(1,2,0)$។

ក. រក $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ និងប្លង់ (α) កាត់ A,B,C។

ខ. រកផ្ទៃ S_{ABC}, $d(O,\alpha)$ និងមាឌ V_{OABC}។

គ. រកសំណុំចំណុច M ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $MA^2-MB^2=2$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\boxed{(-5,2,2)}$

$(\alpha):\ \boxed{5x-2y-2z-1=0}$

ខ $S_{ABC}=\frac{\sqrt{33}}{2},\ d(O)=\frac{1}{\sqrt{33}}$

$\Longrightarrow\ \boxed{V_{OABC}=\dfrac{1}{6}}$

គ $MA^2-MB^2=2$៖

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-\left[(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2\right]=2$

$\iff\ -4x-6y-4z-3=2$

$\iff\ \boxed{4x+6y+4z+5=0\ (\text{ប្លង់})}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧០

គេឱ្យ $A(-2,0,1), B(0,10,3), C(2,0,-1)$ និង $D(5,3,-1)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃ S_{ABC}។

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) កាត់ A,B,C។

គ. រកបន្ទាត់ (L) កាត់ D កែង (P)។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ផ្ចិត D ប៉ះប្លង់ (P)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=4(-5,3,-10)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{400+144+1600}=\boxed{2\sqrt{134}}$

ខ $(P):\ \boxed{5x-3y+10z=0}$

គ $(L):\ \boxed{x=5+5t,\ y=3-3t,\ z=-1+10t}$

ឃ $R=d(D,P)=\frac{|25-9-10|}{\sqrt{134}}=\frac{6}{\sqrt{134}}\Longrightarrow R^2=\frac{18}{67}$៖

$\boxed{(S):\ (x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧១

គេឱ្យ $A(0,2,0), B(1,0,0)$ និង $C(0,0,3)$។

ក. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ និងផ្ទៃ S_{ABC}។

ខ. រកប្លង់ (P) កាត់ O ស្រប (ABC)។

គ. គណនាមាឌ V_{OABC} និងចម្ងាយពី O មកប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \boxed{(-6,-3,-2)}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{36+9+4} = \boxed{\dfrac{7}{2}}$

ខ ប្លង់កាត់ O: $\boxed{6x+3y+2z=0}$

គ • $V_{OABC} = \frac{1}{6}|x_A y_B z_C| = \frac{1}{6}(2)(1)(3) = \boxed{1}$

• $d(O,ABC) = \frac{3V}{S} = \frac{3(1)}{7/2} = \boxed{\dfrac{6}{7}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧២

គេឱ្យ $A(0,1,1), B(2,0,2)$ និង $C(3,-1,-1)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ និងប្លង់ (ABC)។

ខ. បង្ហាញ $O \notin (ABC)$, រក $d(O,ABC)$ និងមាឌ V_{OABC}។

គ. រកបន្ទាត់ (L) កាត់ $D(1,1,2)$ កែង (P) និងស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AB។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boxed{(4,7,-1)}$

(ABC): $\boxed{4x+7y-z-6=0}$

ខ $O(0,0,0)$: $-6 \neq 0 \implies \boxed{O \notin (ABC)}$

$d(O) = \frac{6}{\sqrt{66}}, S = \frac{\sqrt{66}}{2} \implies \boxed{V=1}$

គ (L): $\boxed{x=1+4t,\ y=1+7t,\ z=2-t}$

ស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AB៖ ផ្ចិត $I(1,1/2,3/2), R^2 = 6/4 = 3/2$៖

$$\boxed{(x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧៣

គេឱ្យ $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$។ រកប្លង់ (ABC), ផ្ទៃ S_{ABC}, ចម្ងាយ OH, ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$, និងមាឌ V_{OABC}។

ដំណោះស្រាយ

- $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \iff \boxed{6x + 3y + 2z - 6 = 0}$
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 9 + 4} = \boxed{\frac{7}{2}}$
- $OH = \frac{6}{\sqrt{49}} = \boxed{\frac{6}{7}}$
- $\frac{1}{OH^2} = \frac{49}{36} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$
- $\boxed{V_{OABC} = \frac{1}{6}(1)(2)(3) = 1}$
- ស្វ៊ែ $OABC: \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ទី ៧៤ និង ទី ៧៥

លំហាត់ ៧៤៖ គេឱ្យ $I(1,2,-2), (P): 2x + 2y + z + 5 = 0$។ រក $(L) \perp (P)$ កាត់ I, ប្រសព្វ J, ស្វ៊ែ (S) បើកាត់បានរង្វង់បរិមាត្រ 8π។

លំហាត់ ៧៥៖ គេឱ្យ $A(-1,3,2), B(-9,4,9), (P): 2x - y + z + 1 = 0$។ រក $(L) \perp (P)$ កាត់ A, ចំណោល H, និងចំណុចឆ្លុះ A' នៃ A ធៀប (P)។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៧៤៖

- $(L): \boxed{x = 1 + 2t,\ y = 2 + 2t,\ z = -2 + t}$
- $J = (L) \cap (P) \implies \boxed{J(-1,0,-3)}$
- $d = IJ = 3,\ 2\pi r = 8\pi \implies r = 4$

$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$៖

$\boxed{(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25}$

លំហាត់ ៧៥៖

- $(L): \boxed{x = -1 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = 2 + t}$
- $H = (L) \cap (P) \implies 6t - 2 = 0 \implies \boxed{H\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$
- $A' = 2H - A = \boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)}$

៤. ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃលំហាត់ប្រឡងបាក់ឌុប (២០០២–២០២៦)

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យចំណុច $A(3,0,1),B(2,4,0)$ និង $C(0,3,3)$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាម O និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(1,1,1)$។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ. រកសមីការប្លង់ (ABC) ដោយយកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់។

ឃ. រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC។

ង. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និង ប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

ក សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (D) កាត់តាម $O(0,0,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(1,1,1)$៖

$$(D):\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

ខ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$៖

$\overrightarrow{AB}=(2-3,4-0,0-1)=(-1,4,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(0-3,3-0,3-1)=(-3,3,2)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8+3,-(-2-3),-3+12)=\boxed{(11,5,9)}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\implies A,B,C$ មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ សមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាម $A(3,0,1)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(11,5,9)$៖

$11(x-3)+5(y-0)+9(z-1)=0$

$11x+5y+9z-(33+0+9)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC):\ 11x+5y+9z-42=0}$

ឃ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC៖

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+5^2+9^2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{227}}{2}\ \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}}$

ង ប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងប្លង់ (ABC)៖

ជំនួសសមីការ (D) ចូលក្នុងសមីការប្លង់ (ABC)៖

$11(t)+5(t)+9(t)-42=0\iff 25t=42\implies t=\frac{42}{25}$

ដូចនេះ $\boxed{I\left(\dfrac{42}{25},\dfrac{42}{25},\dfrac{42}{25}\right)}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៣

នៅក្នុង តម្រុយ អរ តូ ណ រម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែល មាន ទិសដៅ វិជ្ជមាន (ឯកតា លើ អ័ក្ស 1 cm) គេ ឱ្យ ចំណុច $A(2,0,2), B(1,2,0)$ និង $C(0,2,3)$។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$។

ខ. គណនា $\|\overrightarrow{AB}\|$ និង $\|\overrightarrow{AC}\|$។ រួចប្រាប់ប្រភេទត្រីកោណ ABC។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថា A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) និងគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC។

ឃ. រកមាឌតេត្រាអែត $OABC$។ ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

ក សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (D) កាត់តាម $A(2,0,2)$ ស្របនឹង $\overrightarrow{BC}=(0-1,2-2,3-0)=(-1,0,3)$៖

$$(D):\begin{cases}x=2-t\\ y=0\\ z=2+3t\end{cases}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

ខ គណនាប្រវែង $\|\overrightarrow{AB}\|$ និង $\|\overrightarrow{AC}\|$៖

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)\implies\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1+4+4}=\boxed{3\text{ cm}}$

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,1)\implies\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4+4+1}=\boxed{3\text{ cm}}$

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}\text{ cm}\neq 3\text{ cm}$

ដោយ $AB=AC=3\text{ cm}\neq BC\implies$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល } A}$

គ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$៖

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2-(-4),-(-1-4),-2-(-4))=\boxed{(6,5,2)}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\implies A,B,C$ មិនរត់ត្រង់គ្នា។

ប្លង់ (ABC) កាត់ $A(2,0,2)$ មាន $\vec{n}=(6,5,2)$៖

$6(x-2)+5(y-0)+2(z-2)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC): 6x+5y+2z-16=0}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+5^2+2^2}=\boxed{\frac{\sqrt{65}}{2}\text{ cm}^2}$

ឃ មាឌតេត្រាអែត $OABC$៖

$V_{OABC}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|=\frac{1}{6}|2(6)+0(5)+2(2)|=\frac{16}{6}=\boxed{\frac{8}{3}\text{ cm}^3}$

ចម្ងាយពីចំណុច $O(0,0,0)$ ទៅប្លង់ (ABC)៖

$d(O,(ABC))=\frac{|-16|}{\sqrt{65}}=\boxed{\frac{16\sqrt{65}}{65}\text{ cm}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យចំណុច $A(3,2,0), K(0,-1,3)$។

ក. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ AK។

ខ. គេឱ្យចំណុច $B(5,0,0), C(0,5,0)$ និង $D(0,0,-5)$។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា B,C,D ជាចំណុចនៅលើប្លង់ (P)។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ BCD។

ឃ. គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $KBCD$។

ដំណោះស្រាយ

ក សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម $A(3,2,0)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AK} = (0-3,-1-2,3-0) = (-3,-3,3) = -3(1,1,-1)$៖

$1(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): x+y-z-5=0}$

ខ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំណុច B,C,D លើប្លង់ (P)៖

- $B(5,0,0): 5+0-0-5=0$ (ពិត) $\implies B\in(P)$
- $C(0,5,0): 0+5-0-5=0$ (ពិត) $\implies C\in(P)$
- $D(0,0,-5): 0+0-(-5)-5=0$ (ពិត) $\implies D\in(P)$

ដូចនេះ B,C និង D ជាចំណុចនៅលើប្លង់ (P)។

គ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ BCD៖

$\overrightarrow{BC}=(-5,5,0)$, $\overrightarrow{BD}=(-5,0,-5)$

$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = (-25-0,-(25-0),0-(-25)) = (-25,-25,25)$

$S_{BCD} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2}\sqrt{25^2+25^2+25^2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{BCD} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

ឃ ប្រវែង AK និងមាឌតេត្រាអែត $KBCD$៖

$AK = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{27} = \boxed{3\sqrt{3}}$

ដោយ $AK\perp(P)$ ហើយ $B,C,D\in(P)$ នោះ AK ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអែត $KBCD$ ធៀបនឹងបាត BCD៖

$V_{KBCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}\cdot AK = \frac{1}{3}\left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)(3\sqrt{3})$

ដូចនេះ $\boxed{V_{KBCD} = \dfrac{75}{2} \text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៥

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0,2,2)$ និងបន្ទាត់ $(D): x=1+t, y=1-t, z=2-t, t\in\mathbb{R}$។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ $(\alpha): x-y-z+4=0$ កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (D)។

ខ. ប្លង់ (α) កាត់អ័ក្ស Ox ត្រង់ M កាត់អ័ក្ស Oy ត្រង់ N កាត់អ័ក្ស Oz ត្រង់ P។ រកកូអរដោនេ M,N,P។

គ. បង្ហាញថា $\triangle MNP$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនា $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MNP។

ដំណោះស្រាយ

ក • ជំនួស $A(0,2,2)$ ចូល (α)៖

$0-2-2+4=0$ (ពិត) $\implies A\in(\alpha)$

• ប្លង់ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_\alpha=(1,-1,-1)$។

បន្ទាត់ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_D=(1,-1,-1)$។

ដោយ $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_D \implies (\alpha)\perp(D)$។

ខ រកកូអរដោនេចំណុច M,N,P៖

• $M=(\alpha)\cap Ox(y=0,z=0): x+4=0 \implies \boxed{M(-4,0,0)}$

• $N=(\alpha)\cap Oy(x=0,z=0): -y+4=0 \implies \boxed{N(0,4,0)}$

• $P=(\alpha)\cap Oz(x=0,y=0): -z+4=0 \implies \boxed{P(0,0,4)}$

គ គណនាប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃ $\triangle MNP$៖

$MN=\sqrt{(0-(-4))^2+(4-0)^2+0^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

$MP=\sqrt{(0-(-4))^2+0^2+(4-0)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

$NP=\sqrt{0^2+(0-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

ដោយ $MN=MP=NP=4\sqrt{2} \implies$ $\boxed{\triangle MNP \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ឃ $\overrightarrow{MP}=(4,0,4)$, $\overrightarrow{MN}=(4,4,0)$៖

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=4(4)+0(4)+4(0)=\boxed{16}$

$\cos\angle PMN=\frac{\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}}{MP\cdot MN}=\frac{16}{(4\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2} \implies \angle PMN=60^\circ$

$S_{MNP}=\frac{\sqrt{3}}{4}(MN)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(32)=\boxed{8\sqrt{3}\text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,0,1)$ និង $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B។ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}$។

ខ. គេឱ្យ $C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$។ រកកូអរដោនេ $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{CD}$។ គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$។

ឃ. រកមាឌចតុមុខ $OABC$។ ទាញរកចម្ងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(1-1,0+2,1+1)=(0,2,2)\implies \boxed{B(0,2,2)}$

ប្លង់ (P) កាត់តាម $A(1,0,1)$ មាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$៖

$-1(x-1)+2(y-0)+1(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):\ -x+2y+z=0}$ (ឬ $x-2y-z=0$)

ខ $\overrightarrow{AC}=(2-1,1-0,0-1)=\boxed{(1,1,-1)}$

$\overrightarrow{CD}=(1-2,3-1,1-0)=\boxed{(-1,2,1)}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1(1)+2(1)+1(-1)=0\implies \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)\implies ABCD$ ជា ប្រលេឡូក្រាម ដែល មាន មុំ $\angle A=90^\circ\implies$ $\boxed{ABCD \text{ ជាចតុកោណកែង}}$

គ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងផ្ទៃ S_{ABCD}៖

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2-1,-(1-1),-1-2)=\boxed{(-3,0,-3)}$

$S_{ABCD}=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABCD}=3\sqrt{2}\ (\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

ឃ មាឌចតុមុខ $OABC$៖

$V_{OABC}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$

$=\frac{1}{6}|1(-3)+0+1(-3)|=\frac{6}{6}=\boxed{1\ (\text{ឯកតាមាឌ})}$

ប្លង់ (ABC) កាត់ $A(1,0,1)$ មាន $\vec{n}=(1,0,1)$: $x+z-2=0$

$d(O,(ABC))=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+0+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៧

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $S(0,0,3)$ និង $\vec{u}=(1,1,1)$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច S ហើយស្របនឹង $\vec{u}$។

ខ. $M(x,y,z)$ ជាចំណុចក្នុងតម្រុយ។ គណនា $\vec{u}\cdot\overrightarrow{SM}$។ កំណត់សមីការដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{SM}\perp\vec{u}$។ តើសំណុំ M ជាអ្វី?

គ. គេឱ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និង $B(0,3,0)$។ បង្ហាញថា $\triangle SAB$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនា $\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}$។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ SAB។

ង. រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត O ហើយកាត់តាមចំណុច S,A និង B។

ដំណោះស្រាយ

ក $(D):\begin{cases}x=t\\y=t\\z=3+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

ខ $\overrightarrow{SM}=(x,y,z-3)\implies\vec{u}\cdot\overrightarrow{SM}=1(x)+1(y)+1(z-3)=\boxed{x+y+z-3}$

$\overrightarrow{SM}\perp\vec{u}\iff\vec{u}\cdot\overrightarrow{SM}=0\iff\boxed{x+y+z-3=0}$

សំណុំចំណុច M គឺជា **ប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច S ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$**។

គ $SA=\sqrt{3^2+0+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$SB=\sqrt{0+3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$AB=\sqrt{(-3)^2+3^2+0}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ដោយ $SA=SB=AB=3\sqrt{2}\implies$ $\boxed{\triangle SAB \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ឃ $\overrightarrow{SA}=(3,0,-3)$, $\overrightarrow{SB}=(0,3,-3)$

$\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}=(0-(-9),-(-9-0),9-0)=\boxed{(9,9,9)}$

$S_{SAB}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{81+81+81}=\boxed{\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

ង $OS=3, OA=3, OB=3\implies R=3$

សមីការស្វ៊ែផ្ចិត $O(0,0,0)$ កាំ $R=3$៖ $\boxed{x^2+y^2+z^2=9}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៨

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមាន $A(-1,1,0),B(2,0,1),C(1,2,2),D(0,1,-2)$។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនង x,y,z ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}$។ តើសំណុំនៃចំណុច M ជាអ្វី?

ខ. គណនា $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$។ រកចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ BCD ផ្ទៀងផ្ទាត់ $S=\sqrt[3]{e^m}$។

គ. រកសមីការប្លង់ (BCD)។ រកចំណុចប្រសព្វ N រវាង (BCD) និងបន្ទាត់ $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (BCD) រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AM}=(x+1,y-1,z),\overrightarrow{BM}=(x-2,y,z-1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=(x+1)(x-2)+y(y-1)+z(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{x^2+y^2+z^2-x-y-z-2=0}$

សំណុំចំណុច M គឺជា **ស្វ៊ែដែលមានអង្កត់ផ្ចិត** $[AB]$។

ខ $\overrightarrow{BC}=(-1,2,1),\ \overrightarrow{BD}=(-2,1,-3)$

$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-6-1,-(3+2),-1+4)=\boxed{(-7,-5,3)}$

$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\|=\frac{\sqrt{49+25+9}}{2}=\frac{\sqrt{83}}{2}$

$S=\sqrt[3]{e^m}=e^{m/3}\implies\frac{m}{3}=\ln\left(\frac{\sqrt{83}}{2}\right)\implies$

$\boxed{m=3\ln\left(\frac{\sqrt{83}}{2}\right)}$

គ ប្លង់ (BCD) កាត់ $B(2,0,1)$ មាន $\vec{n}=(-7,-5,3)$៖

$-7(x-2)-5(y-0)+3(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(BCD):\ 7x+5y-3z-11=0}$

សមីការបន្ទាត់៖ $x=1+t,y=-1-t,z=t$

ជំនួសចូល៖ $7(1+t)+5(-1-t)-3t-11=0$

$-t-9=0\implies t=-9\implies\boxed{N(-8,8,-9)}$

ឃ ចម្ងាយពី $A(-1,1,0)$ ទៅប្លង់ (BCD)៖

$d(A,(BCD))=\frac{|7(-1)+5(1)-3(0)-11|}{\sqrt{7^2+5^2+(-3)^2}}=\boxed{\frac{13}{\sqrt{83}}}$

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{83}}{2}\cdot\frac{13}{\sqrt{83}}=\boxed{\frac{13}{6}\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០០៩

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,2,0),B(0,2,2)$ និង $C(1,0,1)$។

ក. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ និងបន្ទាត់ $(d): x=1+t, y=2, z=1+t$។

ខ. រក $\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC។ រកសមីការប្លង់ (ABC)។

គ. ប្លង់ (ABC) ជួប Ox ត្រង់ M និង Oz ត្រង់ N។ រក M,N។ បង្ហាញថា $ABNM$ ជាចតុកោណកែង។

ឃ. រកចម្ងាយពី $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC)។ ទាញរកមាឌតេត្រាអែត $DCBA$។

ដំណោះស្រាយ

ក ផ្ចិត $I=$ មធ្យម $AB=(1,2,1)$, កាំ $R=\frac{AB}{2}=\sqrt{2}$៖

(S): $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2}$

ជំនួស (d) ចូល៖ $t^2+0^2+t^2=2 \iff 2t^2=2 \implies t=\pm1$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{(2,2,2)}$ និង $\boxed{(0,2,0)}$

ខ $\overrightarrow{CA}=(1,2,-1)$, $\overrightarrow{CB}=(-1,2,1)$

$\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=(2-(-2),-(1-1),2-(-2))=\boxed{(4,0,4)}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{n}\|=\frac{1}{2}\sqrt{16+0+16}=\boxed{2\sqrt{2}\text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

ប្លង់ (ABC): $4(x-1)+0+4(z-1)=0 \iff \boxed{x+z-2=0}$

គ • $M=(ABC)\cap Ox(y=0,z=0) \implies \boxed{M(2,0,0)}$

• $N=(ABC)\cap Oz(x=0,y=0) \implies \boxed{N(0,0,2)}$

$\overrightarrow{AB}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{MN}=(-2,0,2) \implies \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$

$\implies ABNM$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

$\overrightarrow{AM}=(0,-2,0) \implies \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \implies \angle A=90^\circ$

ដូចនេះ $\boxed{ABNM \text{ ជាចតុកោណកែង}}$

ឃ ចម្ងាយពី $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC)៖

$d(D,(ABC))=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+0+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$

$V_{DCBA}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot d=\frac{1}{3}(2\sqrt{2})\sqrt{2}=\boxed{\frac{4}{3}\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១០

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(-1,2,1), B(1,-6,-1)$ និង $C(2,2,2)$។

ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ កំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម A,B,C។ កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (d) កាត់តាម $J(-2,0,0)$ ទិស $\vec{u}(3,0,1)$។

ខ. រកកូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ r នៃស្វ៊ែ $x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$។ រកចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) និងបន្ទាត់ (d)។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,-1)$ ទៅប្លង់ (P)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(2,-8,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(3,0,1)$

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-8,-(2+6),24)=\boxed{(-8,-8,24)}$

$\vec{n}=-8(1,1,-3) \implies$ យក $(1,1,-3)$ ជាណរម៉ាល់នៃ (P)៖

$1(x+1)+1(y-2)-3(z-1)=0 \iff \boxed{(P): x+y-3z+2=0}$

បន្ទាត់ (d): $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

ខ $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2+1+1=4=2^2$

$\implies$ ផ្ចិត $\boxed{I(0,1,-1)}$, កាំ $\boxed{r=2}$

ប្រសព្វរវាង (S) និង (d)៖

$(-2+3t)^2+(0-1)^2+(t+1)^2=4$

$4-12t+9t^2+1+t^2+2t+1=4 \iff 5t^2-5t+1=0$

$\Delta=25-20=5 \implies t=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$

ដូចនេះ $\boxed{\left(-2+\frac{3(5\pm\sqrt{5})}{10}, 0, \frac{5\pm\sqrt{5}}{10}\right)}$

គ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC៖

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{n}\|=\frac{1}{2}\sqrt{64+64+576}=\frac{\sqrt{704}}{2}=\boxed{4\sqrt{11}}$

ចម្ងាយពី $D(0,1,-1)$ ទៅប្លង់ (P)៖

$d(D,(P))=\frac{|0+1-3(-1)+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{6}{\sqrt{11}}=\boxed{\frac{6\sqrt{11}}{11}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១១

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,4);B(2,-1,3)$ និង $C(-2,3,-2)$។

ក. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត A និងកាំ $r=\frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{2}$។

ខ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AC}$ ហើយកាត់តាមចំណុច B។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$។

ឃ. រកចម្ងាយ $d(B,A)$ និងចម្ងាយ $d(B,(d))$ ពីចំណុច B ទៅបន្ទាត់ (d)។

ង. រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{BC}=(-4,4,-5) \implies \|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{16+16+25}=\sqrt{57}$

$r=\frac{\sqrt{57}}{2} \implies r^2=\frac{57}{4}$៖

ដូចនេះ $\boxed{(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=\frac{57}{4}}$

ខ $\overrightarrow{AC}=(-3,1,-6)$។ ប្លង់ (P) កាត់តាម $B(2,-1,3)$៖

$-3(x-2)+1(y+1)-6(z-3)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):\ 3x-y+6z-25=0}$

គ $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-1)$។ បន្ទាត់ (d) កាត់តាម $C(-2,3,-2)$៖

$$(d):\begin{cases} x=-2+t \\ y=3-3t \\ z=-2-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ឃ $d(B,A)=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1+9+1}=\boxed{\sqrt{11}}$

$\overrightarrow{CB}=(4,-4,5) \implies \overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}=(19,9,-8)$

$\|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{361+81+64}=\sqrt{506}$

$d(B,(d))=\frac{\|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\sqrt{506}}{\sqrt{11}}=\boxed{\sqrt{46}}$

ង $\overrightarrow{BA}=(-1,3,1)$, $\overrightarrow{BC}=(-4,4,-5)$

$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(-19,-9,8)$

$S_{\text{ប្រលេ}}=\|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\|=\boxed{\sqrt{506}\ (\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

$S_{\triangle}=\frac{1}{2}S_{\text{ប្រលេ}}=\boxed{\frac{\sqrt{506}}{2}\ (\text{ឯកតាផ្ទៃ})}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១២

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមាន $M(-1,0,1), N(0,1,2), P(1,2,-1)$ និង $(\alpha): x-2y+z-4=0$។

ក. រកកូអរដោនេ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ (β) ដែលកាត់តាម M,N និង P។

ខ. រកសមីការស្វ៊ែ (S) មួយមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាមចំណុច N។ តើប្លង់ (α) ជួបស្វ៊ែ (S) ឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{MN}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{MP}=(2,2,-2)$

$\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=(-2-2,-(-2-2),2-2)=\boxed{(-4,4,0)}$

យក $\vec{n}_\beta=(1,-1,0)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (β)៖

$1(x+1)-1(y-0)+0(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(\beta): x-y+1=0}$

ខ កាំ $R=MN=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\implies R^2=3$

សមីការស្វ៊ែ (S) ផ្ចិត $M(-1,0,1)$៖

ដូចនេះ $\boxed{(S): (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3}$

ចម្ងាយពីផ្ចិត M ទៅប្លង់ (α)៖

$d=\frac{|-1-2(0)+1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

ប្រៀបធៀប៖ $d^2=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}<3=R^2\implies d<R$

ដូចនេះ ប្លង់ (α) កាត់ស្វ៊ែ (S) បានជាខ្សែរង្វង់មួយ។

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៣

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,0,1), B(0,2,2)$ និង $C(2,1,0)$។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A។

ខ. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់ (ABC)។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច $D(1,-1,3)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ M។ រកកូអរដោនេចំណុច M។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1),\ \overrightarrow{AC}=(1,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1(1)+2(1)+1(-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល } A}$

ខ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2-1,-(1-1),-1-2)=\boxed{(-3,0,-3)}$

យក $\vec{n}_{ABC}=(1,0,1)$ ជាណរម៉ាល់កាត់ $A(1,0,1)$៖

$1(x-1)+0(y-0)+1(z-1)=0 \iff \boxed{x+z-2=0}$

គ បន្ទាត់ $(d)\perp(ABC) \implies \vec{u}_d=(1,0,1)$៖

$$(d):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1\\ z=3+t\end{cases}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

$M=(d)\cap(ABC)$៖ ជំនួស (d) ចូលក្នុង (ABC)៖

$(1+t)+(3+t)-2=0 \iff 2t+2=0 \implies t=-1$

ដូចនេះ $\boxed{M(0,-1,2)}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៤ (លើកទី២)

គេមាន $A(2,2,1), B(4,-2,0), C(3,1,1), D(1,5,2)$។ ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡាវា។
ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់កាត់ A, B។ គ. រកសមីការប្លង់កាត់ A, B, D។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (2,-4,-1)$, $\overrightarrow{DC} = (2,-4,-1)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longrightarrow$ $\boxed{ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$

$\overrightarrow{AD} = (-1,3,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-1,-1,2)$

$S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1+1+4} = \boxed{\sqrt{6}}$

ខ $(AB): x = 2+2t,\ y = 2-4t,\ z = 1-t\ (t \in \mathbb{R})$

គ ប្លង់ (ABD) កាត់ $A(2,2,1)$ មាន $\vec{n} = (-1,-1,2)$៖
$-(x-2)-(y-2)+2(z-1) = 0 \iff$ $\boxed{x+y-2z-2=0}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៥

គេឱ្យ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$។ រកវ៉ិចទ័រ៖ ក. $\vec{u} + \vec{v}$ ខ. $\vec{w} \times \vec{u}$ គ. $\vec{w} \times \vec{v}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\vec{u} + \vec{v} = (1-1, -1+2, 2+2) = \boxed{(0,1,4)}$

ខ $\vec{w} \times \vec{u} = \boxed{-4\vec{j} - 2\vec{k} = (0,-4,-2)}$

គ $\vec{w} \times \vec{v} = \boxed{6\vec{i} + 3\vec{k} = (6,0,3)}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(2,3,4), N(3,5,6), P(4,6,7)$ និង $Q(3,4,5)$។
ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{QP}$។ ខ. ទាញបង្ហាញថា $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{MN} = (3-2, 5-3, 6-4) = \boxed{(1,2,2)}$

$\overrightarrow{QP} = (4-3, 6-4, 7-5) = \boxed{(1,2,2)}$

ខ ដោយ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = (1,2,2)$

$\Longrightarrow$ $\boxed{MNPQ \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៧

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមាន $A(-2,1,0),B(0,1,1),C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$។

ខ. គណនាប្រវែង AB,AC,AD,BC,BD និង CD។ ទាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)$, $\overrightarrow{AC}=(3,1,2)$

$\overrightarrow{AD}=(2,2,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$

$\overrightarrow{BD}=(0,2,-5)$, $\overrightarrow{CD}=(-1,1,-6)$

ខ $AB=\sqrt{4+0+1}=\boxed{\sqrt{5}}$

$AC=\sqrt{9+1+4}=\boxed{\sqrt{14}}$

$AD=\sqrt{4+4+16}=\boxed{2\sqrt{6}}$

$BC=\sqrt{1+1+1}=\boxed{\sqrt{3}}$

$BD=\sqrt{0+4+25}=\boxed{\sqrt{29}}$

$CD=\sqrt{1+1+36}=\boxed{\sqrt{38}}$

• $AB^2+AD^2=5+24=29=BD^2$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\triangle ABD \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A}$

• $AC^2+AD^2=14+24=38=CD^2$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\triangle ACD \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៨

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3),B(3,0,1),C(-1,0,1)$ និង $D(2,1,2)$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$។

ខ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(0,1,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,-2,-2)$

$\overrightarrow{AD}=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{BC}=(-4,0,0)$

ខ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0(2)+1(-2)-1(-2)=\boxed{0}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0(-2)+1(-2)-1(-2)=\boxed{0}$

ដោយ $\vec{n}\neq\vec{0}$ កែងនឹងវ៉ិចទ័រពីរ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរ

$\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{n}=(0,1,-1) \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ } (ABC)}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០១៩

ផ្នែក A៖ គេមាន $A(1,-1,4), B(7,-1,-2), C(1,5,-2)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$។ បង្ហាញថា A,B,C កំណត់បានប្លង់មួយ។ បង្ហាញ $\vec{n}=(1,1,1)$ ជាណរម៉ាល់នៃ (ABC) និងរកសមីការប្លង់។ ខ. បង្ហាញថា $\triangle ABC$ សម័ង្ស។

ផ្នែក B៖ គេមានប៉ារ៉ាបូល $y^2+4y-8x-12=0$។ បម្លែងជាស្តង់ដា រកកំពូល កំណុំ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែក A៖

ក $\overrightarrow{AB}=(6,0,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(0,6,-6)$, $\overrightarrow{BC}=(-6,6,0)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(36,36,36)\neq\vec{0}$

$\Longrightarrow A,B,C$ កំណត់បានប្លង់មួយ

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=6-6=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=6-6=0$

$\Longrightarrow \vec{n}(1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (ABC)។

$(ABC): 1(x-1)+1(y+1)+1(z-4)=0$

$\Longleftrightarrow \boxed{x+y+z-4=0}$

ខ $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=6\sqrt{2}$

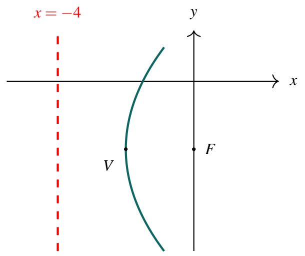
$\Longrightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ផ្នែក B៖

$(y+2)^2-4-8x-12=0 \Longleftrightarrow \boxed{(y+2)^2=8(x+2)}$

ទម្រង់ $(y-k)^2=4p(x-h) \Longrightarrow p=2$

- កំពូល $\boxed{V(-2,-2)}$ • កំណុំ $\boxed{F(0,-2)}$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\boxed{x=-4}$



វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០២១

ក. គេមាន $A(0,-2,0), B(-4,1,2), C(0,3,7), D(4,0,5)$។ រក $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}$ រួចបង្ហាញ $ABCD$ ជាចតុកោណកែងតែមិនមែនការេ។

ខ. សមីការ $9y^2 = 25(3-x)(3+x)$។ បង្ហាញថាជាអេលីប រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កំពូល កំណុំ រួចសង់។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (-4,3,2)$, $\overrightarrow{BC} = (4,2,5)$

$\overrightarrow{CD} = (4,-3,-2)$, $\overrightarrow{AD} = (4,2,5)$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \implies ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -16+6+10 = 0 \implies \angle B = 90^\circ$
- $AB = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$

  $BC = \sqrt{16+4+25} = 3\sqrt{5} \neq AB$

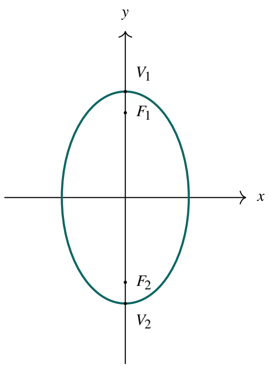
$\implies$ $\boxed{ABCD \text{ ចតុកោណកែង មិនមែនការេ}}$

ខ $9y^2 = 25(9-x^2) \iff 25x^2 + 9y^2 = 225$

$\iff \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$ (អេលីបឈរ ផ្ចិត O)

$a = 5, b = 3, c = \sqrt{25-9} = 4$៖

- អ័ក្សធំ $2a = \boxed{10}$, អ័ក្សតូច $2b = \boxed{6}$
- កំពូល $\boxed{V(0,\pm 5)}$ • កំណុំ $\boxed{F(0,\pm 4)}$



វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០២២

ក. គេមាន $M(0,1,1), N(1,2,2), P(0,3,-4), Q(-2,1,0)$។

1. រក $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{PQ}$ និងប្រវែង។ 2. បង្ហាញ $\triangle NPQ$ កែងត្រង់ Q និងរកផ្ទៃក្រឡា។

ខ. រកកំពូល កំណុំ បន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $(y+2)^2 = -8(x-2)$ រួចសង់។

ដំណោះស្រាយ

ក 1. $\overrightarrow{MN} = (1,1,1) \implies MN = \boxed{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{NP} = (-1,1,-6) \implies NP = \boxed{\sqrt{38}}$

$\overrightarrow{NQ} = (-3,-1,-2) \implies NQ = \boxed{\sqrt{14}}$

$\overrightarrow{PQ} = (-2,-2,4) \implies PQ = \boxed{2\sqrt{6}}$

2. $\overrightarrow{NQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6+2-8 = \boxed{0} \implies$ $\boxed{\triangle NPQ \text{ កែងត្រង់ } Q}$

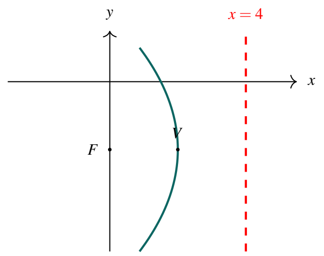
$S_{NPQ} = \frac{1}{2} NQ \cdot PQ = \frac{1}{2}\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{6} = \boxed{2\sqrt{21}}$

ខ $(y+2)^2 = -8(x-2) \implies (y-k)^2 = 4p(x-h)$

$h = 2, k = -2, 4p = -8 \implies p = -2 < 0$

• កំពូល $\boxed{V(2,-2)}$ • កំណុំ $\boxed{F(0,-2)}$

• បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\boxed{x = 4}$



វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០២៣

ក. គេមាន $A(5,-5,2), B(-1,1,0), C(0,1,2), D(6,6,-1)$។

1. បង្ហាញថា A,B,C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ 2. បង្ហាញ $\triangle BCD$ កែង និងរកផ្ទៃក្រឡា។

ខ. សមីការ $12(xy+3)-(3x+2y)^2=0$។ បង្ហាញថាជាអេលីប រកអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កំពូល រួចសង់។

ដំណោះស្រាយ

ក 1. $\overrightarrow{AB}=(-6,6,-2), \overrightarrow{AC}=(-5,6,0)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12,10,-6)\neq\vec{0} \implies A,B,C$ មិនរត់ត្រង់គ្នា

2. $\overrightarrow{BC}=(1,0,2), \overrightarrow{CD}=(6,5,-3)$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=6+0-6=0 \implies$ $\boxed{\triangle BCD \text{ កែងត្រង់ } C}$

$BC=\sqrt{5}, CD=\sqrt{70}$

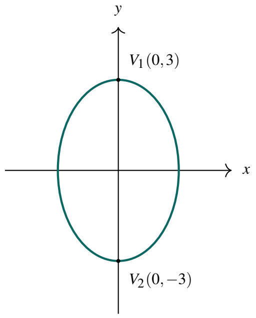
$S_{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{70}=\boxed{\frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

ខ $12xy+36-(9x^2+12xy+4y^2)=0$

$\iff 9x^2+4y^2=36 \iff \boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}$

អេលីបឈរ $a=3, b=2$៖

- អ័ក្សធំ $2a=\boxed{6}$, អ័ក្សតូច $2b=\boxed{4}$
- កំពូល $\boxed{V(0,\pm3)}$



វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០២៤

ក. គេមាន $A(2,0,0), B(-1,\sqrt{3},0), C(-1,-\sqrt{3},0)$។ រក $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$។ បង្ហាញ $\triangle ABC$ សម័ង្ស និងរកផ្ទៃវា។

ខ. សមីការ $(2x-3y)^2 = 6(3y^2-2xy-6)$។ បង្ហាញថាជាអ៊ីពែរបូល រកកំពូល កំណុំ អាសុីមតូត រួចសង់។

ដំណោះស្រាយ

ក $\overrightarrow{AB} = (-3,\sqrt{3},0), \overrightarrow{AC} = (-3,-\sqrt{3},0)$

$\overrightarrow{BC} = (0,-2\sqrt{3},0)$

$AB = AC = BC = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2 = \boxed{3\sqrt{3} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

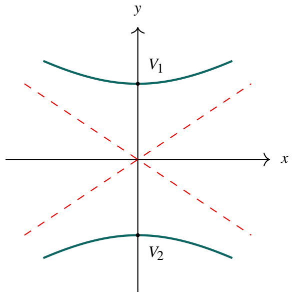
ខ $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 18y^2 - 12xy - 36$

$\Longleftrightarrow\ -4x^2 + 9y^2 = 36 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1}$

អ៊ីពែរបូលឈរ $a = 2, b = 3, c = \sqrt{13}$៖

• កំពូល $\boxed{V(0,\pm 2)}$ • កំណុំ $\boxed{F(0,\pm\sqrt{13})}$

• អាសុីមតូត $\boxed{y = \pm\frac{2}{3}x}$



វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០២៥

ផ្នែក A៖ គេមាន $A(1,-2,0),B(-2,0,-1),C(-2,-1,2),D(-2,1,-2),E(2,5,-2),F(-1,0,-2)$។

1. គណនា $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DF}$។ 2. បង្ហាញ $\triangle ACE$ កែងត្រង់ A និង $\triangle BDF$ សម័ង្ស។

ផ្នែក B៖ ប៉ារ៉ាបូលមានកំណុំលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងកំពូល $O(0,0)$ កាត់តាម $A(2,4)$។ រកសមីការស្តង់ដា និងរក x_1 បើ $B(x_1,-8)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែក A៖

1. $\overrightarrow{AC}=(-3,1,2),\overrightarrow{AE}=(1,7,-2)$

$\overrightarrow{BD}=(0,1,-1),\overrightarrow{BF}=(1,0,-1),\overrightarrow{DF}=(1,-1,0)$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=-3+7-4=0 \Longrightarrow$ $\boxed{\triangle ACE \text{ កែងត្រង់ } A}$

$BD=BF=DF=\sqrt{2} \Longrightarrow$ $\boxed{\triangle BDF \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ផ្នែក B៖

កំពូល $O(0,0)$, កំណុំលើ $Ox \Longrightarrow y^2=4px$

កាត់ $A(2,4) \Longrightarrow 4^2=4p(2) \Longrightarrow p=2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\boxed{y^2=8x}$

ចំណុច $B(x_1,-8)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល៖

$(-8)^2=8x_1 \Longleftrightarrow 64=8x_1 \Longrightarrow \boxed{x_1=8}$

វិញ្ញាសាប្រឡងបាក់ឌុប ឆ្នាំ ២០២៦

1. គេមានចំណុច $A(-3,1,4), B(-2,-1,7), C(-4,-1,-2), D(-2,-5,4)$។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$។ ខ. រកចំនួនពិត a,b ដែល $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$ រួចទាញថា A,B,C,D លើប្លង់តែមួយ។

2. ប៉ារ៉ាបូលកំពូល $O(0,0)$ កាត់តាម $A(-2,6)$ និង $B(x_1,6)$ ដែល $x_1 > 0$។ រកសមីការស្តង់ដា និងរកតម្លៃនៃ x_1។

ដំណោះស្រាយ

1. ក $\overrightarrow{AB} = (1,-2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,-2,-6)$

$\overrightarrow{AD} = (1,-6,0)$

ខ $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ -2 = -2a - 6b \\ 3 = -6a \end{cases}$

$\Longrightarrow \boxed{a = -\dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2}}$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{A,B,C,D \text{ ស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ}}$

2. ដោយ $A(-2,6)$ និង $B(x_1,6)$ មាន $y = 6$

$\Longrightarrow$ អ័ក្សឆ្លុះគឺអ័ក្សអរដោនេ Oy៖

សមីការមានរាង $x^2 = 4py$៖

$(-2)^2 = 4p(6) \Longrightarrow 4 = 24p \Longrightarrow 4p = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\boxed{x^2 = \dfrac{2}{3}y}$

ចំណុច $B(x_1,6)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល៖

$x_1^2 = \frac{2}{3}(6) = 4 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 2}$ (ដោយ $x_1 > 0$)

ឧបសម្ព័ន្ធ

ឧបសម្ព័ន្ធ ទី១ ៖ តារាងសង្ខេបរូបមន្តធរណីមាត្រក្នុងលំហ ថ្នាក់ទី១២

១. កូអរដោនេចំណុច និងវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

- តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ៖ $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$ និង $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$
- កូអរដោនេនៃចំណុច និងវ៉ិចទ័រ ៖ $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \iff M(x,y,z) \quad ; \quad \vec{u}=(x,y,z)$
- ម៉ូឌុល (ប្រវែង) ៖ $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- វ៉ិចទ័រ និងចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A,B ៖

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\, y_B-y_A,\, z_B-z_A), \quad AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

- ចំណុចកណ្ដាល I នៃ $[AB]$ ៖ $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- ទីប្រជុំទម្ងន់ត្រីកោណ ABC ៖ $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
- ទីប្រជុំទម្ងន់ចតុមុខ $ABCD$ ៖ $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4},\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$
- ប្រមាណវិធី ៖ $\vec{u}\pm\vec{v}=(x\pm x',\, y\pm y',\, z\pm z'), \quad k\vec{u}=(kx,\, ky,\, kz)$
- លក្ខខណ្ឌកូលីនេអ៊ែរ (ស្របគ្នា) ៖ $\vec{u}\parallel\vec{v} \iff \exists k\in\mathbb{R},\vec{u}=k\vec{v} \iff \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}\ (x',y',z'\neq 0)$

២. ផលគុណស្កាលែ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

- និយមន័យ និងរូបមន្តវិភាគ ៖ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})=xx'+yy'+zz'$
- លក្ខខណ្ឌកែងគ្នា ៖ $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff xx'+yy'+zz'=0$
- កូស៊ីនុសមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ ៖ $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \quad (0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ)$
- កូស៊ីនុសប្រាប់ទិសនៃ $\vec{u}(x,y,z)$ ៖ $\cos\alpha=\frac{x}{\|\vec{u}\|},\ \cos\beta=\frac{y}{\|\vec{u}\|},\ \cos\gamma=\frac{z}{\|\vec{u}\|} \implies \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

៣. ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ (Cross Product)

- និយមន័យក្នុងកូអរដោនេ ៖

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\right)=(yz'-zy',\,zx'-xz',\,xy'-yx')$$

- លក្ខណៈសំខាន់ៗ ៖
  - $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$ (វិសមមាត្រ) ; $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$
  - $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$ និង $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$
  - $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$
  - $\vec{u}\parallel\vec{v}\iff\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$
  - ចំណុច A,B,C រត់ត្រង់ជួរគ្នា $\iff\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
- ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ៖ $S=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$
- ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ៖ $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$

៤. ផលគុណចម្រុះ និងមាឌ (Scalar Triple Product & Volume)

- រូបមន្តផលគុណចម្រុះ ៖

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix}x & y & z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$$

- លក្ខខណ្ឌ ៣ វ៉ិចទ័រកូប្លាណែ (ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ) ៖ $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=0$
- លក្ខខណ្ឌ ៤ ចំណុច A,B,C,D ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ៖ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$
- មាឌប្រលេឡេពីប៉ែតសង់លើ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ៖ $V=|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$
- មាឌចតុមុខ $ABCD$ ៖ $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$
- ប្រវែងកម្ពស់ចតុមុខគូសចេញពី D មកបាត (ABC) ៖ $h_D=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\dfrac{|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}$

៥. សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

- បន្ទាត់ (L) កាត់តាម $A(x_0, y_0, z_0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ ៖
  - សមីការវ៉ិចទ័រ ៖ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$
  - សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ៖ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
  - សមីការឆ្លុះ (បើ $a, b, c \neq 0$) ៖ $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$
- ទីតាំងធៀបនៃពីរបន្ទាត់ (L_1) (កាត់ A_1, ទិស $\vec{u}_1$) និង (L_2) (កាត់ A_2, ទិស $\vec{u}_2$) ៖
  - ត្រួតស៊ីគ្នា ៖ $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ និង $A_1 \in (L_2)$
  - ស្របគ្នាដាច់ខាត ៖ $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ និង $A_1 \notin (L_2)$
  - កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចមួយ ៖ $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ និង $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = 0$
  - ទ្រេតគ្នា (មិនកាត់គ្នា មិនស្របគ្នា) ៖ $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ និង $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \neq 0$

៦. សមីការប្លង់ក្នុងលំហ

- ប្លង់ (P) កាត់តាម $M_0(x_0, y_0, z_0)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ ៖

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz + d = 0 \quad (d = -(ax_0 + by_0 + cz_0))$$

- ប្លង់កាត់តាមបីចំណុចមិនរត់ត្រង់ជួរ A, B, C ៖ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
- ទីតាំងធៀបនៃពីរប្លង់ $(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ និង $(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ៖
  - ត្រួតស៊ីគ្នា ៖ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$
  - ស្របគ្នាដាច់ខាត ៖ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$
  - កាត់គ្នាជាបន្ទាត់ (d) ៖ $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ (បន្ទាត់ (d) មានទិស $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$)
  - កែងគ្នា ៖ $(P_1) \perp (P_2) \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

៧. ចម្ងាយ និងមុំក្នុងលំហ

- ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅប្លង់ $(P): ax+by+cz+d=0$ ៖ $d(M_0,(P)) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅបន្ទាត់ (L) (កាត់ A, ទិស $\vec{u}$) ៖ $d(M_0,(L)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$
- ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទ្រេតគ្នាពីរ (L_1) និង (L_2) ៖ $d(L_1,L_2) = \dfrac{|(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)\cdot\overrightarrow{A_1A_2}|}{\|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\|}$
- ចម្ងាយរវាងពីរប្លង់ស្របគ្នា $(P_1): ax+by+cz+d_1=0$ និង $(P_2): ax+by+cz+d_2=0$ ៖ $d(P_1,P_2) = \dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- មុំរវាងពីរបន្ទាត់ $(L_1),(L_2)$ ៖ $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|} \quad (0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$
- មុំរវាងពីរប្លង់ $(P_1),(P_2)$ ៖ $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} \quad (0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$
- មុំរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ៖ $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|} \quad (0^\circ \le \alpha \le 90^\circ)$

៨. សមីការស្វ៊ែរ និងទីតាំងធៀប

- សមីការស្តង់ដា (ផ្ចិត $I(a,b,c)$, កាំ R) ៖ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
- សមីការទូទៅ ៖ $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

  លក្ខខណ្ឌជាស្វ៊ែរ ៖ $a^2+b^2+c^2-d>0 \Longrightarrow$ ផ្ចិត $I(a,b,c)$, កាំ $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

- សមីការស្វ៊ែរមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ៖ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$
- សមីការប្លង់ប៉ះស្វ៊ែរត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(S)$ ៖ $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)+(z_0-c)(z-z_0)=0$
- ទីតាំងធៀបរវាងស្វ៊ែរផ្ចិត I កាំ R និងប្លង់ (P) (តាង $d=d(I,(P))$) ៖
  - $d>R$ ៖ ប្លង់មិនកាត់ស្វ៊ែរ ; $d=R$ ៖ ប្លង់ប៉ះស្វ៊ែរត្រង់ H
  - $d<R$ ៖ ប្លង់កាត់ស្វ៊ែរបានជារង្វង់ផ្ចិត H កាំ $r=\sqrt{R^2-d^2}$
- ទីតាំងធៀបរវាងស្វ៊ែរពីរ (S_1) និង (S_2) $(d=I_1I_2)$ ៖
  - $d>R_1+R_2$ ៖ នៅក្រៅគ្នា ; $d=R_1+R_2$ ៖ ប៉ះគ្នាខាងក្រៅ
  - $|R_1-R_2|<d<R_1+R_2$ ៖ កាត់គ្នា ; $d=|R_1-R_2|$ ៖ ប៉ះគ្នាខាងក្នុង ; $d<|R_1-R_2|$ ៖ នៅខាងក្នុងគ្នា

ឧបសម្ពន្ធ ទី២ ៖ រូបមន្តធរណីមាត្រប្លង់ និងត្រីកោណមាត្រគ្រឹះ

១. ផ្ទៃក្រឡា និងបរិមាត្រនៃរូបធរណីមាត្រប្លង់

រូបធរណីមាត្រ	បរិមាត្រ (P)	ផ្ទៃក្រឡា (S)
ត្រីកោណទូទៅ	$P=a+b+c$	$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
ត្រីកោណកែង	$P=a+b+c$	$S=\frac{1}{2}ab$; $c^2=a^2+b^2$ (ពីតាករ)
ត្រីកោណសម័ង្ស (ជ្រុង a)	$P=3a$	$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
ការេ (ជ្រុង a)	$P=4a$	$S=a^2$; អង្កត់ទ្រូង $d=a\sqrt{2}$
ចតុកោណកែង $(a\times b)$	$P=2(a+b)$	$S=ab$; អង្កត់ទ្រូង $d=\sqrt{a^2+b^2}$
ប្រលេឡូក្រាម	$P=2(a+b)$	$S=ah=ab\sin\theta$
ចតុកោណស្មើ (អង្កត់ទ្រូង d_1,d_2)	$P=4a$	$S=\frac{1}{2}d_1d_2$
ចតុកោណព្នាយ (បាត a,b)	$P=a+b+c+d$	$S=\frac{(a+b)h}{2}$
រង្វង់ (កាំ R)	$C=2\pi R=\pi d$	$S=\pi R^2$
ចម្រៀករង្វង់ (មុំ θ ជា rad)	$L=R\theta$	$S=\frac{1}{2}R^2\theta$

២. តារាងតម្លៃត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

មុំជាដឺក្រេ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
មុំជារ៉ាដ្យង់	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	0

៣. រូបមន្តត្រីកោណមាត្រគ្រឹះ

- ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ ៖ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
- រូបមន្តបូក-ដក ៖ $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$, $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$
- រូបមន្តមុំទ្វេ ៖ $\sin 2a=2\sin a\cos a$, $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស ៖ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ឧបសម្ពន្ធ ទី៣ ៖ តារាងពាក្យបច្ចេកទេសគណិតវិទ្យា ខ្មែរ–អង់គ្លេស–បារាំង

ល.រ	ភាសាខ្មែរ	English	Français
1	វ៉ិចទ័រ	Vector	Vecteur
2	តម្រុយអរតូណរម៉ាល់	Orthonormal coordinate system	Repère orthonormé
3	កូអរដោនេ	Coordinates	Coordonnées
4	អាប់ស៊ីស (x)	Abscissa (x-coordinate)	Abscisse
5	អរដោនេ (y)	Ordinate (y-coordinate)	Ordonnée
6	កូត (z)	Applicate (z-coordinate)	Cote
7	ម៉ូឌុល / ប្រវែងវ៉ិចទ័រ	Magnitude / Norm	Norme d'un vecteur
8	វ៉ិចទ័រឯកតា	Unit vector	Vecteur unitaire
9	ផលគុណស្កាលែ	Dot product / Scalar product	Produit scalaire
10	ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ	Cross product / Vector product	Produit vectoriel
11	ផលគុណចម្រុះ	Scalar triple product	Produit mixte
12	កូប្លាណែ (ក្នុងប្លង់តែមួយ)	Coplanar	Coplanaires
13	កូលីនេអ៊ែរ (ស្របគ្នា)	Collinear / Parallel	Colinéaires / Parallèles
14	អរតូកូណាល់ / កែងគ្នា	Orthogonal / Perpendicular	Orthogonal / Perpendiculaire
15	ចំណោលកែង	Orthogonal projection	Projection orthogonale
16	វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស	Direction vector	Vecteur directeur
17	វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់	Normal vector	Vecteur normal
18	សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ	Parametric equations	Équations paramétriques
19	សមីការឆ្លុះ	Symmetric equations	Équations symétriques
20	សមីការទូទៅនៃប្លង់	General equation of a plane	Équation générale d'un plan

ឧបសម្ពន្ធ ទី៣ ៖ តារាងពាក្យបច្ចេកទេសគណិតវិទ្យា (ត)

ល.រ	ភាសាខ្មែរ	English	Français
21	បន្ទាត់ទ្រេត	Skew lines	Droites non coplanaires
22	បន្ទាត់ស្រប	Parallel lines	Droites parallèles
23	បន្ទាត់កាត់គ្នា	Intersecting lines	Droites sécantes
24	មុំរវាងពីរបន្ទាត់	Angle between two lines	Angle entre deux droites
25	មុំរវាងពីរផ្លង់	Angle between two planes	Angle entre deux plans
26	មុំរវាងបន្ទាត់ និងប្លង់	Angle between line and plane	Angle entre droite et plan
27	ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់	Distance from point to plane	Distance d'un point à un plan
28	ចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់	Distance from point to line	Distance d'un point à une droite
29	ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទ្រេតពីរ	Distance between skew lines	Distance entre droites gauches
30	ស្វ៊ែរ	Sphere	Sphère
31	ផ្ចិត និងកាំ	Center and radius	Centre et rayon
32	ប្លង់ប៉ះស្វ៊ែរ	Tangent plane to a sphere	Plan tangent à une sphère
33	រង្វង់ធំ	Great circle	Grand cercle
34	ចតុមុខ	Tetrahedron	Tétraèdre
35	ចតុមុខនិយ័ត	Regular tetrahedron	Tétraèdre régulier
36	ប្រលេឡេពីប៉ែត	Parallelepiped	Parallélépipède
37	ទីប្រជុំទម្ងន់	Centroid / Center of gravity	Centre de gravité
38	ដេទែមីណង់	Determinant	Déterminant
39	កូស៊ីនុសប្រាប់ទិស	Direction cosines	Cosinus directeurs
40	ផ្ទៃក្រឡា និងមាឌ	Surface area and volume	Aire et volume

ឧបសម្ពន្ធ ទី៤ ៖ តារាងអក្សរក្រិក និងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

១. តារាងអក្សរក្រិក (Greek Alphabet)

តូច	ធំ	ឈ្មោះអាន (ខ្មែរ)	ការប្រើប្រាស់ទូទៅក្នុងធរណីមាត្រ
α	A	អាល់ហ្វា (Alpha)	វង្វាស់មុំ, មេគុណស្កាលែ, មុំប្រាប់ទិសអ័ក្ស Ox
β	B	បេតា (Beta)	វង្វាស់មុំ, មេគុណស្កាលែ, មុំប្រាប់ទិសអ័ក្ស Oy
γ	Γ	ហ្គាម៉ា (Gamma)	វង្វាស់មុំ, មុំប្រាប់ទិសអ័ក្ស Oz
δ	Δ	ដេលតា (Delta)	បន្ទាត់ (Δ), ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = b^2 - 4ac$
θ	Θ	ថេតា (Theta)	មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ, មុំរវាងពីរប្លង់
λ	Λ	ឡាំដា (Lambda)	ប៉ារ៉ាម៉ែត្រក្នុងសមីការបន្ទាត់
μ	M	មី (Mu)	ប៉ារ៉ាម៉ែត្រទីពីរនៃបន្ទាត់
π	Π	ពី (Pi)	ចំនួនថេរ $\pi \approx 3.14159$, ឈ្មោះប្លង់ (Π)
ρ	P	រ៉ូ (Rho)	កាំប្លែ, ចម្ងាយពីគល់តម្រុយ
σ	Σ	ស៊ិកម៉ា (Sigma)	ផលបូក ($\sum$), ឈ្មោះប្លង់ (Σ)
ϕ	Φ	ហ្វី (Phi)	មុំក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែរ ឬកូអរដោនេប៉ូលែ
ω	Ω	អូមេហ្គា (Omega)	ផ្ចិតស្វ៊ែរ (Ω), លំហាត់រ

២. តារាងនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យាក្នុងធរណីមាត្រលំហ

និមិត្តសញ្ញា	ការអាន	អត្ថន័យក្នុងធរណីមាត្រលំហ
$\vec{u}, \overrightarrow{AB}$	វ៉ិចទ័រ u, វ៉ិចទ័រ AB	វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
$\lVert\vec{u}\rVert$	ម៉ូឌុលនៃ $\vec{u}$	ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ (ចំនួនពិតវិជ្ជមាន)
$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\vec{u}$ ស្កាលែ $\vec{v}$	ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ (ជាចំនួនពិត)
$\vec{u}\times\vec{v}$	$\vec{u}$ វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$	ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ (កែងនឹង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$)
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$	ផលគុណចម្រុះ	ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ (ជាចំនួនពិត)
$\perp$	កែងនឹង	បន្ទាត់កែងបន្ទាត់, បន្ទាត់កែងប្លង់, ប្លង់កែងប្លង់
$\parallel$	ស្របនឹង	ពីរបន្ទាត់ស្របគ្នា, ឬពីរប្លង់ស្របគ្នា
$d(M,(P))$	ចម្ងាយពី M ទៅ (P)	ប្រវែងកាត់កែងខ្លីបំផុតពីចំណុច M ទៅប្លង់ (P)
(S)	ស្វ៊ែរ S	ផ្ទៃស្វ៊ែរក្នុងលំហ
$\in, \notin$	ជាធាតុនៃ, មិនជាធាតុនៃ	ចំណុចស្ថិតនៅលើ ឬមិននៅលើបន្ទាត់/ប្លង់
$\cap$	ប្រសព្វ	ចំណុច ឬបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងរូបធរណីមាត្រ

ឯកសារយោង

1. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

2. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** (២០១០-២០២៥) ៖ សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

3. **ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា** ៖ សៀវភៅគ្រូ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, នាយកដ្ឋានអភិវឌ្ឍន៍កម្មវិធីសិក្សា, រាជធានីភ្នំពេញ។

4. **នាយកដ្ឋានជានាគុណភាពអប់រំ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) គណិតវិទ្យា (២០១៤-២០២៦), ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា។

5. **នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹតការ** ៖ កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២, រាជធានីភ្នំពេញ។

6. **Stewart, James, Clegg, Daniel, & Watson, Saleem** (2020) ៖ *Calculus: Early Transcendentals* (9th Edition - Vectors and the Geometry of Space), Cengage Learning, Boston, USA.

7. **Thomas, George B., Weir, Maurice D., & Hass, Joel** (2018) ៖ *Thomas' Calculus* (14th Edition - Vectors and Analytic Geometry in Space), Pearson, Boston, USA.

8. **Larson, Ron, & Edwards, Bruce H.** (2022) ៖ *Calculus* (12th Edition - Vectors and Surfaces in Space), Cengage Learning, Boston, USA.

9. **Spiegel, Murray R., Lipschutz, Seymour, & Spellman, Dennis** (2009) ៖ *Schaum's Outline of Vector Analysis* (2nd Edition), McGraw-Hill Education, New York, USA.

10. **Anton, Howard, Bivens, Irl, & Davis, Stephen** (2021) ៖ *Calculus: Early Transcendentals* (12th Edition - Three-Dimensional Space and Vectors), John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.