


# អនុគមន៍

## Functoin

សម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ និងសង្គម

ថ្នាក់ទី 12

អនុគមន៍

01 សនិទាន

02 អ៊ិចស្ប៉ូ

03 លោការីត

2027



# មាតិកា


**១ អនុគមន៍សនិទាន** . . . . . ៥

**១.១ អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$** . . . . . ៥

១.១.១ អាស៊ីមតូត . . . . . ៥

១.១.២ អាស៊ីមតូតទ្រេត . . . . . ៦

**១.២ សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$** . . . . . ១៣

១.២.១ សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ . . . . . ១៧

**១.៣ សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$** . . . . . ៤៤

**២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** . . . . . ៧៥

**២.១ ចំនួន $e$** . . . . . ៧៥

**២.២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** . . . . . ៧៥

២.២.១ និយមន័យ និងលក្ខណៈគ្រឹះ . . . . . ៧៥

**២.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** . . . . . ៧៦

**២.៤ អថេរភាពអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** . . . . . ៩២

**២.៥ អនុវត្តន៍** . . . . . ១០៧

**៣ អនុគមន៍លោការីត** . . . . . ១៤៧

**៣.១ លោការីតនេពែ** . . . . . ១៤៧

**៣.២ អនុគមន៍លោការីតនេពែរ និងក្រាប** . . . . . ១៤៩

៣.២.១ និយមន័យ . . . . . ១៤៩

៣.២.២ ក្រាបអនុគមន៍លោការីតនេពែ . . . . . ១៥០

**៣.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនៃ៧ . . . . . ១៥១**

**៣.៤ សមីការ និងវិសមីការលោការីតនៃ e . . . . . ១៥៨**

**៣.៤.១** សមីការ. . . . . **១៥៨**

**៣.៤.២** វិសមីការ . . . . . **១៥៩**

**៣.៥ សិក្សាអនុគមន៍ដែលទាក់ទងនឹងអនុគមន៍លោការីត . . . . . ១៦៦**

**៣.៦ អនុវត្ត . . . . . ១៧១**

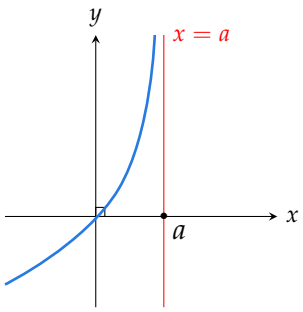


# អនុគមន៍សនិទាន

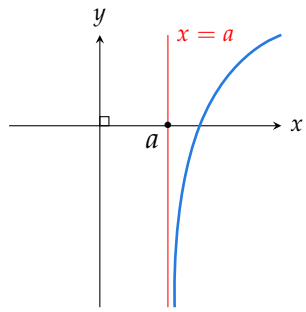
## ១.១ អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$

### ១.១.១ អាស៊ីមតូត

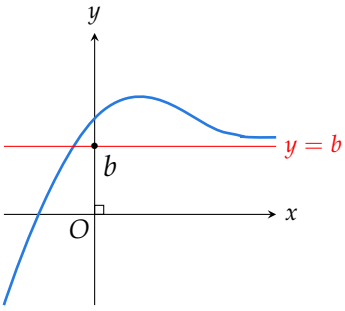
អាស៊ីមតូតជាបន្ទាត់ដែលខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ខិតជិតកាលណា $x$ ខិតជិតចុងដែនកំណត់។ ខាងក្រោមជានេះជារូបភាពបង្ហាញពីអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍:



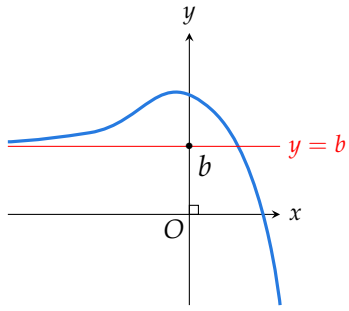

រូបទី ១: អាស៊ីមតូតឈរកាលណា $x \to a^-$



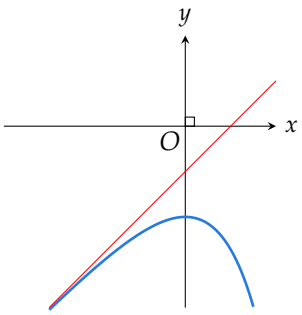

រូបទី ២: អាស៊ីមតូតឈរកាលណា $x \to a^+$



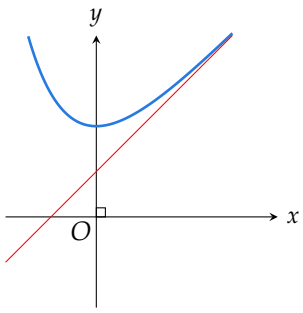

រូបទី ៣: អាស៊ីមតូតដេកកាលណា $x \to +\infty$




រូបទី ៤: អាស៊ីមតូតដេកកាលណា $x \to -\infty$




រូបទី ៥: អាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា $x \to -\infty$

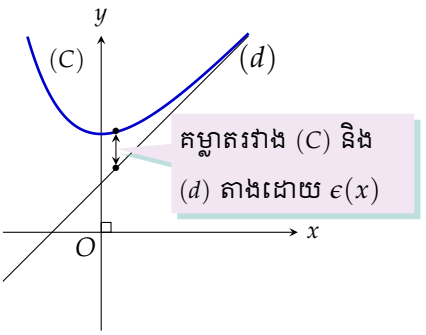



រូបទី ៦: អាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា $x \to +\infty$

អាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍មានបីប្រភេទ: អាស៊ីមតូតឈរ, អាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

### ១.១.២ អាស៊ីមតូតទ្រេត

**ឧទាហរណ៍** គេមានអនុគមន៍ $f$ និងក្រាបតំណាង $(C)$ និងបន្ទាត់ $(d)$ មានសមីការ $y = ax + b$ ដូចរូបខាងស្តាំ ។
យើងតាង $\epsilon(x)$ ជាគម្លាតរវាងក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ $(d)$
នោះគេបាន $f(x) - y_d = \epsilon(x)$




យើងឃើញថាតម្លៃ $\epsilon(x)$ ខិតទៅរក $0$ កាលណា $x$ ខិតជិត $+\infty$ ។
គេថា: បន្ទាត់ $(d) : y = ax + b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ។

$\star\star$ ករណីនេះអាចកើតមានឡើងដូចគ្នាចំពោះ $x$ ខិតជិត $-\infty$ ។

**ដាទូទៅ**

បើ $f$ អាចសរសេរជារាងកាណូនិក $f(x) = ax + b + \epsilon(x)$ ហើយមាន $\lim\limits_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty} \epsilon(x) = 0$ គេបាន បន្ទាត់ $\boxed{y = ax + b}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $f$ ។

$*$ ដើម្បីបង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d) : y = ax + b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $f$ យើងត្រូវបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y_d] = 0$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_d] = 0$

**របៀបមួយឡើត** បើបន្ទាត់ $\boxed{y = ax + b}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ គេបាន $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ និង $b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax]$ ឬ $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ និង $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax]$ ។

**លំហាត់គម្រូ** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ ⓑ $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ ⓒ $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

**ដំណោះស្រាយ**

ⓐ $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែ កពហុធា រវាង$x^2+2x+3$ និង $x+1$ នោះ

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+1 & x^2+2x+3 \\ & -x^2-x \\ \hline & x+3 \\ & -x-1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

គេបាន$y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}=x+1+\dfrac{2}{x+1}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(x+1)]=\lim\limits_{\pm\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប តាងអនុគមន៍ ។

(b) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធារវាង $x^2+1$ និង $x$ នោះ៖

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x & x^2+1 \\ & -x^2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

គេបាន $y=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x}$ ជាអាស៊ីមពូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

(c) $y=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធារវាង $x^2-5x+7$ និង $x-2$ នោះ៖

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ \hline x-2 & x^2-5x+7 \\ & -x^2+2x \\ \hline & -3x+7 \\ & +3x-6 \\ \hline & 1 \end{array}$$

គេបាន $y=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(x-3)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-3}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

# ក្រម្ងចលំហាត់បន្ថែម

**1** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

- (a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$
- (b) $f(x)=\dfrac{-x^2-3x-1}{x+2}$
- (c) $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$
- (d) $f(x)=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$

**2** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

- (a) $f(x)=\dfrac{x^2+7x+6}{x+5}$
- (b) $f(x)=-x+1+e^x$
- (c) $f(x)=x+4-\dfrac{\ln x}{x^2}$
- (d) $f(x)=x-2+xe^{-x}$
- (e) $f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$
- (f) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

**3** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

- (a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$
- (b) $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$
- (c) $f(x)=2x-1-(x+1)e^x$
- (d) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4\ln x}{x}$
- (e) $f(x)=x+1-\dfrac{e^x}{e^x-1}$
- (f) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

# ចម្លើយខ្លីលំហាត់បន្ថែម

**1** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

- (a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធារវាង $x^2-3x+1$ និង $x-2$ នោះ

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x-2 & x^2-3x+1 \\ & \underline{-x^2+2x} \\ & \quad -x+1 \\ & \quad \underline{x-2} \\ & \quad\quad -1 \end{array}$$

គេបាន $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x-2}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

**b** $f(x)=\dfrac{-x^2-3x-1}{x+2}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធាវរវាង $-x^2-3x-1$ និង $x+2$ នោះ

$$\begin{array}{r|l} & -x-1 \\ \hline x+2 & -x^2-3x-1 \\ & \underline{-x^2-2x\phantom{-1}} \\ & \phantom{-x^2-}-x-1 \\ & \phantom{-x^2-}\underline{-x-2} \\ & \phantom{-x^2-x-}1 \end{array}$$

គេបាន $f(x)=-x-1+\dfrac{1}{x+2}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

**c** $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

ដោយសារអនុគមន៍មានទម្រង់ស្រាប់ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

**d** $f(x)=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធាវរវាង $-x^2+x+1$ និង $x+1$ នោះ

$$\begin{array}{r|l} & -x+2 \\ \hline x+1 & -x^2+x+1 \\ & \underline{-x^2-x\phantom{-1}} \\ & \phantom{-x^2-}2x+1 \\ & \phantom{-x^2-}\underline{-2x-2} \\ & \phantom{-x^2-x-}-1 \end{array}$$

គេបាន $f(x)=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍។

**2** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

**a** $f(x)=\dfrac{x^2+7x+6}{x+5}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធារវាង $x^2+7x+6$ និង $x+5$ នោះ

$$\begin{array}{r|l} & x\ +2 \\ \hline x+5 & x^2+7x\ +6 \\ & -x^2-5x \\ \hline & 2x\ +6 \\ & -2x-10 \\ \hline & -4 \end{array}$$

គេបាន $f(x)=x+2-\dfrac{4}{x+5}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{4}{x+5}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍។

**b** $f(x)=-x+1+e^x$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាង $-\infty$។

**c** $f(x)=x+4-\dfrac{\ln x}{x^2}$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+4)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x+4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាង $+\infty$។

**d** $f(x)=x-2+xe^{-x}$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាង $+\infty$។

**e** $f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

- ខាង $-\infty$៖ ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1}=0$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$។

- ខាង $+\infty$៖ គេអាចសរសេរ $f(x)=-x+2-\dfrac{4}{e^x+1}$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{e^x+1}\right)=0$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

ⓕ $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

- ខាង $+\infty$៖ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{25}{4}}{\sqrt{x^2+3x-4}+\left(x+\frac{3}{2}\right)}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x+\dfrac{3}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

- ខាង $-\infty$៖ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{25}{4}}{\sqrt{x^2+3x-4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x-\dfrac{3}{2}}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$។

**3** រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$

ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេត្រូវចែកពហុធារវាង $x^2-x+1$ និង $x+2$ នោះ

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x^2-x+1 \\ \hline & x-3 \\ \cline{2-2} & -x^2-2x \\ \hline & -3x+1 \\ & 3x+6 \\ \hline & 7 \end{array}$$

គេបាន $f(x)=x-3+\dfrac{7}{x+2}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7}{x+2}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-3}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍។

ⓑ $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$

- ខាង $+\infty$៖ គេសរសេរ $f(x)=\ln\left[e^x(1+2e^{-2x})\right]=x+\ln(1+2e^{-2x})$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2e^{-2x})=0$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

- ខាង $-\infty$៖ គេសរសេរ $f(x)=\ln\left[2e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)\right]=-x+\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)=0$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+\ln 2)]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x+\ln 2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$។

ⓒ $f(x)=2x-1-(x+1)e^x$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[-(x+1)e^x]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=2x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាង $-\infty$។

ⓓ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4\ln x}{x}$

គេបាន $f(x)=x-3+\dfrac{4\ln x}{x}$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln x}{x}=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln x}{x}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-3}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាង $+\infty$។

ⓔ $f(x)=x+1-\dfrac{e^x}{e^x-1}$

- ខាង $-\infty$៖ ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=0$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$។

- ខាង $+\infty$៖ គេអាចសរសេរ $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

ដោយសារ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=0$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

ⓕ $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

- ខាង $+\infty$៖ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=x-2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$។

- ខាង $-\infty$៖ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{y=-x+2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$។

## ១.២ សិក្សាអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

**របៀបដោះស្រាយ**

**ប្តង់សិក្សាអនុគមន៍**

*a*. ដែកកំណត់

*b*. លីមីតចុងដែនកំណត់

*c*. ទិសដៅអថេរភាព

– ដេរីវេទី១ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេទី១

– ភាពកើន ភាពចុះនៃអនុគមន៍ ឬ ចំណុចបរមាធៀប

– តារាងអថេរភាព

*d*. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

– ចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $y'oy$ (ឱ្យ $x=0$) និង ចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ (ឱ្យ $y=0$) បើមាន

– ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង (បើមាន ឬ ប្រធានគេសួររក)

– ផ្ដិតឆ្ពុះ ឬ អ័ក្សឆ្ពុះបើមាន

– ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អាស៊ីមតូតដេកបើមាន

– តារាងតម្លៃលេខ (សម្រាប់សង់អាស៊ីមតូទ្រុត ឬ បន្ទាត់ប៉ះផ្សេងៗ និង ចំណុតដែលខ្សែកោងកាត់តាម)

**សម្គាល់**

**ខិចខាន** ដើម្បីរកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ គេអាចឱ្យភាគបែង ស្មើសូន្យសិន រួចដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាតទាញរកតម្លៃ $x$ គឺឱ្យ $px+q=0\Rightarrow x=-\dfrac{q}{p}$ នោះគេបានអនុគមន៍មានន័យកាលណា $px+q\neq 0$ , $x\neq -\dfrac{q}{p}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D_y=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$ ។

**លំហាត់គម្រូ** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ ។

- ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{2\}$ ។
- សរសេរជារាងកាណូនិច $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ $f'(x)=\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)'=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$
  - ដោយ $(x-2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x^2-4x+3$

ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។

$f'(x) = 0$ គេបាន $x^2 - 4x + 3 = 0$ នាំឱ្យ $x = 1\,, x = 3$ ។

- សញ្ញានៃដេរីវេ

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

ដូច្នេះ $f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ និងចុះលើ $(1, 2) \cup (2, 3)$

- បរមាធៀបនៃ $f$

ចំពោះ $x = 1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(1) = \dfrac{1^2 - 5(1) + 7}{1 - 2} = -3$

ចំពោះ $x = 3$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(3) = \dfrac{3^2 - 5(3) + 7}{3 - 2} = 1$ ។

- គណនាលីមីត

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \to -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left( x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left( x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty \text{ ។}$$

- អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x \to 2} \left( x - 3 + \dfrac{1}{x - 2} \right) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

  ម្យ៉ាងទៀត $y = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$ ហើយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$ ។

  ដូច្នេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

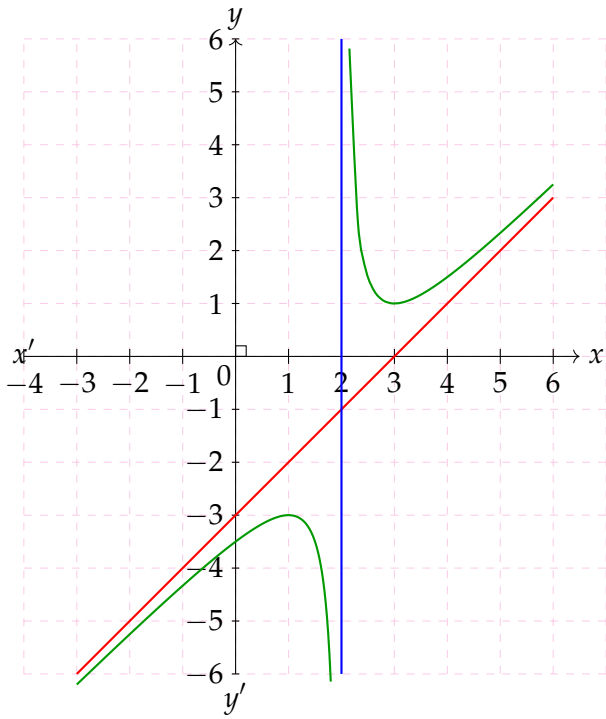
–តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(x'Ox)$
  $y=0$ សមមូល $\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=0$ ។
  $x^2-5x+7=0$ មាន $\Delta=25-28=-3<0$
  សមីការគ្មានឫស ។ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $(x'Ox)$ ទេ ។
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(y'Oy)$
  $x=0$ សមមូល $f(0)=-\dfrac{7}{2}$ ។

- ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x-3$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I(2,-1)$ ។
  ដូច្នេះ $f(4-x)+f(x)=-2=2b$ នាំឱ្យ $I(2,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។




**ឧទាហរណ៍ ២** : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប $C$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

- ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{1\}$
- សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែង ។ គេបាន
  $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}=x+1-\dfrac{3}{x-1}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ $f'(x)=\left(x+1-\dfrac{3}{x-1}\right)'=1+\dfrac{3}{(x-1)^2}$ ដោយ $(x-1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$
    នោះ $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in D$ , $f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $D$ ហើយ $f$ គ្មានបរមាធៀបធៀបទេ ។
- គណនាលីមីត
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-1}=0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ ។

- អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ នោះគេបាន $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

  ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{3}{x-1}\right] = 0$ ដូច្នេះ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាប ។

–តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | ‖ | ↗ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $Ox : y=0$ សមមូល $\dfrac{x^2-4}{x-1}=0$ ឬ $x^2-4=0$ ឬ $x^2=4$ នាំឱ្យ $x=-2, x=2$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $Oy : x=0$ នាំឱ្យ $f(0)=4$ ។
  - ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+1$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I(1,2)$ ។

  តាមរូបមន្តបំប្លែងកូអរដោនេ $\begin{cases} x = 1+X \\ y = 2+Y \end{cases}$ ហើយ $y = x+1-\dfrac{3}{x-1}$

  គេបាន $2+Y = 1+X+1-\dfrac{3}{1+X-1} = X+2-\dfrac{3}{X}$

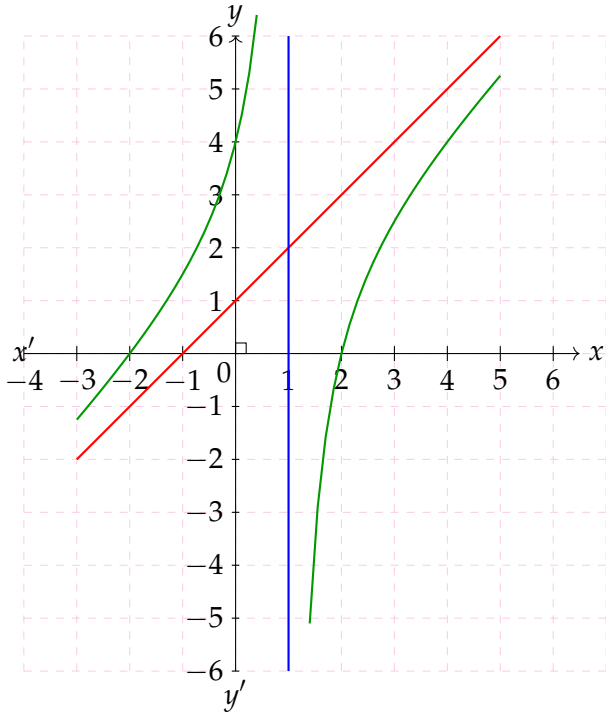
  ដូច្នេះ $Y = X+2-\dfrac{3}{X}-2 = X-\dfrac{3}{X}$

  $\forall X \in D$ គេបាន

  $F(-X) = (-X)-\dfrac{3}{(-X)} = -\left(X-\dfrac{3}{X}\right) = -F(X)$

  $F(-X) = -F(X)$ នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

  ដូច្នេះ $I(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប ។




### ១.២.១ សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

**លំហាត់គម្រូ** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ ។

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2+x-12=0$ មានឫសពីរគឺ $x=-4$ និង $x=3$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{(4x-9)(x^2+x-12)-(2x+1)(2x^2-9x+4)}{(x^2+x-12)^2} = \frac{11x^2-56x+104}{(x^2+x-12)^2}$$

$f'(x)=0$ គេបាន $11x^2-56x+104=0$
មាន $\Delta' = 28^2-(11\times 104) = 784-1144 < 0$
និង $a=11>0$ ។
ដូចនេះ $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនលើ $D$ ។

  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = -\infty$
    - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2\left(2-\dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)} = 2$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ គេបានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
  $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x=-4$ និងសមីការ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\quad -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\quad -\infty$ | $\nearrow$ | $2$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y=0$ សមមូល $2x^2-9x+4=0$ មាន $\Delta = 81-32 = 49$ មានឫស
    $x' = \dfrac{9-7}{4} = \dfrac{1}{2}$ និង $x'' = \dfrac{9+7}{4} = 4$ ។h
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x=0 \implies f(0) = -\dfrac{1}{3}$ ។
  - ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y=2$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} y=2 \\ y=\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} \end{cases}$$

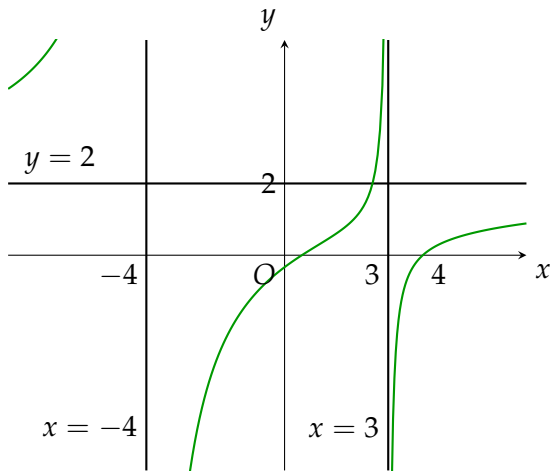
$$2 = \frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$$

$$\text{ឬ } 2(x^2+x-12) = 2x^2-9x+4$$

$$\text{ឬ } 2x^2+2x-24 = 2x^2-9x+4$$

$$\text{ឬ } 11x = 28 \implies x = \frac{28}{11}$$

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y=2$ ត្រង់ចំណុច $x=\dfrac{28}{11}$ ។




**ឧទាហរណ៍ ២** :សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍$y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$

- ដែនកំណត់

  សមីការ $x^2 - 6x + 8 = 0$ មានឫសពីរគឺ $x = 2$ និង $x = 4$ ។ ដូច្នេះ អនុគមន៍ខាងលើមានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{2, 4\}$ ។

- ទិសដៅអថេរភាព

  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 18x + 25)'(x^2 - 6x + 8) - (3x^2 - 18x + 25)(x^2 - 6x + 8)'}{(x^2 - 6x + 8)^2}$$
$$= \frac{(6x - 18)(x^2 - 6x + 8) - (3x^2 - 18x + 25)(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 8)^2} = \frac{-2x + 6}{(x^2 - 6x + 8)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2x + 6}{(x^2 - 6x + 8)^2}$$

ដោយ $(x^2 - 6x + 8)^2 > 0$ វិជ្ជមាន ចំពោះគ្រប់ $\forall x \in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x + 6$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។

$f'(x) = 0 \implies x = 3$

  - សញ្ញាដេរីវេ

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |

ដូច្នេះអនុគមន៍ $f$ កើនលើ $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ ហើយចុះលើ $(3, 4) \cup (4, +\infty)$ ។

ចំពោះ $x = 3 \implies f(3) = \dfrac{3(3)^2 - 18(3) + 25}{3^2 - 6(3) + 8} = \dfrac{27 - 54 + 25}{9 - 18 + 8} = 2$ ។

អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើនឹង 2 ត្រង់ $x = 3$ ។

- គណនាលីមីត

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} = 3$ ។
- អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \pm\infty$ នោះ គេបានបន្ទាត់ $x=2$ និង $x=4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

  ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ នោះបន្ទាត់ $y=3$ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | ↗ | $+\infty$ | $-\infty$ | $2$ | ↘ | $-\infty$ | $+\infty$ | ↘ $3$ |

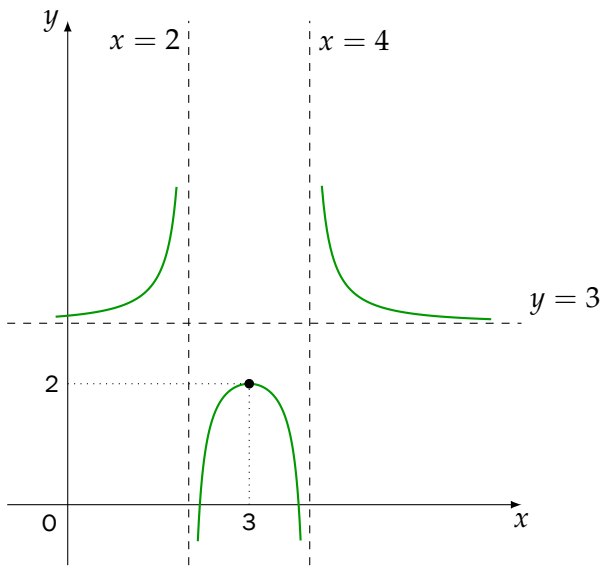
- សំណង់ក្រាប

  - ចំណុចប្រសព្វរវាង $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

  $y=0 \iff \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8} = 0 \implies 3x^2-18x+25=0$

  $\implies x = \dfrac{9-\sqrt{6}}{3}$និង$x = \dfrac{9+\sqrt{6}}{3}$ ។

  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ $x=0 \implies f(0) = \dfrac{25}{8}$ ។



**សម្គាល់**

អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ដែល $a,b,c$ ខុសពីសូន្យ និង $p\neq 0$ ។
អនុគមន៍មានលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោម ៖

- គ្រប់ក្រាបតាងអនុគមន៍នេះ មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច ។
- ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរគឺអាស្រ័យនឹងឫសសមីការ $px^2+qx+r=0$ ។
  - បើ $\Delta=q^2-4pr<0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ និងក្រាបមានមែកតែមួយ ។
  - បើ $\Delta=q^2-4pr=0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយ $x=-\dfrac{q}{2p}$ និងក្រាបមានមែកពីរដាច់គ្នា ។
  - បើ $\Delta=q^2-4pr>0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ $x=\dfrac{-q\pm\sqrt{\Delta}}{2p}$ និងក្រាបមានមែកបីដាច់គ្នា ។

**អនុវត្ត** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y=f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$ ⓑ $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ ⓒ $y=f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$

**ដំណោះស្រាយ** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y=f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$

- ដែនកំណត់ : ដោយ $x^2+4>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+4)-2x(x^2+2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8x+8}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x^2-4x-4)}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x)=0\iff -2x^2+8x+8=0\iff x^2-4x-4=0$
មាន $\Delta'=(-2)^2-1\times(-4)=4+4=8>0$
គេបានឫសពីរគឺ $x_1=2-2\sqrt{2}$ និង $x_2=2+2\sqrt{2}$ ។
គណនាតម្លៃបរមា ៖

* ត្រង់ $x=2-2\sqrt{2}\implies f(2-2\sqrt{2})=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\approx -0.21$ (តម្លៃអប្បបរមា)
* ត្រង់ $x=2+2\sqrt{2}\implies f(2+2\sqrt{2})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\approx 1.21$ (តម្លៃអតិបរមា)

- គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)} = 1$$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ គេបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ខាង $-\infty$ និង $+\infty$ ។
  អនុគមន៍គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ ព្រោះដែនកំណត់គឺ $\mathbb{R}$ ។
- តារាងអថេរភាព

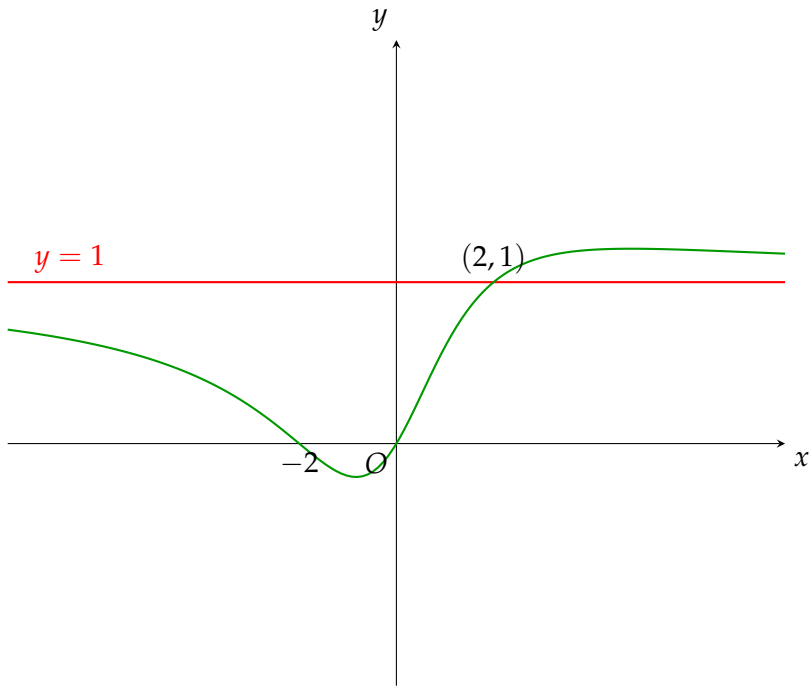
| $x$ | $-\infty$ | | $2-2\sqrt{2}$ | | $2+2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ | ↗ | $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ | ↘ | $1$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff x^2+2x = 0 \iff x(x+2) = 0 \implies x = 0$ ឬ $x = -2$ ៕
    ដូចនេះ ក្រាប $C$ ប្រសព្វអ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ $(0,0)$ និង $(-2,0)$ ៕
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x = 0 \implies f(0) = 0$ ៕
  - ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 1$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4} \end{cases}$$

$$1 = \frac{x^2+2x}{x^2+4} \iff x^2+4 = x^2+2x \iff 2x = 4 \implies x = 2$$

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 1$ ត្រង់ចំណុច $(2,1)$ ៕




**b** $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $(x+2)^2 = 0 \implies x = -2$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2-1)}{(x+2)^4} = \frac{2x(x+2) - 2(x^2-1)}{(x+2)^3} = \frac{4x+2}{(x+2)^3}$$

$f'(x) = 0 \iff 4x+2 = 0 \implies x = -\dfrac{1}{2}$ ។
ត្រង់ $x = -\dfrac{1}{2} \implies f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{3}$ (តម្លៃអប្បបរមា) ॥

  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x+4} = 1$
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ គេបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
    $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = +\infty$ គេបានសមីការ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ॥
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1$ ↗ $+\infty$ | $+\infty$ ↘ | $-\frac{1}{3}$ ↗ | $1$ |

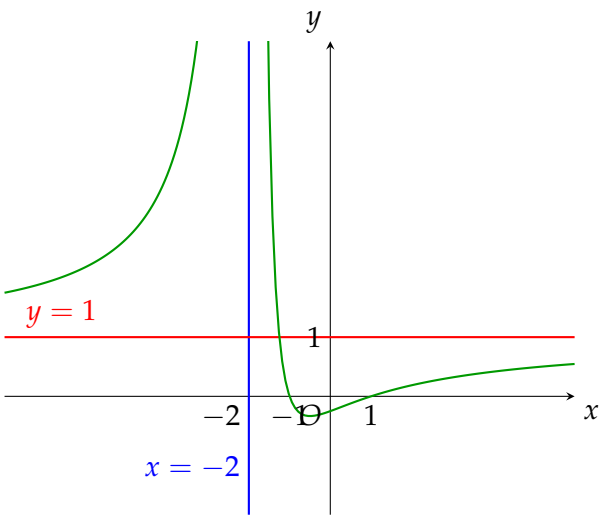
- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y=0 \iff x^2-1=0 \implies x=-1$ និង $x=1$ ៕
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-1,0)$ និង $(1,0)$ ៕
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x=0 \implies f(0)=-\frac{1}{4}$ ៕
  - ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y=1$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} y=1 \\ y=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} \end{cases}$$

$$1=\frac{x^2-1}{(x+2)^2} \iff (x+2)^2=x^2-1$$

$$x^2+4x+4=x^2-1 \iff 4x=-5 \implies x=-\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y=1$ ត្រង់ចំណុច $x=-\frac{5}{4}$ ៕



◈ $y = f(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2+3x+2=0$ មានឫសពីរគឺ $x=-2$ និង $x=-1$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+3x+2)-(2x+3)(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}=\frac{-(x^2+10x+13)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x^2+10x+13=0$
មាន $\Delta'=5^2-13=12>0$
គេបានឫសពីរគឺ $x_1=-5-2\sqrt{3}$ និង $x_2=-5+2\sqrt{3}$ ។
គណនាតម្លៃបរមា ៖

* ត្រង់ $x=-5-2\sqrt{3} \implies f(-5-2\sqrt{3})=-8+4\sqrt{3}\approx -1.07$ (តម្លៃអប្បបរមា)
* ត្រង់ $x=-5+2\sqrt{3} \implies f(-5+2\sqrt{3})=-8-4\sqrt{3}\approx -14.93$ (តម្លៃអតិបរមា)

  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=-1$
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$ គេបានបន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
    $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=-2$ និងសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-5-2\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $-5+2\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $-8+4\sqrt{3}$ | ↗ | ‖ | $-\infty$ | ↗ | $-8-4\sqrt{3}$ | ‖ | ↘ | $-1$ |

- សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

  $y=0 \iff -x^2-2x+3=0 \iff x^2+2x-3=0 \implies x=-3$ និង $x=1$ ។

  ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-3,0)$ និង $(1,0)$ ។
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

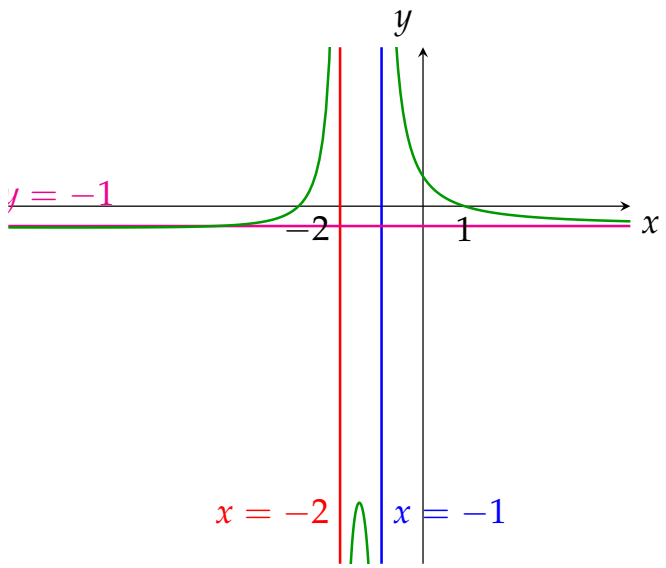
  $x=0 \implies f(0)=\dfrac{3}{2}$ ។
- ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y=-1$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} y=-1 \\ y=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} \end{cases}$$

$$-1=\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} \iff -(x^2+3x+2)=-x^2-2x+3$$

$$-x^2-3x-2=-x^2-2x+3 \iff -x=5 \implies x=-5$$

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y=-1$ ត្រង់ចំណុច $(-5,-1)$ ។




## លំហាត់

**1** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $f(x)=x^2-3x+10$

ⓑ $f(x)=x^{2025}-x^{2024}-1$

ⓒ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-x+1$

ⓓ $f(x)=\dfrac{x^2-xx+1}{x+2}$

e $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{1-2x}$

f $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-4}$

g $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+3}$

h $f(x)=\dfrac{x^2-x+7}{1-2x}$

i $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{2(x-1)}$

j $y=\dfrac{1}{x-3}$

k $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

l $y=\dfrac{2x}{x+1}$

m $y=\dfrac{1-2x}{2(x-2)}$

n $y=\dfrac{2-3x}{1-x}$

o $y=\dfrac{1-x}{x-3}$

p $y=\dfrac{x-2}{2x}$

**2** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

a $y=\dfrac{1}{x-3}$

b $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

c $y=\dfrac{2x}{x+1}$

d $y=\dfrac{1-2x}{2(x-2)}$

e $y=\dfrac{2-3x}{1-x}$

f $y=\dfrac{1-x}{x-3}$

g $y=\dfrac{x-2}{2x}$

h $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

i $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$

j $y=f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2x}$

## ដំណោះស្រាយ

**1** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

a $f(x)=x^2-3x+10$

ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។

b $f(x)=x^{2025}-x^{2024}-1$

ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។

c $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-x+1$

ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។

d $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x+2\neq 0 \iff x\neq -2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ។

e $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{1-2x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $1-2x\neq 0 \iff x\neq \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ។

(f) $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-4}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x-4\neq 0 \iff x\neq 4$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ ។

(g) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+3}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x+3\neq 0 \iff x\neq -3$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ។

(h) $f(x)=\dfrac{x^2-x+7}{1-2x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $1-2x\neq 0 \iff x\neq \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ។

(i) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{2(x-1)}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $2(x-1)\neq 0 \iff x\neq 1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ។

(j) $y=\dfrac{1}{x-3}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x-3\neq 0 \iff x\neq 3$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ។

(k) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x-1\neq 0 \iff x\neq 1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ។

(l) $y=\dfrac{2x}{x+1}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x+1\neq 0 \iff x\neq -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។

(m) $y=\dfrac{1-2x}{2(x-2)}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $2(x-2)\neq 0 \iff x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ។

(n) $y=\dfrac{2-3x}{1-x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $1-x\neq 0 \iff x\neq 1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ។

(o) $y=\dfrac{1-x}{x-3}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x-3\neq 0 \iff x\neq 3$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ។

(p) $y=\dfrac{x-2}{2x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $2x \neq 0 \iff x \neq 0$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ។

**2** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = \dfrac{1}{x-3}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x - 3 = 0 \implies x = 3$ ។

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

    $$f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

    ដោយ $(x-3)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។

    ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ចុះដាច់ខាតលើ $D$ ។
  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$
    - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ គេបានបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្ស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

    $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | ‖ | ↘ | $+\infty$ |
| | | $-\infty$ | ‖ | $0$ | |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

    $y = 0 \iff \dfrac{1}{x-3} = 0$ (គ្មានដំណោះស្រាយ)

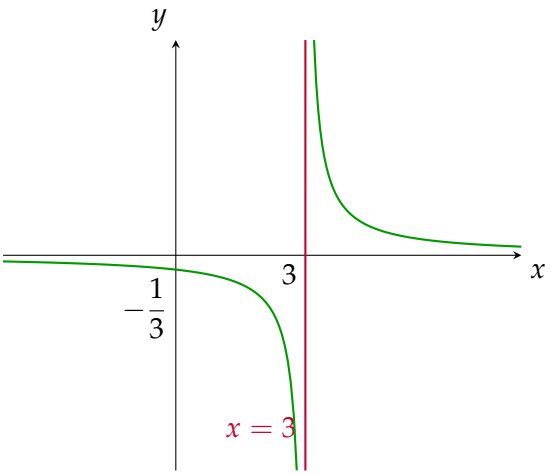
    ដូចនេះ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

    $x = 0 \implies f(0) = -\dfrac{1}{3}$ ។

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

  ត្រង់ $x=2 \implies y=-1$

  ត្រង់ $x=4 \implies y=1$ ៕




(b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x-1=0 \implies x=1$ ៕

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ៕

- ទិសដៅអថេរភាព

  - ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

  ដោយ $(x-1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេបាន $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ៕

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ចុះដាច់ខាតលើ $D$ ៕

  - គណនាលីមីត

    - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1$

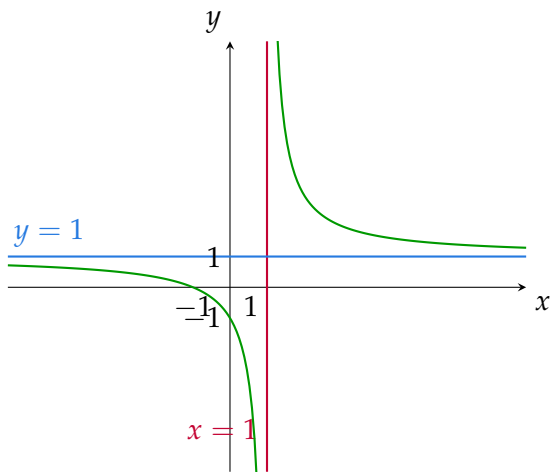
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ គេបានបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ៕

    $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ៕

  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1 \searrow -\infty$ | | $+\infty \searrow 1$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff x + 1 = 0 \implies x = -1$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-1, 0)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x = 0 \implies f(0) = -1$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0, -1)$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    ត្រង់ $x = 2 \implies y = 3$
    ត្រង់ $x = 3 \implies y = 2$ ។




◈ $y = \dfrac{2x}{x+1}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x + 1 = 0 \implies x = -1$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ដោយ $(x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនដាច់ខាតលើ $D$ ។

- គណនាលីមីត

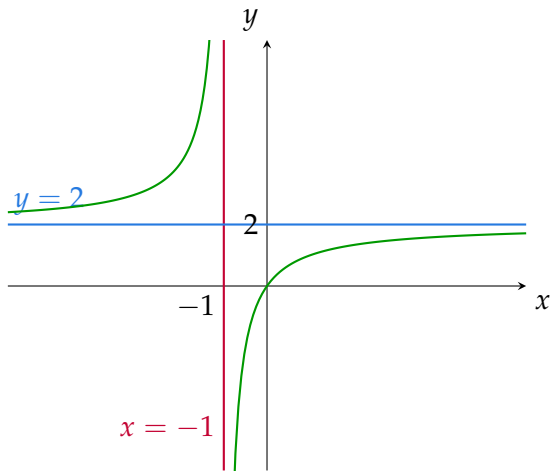
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x}{x+1} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x}{x+1} = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 2$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 2$ គេបានបន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
  $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | $+\infty$ \| $-\infty$ | ↗ | $2$ |

- សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
  $y = 0 \iff 2x = 0 \implies x = 0$ ។
  ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្សកូអរដោនេត្រង់គល់ $O(0,0)$ ។
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
  $x = 0 \implies f(0) = 0$ ។
- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
  ត្រង់ $x = -2 \implies y = 4$
  ត្រង់ $x = 1 \implies y = 1$ ។




ⓓ $y = \dfrac{1-2x}{2(x-2)}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $2(x-2)=0 \implies x=2$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

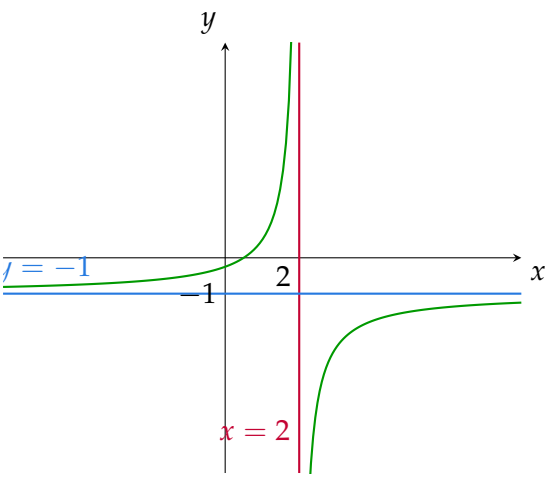
$$f'(x)=\frac{-2\cdot 2(x-2)-2(1-2x)}{4(x-2)^2}=\frac{-4x+8-2+4x}{4(x-2)^2}=\frac{6}{4(x-2)^2}=\frac{3}{2(x-2)^2}$$

ដោយ $2(x-2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេបាន $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនដាច់ខាតលើ $D$ ។

  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-2x}{2(x-2)}=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-2x}{2(x-2)}=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=-1$
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$ គេបានបន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
    $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ $-1$ | |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff 1 - 2x = 0 \implies x = \frac{1}{2}$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x = 0 \implies f(0) = -\frac{1}{4}$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    ត្រង់ $x = 1 \implies y = \frac{1}{2}$
    ត្រង់ $x = 3 \implies y = -\frac{5}{2}$ ។




◈ $y = \frac{2 - 3x}{1 - x}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $1 - x = 0 \implies x = 1$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ

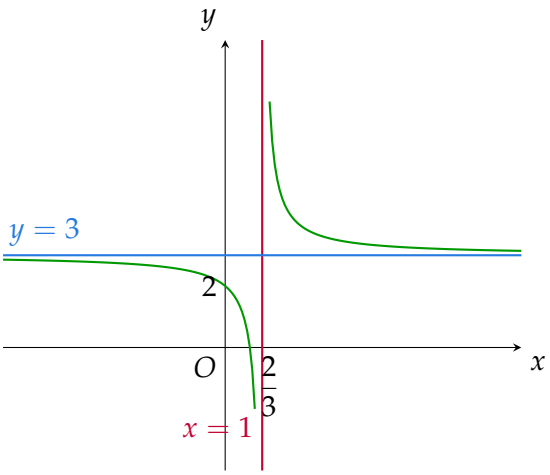
$$f'(x) = \frac{-3(1-x)-(-1)(2-3x)}{(1-x)^2} = \frac{-3+3x+2-3x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

ដោយ $(1-x)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ចុះដាច់ខាតលើ $D$ ។

- គណនាលីមីត
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2-3x}{1-x} = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2-3x}{1-x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x\left(\frac{2}{x}-3\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = 3$
- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ គេបានបន្ទាត់ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
  $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | $3$ |
| | | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ | |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y=0 \iff 2-3x=0 \implies x=\dfrac{2}{3}$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x=0 \implies f(0)=2$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0,2)$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    ត្រង់ $x=2 \implies y=4$
    ត្រង់ $x=3 \implies y=\dfrac{7}{2}$ ។




ⓕ $y = \dfrac{1-x}{x-3}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x-3=0 \implies x=3$ ។

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{-1(x-3)-1(1-x)}{(x-3)^2} = \frac{-x+3-1+x}{(x-3)^2} = \frac{2}{(x-3)^2}$$

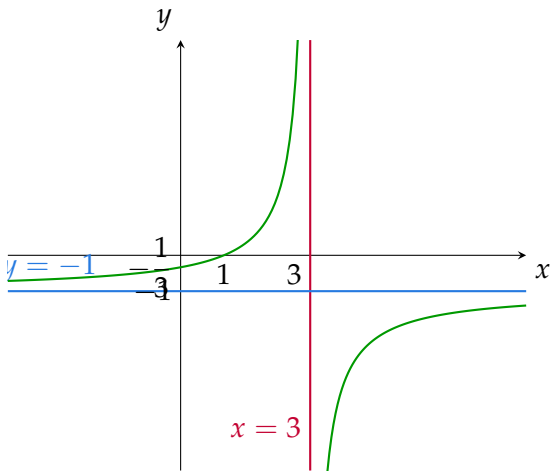
  ដោយ $(x-3)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនដាច់ខាតលើ $D$ ។
  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1-x}{x-3} = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-x}{x-3} = -\infty$
    - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = -1$
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$ គេបានបន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

    $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ $-1$ | |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff 1 - x = 0 \implies x = 1$ ៕
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(1, 0)$ ៕
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x = 0 \implies f(0) = -\frac{1}{3}$ ៕
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ៕
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    ត្រង់ $x = 2 \implies y = 1$
    ត្រង់ $x = 4 \implies y = -3$ ៕




ⓖ $y = \dfrac{x-2}{2x}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $2x = 0 \implies x = 0$ ៕
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ៕
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{1(2x) - 2(x-2)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x + 4}{4x^2} = \frac{4}{4x^2} = \frac{1}{x^2}$$

ដោយ $x^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបាន $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនដាច់ខាតលើ $D$ ។

- គណនាលីមីត

  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-2}{2x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-2}{2x} = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{2x} = \dfrac{1}{2}$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ គេបានបន្ទាត់ $y = \dfrac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x = 0$ (អ័ក្ស $y'Oy$) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ $+\infty$ | | $-\infty$ $\nearrow$ $\frac{1}{2}$ | |

- សំណង់ក្រាប

  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

    $y = 0 \iff x - 2 = 0 \implies x = 2$ ។

    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(2, 0)$ ។

  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

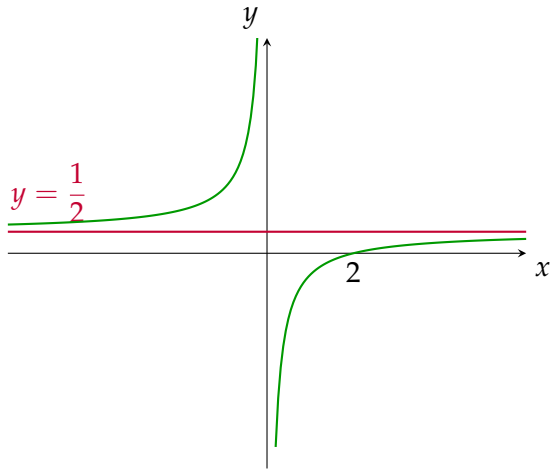
    គ្មានទេ ព្រោះ $x = 0 \notin D$ (អ័ក្ស $y'Oy$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ) ។

  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

    ត្រង់ $x = -2 \implies y = 1$

    ត្រង់ $x = -1 \implies y = \dfrac{3}{2}$

    ត្រង់ $x = 1 \implies y = -\dfrac{1}{2}$ ។




h $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x+1=0 \implies x=-1$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-1(x^2)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

  ដោយ $(x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបានសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $x(x+2)$ ៖
  - $f'(x)=0 \iff x(x+2)=0 \implies x=0$ ឬ $x=-2$
  - $f'(x)>0$ ចំពោះ $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$
  - $f'(x)<0$ ចំពោះ $x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$

  ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,-2)$ និង $(0,+\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-2,-1)$ និង $(-1,0)$ ។
  - បរមាធៀប
    - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-2$ គឺ $f(-2)=-4$
    - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=0$
  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$

$\circ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

គេអាចសរសេរ $f(x) = \dfrac{x^2-1+1}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

គេបានបន្ទាត់ $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | ‖ | $+\infty$ | ↘ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | ‖ | | $0$ | | |

- សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

$y = 0 \iff x^2 = 0 \implies x = 0$ ។

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្សកូអរដោនេត្រង់គល់ $O(0,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

$x = 0 \implies f(0) = 0$ ។

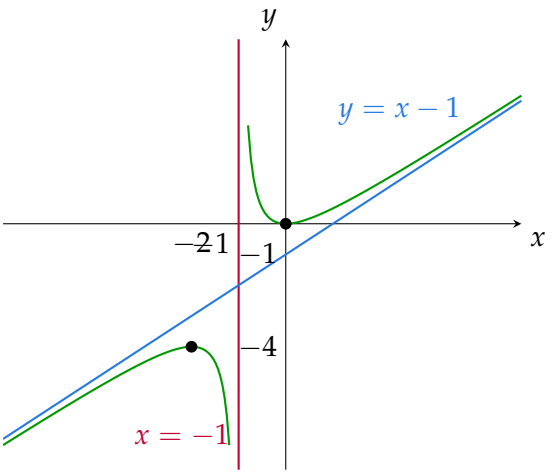
- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

ត្រង់ $x = -3 \implies y = -\dfrac{9}{2}$

ត្រង់ $x = -2 \implies y = -4$ (ចំណុចអតិបរមាធៀប)

ត្រង់ $x = 1 \implies y = \dfrac{1}{2}$

ត្រង់ $x = 2 \implies y = \dfrac{4}{3}$ ។



ⓘ $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x - 2 = 0 \implies x = 2$ ៕
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ៕
- ទិសដៅអថេរភាព

  - ដេរីវេ

  $$f'(x) = \frac{(4x-3)(x-2) - 1(2x^2-3x)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

  ដោយ $(x-2)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ គេបានសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $2(x-1)(x-3)$ ៖

  - $f'(x) = 0 \iff x = 1$ ឬ $x = 3$
  - $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
  - $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$

  ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, 1)$ និង $(3, +\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(1, 2)$ និង $(2, 3)$ ៕
  - បរមាធៀប

  - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1$
  - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 3$ គឺ $f(3) = 9$

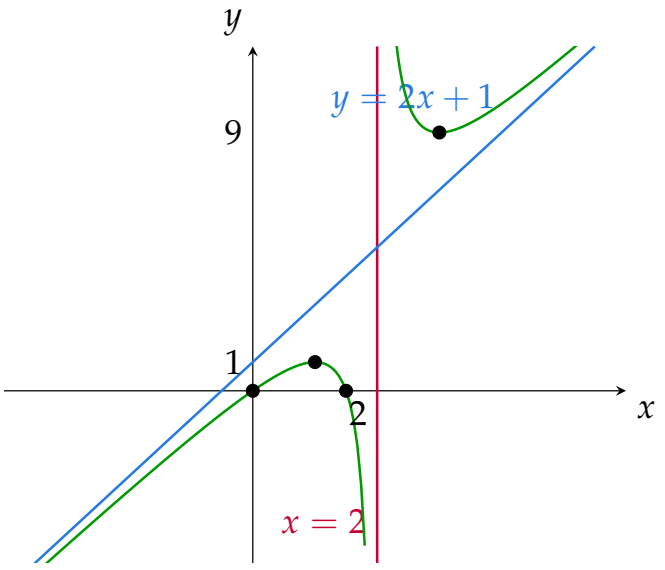
  - គណនាលីមីត

  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2} = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2} = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2} = +\infty$

  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ៕
  គេអាចសរសេរ $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x - 2}$
  ដោយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x - 2} = 0$
  គេបានបន្ទាត់ $y = 2x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ៕
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ | $+\infty$ | ↘ | $9$ | ↗ $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff 2x^2 - 3x = 0 \implies x = 0$ ឬ $x = \dfrac{3}{2}$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(0,0)$ និង $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x = 0 \implies f(0) = 0$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    ត្រង់ $x = 1 \implies y = 1$ (ចំណុចអតិបរមាធៀប)
    ត្រង់ $x = 3 \implies y = 9$ (ចំណុចអប្បបរមាធៀប)
    ត្រង់ $x = 4 \implies y = 10$ ។




ⓙ $y = f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2x}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $2x = 0 \implies x = 0$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(2x)-2(x-1)^2}{(2x)^2}=\frac{4x^2-4x-2(x^2-2x+1)}{4x^2}=\frac{2x^2-2}{4x^2}=\frac{x^2-1}{2x^2}$$

ដោយ $2x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេបានសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $x^2-1$ ៖

- $f'(x)=0 \iff x^2-1=0 \implies x=-1$ ឬ $x=1$
- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-1,0)\cup(0,1)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,-1)$ និង $(1,+\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-1,0)$ និង $(0,1)$ ។

- បរមាធៀប
  - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=-2$
  - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=0$
- គណនាលីមីត
  - $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x-1)^2}{2x}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-1)^2}{2x}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^2}{2x}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^2}{2x}=+\infty$
- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=0$ (អ័ក្ស $y'Oy$) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

  គេអាចសរសេរ $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x}=\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{1}{2x}$

  ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x}=0$

  គេបានបន្ទាត់ $y=\dfrac{x}{2}-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

$y=0 \iff (x-1)^2=0 \implies x=1$ ។

ដូចនេះ ក្រាបប៉ះអ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(1,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

  គ្មានទេ ព្រោះ $x=0 \notin D$ (អ័ក្ស $y'Oy$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ) ។

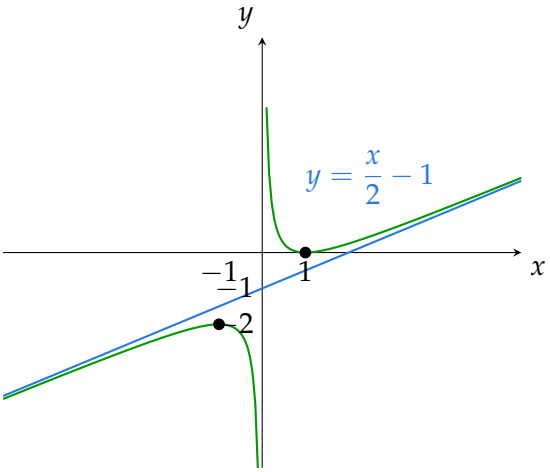
- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

  ត្រង់ $x=-2 \implies y=-\dfrac{9}{4}$

  ត្រង់ $x=-1 \implies y=-2$ (ចំណុចអតិបរមាធៀប)

  ត្រង់ $x=1 \implies y=0$ (ចំណុចអប្បបរមាធៀប)

  ត្រង់ $x=2 \implies y=\dfrac{1}{4}$ ។




## ១.៣ សិក្សាអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

**សម្គាល់**

**វិធាន** ដើម្បីរកដែនកំណត់អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ គេត្រូវឱ្យភាគបែងស្មើសូន្យដោះស្រាយរកតម្លៃ $x$ គឺឱ្យ $px^2+qx+r=0$ ប្រើរូបមន្ត $\Delta$ ដើម្បីរក $x$ ។

- បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត $x_1$ , $x_2$ គេបានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{x_1,x_2\}$ ។
- បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\alpha$ គេបានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{\alpha\}$ ។
- បើ $\Delta<0$ សមីការគ្មានឫសជាចំនួនពិតគេបាន គេបានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។
- ចំពោះភាគបែងរាង $ax^2+b$ ដែល $a>0$ , $b>0$ នាំឱ្យ $ax^2+b>0$ , $\forall x\in\mathbb{R}$ គេបានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។
- ចំពោះភាគបែងរាង $ax^2+b$ ដែល $a<0$ , $b<0$ នាំឱ្យ $ax^2+b<0$ , $\forall x\in\mathbb{R}$ គេបានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។

**រំលឹក**

សមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ ប្រើរូបមន្ត $\Delta=b^2-4ac$

- បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិត គេបាន $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$
- បើ $\Delta<0$ សមីការគ្មានជាចំនួនពិតយកសញ្ញាតាមមេគុណ $a$ ។

ករណីសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានមេគុណ $b$ ជាចំនួនគូគេអាចប្រើរូបមន្ត $\Delta'=b'^2-ac$ ដែល $b'=\dfrac{b}{2}$

- បើ $\Delta'>0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិត គេបាន $x_1,x_2=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$
- បើ $\Delta'=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\dfrac{b'}{a}$
- បើ $\Delta'<0$ សមីការគ្មានជាចំនួនពិតយកសញ្ញាតាមមេគុណ $a$ ។

**ករណីពិសេស** : ឧបមាថាសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ ៖

- បើ $a+b+c=0$ គេបានសមីការមានឫស $x_1=1$ , $x_2=\dfrac{c}{a}$
- បើ $a-b+c=0$ រឺ $a+c=b$ គេបានសមីការមានឫស $x_1=-1$ , $x_2=-\dfrac{c}{a}$ ។

## លំហាត់

**1** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+x-6}$

ⓑ $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$

ⓒ $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x^2+2}$

ⓓ $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-5}{2x^2-x+3}$

ⓔ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-6x+9}$

ⓕ $f(x)=\dfrac{1-3x^2}{x^2-4}$

**2** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$

ⓑ $f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$

ⓒ $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$

ⓓ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$

ⓔ $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$

**3** គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{mx^2+1}{x}$ មានក្រាប $(C)$ ។

ⓐ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m=1$

ⓑ កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

ⓒ តើចំណុចនឹងដែលស្ថិតលើក្រាប $(C)$ ចំពោះគ្រប់ $m$ ឬទេ?

ⓓ ដោយប្រើក្រាប $(C)$ កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យ $x^2-ax+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

# ដំណោះស្រាយ

**1** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+x-6}$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x^2+x-6\neq 0$
- សមីការ $x^2+x-6=0 \iff (x+3)(x-2)=0 \implies x=-3$ ឬ $x=2$
- ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$

ⓑ $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x^2-3x+2\neq 0$
- សមីការ $x^2-3x+2=0 \iff (x-1)(x-2)=0 \implies x=1$ ឬ $x=2$
- ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

ⓒ $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x^2+2}$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x^2+2\neq 0$
- ដោយ $x^2+2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
- ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}$

ⓓ $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-5}{2x^2-x+3}$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $2x^2-x+3\neq 0$
- សមីការ $2x^2-x+3=0$ មាន $\Delta=(-1)^2-4(2)(3)=-23<0$ នាំឱ្យ $2x^2-x+3>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
- ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}$

ⓔ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-6x+9}$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x^2-6x+9\neq 0$
- សមីការ $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \implies x=3$
- ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

ⓕ $f(x)=\dfrac{1-3x^2}{x^2-4}$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x^2-4\neq 0$
- សមីការ $x^2-4=0 \iff (x-2)(x+2)=0 \implies x=-2$ ឬ $x=2$
- ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

**2** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2+x-12=0 \iff (x+4)(x-3)=0 \implies x=-4$ ឬ $x=3$ ៕

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}$ ៕
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(4x-9)(x^2+x-12)-(2x+1)(2x^2-9x+4)}{(x^2+x-12)^2}=\frac{11x^2-56x+104}{(x^2+x-12)^2}$$

  ដោយ $(x^2+x-12)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ហើយភាគយក $11x^2-56x+104$ មាន $\Delta'=(-28)^2-11(104)=-360<0$ នាំឱ្យ $11x^2-56x+104>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៕

  គេបាន $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ៕

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(-\infty,-4)$, $(-4,3)$ និង $(3,+\infty)$ ៕
  - គណនាលីមីត
    - $\lim\limits_{x\to-4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{2x^2-9x+4}{(x+4)(x-3)}=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to-4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{2x^2-9x+4}{(x+4)(x-3)}=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2-9x+4}{(x+4)(x-3)}=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2-9x+4}{(x+4)(x-3)}=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$
  - អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=2$ គេបានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ៕

    $\lim\limits_{x\to-4}f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=-4$ និង $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប ៕
  - តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ / $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ / $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ / $-\infty$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

$y=0 \iff 2x^2-9x+4=0 \implies x=\dfrac{1}{2}$ ឬ $x=4$ ។

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ និង $(4,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

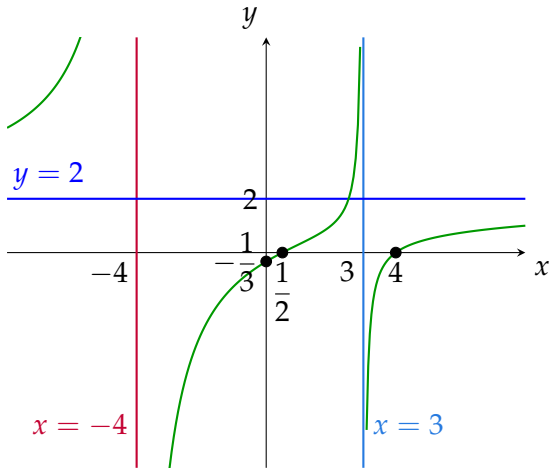
$x=0 \implies f(0)=-\dfrac{4}{12}=-\dfrac{1}{3}$ ។

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$ ។

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

ត្រង់ $x=2 \implies y=1$

ត្រង់ $x=5 \implies y=\dfrac{1}{2}$ ។




ⓑ $f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2-6x+8=0 \iff (x-2)(x-4)=0 \implies x=2$ ឬ $x=4$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$ ។

- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(6x-18)(x^2-6x+8)-(2x-6)(3x^2-18x+25)}{(x^2-6x+8)^2}=\frac{2(3-x)}{(x^2-6x+8)^2}$$

ដោយ $(x^2-6x+8)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេបានសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $2(3-x)$ ៖

- $f'(x)=0 \iff 3-x=0 \implies x=3$
- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,2)\cup(2,3)$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(3,4)\cup(4,+\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,2)$ និង $(2,3)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(3,4)$ និង

$(4,+\infty)$ ៕

- បរមាធៀប
  - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ គឺ $f(3)=2$
- គណនាលីមីត
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2-18x+25}{(x-2)(x-4)}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2-18x+25}{(x-2)(x-4)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{3x^2-18x+25}{(x-2)(x-4)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{3x^2-18x+25}{(x-2)(x-4)}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$
- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=3$ គេបានបន្ទាត់ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ៕ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=2$ និង $x=4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប ៕
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | ↗ | $+\infty$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ | ↘ $3$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

    $y=0 \iff 3x^2-18x+25=0 \implies x=\dfrac{9-\sqrt{6}}{3}\approx 2.18$ ឬ $x=\dfrac{9+\sqrt{6}}{3}\approx 3.82$ ៕
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

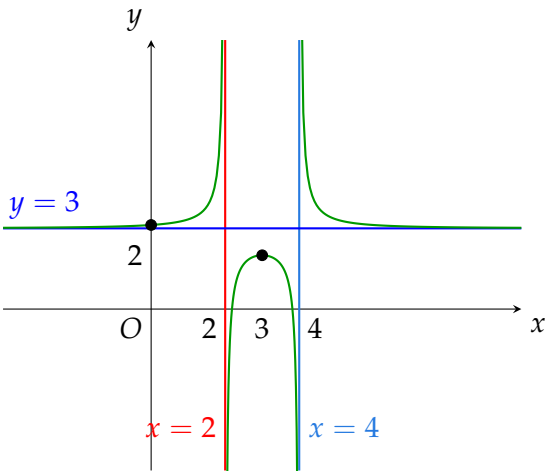
    $x=0 \implies f(0)=\dfrac{25}{8}$ ៕

    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0,\dfrac{25}{8}\right)$ ៕
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

    ត្រង់ $x=1 \implies y=\dfrac{10}{3}$

    ត្រង់ $x=3 \implies y=2$ (ចំណុចអតិបរមាធៀប)

    ត្រង់ $x=5 \implies y=\dfrac{10}{3}$ ៕




ⓒ $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$

- ដែនកំណត់ : ដោយ $x^2+4>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+4)-2x(x^2+2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8x+8}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x^2-4x-4)}{(x^2+4)^2}$$

ដោយ $(x^2+4)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបានសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $-2(x^2-4x-4)$ ៖

- $f'(x)=0\iff x^2-4x-4=0\implies x=2-2\sqrt{2}$ ឬ $x=2+2\sqrt{2}$
- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,2-2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{2},+\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-\infty,2-2\sqrt{2})$ និង $(2+2\sqrt{2},+\infty)$ ។

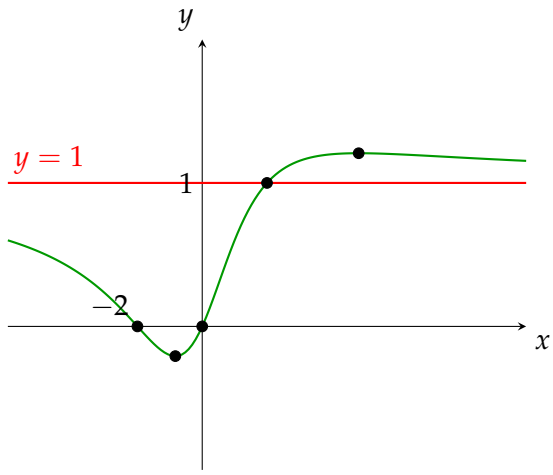
- បរមាធៀប
  - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2-2\sqrt{2}\approx-0.83$ គឺ $f(2-2\sqrt{2})=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\approx-0.21$
  - អនុគមន៍ មាន អតិបរមា ធៀប ត្រង់ $x=2+2\sqrt{2}\approx4.83$ គឺ $f(2+2\sqrt{2})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\approx1.21$
- គណនាលីមីត
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}=1$

$\circ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)} = 1$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ គេបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $2-2\sqrt{2}$ | | $2+2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ | ↗ | $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ | ↘ | $1$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff x^2+2x = 0 \implies x = 0$ ឬ $x = -2$ ។
    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(0,0)$ និង $(-2,0)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ
    $x = 0 \implies f(0) = 0$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    ត្រង់ $x = -4 \implies y = \dfrac{2}{5} = 0.4$
    ត្រង់ $x = 2 \implies y = 1$
    ត្រង់ $x = 4 \implies y = \dfrac{6}{5} = 1.2$ ។




(d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $(x+2)^2 = 0 \implies x = -2$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ៕

- ទិសដៅអថេរភាព

  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2-1)}{(x+2)^4} = \frac{2(x+2)(x^2+2x-x^2+1)}{(x+2)^4} = \frac{2(2x+1)}{(x+2)^3}$$

សញ្ញានៃ $f'(x)$ អាស្រ័យលើសញ្ញានៃភាគយក $2x+1$ និងភាគបែង $(x+2)^3$ ៖

- $f'(x) = 0 \iff 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$
- $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

នោះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, -2)$ និង $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

- បរមាធៀប

  - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -\frac{1}{2}$ គឺ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

- គណនាលីមីត

  - $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x^2-1}{(x+2)^2} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x^2-1}{(x+2)^2} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} = 1$

- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ គេបានបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ៕
  $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$ គេបានសមីការ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ៕

- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{3}$ | ↗ | $1$ |

- សំណង់ក្រាប

  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ
    $y = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \implies x = -1$ ឬ $x = 1$ ៕

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-1,0)$ និង $(1,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

$x=0 \implies f(0)=-\dfrac{1}{4}$ ។

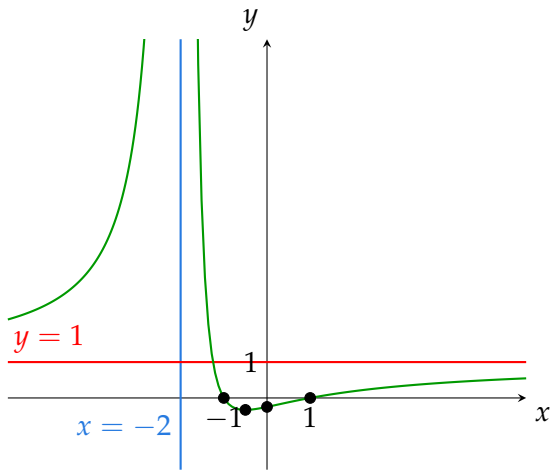
ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$ ។

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

ត្រង់ $x=-4 \implies y=\dfrac{15}{4}$

ត្រង់ $x=-3 \implies y=8$

ត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2} \implies y=-\dfrac{1}{3}$ (ចំណុចអប្បបរមាធៀប) ។




ⓔ $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2+3x+2=0 \iff (x+1)(x+2)=0 \implies x=-2$ ឬ $x=-1$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ ។

- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+3x+2)-(2x+3)(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}=\frac{-(x^2+10x+13)}{(x^2+3x+2)^2}$$

ដោយ $(x^2+3x+2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេបានសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $-(x^2+10x+13)$ ៖

- $f'(x)=0 \iff x^2+10x+13=0 \implies x=-5-2\sqrt{3}\approx -8.46$ ឬ $x=-5+2\sqrt{3}\approx -1.54$
- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-5-2\sqrt{3},-2)\cup(-2,-5+2\sqrt{3})$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,-5-2\sqrt{3})\cup(-5+2\sqrt{3},-1)\cup(-1,+\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-5-2\sqrt{3},-2)$ និង $(-2,-5+2\sqrt{3})$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-\infty,-5-2\sqrt{3}),(-5+2\sqrt{3},-1)$ និង $(-1,+\infty)$ ។

- បរមាធៀប
  - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-5-2\sqrt{3}$ គឺ $f(-5-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}-8\approx -1.07$
  - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-5+2\sqrt{3}$ គឺ $f(-5+2\sqrt{3})=-4\sqrt{3}-8\approx -14.93$
- គណនាលីមីត
  - $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x+2)}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x+2)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x+2)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x+2)}=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{-x^2}{x^2}=-1$
- អាស៊ីមតូត គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$ គេបានបន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

  $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\pm\infty$ គេបានសមីការ $x=-2$ និង $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-5-2\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $-5+2\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $4\sqrt{3}-8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-4\sqrt{3}-8$ | $\searrow$ | $+\infty$ | $\searrow$ $-1$ |

- សំណង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ គឺ

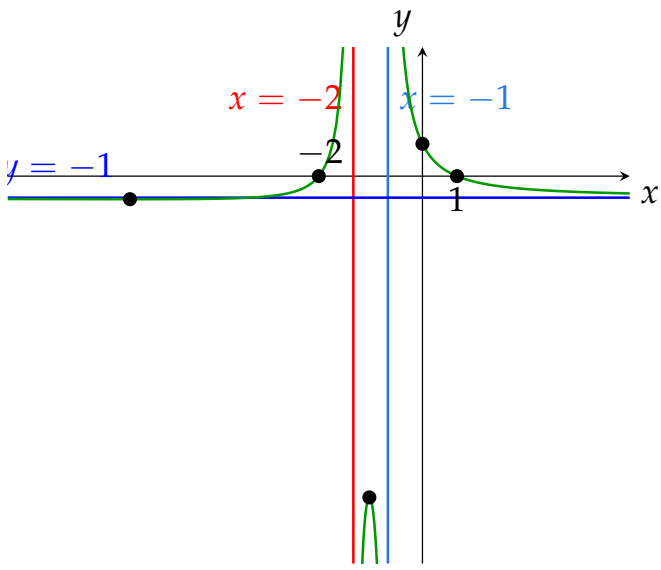
    $y=0 \iff -x^2-2x+3=0 \implies x=-3$ ឬ $x=1$ ។

    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-3,0)$ និង $(1,0)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ

    $x=0 \implies f(0)=\dfrac{3}{2}$ ។

    ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ។

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
  ត្រង់ $x=-4 \Longrightarrow y=-\dfrac{5}{6}$
  ត្រង់ $x=-1.5 \Longrightarrow y=-15$
  ត្រង់ $x=2 \Longrightarrow y=-\dfrac{5}{12}$ ។




**3** គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{mx^2+1}{x}$ មានក្រាប $(C)$ ។

ⓐ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m=1$

- ចំពោះ $m=1$ គេបានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$
- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$f'(x)=0 \iff x^2-1=0 \Longrightarrow x=-1$ ឬ $x=1$ ។
ដោយ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $x^2-1$ ៖
- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-1,0)\cup(0,1)$

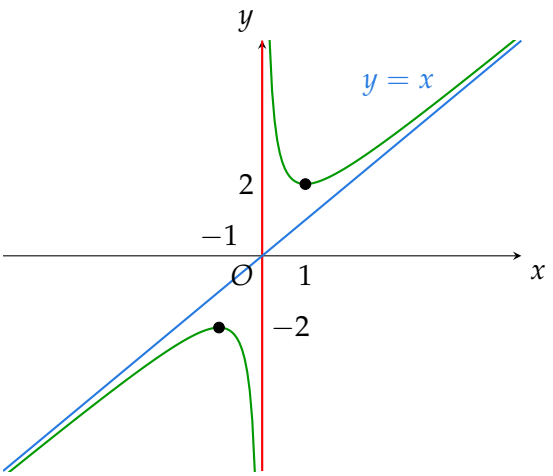
ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,-1)$ និង $(1,+\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-1,0)$ និង $(0,1)$ ។

  - បរមាធៀប ៖
    - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=-2$
    - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=2$

- គណនាលីមីត ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
- អាស៊ីមតូត ៖
  - ដោយ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \pm\infty$ នាំឱ្យអ័ក្ស $y'Oy\,(x=0)$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
  - ដោយ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d) : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | ‖ | $+\infty$ | ↘ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | ‖ | | $2$ | | |

- សំណង់ក្រាប ៖
  - សមីការ $x^2+1=0$ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R} \implies$ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ។
  - ចំណុចពិសេស ៖ $(-1,-2)$ ជាចំណុចអតិបរមាធៀប និង $(1,2)$ ជាចំណុចអប្បបរមាធៀប ។




(b) កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

- គេមាន $f(x) = \dfrac{mx^2+1}{x}$
- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = \dfrac{(2mx)(x)-(mx^2+1)(1)}{x^2} = \dfrac{mx^2-1}{x^2}$
- ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ លុះត្រាតែ $f'(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

- ដោយ $x^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq \dfrac{1}{2}$ គេបាន ៖

$$mx^2 - 1 \geq 0 \iff mx^2 \geq 1 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

- ចំពោះ $x \geq \dfrac{1}{2} \implies x^2 \geq \dfrac{1}{4}$
- ដើម្បីឱ្យ $mx^2 \geq 1$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x^2 \geq \dfrac{1}{4}$ លុះត្រាតែ $m > 0$ និងតម្លៃអប្បបរមានៃ $mx^2$ លើចន្លោះនេះធំជាងឬស្មើ $1$ ៖

$$m \cdot \frac{1}{4} \geq 1 \iff m \geq 4$$

- ដូចនេះ តម្លៃ $m$ ដែលត្រូវរកគឺ $m \geq 4$ (ឬ $m \in [4, +\infty)$) ៕

◈ តើចំណុចនឹងដែលស្ថិតលើក្រាប $(C)$ ចំពោះគ្រប់ $m$ ឬទេ?

- ឧបមាថា $P(x_0, y_0)$ ជាចំណុចនឹងដែលស្ថិតលើក្រាប $(C)$ ចំពោះគ្រប់ $m$
- គេបានសមីការ ៖

$$y_0 = \frac{mx_0^2 + 1}{x_0} \iff x_0 y_0 = mx_0^2 + 1 \iff mx_0^2 + (1 - x_0 y_0) = 0$$

- សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែមេគុណនៃ $m$ និងតួថេរស្មើ $0$ ព្រមគ្នា ៖

$$\begin{cases} x_0^2 = 0 \\ 1 - x_0 y_0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 0 \\ 1 - 0 \cdot y_0 = 0 \implies 1 = 0 \quad (\text{មិនពិត}) \end{cases}$$

- ម្យ៉ាងទៀត $x_0 = 0$ មិនស្ថិតក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ឡើយ ៕
- ដូចនេះ គ្មានចំណុចនឹងដែលស្ថិតលើក្រាប $(C)$ ចំពោះគ្រប់ $m$ ឡើយ ៕

◈ ដោយប្រើក្រាប $(C)$ កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យ $x^2 - ax + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

- វិសមីការ $x^2 - ax + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$
- ដោយ $x > 0$ ចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការនឹង $x$ គេបាន ៖

$$\frac{x^2 + 1}{x} - a > 0 \iff \frac{x^2 + 1}{x} > a \iff f(x) > a$$

- តាមក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ (ចំពោះ $m = 1$) នៅលើចន្លោះ $(0, +\infty)$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 2$
- មានន័យថា $f(x) \geq 2$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

- ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ $f(x) > a$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ លុះត្រាតែ $a$ តូចជាងតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x)$ លើចន្លោះ $(0, +\infty)$ ៖

  នោះ $a < 2$
- ដូចនេះ តម្លៃ $a$ ដែលត្រូវរកគឺ $a < 2$ (ឬ $a \in (-\infty, 2)$) ។

## ក្រម្ងចលំហាត់បន្ថែម

**1** រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$ ⓑ $y = \dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ ⓒ $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

**2** គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ចំពោះ $x \neq 2$ ដោយ $y = \dfrac{2x^2+x-1}{x-2}$ និងមានក្រាប $(C)$

ⓐ រកចំនួនពិត $a, b, c$ ដែលគ្រប់ $x \neq 2$ គេបាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

ⓑ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប $(C)$

ⓒ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប $(C)$ ។

**3** គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់លើ $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$ មានក្រាប $(C)$ ។

ⓐ រកចំនួនពិត $a, b, c$ ដែលគ្រប់ $x \neq 2$ គេបាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

ⓑ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប $(C)$

ⓒ សិក្សាអថេរភាពនៃ$f$ និងសង់ក្រាប $(C)$ ។

**4** គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និងមានក្រាប $(C)$ ។

ⓐ រកដែនកំណត់ $f$

ⓑ បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x+1}$

ⓒ បង្ហាញថា សមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

ⓓ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ។

**5** គេឱ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+5}$ មានក្រាប $(C)$ ស្ថិតក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ⓐ គណនាលិមីតចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត ។

ⓑ គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។ ទាញថា $f$ មានអប្បរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃអប្បបរមាធៀបនោះ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

ⓒ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ។

**6** អនុគមន៍ $f$ កំណត់ចំពោះ$x \neq 2$ ដោយ $f(x) = \dfrac{qx^2+bx+c}{(x-2)^2}$ ហើយមានក្រាប $(c)$ ។

ⓐ រក $a, b, c$ ដោយដឹងថា ក្រាប$(c)$ កាត់អាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 1$ និង $x = -3$ ហើយមានអាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ។

(b) រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ដែលកំណត់បានក្នុងសំណួរទី១។

(c) សង់ក្រាប $(C)$ ។

**7** (a) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$

(b) សិក្សាតាងតម្លៃ $m$ អត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2 - (m+4)x + 2m + 8 = 0$ ដោយប្រើក្រាបតាង$y$

**8** កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x - 2a}$ កើនលើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ។

**9** គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$

(a) ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំណុចនឹងមួយ ចំពោះគ្រប់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $m$ ដែលត្រូវកំណត់កូអរដោនេ។

(b) រកតម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះក្រាប $(C)$

(c) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m = -1$ ។

**10** គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + 2}{x + 1}$ ។

(a) ចំពោះ $m = 0$ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប$(C)$ រួចកំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យក្រាប $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = -x + a$

(b) រកតម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ កើនលើចន្លោះ $[0, +\infty)$

## ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

**1** រកអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

(a) $y = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ និង $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $y = (x+1) + \dfrac{2}{x-1}$ ហើយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

(b) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- បំបែកអនុគមន៍ជាទម្រង់ ៖

$$y = \frac{(x+2)^2 - 3}{x + 2} = x + 2 - \frac{3}{x + 2}$$

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to -2^-} y = +\infty$ និង $\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{3}{x+2}\right)=0$

  នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

◈ c $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-1}y=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to1}y=\pm\infty$

  នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប ។
- អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=1$

  នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

**2** គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ចំពោះ $x\neq2$ ដោយ $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x-2}$ និងមានក្រាប $(C)$

◈ a រកចំនួនពិត $a,b,c$ ៖

- គេមាន $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x-2}$
- ដោយធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $2x^2+x-1$ នឹង $x-2$ ៖

  $2x^2+x-1=(2x+5)(x-2)+9$

  គេបាន ៖ $f(x)=\dfrac{(2x+5)(x-2)+9}{x-2}=2x+5+\dfrac{9}{x-2}$
- ផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយទម្រង់ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

  គេទាញបាន ៖

  $a=2,\quad b=5,\quad c=9$

◈ b រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

  នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $f(x)=2x+5+\dfrac{9}{x-2}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9}{x-2}=0$

  នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d):y=2x+5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

◈ c សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប $(C)$ ៖

- ពិនិត្យផលដក $f(x)-y=\dfrac{9}{x-2}$ លើ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ៖
  - ចំពោះ $x\in(2,+\infty)\implies x-2>0\implies f(x)-y>0\iff f(x)>y$

    ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត $(d)$ លើចន្លោះ $(2,+\infty)$ ។
  - ចំពោះ $x\in(-\infty,2)\implies x-2<0\implies f(x)-y<0\iff f(x)<y$

    ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតទ្រេត $(d)$ លើចន្លោះ $(-\infty,2)$ ។

**3** គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់លើ $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$ មានក្រាប $(C)$ ។

**a** រកចំនួនពិត $a,b,c$ ៖

- គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$
- ដោយធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $x^2-4x+8$ និង $x-2$ ៖

$$x^2-4x+8=(x-2)(x-2)+4$$

- គេបាន ៖ $f(x)=\dfrac{(x-2)^2+4}{x-2}=x-2+\dfrac{4}{x-2}$
- ផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយទម្រង់ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ គេទាញបាន ៖

$$a=1,\quad b=-2,\quad c=4$$

**b** រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$
  នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-2}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$
  នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d):y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

**c** សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ និងសង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0\iff x(x-4)=0\implies x=0$ ឬ $x=4$ ។
ដោយ $(x-2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $x(x-4)$ ៖

- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(0,2)\cup(2,4)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និង $(4,+\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(0,2)$ និង $(2,4)$ ។

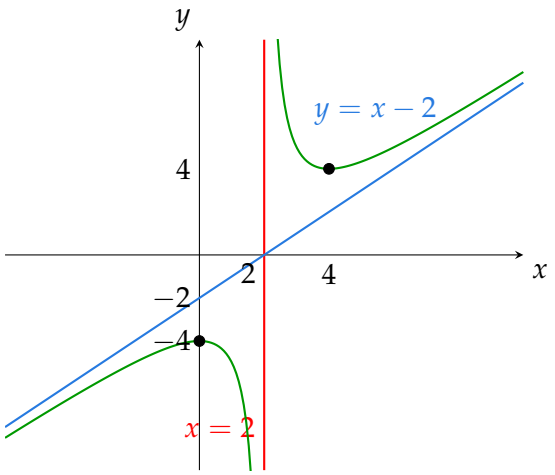
  - បរមាធៀប ៖
    - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=-4$
    - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=4$ គឺ $f(4)=4$
  - គណនាលីមីត ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖
    $y = 0 \iff x^2 - 4x + 8 = 0$ មាន $\Delta' = 4 - 8 = -4 < 0 \implies$ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ៕
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖
    $x = 0 \implies y = -4$ ៕
  - ចំណុចពិសេស ៖ $(0,-4)$ ជាចំណុចអតិបរមាធៀប និង $(4,4)$ ជាចំណុចអប្បបរមាធៀប ៕




**4** គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 1}$ និងមានក្រាប $(C)$ ។

**a** រកដែនកំណត់ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$ ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ ៕

**b** បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x+1}$ ៖

- គេមាន ៖

$$x - 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1) - 1}{x+1} = \frac{x^2 - x - 2 - 1}{x+1} = \frac{x^2 - x - 3}{x+1} = f(x)$$

○ ដូចនេះ $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x+1}$ ពិតប្រាកដមែន ៕

ⓒ បង្ហាញថា សមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ៖

○ គណនាលីមីតផលដក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-2)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ និង $-\infty$ ៕

ⓓ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ៖

○ ទិសដៅអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x-2)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

ដោយ $(x+1)^2 + 1 > 0$ និង $(x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ នាំឱ្យ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ៕

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(-\infty, -1)$ និង $(-1, +\infty)$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ៕

- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូតឈរ ៖

○ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

○ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(x - 2 - \dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$

○ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(x - 2 - \dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ៕

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

○ សំណង់ក្រាប ៖

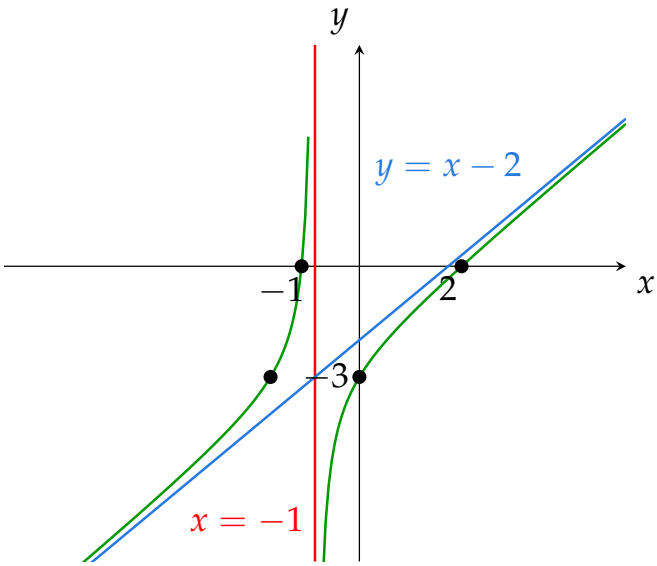
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖

$x = 0 \implies f(0) = -3$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ $(0, -3)$ ៕

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

  $y = 0 \iff x^2 - x - 3 = 0 \implies x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1.30$ ឬ $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2.30$ ។

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖ $(-2,-3), (-3,-4.5), (1,-1.5), (2,-0.33)$ ។




**5** គេឱ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+5}$ មានក្រាប $(C)$ ស្ថិតក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

- **a** គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត។
- **b** គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ ទាញថា $f$ មានអប្បរមាធៀបមួយ រួចគណនាតម្លៃអប្បបរមាធៀបនោះ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។
- **c** សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត។

**6** អនុគមន៍ $f$ កំណត់ចំពោះ $x \neq 2$ ដោយ $f(x) = \dfrac{qx^2+bx+c}{(x-2)^2}$ ហើយមានក្រាប $(c)$ ។

- **a** គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖
  - ដែនកំណត់ ៖ ភាគបែង $x^2-6x+5=0 \iff (x-1)(x-5)=0 \implies x=1$ ឬ $x=5$ ។

    នាំឱ្យ $D = \mathbb{R}\setminus\{1,5\} = (-\infty,1)\cup(1,5)\cup(5,+\infty)$ ។
  - លីមីតត្រង់ $\pm\infty$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{និង} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

  នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ និង $+\infty$ ។

- លីមីតត្រង់ $x=1$ ៖

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-6x}{(x-1)(x-5)}=\frac{-5}{(-0)(-4)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-6x}{(x-1)(x-5)}=\frac{-5}{(+0)(-4)}=+\infty$$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។

- លីមីតត្រង់ $x=5$ ៖

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2-6x}{(x-1)(x-5)}=\frac{-5}{(4)(-0)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\frac{x^2-6x}{(x-1)(x-5)}=\frac{-5}{(4)(+0)}=-\infty$$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=5$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។

(b) គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា ទាញរកអប្បបរមាធៀប និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនា $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=\frac{(2x-6)(x^2-6x+5)-(2x-6)(x^2-6x)}{(x^2-6x+5)^2}=\frac{5(2x-6)}{(x^2-6x+5)^2}=\frac{10(x-3)}{(x^2-6x+5)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖ ដោយ $(x^2-6x+5)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃ $(x-3)$ ៖

  - $f'(x)=0 \iff x-3=0 \implies x=3$
  - $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,1)\cup(1,3)$
  - $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(3,5)\cup(5,+\infty)$

- អប្បបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=3$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីដក $(-)$ ទៅបូក $(+)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=3$ គឺ ៖

$$f(3)=\frac{3^2-6(3)}{3^2-6(3)+5}=\frac{9-18}{9-18+5}=\frac{-9}{-4}=\frac{9}{4}=2.25$$

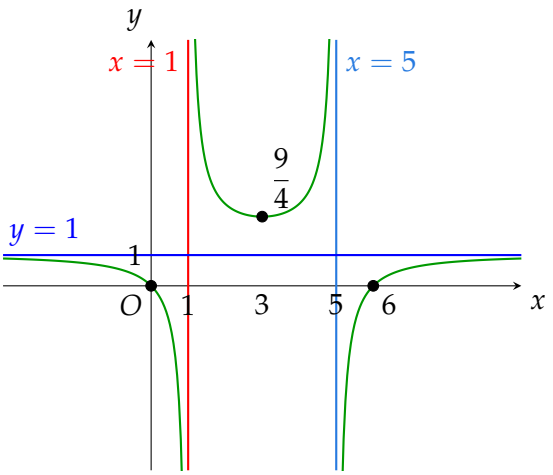
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $+\infty$ | $\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $\|\|$ | $1$ | |
| | | $-\infty$ | $\|\|$ | | | $+\infty$ | $\|\|$ | $-\infty$ | |

ⓒ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

  $y=0 \iff x^2-6x=0 \implies x=0$ ឬ $x=6$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ $(0,0)$ និង $(6,0)$ ៕
- ចំណុចអប្បបរមាធៀប ៖ $\left(3,\frac{9}{4}\right)$ ៕




**7** ⓐ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$

- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x(x-4)=0 \implies x=0$ ឬ $x=4$ ៕

ដោយ $(x-2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $x(x-4)$ ៖

- $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(0,2)\cup(2,4)$

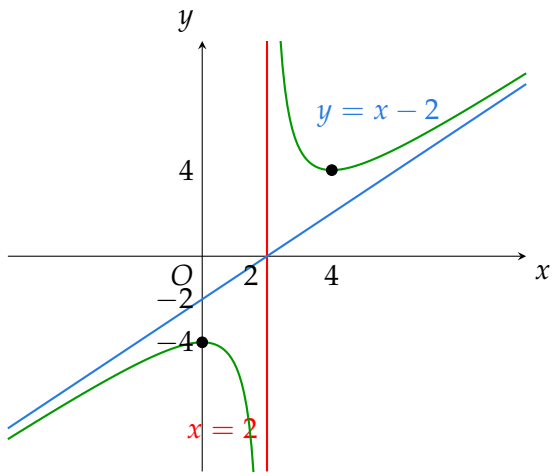
ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និង $(4,+\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(0,2)$ និង

$(2,4)$ ។

- បរមាធៀប ៖
  - អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=-4$
  - អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=4$ គឺ $f(4)=4$
- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty \implies$ បន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
  - $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-2}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0 \implies$ បន្ទាត់ $(d):y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ $(0,-4)$ (ជាចំណុចអតិបរមាធៀប) ។
  - ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ព្រោះសមីការ $x^2-4x+8=0$ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ។
  - ចំណុចអប្បបរមាធៀប គឺ $(4,4)$ ។




ⓑ សិក្សាតាមតម្លៃ $m$ អត្ថិភាព និងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2-(m+4)x+2m+8=0$ ដោយប្រើក្រាប $(C)$

- គេមានសមីការ ៖

$x^2-(m+4)x+2m+8=0 \iff x^2-4x+8-m(x-2)=0$

$\iff x^2-4x+8=m(x-2)$

- បើ $x=2 \implies 2^2-4(2)+8=m(0) \iff 4=0$ (មិនពិត) នាំឱ្យ $x=2$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការទេ ចំពោះគ្រប់ $m$ ។
- ចំពោះ $x\neq 2$ សមីការសមមូលនឹង ៖

$$\frac{x^2-4x+8}{x-2}=m \iff f(x)=m$$

- ចំនួន និងសញ្ញានៃឫសសមីការ គឺជាអាប់ស៊ីស $(x)$ នៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ដេក $(d_m): y=m$ ។
- តាមក្រាប $(C)$ គេទាញបានការពិភាក្សាតាមតម្លៃ $m$ ដូចខាងក្រោម ៖

1. ចំពោះ $m<-4$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ក្រាប $(C)$ ត្រង់ពីរចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_1<0$ និង $0<x_2<2$ ។
   $\implies$ សមីការមានឫសពិតពីរផ្សេងគ្នា មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា $(x_1<0<x_2)$ ។
2. ចំពោះ $m=-4$ ៖ បន្ទាត់ $y=-4$ ប៉ះក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុចអតិបរមា $(0,-4)$ ។
   $\implies$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=0$ ។
3. ចំពោះ $-4<m<4$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ មិនកាត់ក្រាប $(C)$ ឡើយ ។
   $\implies$ សមីការគ្មានឫសពិត ។
4. ចំពោះ $m=4$ ៖ បន្ទាត់ $y=4$ ប៉ះក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុចអប្បបរមា $(4,4)$ ។
   $\implies$ សមីការមានឫសឌុបវិជ្ជមាន $x_1=x_2=4>0$ ។
5. ចំពោះ $m>4$ ៖ បន្ទាត់ $y=m$ កាត់ក្រាប $(C)$ ត្រង់ពីរចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $2<x_1<4$ និង $x_2>4$ ។
   $\implies$ សមីការមានឫសពិតវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា $(0<2<x_1<x_2)$ ។

**8** កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$ កើនលើចន្លោះ $(1,+\infty)$

1. លក្ខខណ្ឌនៃដែនកំណត់ ៖
   - អនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យកាលណា ភាគបែង $x-2a\neq 0 \iff x\neq 2a$
   - ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កើន និងជាប់លើចន្លោះ $(1,+\infty)$ លុះត្រាតែចំណុចមិនកំណត់ $x=2a$ មិនស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(1,+\infty)$ ឡើយ ៖

$$2a\leq 1 \implies a\leq \frac{1}{2} \quad \text{(លក្ខខណ្ឌទី១)}$$

2. គណនាដេរីវេ ៖
   - បំបែកអនុគមន៍ជាទម្រង់ ៖ $f(x)=x+\dfrac{3a^2}{x-2a}$

- ដេរីវេនៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$f'(x) = 1 - \frac{3a^2}{(x-2a)^2} = \frac{(x-2a)^2 - 3a^2}{(x-2a)^2}$$

3. លក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(1,+\infty)$ ៖
   - អនុគមន៍ $f(x)$ កើនលើ $(1,+\infty)$ លុះត្រាតែ $f'(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (1,+\infty)$
   - ដោយ $(x-2a)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 1 \geq 2a$ គេបាន ៖

$$(x-2a)^2 - 3a^2 \geq 0 \iff (x-2a)^2 \geq 3a^2 \iff |x-2a| \geq \sqrt{3}|a| \quad \forall x > 1$$

   - ដោយ $x > 1 \geq 2a \implies x - 2a > 0$ នាំឱ្យ $|x-2a| = x - 2a$ ៖

$$x - 2a \geq \sqrt{3}|a| \iff x \geq 2a + \sqrt{3}|a| \quad \forall x \in (1,+\infty)$$

   - ដើម្បីឱ្យវិសមភាពនេះពិតចំពោះគ្រប់ $x > 1$ លុះត្រាតែ ៖

$$2a + \sqrt{3}|a| \leq 1 \quad \text{(លក្ខខណ្ឌទី២)}$$

4. ដោះស្រាយវិសមភាព $2a + \sqrt{3}|a| \leq 1$ ៖
   - ករណីទី១ $(0 \leq a \leq \frac{1}{2})$ ៖ គេបាន $|a| = a$

$$2a + \sqrt{3}a \leq 1 \iff a(2+\sqrt{3}) \leq 1 \iff a \leq \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

     ដោយ $2 - \sqrt{3} \approx 0.268 \leq \frac{1}{2}$ គេបានចន្លោះចម្លើយ ៖ $0 \leq a \leq 2 - \sqrt{3}$ ៕
   - ករណីទី២ $(a < 0)$ ៖ គេបាន $|a| = -a$

$$2a - \sqrt{3}a \leq 1 \iff a(2-\sqrt{3}) \leq 1 \iff a \leq \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

     ដោយ $2 + \sqrt{3} \approx 3.732 > 0$ វិសមភាព $a \leq 2 + \sqrt{3}$ ពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $a < 0$ ៕
5. សន្និដ្ឋាន ៖
   - ផ្គុំលទ្ធផលពីករណីទាំងពីរ គេទាញបាន ៖

$$a \leq 2 - \sqrt{3}$$

   - ដូចនេះ តម្លៃ $a$ ដែលត្រូវរកគឺ $a \leq 2 - \sqrt{3}$ (ឬ $a \in (-\infty, 2-\sqrt{3}]$) ៕

**9** គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}$

**a** ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំណុចនឹងមួយ និងកំណត់កូអរដោនេ ៖

- គេអាចបំបែកអនុគមន៍ជាទម្រង់ ៖

$$y=\frac{m(x^2+3x+2)+1}{x+2}=\frac{m(x+1)(x+2)+1}{x+2}=m(x+1)+\frac{1}{x+2}$$

- ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ នាំឱ្យសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ គឺ ៖

$$(d):y=m(x+1)\iff m(x+1)-y=0$$

- ឧបមាថា $A(x_0,y_0)$ ជាចំណុចនឹងដែលស្ថិតលើបន្ទាត់ $(d)$ ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{R}$
- គេបានសមីការ $m(x_0+1)-y_0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases}x_0+1=0\\-y_0=0\end{cases}\implies\begin{cases}x_0=-1\\y_0=0\end{cases}$$

- ដូចនេះ អាស៊ីមតូតទ្រេតតែងតែកាត់តាមចំណុចនឹងមួយគឺ $A(-1,0)$ ចំពោះគ្រប់ $m$ ទាំងអស់ ៕

**b** រកតម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=m$ ប៉ះក្រាប $(C)$ ៖

- សមីការអាបស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $y=m$ និងក្រាប $(C)$ គឺ ៖

$$\frac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}=m\quad(x\neq-2)$$

$$\iff mx^2+3mx+2m+1=m(x+2)$$

$$\iff mx^2+2mx+1=0\quad(\text{សមីការ}*)$$

- បន្ទាត់ $y=m$ ប៉ះក្រាប $(C)$ លុះត្រាតែសមីការ $(*)$ ជាសមីការដឺក្រេទី២ មានឫសឌុប ($m\neq0$ និង $\Delta'=0$) ៖

$$\Delta'=m^2-m(1)=m^2-m=m(m-1)$$

$$\Delta'=0\iff m(m-1)=0\implies m=0\ \text{ឬ}\ m=1$$

- ពិនិត្យករណី ៖
  - បើ $m=0\implies1=0$ (មិនពិត $\implies$ គ្មានឫស) ៕

· បើ $m=1 \implies x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \implies x=-1\neq -2$ (មានឫសឌុប) ។

○ ដូចនេះ តម្លៃ $m$ ដែលត្រូវរកគឺ $m=1$ ។

ⓒ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m=-1$ ៖

○ ចំពោះ $m=-1$ គេបានអនុគមន៍ ៖

$$f(x)=-(x+1)+\frac{1}{x+2}=-x-1+\frac{1}{x+2}=\frac{-x^2-3x-1}{x+2}$$

○ ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

○ ទិសដៅអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=-1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{-(x+2)^2-1}{(x+2)^2}=\frac{-x^2-4x-5}{(x+2)^2}$$

ដោយ $-(x+2)^2-1<0$ និង $(x+2)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$

នាំឱ្យ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $(-\infty,-2)$ និង $(-2,+\infty)$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។

- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

· $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty \implies$ បន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

· ដោយ $f(x)=-x-1+\dfrac{1}{x+2}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$

$\implies$ បន្ទាត់ $(d):y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ‖ | ↘ | $-\infty$ |
| | | | ‖ $+\infty$ | | |

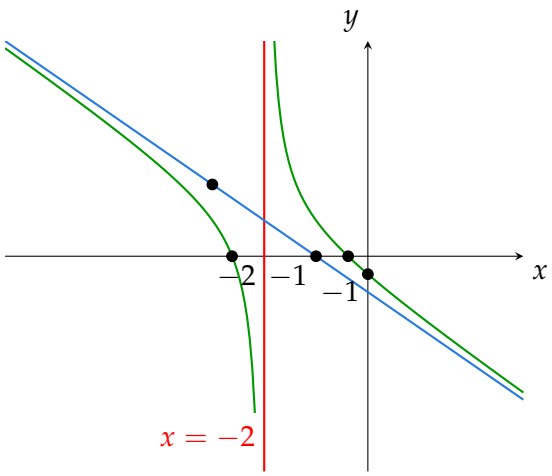
○ សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

$y = 0 \iff -x^2 - 3x - 1 = 0 \implies x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2.62$ ឬ $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0.38$ ។

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖ $(-1,0), (-3,2), (-4,2.5)$ ។




**10** គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2+2(m+1)x+2}{x+1}$ ។

ⓐ ចំពោះ $m = 0$ សិក្សាអថេរភាព សង់ក្រាប $(C)$ និងកំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យក្រាប $(C)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = -x + a$ ៖

- ចំពោះ $m = 0$ គេបានអនុគមន៍ ៖

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{(x+1)^2+1}{x+1} = x+1+\frac{1}{x+1}$$

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x(x+2) = 0 \implies x = 0$ ឬ $x = -2$ ។

ដោយ $(x+1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $x(x+2)$ ៖

· $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$

· $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,-2)$ និង $(0,+\infty)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-2,-1)$ និង $(-1,0)$ ។

- បរមាធៀប ៖

· អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-2$ គឺ $f(-2)=-2$

· អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=2$

- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

· $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty \implies$ បន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ៕

· $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+1}=0 \implies$ បន្ទាត់ $(d):y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៕

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

○ សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ គឺ $(0,2)$ (ជាចំណុចអប្បបរមាធៀប) ៕
- ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ព្រោះ $x^2+2x+2=0$ មាន $\Delta'=-1<0$ ៕
- ចំណុចអតិបរមាធៀប គឺ $(-2,-2)$ ៕

○ កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឱ្យក្រាប $(C)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y=-x+a$ ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ $y=-x+a$ ៖

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}=-x+a \quad (x\neq-1)$$

$$\iff x^2+2x+2=(-x+a)(x+1)$$

$$\iff x^2+2x+2=-x^2+(a-1)x+a$$

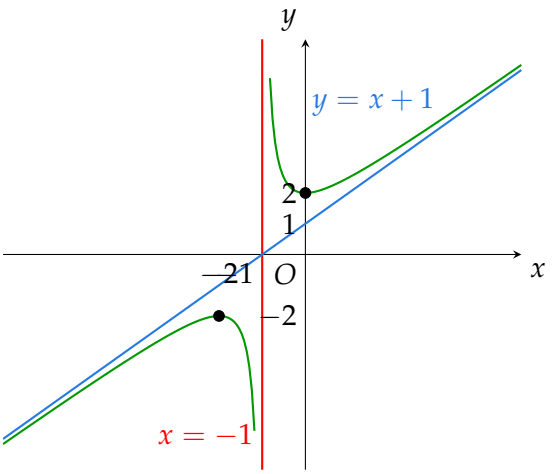
$$\iff 2x^2+(3-a)x+(2-a)=0 \quad (\text{សមីការ } *)$$

- បន្ទាត់ $y=-x+a$ ប៉ះក្រាប $(C)$ លុះត្រាតែសមីការ $(*)$ មានឫសឌុប $(\Delta=0)$ ៖

$$\Delta=(3-a)^2-4(2)(2-a)=9-6a+a^2-16+8a=a^2+2a-7$$

$$\Delta=0 \iff a^2+2a-7=0 \implies a=-1\pm2\sqrt{2}$$

- ដូចនេះ តម្លៃ $a$ ដែលត្រូវរកគឺ $a=-1-2\sqrt{2}$ ឬ $a=-1+2\sqrt{2}$ ។




(b) រកតម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ៖

- បំបែកទម្រង់អនុគមន៍ ៖

$$f(x)=\frac{x^2+2(m+1)x+2}{x+1}=x+2m+1+\frac{1-2m}{x+1}$$

- លើចន្លោះ $[0,+\infty)$ អនុគមន៍ $f$ ជាប់ និងមានដេរីវេ ៖

$$f'(x)=1-\frac{1-2m}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-(1-2m)}{(x+1)^2}$$

- ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f$ កើនលើចន្លោះ $[0,+\infty)$ លុះត្រាតែ $f'(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,+\infty)$
- ដោយ $(x+1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ គេបាន ៖

$$(x+1)^2-(1-2m)\geq 0 \iff (x+1)^2\geq 1-2m \quad \forall x\in[0,+\infty)$$

- ចំពោះ $x\geq 0 \implies x+1\geq 1 \implies (x+1)^2\geq 1$
- នាំឱ្យតម្លៃតូចបំផុតនៃ $(x+1)^2$ លើចន្លោះ $[0,+\infty)$ គឺ $1$ (ត្រង់ $x=0$)
- ដូចនេះ វិសមភាព $(x+1)^2\geq 1-2m$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ លុះត្រាតែ ៖

$$1\geq 1-2m \iff 2m\geq 0 \iff m\geq 0$$

ដូចនេះ តម្លៃ $m$ ដែលត្រូវរកគឺ $m\geq 0$ (ឬ $m\in[0,+\infty)$) ។

# អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

## ២.១ ចំនួន $e$

| $n$ | $(1+1/n)^n$ |
|---|---|
| 2 | 2.59... |
| 10 | 2.70... |
| 1,000 | 2.71... |
| 10,000 | 2.718... |
| $\infty$ (infinity) | $e$ |

លីមីតនៃកន្សោម $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ កាលណា $n$ ខិតជិត $+\infty$ ហៅថា **ចំនួន** $e$ ។

គេបាន $\boxed{e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2.7182}$

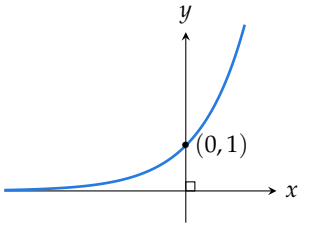
## ២.២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

### ២.២.១ និយមន័យ និងលក្ខណៈគ្រឹះ

**និយមន័យ** អនុគមន៍ដែលមានរាង $y=e^x$ ហៅថាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល $e$ ដែល $e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ។ ■

- គោល $e$ ហៅថា ចំនួនអឺលែដែលតម្លៃនៃ $e\simeq 2.7182\cdots$
- ដែនកំណត់និងសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានគោល $e$

តាមក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f(x)=e^x$ យើងឃើញថា $f$ មានសំណុំដែនកំណត់លើចន្លោះ $(-\infty,+\infty)$ និងសំណុំរូបភាពលើ $(0,+\infty)$ នោះគេបាន $e^x>0\forall x\in\mathbb{R}$ ។



ក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=e^x$

**សម្គាល់**

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $m$ និង $n$ គេបាន

- (a) $e^{m+n}=e^m\cdot e^n$
- (b) $e^{-n}=\frac{1}{e^n}$
- (c) $e^{m-n}=\frac{e^m}{e^n}$
- (d) $(e^m)^n=e^{mn}$

## ២.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

**ដានូទៅ**

(a) បើ $f(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x$

(b) បើ $f(x)=a^x$ នោះ $f'(x)=a^x\ln a$

(c) បើ $f(x)=e^{u(x)}$ នោះ $f'(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}$

**លំហាត់គម្រូ** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ៈ

(a) $y=e^{4x}$ (b) $y=e^{x^2-3x+1}$ (c) $y=xe^x$

**ដំណោះស្រាយ**

(a) $y'=(e^{4x})'=(4x)'e^{4x}=4e^{4x}$

(b) $y'=(e^{x^2-3x+1})'=(x^2-3x+1)'e^{x^2-3x+1}=(2x-3)e^{x^2-3x+1}$

(c) $y'=(xe^x)'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$ ។

**លំហាត់គំរូ 2** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=4-2e^{-x}$ ។

**ដំណោះស្រាយ** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=4-2e^{-x}$

- ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ $y'=2e^{-x}, y'>0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in D$ ។ អនុគមន៍កើនលើ $D$ ។
  - លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-2e^{-x})=4-2\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=-\infty$

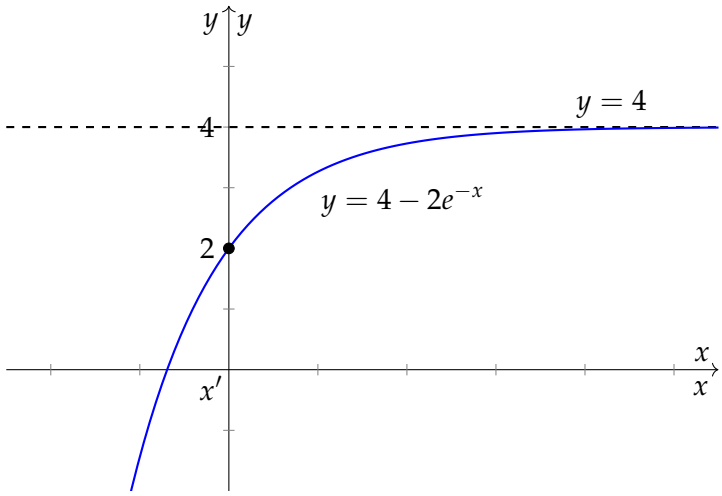
    $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2e^{-x})=4-2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=4$ ។

    ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ $y=4$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↗ | $4$ |

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=4-2e^{-x}$
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស

    $y'Oy: x=0$ នាំឱ្យ $y=2$ ។




- សង់ចំណុចបន្ថែម

  $x=-1, y=4-2e=-1.4$ ។

**លំហាត់គំរូ 3** អនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=x-e^x$ មានក្រាប $C$ ។

ⓐ គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $L$ នៃក្រាប $C$ ។

ⓑ សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

ⓒ គណនា $f(1)$ និង $f(2)$ ។ សង់ $L$ និង $C$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

$C: f(x)=x-e^x$ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

ⓐ គណនាលីមីត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^x)=-\infty \quad \left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)$ (រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$)

  $=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)=-\infty \quad \left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\right)$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $L$ នៃក្រាប $C$

ដោយ $f(x)=x-e^x$ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0$

ដូចេ្នះ $L: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត $L$ នៃក្រាប $C$ ។

ⓑ សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$

- ដេរីវេ: $f'(x)=(x-e^x)'=1-e^x$
- សញ្ញានៃដេរីវេ

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-e^x$ ។

$1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

$1-e^x<0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

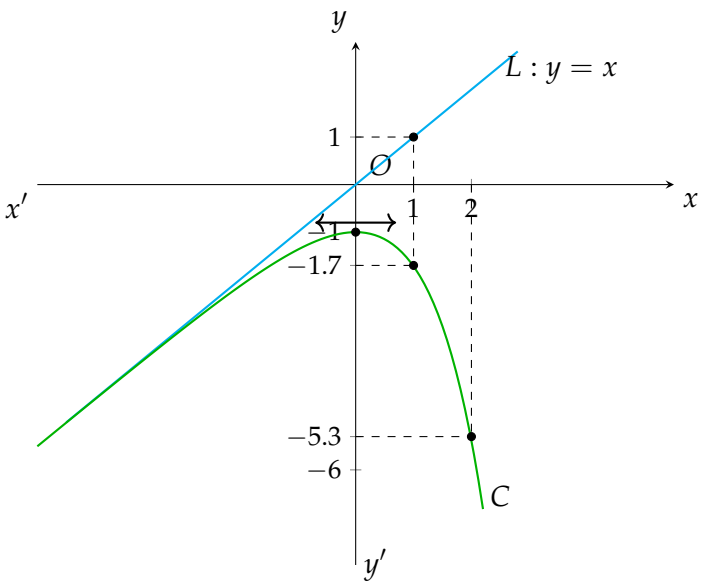
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

អនុគមន៍ $f$ កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ ព្រោះ $f'(x)>0$
អនុគមន៍ $f$ ចុះលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ព្រោះ $f'(x)<0$ ។
តម្លៃអតិបរមាធៀប $f(0)=0-e^0=-1$

- តារាងអថេរភាពនៃ $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

ⓒ គណនា $f(1), f(2)$ $f(1)=1-e=1-2.7=-1.7$
$f(2)=2-e^2=2-7.3=-5.3$
សង់ $L$ និង $C$ :



**លំហាត់គំរូ 4** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = xe^x$ ។

**ដំណោះស្រាយ** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = xe^x$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$
- ទិសដៅអថេរភាព ដេរីវេ $y' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$ ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ , $y'$ មានសញ្ញាដូច $x+1$ ។ $y' = 0$ គេបាន $x+1 = 0$ នាំឱ្យ $x = -1$ ។
- សញ្ញាដេរីវេ

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

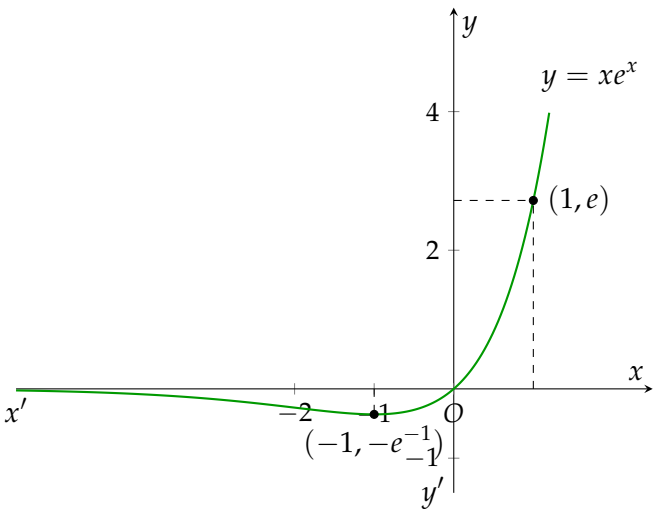
  - អនុគមន៍ $f$ កើនលើ $(-\infty, -1)$ ហើយចុះលើ $(-1, +\infty)$
  - ត្រង់ $x = -1$ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប
    $f(-1) = -e^{-1} \approx -0.36$
  - លីមីត : ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
    គេបាន $-\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = 0$ ដូច្នេះបន្ទាត់សមីការ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក
    នៃក្រាប កាលណា $x \to -\infty$ ។
    ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
    គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ ។
- តារាងអថេរភាព

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | ↘ | $-e^{-1}$ | ↗ | $+\infty$ |

- ក្រាប $y = xe^x$
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $x'Ox$
    $y = 0$ នាំឱ្យ $x = 0$ ក្រាបកាត់តាមគល់ $O$ ។
  - ចំណុចរបត់ : $y'' = (x+2)e^x$
    ដោយ $e^x > 0, y''$ មានសញ្ញាដូច $x+2$
    $y'' = 0$ គេបាន $x+2 = 0$ នាំឱ្យ $x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

ដូច្នេះ អនុគមន៍មានចំណុចរបត់មួយគឺ
$I(-2,-2e^{-2})$ ឬ $I(-2,-0.27)$ ។




**ប្រតិបត្តិ** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = x + e^x$ ⓑ $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-5x}}$ ⓒ $y = \dfrac{x}{e^x}$

**ដំណោះស្រាយ** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = x + e^x$

- ដែនកំណត់ ៖
  - អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x)' + (e^x)' = 1 + e^x$$

ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x) = 1 + e^x > 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។

  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^x) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x) = +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

· អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ ៕

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

• សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖

○ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖

$x = 0 \implies f(0) = 0 + e^0 = 1 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0,1)$ ៕

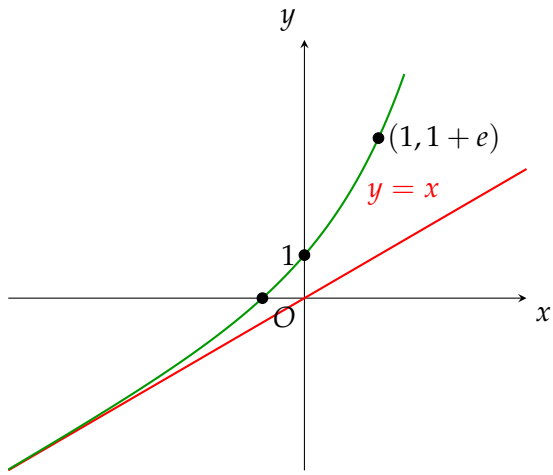
○ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

$y = 0 \iff x + e^x = 0 \implies x \approx -0.57$ (ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចន្លោះ $-1 < x < 0$) ៕

○ ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

· $x = -1 \implies y = -1 + e^{-1} \approx -0.63$

· $x = 1 \implies y = 1 + e \approx 3.72$




**b** $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-5x}}$

• ដែនកំណត់ ៖

○ ដោយ $e^{-5x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} \implies 1 + 2e^{-5x} > 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

- នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ។

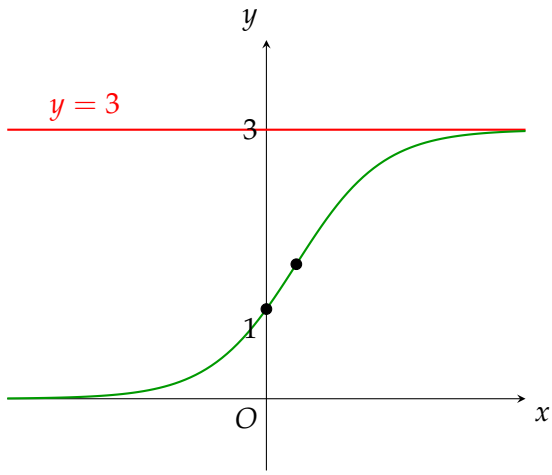
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot (2e^{-5x})'}{(1+2e^{-5x})^2} = \frac{-3 \cdot (-10e^{-5x})}{(1+2e^{-5x})^2} = \frac{30e^{-5x}}{(1+2e^{-5x})^2}$$

  ដោយ $e^{-5x} > 0$ និង $(1+2e^{-5x})^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
  នាំឱ្យ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ។
  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
    - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{1+2e^{-5x}} = 0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-5x} = +\infty$)
      $\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្ស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ ។
    - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{1+2e^{-5x}} = \frac{3}{1+0} = 3$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-5x} = 0$)
      $\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $y = 3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ។
  - តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $3$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖
    $x = 0 \implies f(0) = \frac{3}{1+2e^0} = \frac{3}{3} = 1 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0,1)$ ។
  - ចំណុចរបត់ ៖
    $f''(x) = \frac{150e^{-5x}(2e^{-5x}-1)}{(1+2e^{-5x})^3}$
    $f''(x) = 0 \iff 2e^{-5x} - 1 = 0 \implies x = \frac{\ln 2}{5} \approx 0.14 \implies y = \frac{3}{2} = 1.5$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    - $x = -0.5 \implies y = \frac{3}{1+2e^{2.5}} \approx 0.12$
    - $x = 0.5 \implies y = \frac{3}{1+2e^{-2.5}} \approx 2.58$




◈ $y = \dfrac{x}{e^x}$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ៕
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \implies x = 1$ ៕

ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $(1-x)$ ៖

· $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty, 1)$

· $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, 1)$ និងចុះលើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ៕

  - អតិបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = 1$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីបូក $(+)$ ទៅដក $(-)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x = 1$ គឺ ៖

$$f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$

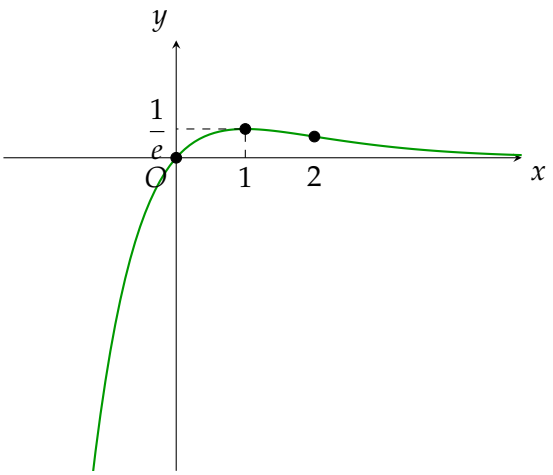
· $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\implies$ បន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្ស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ៕

  - តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្សកូអរដោនេ ៖
    $x=0 \Longrightarrow f(0)=0 \Longrightarrow$ ក្រាបកាត់តាមគល់តម្រុយ $O(0,0)$ ។
  - ចំណុចរបត់ ៖
    $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^x}=0 \Longleftrightarrow x=2 \Longrightarrow y=\dfrac{2}{e^2}\approx 0.27$ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    - $x=-1 \Longrightarrow y=-e\approx -2.72$
    - $x=3 \Longrightarrow y=\dfrac{3}{e^3}\approx 0.15$




## លំហាត់

**1** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

(a) $y=e^{2x}$
(b) $y=e^{4x}$
(c) $y=e^{x^2-3x+1}$
(d) $y=xe^x$
(e) $y=(x^2-3)(e^x)$
(f) $y=x^2e^{-2x}$
(g) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

**2** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ⓐ $y = e^x$
ⓑ $y = 3^x$
ⓒ $y = xe^x$
ⓓ $y = x^3e^x$
ⓔ $y = e^x \sin x$
ⓕ $y = x^4e^{2x}$
ⓖ $y = e^{-x}\cos x$
ⓗ $y = e^{4x}\sin 3x$
ⓘ $y = 4^{4x^4}$
ⓙ $y = 4^{-5x^4}$
ⓚ $y = (4^x + 2)^3$
ⓛ $y = 3^{(x^4+1)^3}$
ⓜ $y = 3^{\cos 3x^4}$

**3** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = (x^2 + 1)e^{3x}$
ⓑ $y = e^{x^2+3x}$
ⓒ $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{x^2}$
ⓓ $y = 3^{x^2+3x}$
ⓔ $y = x \cdot 5^{3x}$
ⓕ $y = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$
ⓖ $y = xe^{x^2+1}$
ⓗ $y = \sqrt{1 + e^x}$
ⓘ $y = (2x + e^{x^2})^4$
ⓙ $y = (3x)^{5x}$
ⓚ $y = (3x + 2)^{2x-1}$

## ដំណោះស្រាយ

**1** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = e^{2x} \Longrightarrow y' = (2x)'e^{2x} = \boxed{2e^{2x}}$

ⓑ $y = e^{4x} \Longrightarrow y' = (4x)'e^{4x} = \boxed{4e^{4x}}$

ⓒ $y = e^{x^2-3x+1} \Longrightarrow y' = (x^2 - 3x + 1)'e^{x^2-3x+1} = \boxed{(2x - 3)e^{x^2-3x+1}}$

ⓓ $y = xe^x \Longrightarrow y' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x = \boxed{(x + 1)e^x}$

ⓔ $y = (x^2 - 3)e^x$

$\Longrightarrow y' = (x^2 - 3)'e^x + (x^2 - 3)(e^x)' = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = \boxed{(x^2 + 2x - 3)e^x}$

ⓕ $y = x^2e^{-2x}$

$\Longrightarrow y' = (x^2)'e^{-2x} + x^2(e^{-2x})' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x})$

$= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = \boxed{2x(1 - x)e^{-2x}}$

ⓖ $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

$$\Longrightarrow y' = \frac{(\sqrt{x})'e^x - \sqrt{x}(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x - \sqrt{x}e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\left(\frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}}\right)}{e^{2x}} = \boxed{\frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}e^x}}$$

**2** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ⓐ $y = e^x \Longrightarrow y' = (e^x)' = e^x$

ដូចនេះ $\boxed{y' = e^x}$

(b) $y = 3^x \Longrightarrow y' = (3^x)' = 3^x \ln$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 3^x \ln 3}$

(c) $y = xe^x$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x)'e^x + x(e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + xe^x \\ &= (x+1)e^x\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (x+1)e^x}$

(d) $y = x^3e^x$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x^3)'e^x + x^3(e^x)' \\ &= 3x^2e^x + x^3e^x \\ &= x^2(x+3)e^x\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = x^2(x+3)e^x}$

(e) $y = e^x \sin x$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (e^x)' \sin x + e^x(\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x(\sin x + \cos x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = e^x(\sin x + \cos x)}$

(f) $y = x^4e^{2x}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x^4)'e^{2x} + x^4(e^{2x})' \\ &= 4x^3e^{2x} + x^4(2e^{2x}) \\ &= 2x^3(x+2)e^{2x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 2x^3(x+2)e^{2x}}$

ⓖ $y = e^{-x}\cos x$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (e^{-x})'\cos x + e^{-x}(\cos x)' \\ &= -e^{-x}\cos x + e^{-x}(-\sin x) \\ &= -e^{-x}(\cos x + \sin x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = -e^{-x}(\cos x + \sin x)}$

ⓗ $y = e^{4x}\sin 3x$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (e^{4x})'\sin 3x + e^{4x}(\sin 3x)' \\ &= 4e^{4x}\sin 3x + 3e^{4x}\cos 3x \\ &= e^{4x}(4\sin 3x + 3\cos 3x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = e^{4x}(4\sin 3x + 3\cos 3x)}$

ⓘ $y = 4^{4x^4}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } y' &= (4x^4)' \cdot 4^{4x^4}\ln 4 \\ &= 16x^3 \cdot 4^{4x^4}\ln 4\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 16x^3 \cdot 4^{4x^4}\ln 4}$

ⓙ $y = 4^{-5x^4}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (-5x^4)' \cdot 4^{-5x^4}\ln 4 \\ &= -20x^3 \cdot 4^{-5x^4}\ln 4\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = -20x^3 \cdot 4^{-5x^4}\ln 4}$

(k) $y = (4^x + 2)^3$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= 3(4^x+2)^2 \cdot (4^x+2)' \\ &= 3(4^x+2)^2 \cdot 4^x \ln 4 \\ &= 3\ln 4 \cdot 4^x (4^x+2)^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 3\ln 4 \cdot 4^x (4^x+2)^2}$

(l) $y = 3^{(x^4+1)^3}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } y' &= \left[(x^4+1)^3\right]' \cdot 3^{(x^4+1)^3} \ln 3 \\ &= 3(x^4+1)^2 \cdot (x^4+1)' \cdot 3^{(x^4+1)^3} \ln 3 \\ &= 3(x^4+1)^2 \cdot (4x^3) \cdot 3^{(x^4+1)^3} \ln 3 \\ &= 12x^3 (x^4+1)^2 \ln 3 \cdot 3^{(x^4+1)^3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 12x^3 (x^4+1)^2 \ln 3 \cdot 3^{(x^4+1)^3}}$

(m) $y = 3^{\cos 3x^4}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (\cos 3x^4)' \cdot 3^{\cos 3x^4} \ln 3 \\ &= (-\sin 3x^4) \cdot (3x^4)' \cdot 3^{\cos 3x^4} \ln 3 \\ &= -12x^3 \ln 3 \sin 3x^4 \cdot 3^{\cos 3x^4}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = -12x^3 \ln 3 \sin 3x^4 \cdot 3^{\cos 3x^4}}$

**3** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

(a) $y = (x^2+1)e^{3x}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x^2+1)' e^{3x} + (x^2+1)(e^{3x})' \\ &= 2xe^{3x} + (x^2+1)(3e^{3x}) \\ &= (3x^2+2x+3)e^{3x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (3x^2+2x+3)e^{3x}}$

**b** $y = e^{x^2+3x}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x^2+3x)'e^{x^2+3x}\\ &= (2x+3)e^{x^2+3x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (2x+3)e^{x^2+3x}}$

**c** $y = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{x^2}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= \frac{(e^{2x}+e^{-2x})'x^2 - (e^{2x}+e^{-2x})(x^2)'}{(x^2)^2}\\ &= \frac{(2e^{2x}-2e^{-2x})x^2 - (e^{2x}+e^{-2x})(2x)}{x^4}\\ &= \frac{2x\left[x(e^{2x}-e^{-2x}) - (e^{2x}+e^{-2x})\right]}{x^4}\\ &= \frac{2\left[(x-1)e^{2x} - (x+1)e^{-2x}\right]}{x^3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \dfrac{2\left[(x-1)e^{2x} - (x+1)e^{-2x}\right]}{x^3}}$

**d** $y = 3^{x^2+3x}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x^2+3x)' \cdot 3^{x^2+3x}\ln 3\\ &= (2x+3)3^{x^2+3x}\ln 3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (2x+3)3^{x^2+3x}\ln 3}$

**e** $y = x \cdot 5^{3x}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x)'5^{3x} + x(5^{3x})'\\ &= 1 \cdot 5^{3x} + x(3 \cdot 5^{3x}\ln 5)\\ &= (1+3x\ln 5)5^{3x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (1+3x\ln 5)5^{3x}}$

(f) $y = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= \frac{(3^x)' - (3^{-x})'}{2}\\ &= \frac{3^x\ln 3 - (-3^{-x}\ln 3)}{2}\\ &= \frac{(3^x + 3^{-x})\ln 3}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \dfrac{(3^x + 3^{-x})\ln 3}{2}}$

(g) $y = xe^{x^2+1}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= (x)'e^{x^2+1} + x(e^{x^2+1})'\\ &= 1\cdot e^{x^2+1} + x(2xe^{x^2+1})\\ &= (2x^2+1)e^{x^2+1}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (2x^2+1)e^{x^2+1}}$

(h) $y = \sqrt{1+e^x}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= \frac{(1+e^x)'}{2\sqrt{1+e^x}}\\ &= \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}$

ⓘ $y = (2x + e^{x^2})^4$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y' &= 4(2x + e^{x^2})^3(2x + e^{x^2})' \\ &= 4(2x + e^{x^2})^3(2 + 2xe^{x^2}) \\ &= 8(1 + xe^{x^2})(2x + e^{x^2})^3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 8(1 + xe^{x^2})(2x + e^{x^2})^3}$

ⓙ $y = (3x)^{5x}$

$$\begin{aligned}\ln y &= 5x\ln(3x) \\ \Longrightarrow \frac{y'}{y} &= (5x)'\ln(3x) + 5x(\ln(3x))' \\ &= 5\ln(3x) + 5x \cdot \frac{3}{3x} \\ &= 5(1 + \ln(3x)) \\ \Longrightarrow y' &= 5(3x)^{5x}(1 + \ln(3x))\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 5(3x)^{5x}(1 + \ln(3x))}$

ⓚ $y = (3x + 2)^{2x-1}$

$$\begin{aligned}\ln y &= (2x - 1)\ln(3x + 2) \\ \Longrightarrow \frac{y'}{y} &= (2x - 1)'\ln(3x + 2) + (2x - 1)(\ln(3x + 2))' \\ &= 2\ln(3x + 2) + (2x - 1) \cdot \frac{3}{3x + 2} \\ &= 2\ln(3x + 2) + \frac{6x - 3}{3x + 2} \\ \Longrightarrow y' &= (3x + 2)^{2x-1}\left[2\ln(3x + 2) + \frac{6x - 3}{3x + 2}\right]\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (3x + 2)^{2x-1}\left[2\ln(3x + 2) + \frac{6x - 3}{3x + 2}\right]}$

## ២.៤ អថេរភាពអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

**របៀបដោះស្រាយ**

**ប្តង់សិក្សាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

*a*. ដែកកំណត់

*b*. លីមីតចុងដែនកំណត់

*c*. ទិសដៅអថេរភាព

– ដេរីវេទី១ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេទី១

– តារាងអថេរភាព

*d*. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

– ចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $y'oy$ (ឱ្យ $x=0$) និង ចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ (ឱ្យ $y=0$) បើមាន

# លំហាត់

**1** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y=4-2e^{-x}$

ⓑ $y=x-e^{x}$

ⓒ $y=xe^{x}$

ⓓ $y=x+e^{x}$

ⓔ $y=\dfrac{1}{1+2e^{-5x}}$

ⓕ $y=\dfrac{x}{e^{x}}$

**2** $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=e^{1-x}$ ហើយ $C$ ជាក្រាបរបស់ $f$ ។

ⓐ បញ្ជាក់ដែនកំណត់នៃ $f$ រួចបង្ហាញថា $f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ ។

ⓑ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ រួចបកស្រាយសមីការអាស៊ីមតូតនៃ $C$ ។

ⓒ គូសតារាងអថេរភាព $f$ ។

ⓓ គណនាចំណុចប្រសព្វរវាងអ័ក្ស $C$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស (គិត $e=2.7$) ។

ⓔ សរសេរសមីការតង់សង់ $L$ ដែលប៉ះ ៖

ⓕ ក្រាប $C$ ត្រង់ $x=1$ សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $L$ នៅក្នុងប្រព័ន្ធអ័ក្សកូណាល់មួយ ។

**3** គេឲ្យអនុគមន៍ $g$ មួយកំណត់ដោយ $g(x)=e^{x}+ax+b$

ⓐ គណនា $g'(x), g''(x)$ រួចបកស្រាយ $g''(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $a, b$ ។

ⓑ គណនា $a$ និង $b$ ដោយដឹងថា មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $C$ត្រង់គល់$O$ ស្របអ័ក្ស $(x'Ox)$ ។

ⓒ កំណត់តម្លៃ $a$ និង $b$ ដែលរកឃើញ ចូរគណនា $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព នៃ $g$ (មិនបាច់គណនាលីមីតចុងដែន) ។

ⓓ គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ទាញសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ នៃ $g$ រួចទាញរកសញ្ញា $g$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $e^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R}$ ។

ⓔ សង់ខ្សែកោង $C$ តាង $g$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓕ ដោយប្រើខ្សែកោង $C$ ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $m$នូវចំនួនឫសនៃសមីការ $e^x - 1 = m + x$ ។

ⓖ គណនាផ្ទៃក្រឡា$S$ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $C$ នឹងអ័ក្ស $(x'Ox)$ និងបន្ទាត់ $x=0, x=1$ ។

## ដំណោះស្រាយ

**1** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = 4 - 2e^{-x}$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^{-x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
    នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ॥
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (4 - 2e^{-x})' = -2(-e^{-x}) = 2e^{-x}$$

ដោយ $e^{-x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x) = 2e^{-x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ॥
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ហើយគ្មានបរមាធៀបឡើយ ॥

  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(4 - 2e^{-x}) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$)
· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(4 - 2e^{-x}) = 4$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)
$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $y = 4$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ॥

  - តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $4$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖
    $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 4 - 2e^0 = 2 \Longrightarrow$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0,2)$ ॥

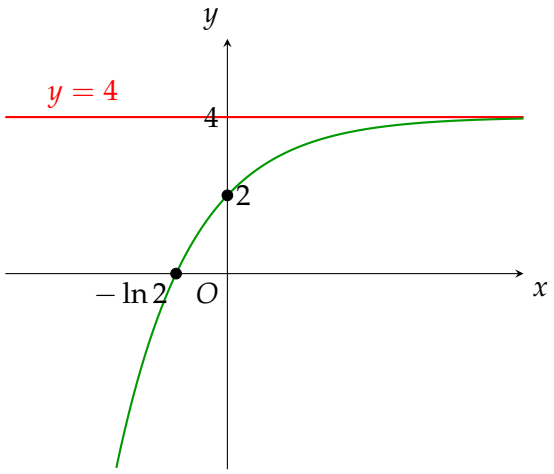
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

  $y=0 \iff 4-2e^{-x}=0 \iff e^{-x}=2 \iff x=-\ln 2 \approx -0.69 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-\ln 2, 0)$ ៕

- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

  $\cdot\ x=1 \implies y=4-2e^{-1} \approx 3.26$

  $\cdot\ x=-1 \implies y=4-2e \approx -1.44$




**b** $y=x-e^x$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ៕
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=(x)'-(e^x)'=1-e^x$$

$f'(x)=0 \iff 1-e^x=0 \iff e^x=1 \implies x=0$ ៕

$\cdot\ f'(x)>0 \iff 1-e^x>0 \iff e^x<1 \iff x\in(-\infty,0)$

$\cdot\ f'(x)<0 \iff 1-e^x<0 \iff e^x>1 \iff x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និងចុះលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ៕

  - អតិបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=0$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីបូក $(+)$ ទៅដក $(-)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=0$ គឺ ៖

$$f(0)=0-e^0=-1$$

  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^x) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$)

· អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x) = 0$
នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ ៕

○ តារាងអថេរភាព ៖

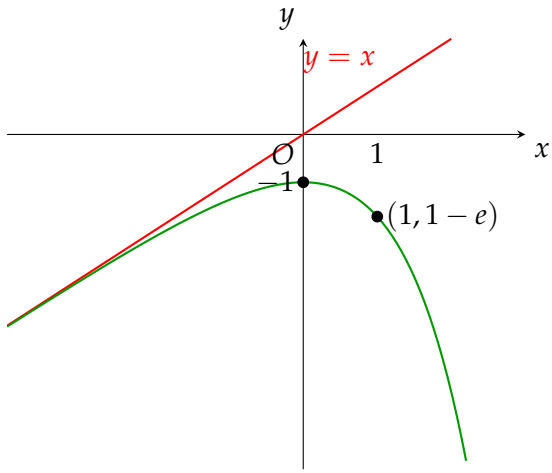
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

• សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖

○ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖
$x = 0 \implies f(0) = -1 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0,-1)$ (ជាចំណុចអតិបរមាធៀប) ៕

○ ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖
$y = 0 \iff x - e^x = 0 \iff e^x = x$ (គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ព្រោះ $e^x > x$ គ្រប់ $x$)
$\implies$ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ៕

○ ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
· $x = -1 \implies y = -1 - e^{-1} \approx -1.37$
· $x = 1 \implies y = 1 - e \approx -1.72$
· $x = 2 \implies y = 2 - e^2 \approx -5.39$




ⓒ $y = xe^x$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^x$ និង $x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = xe^x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$f'(x) = 0 \iff (x+1)e^x = 0 \iff x+1 = 0 \implies x = -1$ (ព្រោះ $e^x > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$) ។

$\cdot \; f'(x) > 0 \iff x+1 > 0 \iff x > -1 \iff x \in (-1, +\infty)$

$\cdot \; f'(x) < 0 \iff x+1 < 0 \iff x < -1 \iff x \in (-\infty, -1)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(-\infty, -1)$ និងកើនលើចន្លោះ $(-1, +\infty)$ ។

  - អប្បបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = -1$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីដក $(-)$ ទៅបូក $(+)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x = -1$ គឺ ៖

$$f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0.37$$

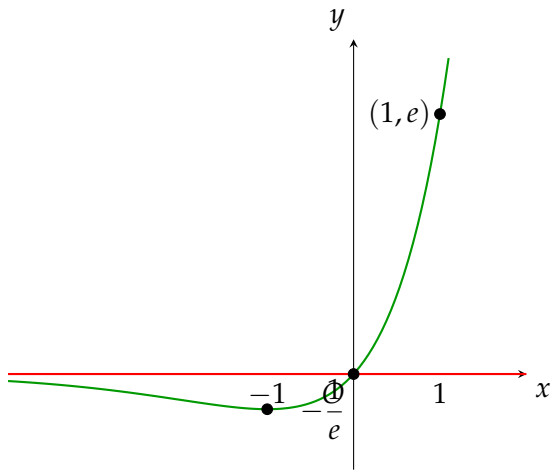
  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
    - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
    - អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ ។
    - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$
  - តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{e}$ | ↗ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖

$x = 0 \implies f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖
  $y=0 \iff xe^x=0 \iff x=0 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ។
- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
  - $x=-2 \implies y=-2e^{-2}\approx -0.27$
  - $x=-1 \implies y=-\dfrac{1}{e}\approx -0.37$ (ជាចំណុចអប្បបរមាធៀប)
  - $x=1 \implies y=1\cdot e=e\approx 2.72$




**d** $y=x+e^x$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+e^x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=(x)'+(e^x)'=1+e^x$$

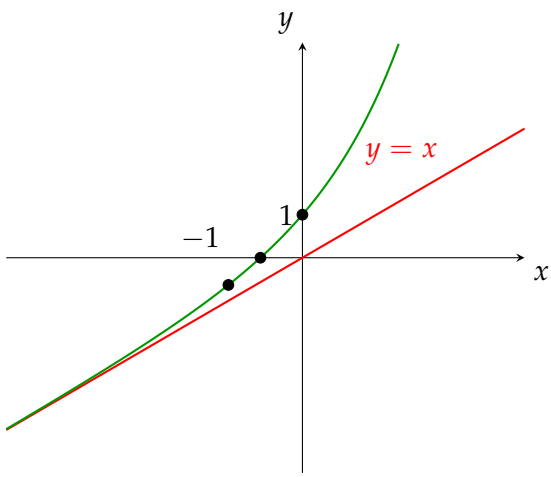
ដោយ $e^x>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)=1+e^x>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ។

  - តម្លៃបរមា ៖ ដោយ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមាធៀបទេ ។
  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
    - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^x)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)
    - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)=+\infty$
    - អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$
      នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d):y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖
    $x = 0 \implies f(0) = 0 + e^0 = 1 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0, 1)$ ៕
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖
    $y = 0 \iff x + e^x = 0 \iff e^x = -x \implies x \approx -0.57 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់ចំណុច $(-0.57, 0)$ ៕
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    - $x = -2 \implies y = -2 + e^{-2} \approx -1.86$
    - $x = -1 \implies y = -1 + e^{-1} \approx -0.63$
    - $x = 1 \implies y = 1 + e \approx 3.72$




◈ $y = \dfrac{1}{1 + 2e^{-5x}}$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^x \neq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ៕
- ទិសដៅអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \iff \frac{1-x}{e^x} = 0 \iff 1-x = 0 \implies x = 1$ (ព្រោះ $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$) ៕

· $f'(x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1 \iff x \in (-\infty, 1)$

· $f'(x) < 0 \iff 1-x < 0 \iff x > 1 \iff x \in (1, +\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, 1)$ និងចុះលើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ៕

- អតិបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = 1$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីបូក $(+)$ ទៅដក $(-)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x = 1$ គឺ ៖

$$f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$

· $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

· អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ៕

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖

$x = 0 \implies f(0) = \frac{0}{e^0} = 0 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ៕

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

$y = 0 \iff \frac{x}{e^x} = 0 \iff x = 0 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ៕

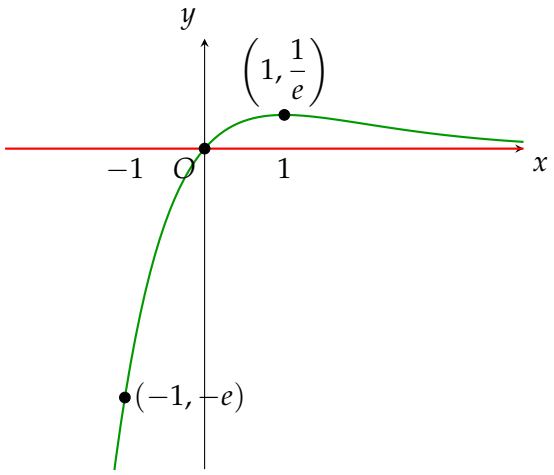
- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

· $x=-1 \implies y=\dfrac{-1}{e^{-1}}=-e\approx -2.72$

· $x=1 \implies y=\dfrac{1}{e}\approx 0.37$ (ជាចំណុចអតិបរមាធៀប)

· $x=2 \implies y=\dfrac{2}{e^2}\approx 0.27$

· $x=3 \implies y=\dfrac{3}{e^3}\approx 0.15$



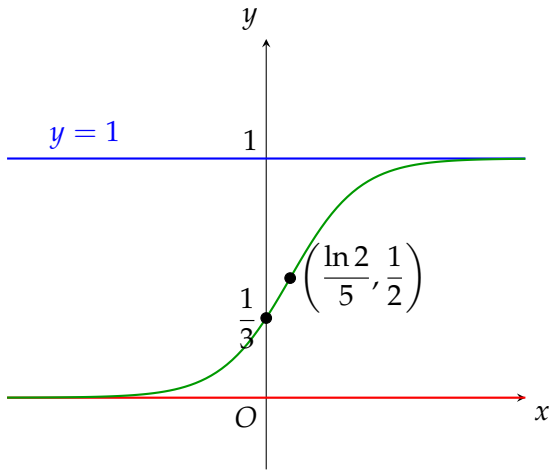

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^{-5x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $1+2e^{-5x}\neq 0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
    ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{1+2e^{-5x}}$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+2e^{-5x}}\right)'=\frac{-(1+2e^{-5x})'}{(1+2e^{-5x})^2}=\frac{10e^{-5x}}{(1+2e^{-5x})^2}$$

    ដោយ $e^{-5x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
    ដូចនេះ អនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ។
  - តម្លៃបរមា ៖ ដោយ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមាធៀបទេ ។
  - គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
    · $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2e^{-5x}}=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-5x}=+\infty$)
    នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $-\infty$ ។
    · $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+2e^{-5x}}=1$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-5x}=0$)
    នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ។
  - តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \nearrow 1$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖
    $x=0 \implies f(0)=\dfrac{1}{1+2e^0}=\dfrac{1}{3} \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ ។
  - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖
    $y=0 \iff \dfrac{1}{1+2e^{-5x}}=0$ (គ្មានឫស) $\implies$ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ ។
  - ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖
    - $x=-0.5 \implies y=\dfrac{1}{1+2e^{2.5}}\approx 0.04$
    - $x=\dfrac{\ln 2}{5}\approx 0.14 \implies y=\dfrac{1}{2}=0.5$ (ជាចំណុចរបត់)
    - $x=0.5 \implies y=\dfrac{1}{1+2e^{-2.5}}\approx 0.86$




ⓕ $y=\dfrac{x}{e^x}$

- ដែនកំណត់ ៖
  - ដោយ $e^x\neq 0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \iff \frac{1-x}{e^x} = 0 \iff 1-x = 0 \implies x = 1$ (ព្រោះ $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$) ។

· $f'(x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1 \iff x \in (-\infty, 1)$

· $f'(x) < 0 \iff 1-x < 0 \iff x > 1 \iff x \in (1, +\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, 1)$ និងចុះលើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ។

- អតិបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = 1$ ដេរីវេ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីបូក $(+)$ ទៅដក $(-)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x = 1$ គឺ ៖

$$f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$

· $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

· អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

- សំណង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $y'Oy$ ៖

$x = 0 \implies f(0) = \frac{0}{e^0} = 0 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $y'Oy$ ត្រង់គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $(C)$ និងអ័ក្ស $x'Ox$ ៖

$y = 0 \iff \frac{x}{e^x} = 0 \iff x = 0 \implies$ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ត្រង់គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ។

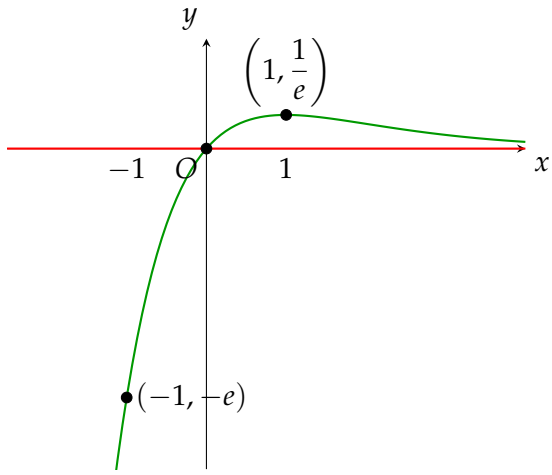
- ចំណុចជំនួយបន្ថែម ៖

· $x=-1 \implies y=\dfrac{-1}{e^{-1}}=-e\approx -2.72$

· $x=1 \implies y=\dfrac{1}{e}\approx 0.37$ (ជាចំណុចអតិបរមាធៀប)

· $x=2 \implies y=\dfrac{2}{e^2}\approx 0.27$

· $x=3 \implies y=\dfrac{3}{e^3}\approx 0.15$




**2** $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=e^{1-x}$ ហើយ $C$ ជាក្រាបរបស់ $f$ ។

**a** បញ្ជាក់ដែនកំណត់នៃ $f$ និងបង្ហាញថា $f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ ៖

○ ដោយកន្សោម $1-x$ កំណត់បានគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

○ ដេរីវេ ៖ $f'(x)=(1-x)'e^{1-x}=-e^{1-x}$

ដោយ $e^{1-x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)=-e^{1-x}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

**b** គណនាលីមីត និងបកស្រាយសមីការអាស៊ីមតូត ៖

○ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$)

○ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$)

○ អាស៊ីមតូត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ខាង $+\infty$ ។

**c** តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

| $x$ | $-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ $0$ |

ⓓ គណនាចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្សកូអរដោនេ ៖

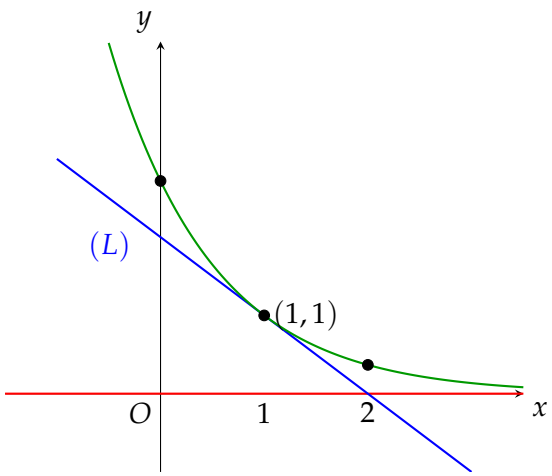
- ប្រសព្វជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$ $(y=0)$ ៖
  $y=0 \iff e^{1-x}=0$ (គ្មានឫស ព្រោះ $e^{1-x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$) $\implies$ ក្រាប $C$ មិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$ ទេ ៕
- ប្រសព្វជាមួយអ័ក្សអរដោនេ $y'Oy$ $(x=0)$ ៖
  $x=0 \implies f(0)=e^{1-0}=e\approx 2.7 \implies$ ក្រាប $C$ កាត់អ័ក្សអរដោនេ $y'Oy$ ត្រង់ចំណុច $(0,e)\approx(0,2.7)$ ៕

ⓔ សរសេរសមីការបន្ទាត់បន្ទាត់ប៉ះ $L$ ត្រង់ $x=1$ ៖

- រូបមន្តសមីការបន្ទាត់បន្ទាត់ប៉ះ ៖ $L: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ត្រង់ $x_0=1$
- គណនា ៖ $f(1)=e^{1-1}=e^0=1$
- គណនា ៖ $f'(1)=-e^{1-1}=-e^0=-1$
- នាំឱ្យសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $L$ គឺ ៖

$$L: y=-1(x-1)+1 \iff y=-x+2$$

ⓕ សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់បន្ទាត់ប៉ះ $L$ ៖




3 គេឲ្យអនុគមន៍ $g$ មួយកំណត់ដោយ $g(x)=e^x+ax+b$

ⓐ គណនា $g'(x), g''(x)$ និងបកស្រាយ $g''(x) > 0$ ៖

- ដេរីវេទី១ ៖ $g'(x) = (e^x + ax + b)' = e^x + a$
- ដេរីវេទី២ ៖ $g''(x) = (e^x + a)' = e^x$
- បកស្រាយ ៖ ដោយ $e^x > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $g''(x) = e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}$ ទាំងអស់ ៕

  ការណ៍នេះបញ្ជាក់ថា ដេរីវេ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ហើយក្រាប $C$ នៃអនុគមន៍ $g$ មានភាពប៉ោងរងើកឡើងលើគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៕

ⓑ គណនា $a$ និង $b$ ៖

- បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $C$ ត្រង់គល់ $O(0,0)$ នាំឱ្យ ៖
  - ក្រាប $C$ ឆ្លងកាត់គល់ $O(0,0) \implies g(0) = 0$ ៖

$$g(0) = e^0 + a(0) + b = 1 + b = 0 \implies b = -1$$

  - បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $O(0,0)$ ស្របនឹងអ័ក្ស $(x'Ox)$ នាំឱ្យមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 0 គឺ $g'(0) = 0$ ៖

$$g'(0) = e^0 + a = 1 + a = 0 \implies a = -1$$

ដូចនេះ យើងបាន $a = -1$ និង $b = -1$ ៕

ⓒ គណនា $g'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ជំនួស $a = -1, b = -1$ យើងបាន $g(x) = e^x - x - 1$
- $g'(x) = e^x - 1$
- $g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \implies x = 0$
- $g'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$
- $g'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$
- តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$
- តារាងអថេរភាពនៃ $g$ ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\searrow$ | | $0$ | | $\nearrow$ |

ⓓ គណនាលីមីត អាស៊ីមតូតទ្រេត សញ្ញា $g(x)$ និងស្រាយបញ្ជាក់ $e^x \geq 1 + x$ ៖

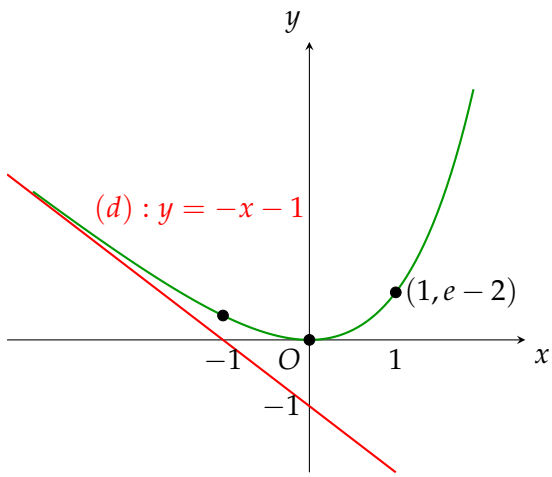
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x - 1) = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖
  ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x) - (-x-1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
  នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d) : y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $-\infty$ ៕
- ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ៖
  តាមតារាងអថេរភាព $g(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ $0$ ត្រង់ $x = 0$ នាំឱ្យ ៖

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$ ៖
  ដោយ $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff e^x - x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ៕

(e) សង់ខ្សែកោង $C$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $(d)$ ៖




(f) ពិភាក្សាចំនួនឫសនៃសមីការ $e^x - 1 = m + x$ តាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $m$ ៖

- សមីការអាស្រ័យ ៖ $e^x - 1 = m + x \iff e^x - x - 1 = m \iff g(x) = m$
- ចំនួនឫសនៃសមីការ ជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង $C : y = g(x)$ និងបន្ទាត់ដេក $y = m$ ៖
  - បើ $m < 0$ ៖ បន្ទាត់ $y = m$ មិនកាត់ខ្សែកោង $C$ ទេ $\implies$ សមីការ**គ្មានឫស** ៕
  - បើ $m = 0$ ៖ បន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្ស $x'Ox$) ប៉ះខ្សែកោង $C$ ត្រង់ $x = 0$ $\implies$ សមីការមាន**ឫសឌុប $x = 0$** ៕
  - បើ $m > 0$ ៖ បន្ទាត់ $y = m$ កាត់ខ្សែកោង $C$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា $\implies$ សមីការមាន**ឫសពីរផ្សេងគ្នា** ៕

(g) គណនាផ្ទៃក្រឡា $S$ ៖

- ដោយ $g(x) \geq 0$ គ្រប់ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យផ្ទៃក្រឡា $S$ គណនាដោយ ៖

$$S = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (e^x - x - 1)\,dx$$

$$S = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(e^1 - \frac{1^2}{2} - 1\right) - (e^0 - 0 - 0)$$

$$S = e - \frac{3}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \approx 0.22 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}$$

## ២.៥ អនុវត្តន៍

គេប្រើអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល $e$ សម្រាប់គណនាកំណើន និងតំហាយចុះ ។

**លំហាត់គំរូ ១** ជំងឺអាសន្នរោគកើតឡើងដោយបាក់តេរីក្នុងពោះវៀនដែលបំបែកខ្លួនតាមរូបមន្ត អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $N = N_0 e^{1.386t}$ , $N$ ជាចំនួនបាក់តេរីក្រោយពេល $t$ ម៉ោង ហើយ $N_0$ ជាចំនួនបាក់តេរីនៅខណៈ $t = 0$ ។ បើបាក់តេរីចាប់ផ្តើមពី ចំនួន 1 តើមានបាក់តេរីប៉ុន្មាននៅរយៈពេល :

(a) 5 ម៉ោង ? (b) 12 ម៉ោង ?

**ដំណោះស្រាយ**

(a) បើ $N_0 = 1$ និង $t = 5$ នោះ $N = N_0 e^{1.386t}$ ឬ $N = e^{1.386(5)} = 1022$

(b) បើ $N_0 = 1$ និង $t = 12$ នោះ $N = N_0 e^{1.386t}$ ឬ $N = e^{1.386(12)} = 16718057$ ។

**សម្គាល់**

**រូបមន្តការប្រាក់សមាស** $\boxed{A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$ ដែល $p$ជាប្រាក់ដើម $r$ជាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ $n$ ជាចំនួនដងនៃការទូទាត់ក្នុងមួយឆ្នាំ $A$ ជាចំនួនប្រាក់សរុបក្នុងរយៈពេល $t$ឆ្នាំ។

**ចំណាំ** បើចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ឬការទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់ នោះរូបមន្តការប្រាក់សមាសកំណត់ដោយ $\boxed{A = p \cdot e^{rt}}$

**លំហាត់គំរូ 1** បើយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 8% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេដាក់ប្រាក់រយៈពេល 2 ឆ្នាំ ហើយចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ?

តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាស $A = pe^{rt}$ ដែល $p = 100$ , $r = 0.08$ , $r = 2$ ។

គេបាន $A = pe^{rt} = 100e^{0.08(2)}$

$= 117.35$ លទ្ធផលនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅនឹងតារាងតម្លៃខាងលើ ។

**លំហាត់គំរូ 2** តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនមួយកំណត់ដោយ $f(x) = 100000e^{-0.1t}$ ។

ⓐ រកតម្លៃដើមដំបូង(ថ្លៃទិញ) របស់ម៉ាស៊ីន

ⓑ រកតម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ ។

## ដំណោះស្រាយ

ⓐ តម្លៃដើមដំបូងរបស់ម៉ាស៊ីន ជាតម្លៃដែលត្រូវនឹង $t = 0$

គេបាន $f(0) = 100000e^{-0.1(0)} = 100000$ ។

ដូច្នេះ តម្លៃដើមរបស់ម៉ាស៊ីនគឺ 100000 ដុល្លារ ។

ⓑ តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ ជាតម្លៃដែលត្រូវនឹង $t = 5$

គេបាន $f(5) = 100000e^{-0.1(5)} = 60650$ ។

ដូច្នេះ តម្លៃនៅសល់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ គឺ 60650 ដុល្លារ ។

## ប្រតិបត្តិ

ⓐ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលមានសមីការ $N = e^{1.386t}$ ចំពោះ $0 \leq t \leq 5$ ។

ⓑ គេយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅចងការរយៈពេល 9 ឆ្នាំ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 12% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេទូទាត់ 1 ឆ្នាំម្តង ? មួយត្រីមាសម្តង ? ជាបន្តបន្ទាប់ ?

ⓒ នៅឆ្នាំ 1970 ទីក្រុងមួយមានចំនួនប្រជាជន 30000 នាក់ និងមាន 40500 នាក់នៅឆ្នាំ 1980 ។ ប្រសិនបើរបមន្ត $p(t) = p_0e^{kt}$ ($p_0$ ជាចំនួនប្រជាជននៅដើមគ្រា ហើយ $k$ ជាអត្រាកំណើនមធ្យម) ត្រូវបានគេយកមកប្រើ ដើម្បីរកចំនួនប្រជាជននៅក្នុងទីក្រុងនេះ តើឆ្នាំ 2008 ទីក្រុងនេះមានប្រជាជនចំនួនប៉ុន្មាននាក់ ?

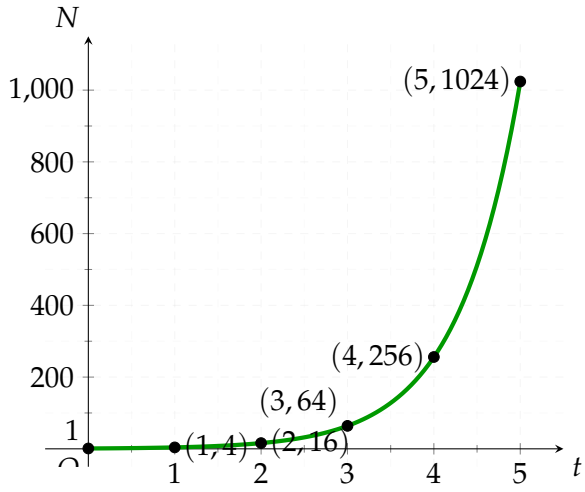
## ចម្លើយ

ⓐ

- ការសិក្សា និងតារាងតម្លៃលឿន ៖
  - អនុគមន៍ $N(t) = e^{1.386t}$ កំណត់លើចន្លោះ $[0,5]$ ។
  - ដោយ $N'(t) = 1.386e^{1.386t} > 0$ គ្រប់ $t \in [0,5]$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $N$ កើនដាច់ខាតលើ $[0,5]$ ។
  - តារាងតម្លៃជំនួយ ៖

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 1 | $e^{1.386} \approx 4$ | $e^{2.772} \approx 16$ | $e^{4.158} \approx 64$ | $e^{5.544} \approx 256$ | $e^{6.93} \approx 1024$ |

- សំណង់ក្រាប ៖




(b) 277.30, 289.82, 294.46 គិតជាដុល្លារ

(c) 93812នាក់

## លំហាត់

1. មនុស្សម្នាក់បានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងម៉ាកតូយ៉ូតាកាម៉ារី ក្នុងតម្លៃ3900 ដុល្លារ ។ រថយន្តនោះចុះថ្លៃ14%ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ រកតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល10ឆ្នាំក្រោយ ។
2. បើគេយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស8% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេដាក់ប្រាក់ រយៈពេល 2 ឆ្នាំ ហើយចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ?
3. តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនមួយកំណត់ដោយ $f(x) = 100000e^{-0.1t}$ ។
   (a) រកថ្លៃដើមដំបូង (ថ្លៃទិញ) របស់ប៉ាស៊ីន
   (b) រកថ្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ ។
4. គេយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅចងការរយៈពេល 1 ឆ្នាំ ដោយទទួលបានអត្រា ការប្រាក់សមាស 12% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេទូទាត់ 1ឆ្នាំម្តង ? មួយត្រីមាសម្តង ? ជាបន្តបន្ទាប់ ?
5. នៅឆ្នាំ 1970 ទីក្រុងមួយមានចំនួនប្រជាជន 30000 នាក់ និងមាន 40500 នាក់ នៅឆ្នាំ 1980 ។ ប្រសិនបើរូបមន្ត $p(t) = p_0e^{kt}$($p_0$ ជាចំនួនប្រជាជននៅ ដើមត្រា ហើយ $k$ ជាអត្រាកំណើនមធ្យម) ត្រូវបានគេយកមកប្រើ ដើម្បី រកចំនួនប្រជាជននៅក្នុងទីក្រុងនេះ តើឆ្នាំ 2008 ទីក្រុងនេះមានប្រជាជន ចំនួនប៉ុន្មាននាក់ ?

## ដំណោះស្រាយ

1. មនុស្សម្នាក់បានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងម៉ាកតូយ៉ូតាកាម៉ារី ក្នុងតម្លៃ3900 ដុល្លារ ។ រថយន្តនោះចុះថ្លៃ14%ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ រកតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល10ឆ្នាំក្រោយ ។
   តាមរូបមន្តរំលស់ថ្លៃ (Depreciation Formula) ៖

$$V(t) = V_0(1 - r)^t$$

ដែល ៖

- $V_0 = 3900$ ដុល្លារ (តម្លៃដើមនៃរថយន្ត)
- $r = 14\% = 0.14$ (អត្រាចុះថ្លៃប្រចាំឆ្នាំ)
- $t = 10$ ឆ្នាំ (រយៈពេល)

ជំនួសតម្លៃចូលរូបមន្ត យើងបាន ៖

$$V(10) = 3900 \times (1 - 0.14)^{10}$$

$$V(10) = 3900 \times (0.86)^{10}$$

ដោយ $(0.86)^{10} \approx 0.2213016$
នាំឱ្យ ៖

$$V(10) \approx 3900 \times 0.2213016 \approx 863.08 \text{ ដុល្លារ}$$

ដូចនេះ តម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំក្រោយគឺប្រហែល **863.08 ដុល្លារ** ។

**2** បើគេយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស8% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេដាក់ប្រាក់ រយៈពេល 2 ឆ្នាំ ហើយចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ?
កាលណាការប្រាក់សមាសត្រូវទូទាត់ច្រើនដងរហូតដល់អនន្ត នោះជា**ការប្រាក់សមាសបន្តបន្ទាប់** (Continuous Compounding) តាមរូបមន្ត ៖

$$A = P \cdot e^{rt}$$

ដែល ៖

- $P = 100$ ដុល្លារ (ប្រាក់ដើមដំបូង)
- $r = 8\% = 0.08$ (អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ)
- $t = 2$ ឆ្នាំ (រយៈពេល)

ជំនួសតម្លៃចូលរូបមន្ត យើងបាន ៖

$$A = 100 \times e^{0.08 \times 2} = 100 \times e^{0.16}$$

ដោយ $e^{0.16} \approx 1.17351$
នាំឱ្យ ៖

$$A \approx 100 \times 1.17351 \approx 117.35 \text{ ដុល្លារ}$$

ដូចនេះ ប្រាក់សរុបដែលទទួលបានក្នុងរយៈពេល 2 ឆ្នាំគឺប្រហែល **117.35 ដុល្លារ** ។

**3** តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនមួយកំណត់ដោយ $f(x) = 100000e^{-0.1t}$ ។

**a** រកថ្លៃដើមដំបូង (ថ្លៃទិញ) របស់ម៉ាស៊ីន ៖

- ថ្លៃដើមដំបូងត្រូវគិតត្រង់ខណៈ $t = 0$ ឆ្នាំ ៖

$$f(0) = 100000e^{-0.1(0)} = 100000e^{0} = 100000 \times 1 = 100000$$

ដូចនេះ ថ្លៃដើមដំបូងរបស់ម៉ាស៊ីនគឺ **100000** ដុល្លារ (ឬឯកតាតម្លៃ) ។

**b** រកថ្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ ៖

- ជំនួស $t = 5$ ចូលក្នុងអនុគមន៍ $f(t)$ យើងបាន ៖

$$f(5) = 100000e^{-0.1(5)} = 100000e^{-0.5}$$

ដោយ $e^{-0.5} \approx 0.60653$

$$f(5) \approx 100000 \times 0.60653 \approx 60653$$

ដូចនេះ ថ្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំគឺប្រហែល **60653** ដុល្លារ ។

**4** គេយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅចងការរយៈពេល 1 ឆ្នាំ ដោយទទួលបានអត្រា ការប្រាក់សមាស 12% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេទូទាត់ 1ឆ្នាំម្តង ? មួយត្រីមាសម្តង ? ជាបន្តបន្ទាប់ ?
រូបមន្តការប្រាក់សមាសទូទៅ ៖ $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
និងរូបមន្តការប្រាក់សមាសបន្តបន្ទាប់ ៖ $A = P \cdot e^{rt}$
ដែល ៖

- $P = 100$ ដុល្លារ (ប្រាក់ដើមដំបូង)
- $r = 12\% = 0.12$ (អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ)
- $t = 1$ ឆ្នាំ (រយៈពេល)

a) បើទូទាត់ 1 ឆ្នាំម្តង ($n = 1$) ៖

$$A = 100 \times \left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1\times1} = 100 \times 1.12 = 112 \text{ ដុល្លារ}$$

b) បើទូទាត់មួយត្រីមាសម្តង ($n = 4$) ៖

$$A = 100 \times \left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4\times1} = 100 \times (1 + 0.03)^4 = 100 \times (1.03)^4$$

ដោយ $(1.03)^4 \approx 1.12551$

$$A \approx 100 \times 1.12551 \approx 112.55 \text{ ដុល្លារ}$$

c) បើទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់ ($n \to \infty$) ៖

$$A = 100 \times e^{0.12 \times 1} = 100 \times e^{0.12}$$

ដោយ $e^{0.12} \approx 1.1275$

$$A \approx 100 \times 1.1275 \approx 112.75 \text{ ដុល្លារ}$$

**5** នៅឆ្នាំ 1970 ទីក្រុងមួយមានចំនួនប្រជាជន 30000 នាក់ និងមាន 40500 នាក់ នៅឆ្នាំ 1980។ ប្រសិនបើរូបមន្ត $p(t) = p_0 e^{kt}$ ($p_0$ ជាចំនួនប្រជាជននៅ ដើមត្រា ហើយ $k$ ជាអត្រាកំណើនមធ្យម) ត្រូវបានគេយកមកប្រើ ដើម្បីរកចំនួនប្រជាជននៅក្នុងទីក្រុងនេះ តើឆ្នាំ 2008 ទីក្រុងនេះមានប្រជាជន ចំនួនប៉ុន្មាននាក់?
រូបមន្តកំណើនប្រជាជន ៖ $p(t) = p_0 e^{kt}$
យកឆ្នាំ 1970 ជាគល់នៃការរាប់ពេលវេលា ($t = 0$) ៖

- នៅឆ្នាំ 1970 ($t = 0$) ៖ $p(0) = p_0 = 30000$ នាក់
- នៅឆ្នាំ 1980 ($t = 1980 - 1970 = 10$ ឆ្នាំ) ៖ $p(10) = 40500$ នាក់

១. ស្វែងរកអត្រាកំណើន $k$ ៖

$$p(10) = 30000 e^{10k} = 40500$$

$$e^{10k} = \frac{40500}{30000} = 1.35$$

$$10k = \ln(1.35) \implies k = \frac{\ln(1.35)}{10} \approx 0.03001$$

២. គណនាចំនួនប្រជាជននៅឆ្នាំ 2008 ($t = 2008 - 1970 = 38$ ឆ្នាំ) ៖

$$p(38) = 30000 e^{38k} = 30000 \times \left(e^{10k}\right)^{\frac{38}{10}}$$

$$p(38) = 30000 \times (1.35)^{3.8}$$

ដោយ $(1.35)^{3.8} \approx 3.12801$
នាំឱ្យ ៖ $p(38) \approx 30000 \times 3.12801 \approx 93840$ នាក់
ដូចនេះ នៅឆ្នាំ 2008 ទីក្រុងនេះមានប្រជាជនប្រហែល **93840** នាក់ ៕

# ក្រុមលំហាត់បន្ថែម

**1** គណនលីមីតខាងក្រោម ៖

ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x+1}$ ⓑ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{4x}$ ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x$

**2** គណនលីមីតអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-2}}{x^3}$ ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ ⓒ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

**3** គណនដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $y=xe^{-x}$ ⓑ $f(x)=x^2e^x$ ⓒ $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

**4** គណនដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ⓑ $f(x)=\frac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}$ ⓒ $g(x)=e^{x+1}\cdot x^{\frac{x-1}{1}}$

**5** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y=x^2e^{-x}$ ⓑ $y=5+2e^{-x}$ ⓒ $g(x)=e^{-x}-x^2$

**6** រកប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើមចំនួន 2000 ដុល្លារ ដែលគេបានធ្វើវិនិយោគក្នុងរយៈពេល 4 ឆ្នាំ ដោយទទួលអត្រាការប្រាក់ 6% តាមរយៈពេលកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

ⓐ គិតជាឆ្នាំ ⓑ គិតជាឆមាស ⓒ គិតជាត្រីមាស ⓓ គិតជាខែ

**7** ឧបមាថា គេយកប្រាក់5000 ដុល្លារ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ សមាស 11% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ បើគេផ្ញើប្រាក់រយៈពេល 10 ឆ្នាំ ។ តើគេទទួលបានប្រាក់សរុប ទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ ?

**8** ឧបមាថា បើគេយកប្រាក់ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការសមាស 7% ។ តើប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបគេទទួលបានប្រាក់សរុបស្មើនឹងបីដងនៃប្រាក់ដើមបើការទូទាត់ច្រើនដង ក្នុងមួយឆ្នាំ ? (ចម្លើយគិតជាឆ្នាំ)

**9** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=(x^2+x+1)e^x$ ហើយមានក្រាប $C_f$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ដែលមានឯកតា $2cm$ ។

ⓐ គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប$C_f$ ។

(b) បង្ហាញថា $f'(x)=(x+1)(x+2)e^x$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(c) កំណត់សមីការ $f$ លើ $\mathbb{R}$ ។

(d) សង់ក្រាប $C_f$ ។

(e) គេឲ្យ $F(x)=(x^2-x+2)e^x$ រួចបង្ហាញ $F$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f$ លើ $\mathbb{R}$ ។ គណនាផ្ទៃ ក្រឡានៃផ្ទៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាប $C_f$, អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=0$ ។

**10** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ និង $g$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-e^x$ និង $g(x)=(1-x)e^x$ ហើយ មានក្រាប $C_f, C_g$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ដែលមានឯកតា $2cm$ ។

(a) គណនាលីមីត $f$ និង $g$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។ រួចសិក្សាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C_f, C_g$ ។

(b) គណនា $f'(x)$ និង $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព $f(x)$ និង $g(x)$ ។ បង្ហាញថា $f(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ។

(c) គេឲ្យ $h(x)=f(x)-g(x)$ រួចបង្ហាញ $h'(x)=1-g(x)$ ។ កំណត់សមីការអថេរភាពនៃ $h$ លើ $\mathbb{R}$ ។

(d) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្រាប $C_f, C_g$ ប្រសព្វគ្នាតម្លៃមួយគត់ដែលមានអាប់ស៊ីសតាងដោយ $\alpha$ ដែល $1<\alpha<2$ ។

(e) សង់ក្រាប $C_f$ និង $C_g$ ក្នុងតម្រុយមួយ ។

**11** គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ដោយ $f(x)=x-2+e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប $C$ ។

(a) គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

(b) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C$ កាលណា $x\to+\infty$ ។

(c) សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ។

(d) គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(e) សង់បន្ទាត់ $D$ និង ក្រាប $C$ ។

(f) គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាប $C$ អាស៊ីមតូត បន្ទាត់ $D$ និង $x=1$ និង $x=2$ ។

**12** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=(x^2+x+1)e^x$ ហើយមានក្រាប $C_f$ ក្នុងបម្រាប់អរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ដែលមានរង្វាស់ $2cm$ ។

(a) គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C_f$ ។

(b) បង្ហាញ $f'(x)=(x+1)(x+2)e^x$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(c) កំណត់សញ្ញា $f$ លើ $\mathbb{R}$ ។

(d) សង់ក្រាប $C_f$ ។

(e) គេឲ្យ $F(x)=(x^2-x+2)e^x$ ។ បង្ហាញ $F$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f$ លើ $\mathbb{R}$ ។ គណនាតម្លៃក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងក្រាប $C_f$, អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង បន្ទាត់ឈរ $x=-1$ និង $x=0$ ។

**13** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ និង $g$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-e^x$ និង $g(x)=(1-x)e^x$ ហើយមានក្រាប

$C_f, C_g$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ដែលមានរង្វាស់ $2cm$ ។

ⓐ គណនាលីមីតនៃ $f$ និង $g$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C_f, C_g$ ។

ⓑ គណនា $f'(x)$ និង $g'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញាអថេរភាពនៃ $f(x)$ និង $g(x)$ ។ បង្ហាញ $f(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ។

ⓒ តេឲ្យ $h(x) = f(x) - g(x)$ ។ បង្ហាញ $h'(x) = 1 - g(x)$ ។ កំណត់សាខាអាស៊ីមតូតនៃ $h$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ⓓ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្រាប $C_f$, និង $C_g$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $\alpha$ តែមួយគត់ $1 < \alpha < 2$ ។

ⓔ សង់ក្រាប $C_f$, និង $C_g$ ក្នុងបម្រាប់មួយ ។

**14** តេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ត្រង់គ្រប់ចំនួនពិត $x$ ដោយ $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ ហើយមានក្រាប $C$ ។

ⓐ គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ⓑ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ កាលណា $x \to +\infty$ ។

ⓒ សិក្សារទីតាំងរវាងក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ។

ⓓ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

ⓔ សង់បន្ទាត់ $D$ និងក្រាប $C$ ។

ⓕ គណនាតម្លៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប $C$, អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 2$ ។

**15** តេឲ្យ $C$ ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x) = x + 3 - e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ⓐ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = x + 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតត្រង់ $-\infty$ ។

ⓑ សិក្សារទីតាំងរវាងក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ។

ⓒ បង្ហាញថា $f$ មានអតិបរមាមួយដែលត្រូវកំណត់អាប់ស៊ីសរបស់វា ។

ⓓ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

ⓔ គណនា $f(-2), f(-1), f(1)$ និង $f(2)$ ។ សង់ក្រាប $C$ ។

**16** $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + 1 + \dfrac{1+x}{e^{2x}}$

ⓐ គណនាដេរីវេ $f'(x)$

ⓑ អនុគមន៍ $g$ កំណត់ដោយ $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$ ។ គណនា $g'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $g$ (មិនបាច់គណនាលីមីត) ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ⓒ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ បង្ហាញថា $y = x + 1$ ជាអស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $C$ តាងអនុគមន៍ $f$ ខាង $+\infty$ ។

ⓓ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

ⓔ គណនា $f(1)$ និង $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ ។ សង់ក្រាប $C$ (តេឱ្យ $e^2 = 7.4, e^{-2} = 0.13$ និង $e^3 = 20$) ។

**17** តេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ ដោយ $y = f(x) = x - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ ហើយមានក្រាប

$C$ ក្នុងប្លង់កូអរដោនេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ។

(b) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L: y=x$ និង $M: y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $-\infty$ និង $+\infty$ រៀងគ្នា ។

(c) គណនា $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\neq 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាព $f$ ។

(d) គណនា $f(1)$ និង $f(-1)$ ហើយសង់បន្ទាត់ $L, M$ និងក្រាប $C$ ក្នុងប្លង់កូអរដោនេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។
(គេឱ្យ $\dfrac{e}{e-1}=1.6$, $\dfrac{1}{1-e}=-0.6$)

(e) គណនាផ្ទៃក្រឡាក្នុងប្លង់កំណត់ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $C$ បន្ទាត់ $M$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=2$ ។

**18** $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$ និងមានក្រាប $C$ ។

(a) គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ។

(b) គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។ សង់តារាងអថេរភាព $f$ ។

(c) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D_1: y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $C$ ខាង $+\infty$ និង $D_2: y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $C$ ខាង $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងអស៊ីមតូតទាំងពីរ និងខ្សែកោង $C$ ។

(d) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T$ នឹងក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស 0 ។

(e) សង់បន្ទាត់ $D_1, D_2, T$ និងក្រាប $C$ ក្នុងតម្រុយមួយ ។

## ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

**1** គណនលីមីតខាងក្រោម ៖

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x+1}=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1}=+\infty$) ॥

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{4x}$ ៖

- តាង $u=4x \implies x=\dfrac{u}{4}$
- កាលណា $x\to-\infty$ នាំឱ្យ $u\to-\infty$

យើងបាន ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{4x}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\dfrac{u}{4}\right)^2e^u=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{1}{16}u^2e^u=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{u\to-\infty} u^2e^u=0$)

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{n}{x}\right)^x$

- តាង $u=\dfrac{x}{n} \implies x=nu$ (ចំពោះ $n\neq 0$)
- កាលណា $x\to+\infty$ នាំឱ្យ $u\to+\infty$

យើងបាន ៖

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{nu}=\lim_{u\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^n$$

ដោយ $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u}=e$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^{x}=e^{n}$$

(ចំណាំ ៖ បើ $n=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}1^{x}=1=e^{0}$ ពិតជានិច្ច) ។

**2** គណនលីមីតអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

**a** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{x-2}}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{x}\cdot e^{-2}}{x^{3}}=\dfrac{3}{e^{2}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{3}}=+\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{3}}=+\infty$) ។

**b** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ ៖

យើងអាចសរសេរ ៖ $\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{(x-1)+4}{x-1}=1+\dfrac{4}{x-1}$

យើងបាន ៖

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\frac{4(x+2)}{x-1}}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}=e$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+8}{x-1}=4$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=e^{4}$$

**c** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$ ៖

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x}-1+1-e^{-x}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}+\frac{1-e^{-x}}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{-x}=1$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=1+1=2$$

**3** គណនដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

**a** $y=xe^{-x}$ ៖

- តាមរូបមន្តដេរីវេផលគុណ $(uv)'=u'v+uv'$ ៖

$$y'=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'$$

$$y'=1\cdot e^{-x}+x(-e^{-x})=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

**b** $f(x)=x^2e^x$ ៖

- តាមរូបមន្តដេរីវេផលគុណ $(uv)'=u'v+uv'$ ៖

$$f'(x)=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'$$

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x=x(x+2)e^x$$

**c** $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ៖

- តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ៖

$$g'(x)=\frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$g'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$g'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

ពង្រាតភាគយក ៖

$$(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2=(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})=4$$

$$\Longrightarrow g'(x)=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

**4** គណនដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

◈ (a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ៖

$$y' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

◈ (b) $f(x) = \dfrac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}$ ៖

- តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- តាង $u = e^x(1+\cos x) \implies u' = e^x(1+\cos x) + e^x(-\sin x) = e^x(1+\cos x - \sin x)$
- តាង $v = 1-\cos x \implies v' = \sin x$

យើងបាន ៖

$$f'(x) = \frac{e^x(1+\cos x - \sin x)(1-\cos x) - e^x(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

ពន្លាតភាគយក ៖

$$e^x\left[(1-\cos^2 x - \sin x + \sin x\cos x) - (\sin x + \sin x\cos x)\right]$$

$$= e^x(1-\cos^2 x - 2\sin x) = e^x(\sin^2 x - 2\sin x) = e^x \sin x(\sin x - 2)$$

$$\implies f'(x) = \frac{e^x \sin x(\sin x - 2)}{(1-\cos x)^2}$$

◈ (c) $g(x) = e^{x+1}\cdot x^{\frac{x-1}{1}} = e^{x+1}\cdot x^{x-1}$ ៖

- ដោយបំប្លែង $x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$ យើងបាន ៖

$$g(x) = e^{x+1}\cdot e^{(x-1)\ln x} = e^{x+1+(x-1)\ln x}$$

- គណនាដេរីវេតាមរូបមន្ត $(e^u)' = u'e^u$ ៖

$$u = x+1+(x-1)\ln x$$

$$u' = 1+0+\left[(x-1)'\ln x + (x-1)(\ln x)'\right] = 1+\ln x + \frac{x-1}{x} = 2+\ln x - \frac{1}{x}$$

ឆាំឱ្យ ៖

$$g'(x) = \left(2+\ln x - \frac{1}{x}\right)e^{x+1}\cdot x^{x-1} = e^{x+1}x^{x-2}(2x + x\ln x - 1)$$

**5** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម

**a** $y = x^2e^{-x}$

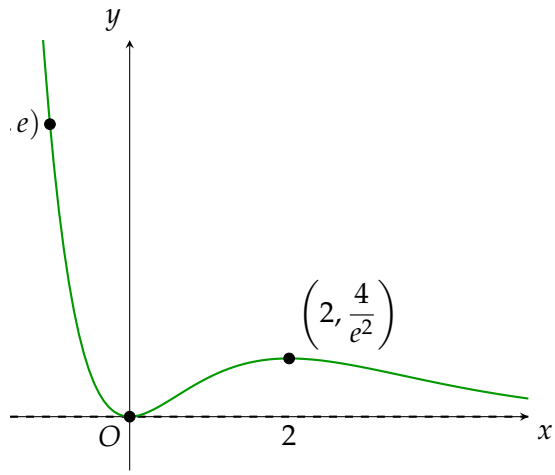
- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖

$$y' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

  $y' = 0 \iff x(2-x)e^{-x} = 0 \iff x = 0$ ឬ $x = 2$ (ព្រោះ $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$)
  - $y' > 0 \iff x \in (0,2)$ នាំឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(0,2)$
  - $y' < 0 \iff x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និង $(2,+\infty)$
- តម្លៃបរមា ៖
  - អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $y(0) = 0^2e^0 = 0$
  - អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $y(2) = 2^2e^{-2} = \dfrac{4}{e^2} \approx 0.54$
- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$
  - អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបខាង $+\infty$
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\dfrac{4}{e^2}$ | ↘ | $0$ |

- សំណង់ក្រាប ៖

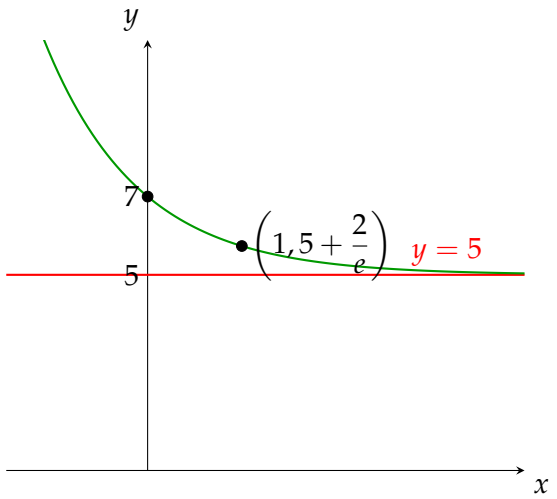



(b) អនុគមន៍ $y = 5 + 2e^{-x}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖ $y' = (5 + 2e^{-x})' = -2e^{-x}$
  - ដោយ $e^{-x} > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $y' = -2e^{-x} < 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
  - ដូចនេះ អនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- តម្លៃបរមា ៖ ដោយ $y' < 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមាធៀបទេ
- គណនាលីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} (5 + 2e^{-x}) = +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$)
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} (5 + 2e^{-x}) = 5$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$)
  - អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 5$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 5$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបខាង $+\infty$
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $5$ |

- សំណង់ក្រាប ៖




ⓒ អនុគមន៍ $g(x)=e^{-x}-x^2$ ៖

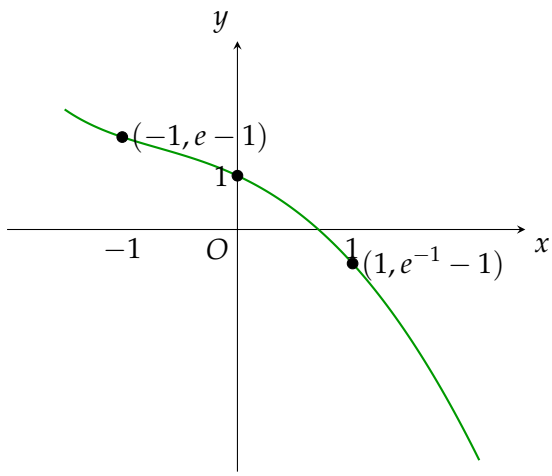
- ដែនកំណត់ ៖ $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ដេរីវេ ៖ $g'(x)=-e^{-x}-2x=-(e^{-x}+2x)$
  - ពិនិត្យសញ្ញានៃ $h(x)=e^{-x}+2x$ ៖ $h'(x)=-e^{-x}+2=0 \iff x=-\ln 2$
    តម្លៃអប្បបរមានៃ $h(x)$ គឺ $h(-\ln 2)=2-2\ln 2\approx 0.614>0$
    នាំឱ្យ $e^{-x}+2x>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R} \implies g'(x)=-(e^{-x}+2x)<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
  - ដូចនេះ អនុគមន៍ $g$ ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$
- តម្លៃបរមា ៖ ដោយ $g'(x)<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមាឡើយទេ
- គណនាលីមីត ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1-x^2e^x)=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}-x^2)=0-(+\infty)=-\infty$
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- ចំណុចប្រសព្វ និងចំណុចជំនួយ ៖
  - ប្រសព្វអ័ក្ស $y'Oy$ $(x=0)$ ៖ $g(0)=e^0-0=1 \implies (0,1)$
  - $x=-1 \implies g(-1)=e-1\approx 1.72$

· $x = 1 \implies g(1) = e^{-1} - 1 \approx -0.63$

○ សំណង់ក្រាប ៖




**6** រកប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើមចំនួន 2000 ដុល្លារ ដែលគេបានធ្វើវិនិយោគក្នុងរយៈពេល 4 ឆ្នាំ ដោយទទួលអត្រាការប្រាក់ 6% តាមរយៈពេលកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

**a** គិតជាឆ្នាំ ($n = 1$) ៖

$$A = 2000 \times \left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^{1\times 4} = 2000 \times (1.06)^4$$

ដោយ $(1.06)^4 \approx 1.26248$

$$A \approx 2000 \times 1.26248 \approx 2524.95 \text{ ដុល្លារ}$$

**b** គិតជាឆមាស ($n = 2$) ៖

$$A = 2000 \times \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{2\times 4} = 2000 \times (1.03)^8$$

ដោយ $(1.03)^8 \approx 1.26677$

$$A \approx 2000 \times 1.26677 \approx 2533.54 \text{ ដុល្លារ}$$

**c** គិតជាត្រីមាស ($n = 4$) ៖

$$A = 2000 \times \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{4\times 4} = 2000 \times (1.015)^{16}$$

ដោយ $(1.015)^{16} \approx 1.26899$

$$A \approx 2000 \times 1.26899 \approx 2537.97 \text{ ដុល្លារ}$$

(d) គិតជាខែ ($n = 12$) ៖

$$A = 2000 \times \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12\times 4} = 2000 \times (1.005)^{48}$$

ដោយ $(1.005)^{48} \approx 1.27049$

$$A \approx 2000 \times 1.27049 \approx 2540.98 \text{ ដុល្លារ}$$

**7** ឧបមាថា គេយកប្រាក់5000 ដុល្លារ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ សមាស 11% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ បើគេផ្ញើប្រាក់រយៈពេល 10 ឆ្នាំ ។ តើគេទទួលបានប្រាក់សរុប ទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ ?
តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាសបន្តបន្ទាប់ $A = P \cdot e^{rt}$
ដែល ៖

- $P = 5000$ ដុល្លារ (ប្រាក់ដើមដំបូង)
- $r = 11\% = 0.11$ (អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ)
- $t = 10$ ឆ្នាំ (រយៈពេល)

ជំនួសតម្លៃចូលរូបមន្ត យើងបាន ៖

$$A = 5000 \times e^{0.11\times 10} = 5000 \times e^{1.1}$$

ដោយ $e^{1.1} \approx 3.00417$
នាំឱ្យ ៖

$$A \approx 5000 \times 3.00417 \approx 15020.83 \text{ ដុល្លារ}$$

ដូចនេះ ប្រាក់សរុបដែលទទួលបានក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំគឺប្រហែល **15020.83 ដុល្លារ** ។

**8** ឧបមាថា បើគេយកប្រាក់ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការសមាស 7% ។ តើប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបគេទទួលបានប្រាក់សរុបស្មើនឹងបីដងនៃប្រាក់ដើមបើការទូទាត់ច្រើនដង ក្នុងមួយឆ្នាំ ? (ចម្លើយគិតជាឆ្នាំ)
តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាសបន្តបន្ទាប់ $A = P \cdot e^{rt}$ ដែល ៖

- $P$ ជាប្រាក់ដើមដំបូង
- $A = 3P$ (ប្រាក់សរុបស្មើនឹងបីដងនៃប្រាក់ដើម)

- $r = 7\% = 0.07$ (អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ)
- $t$ ជាថេរវេលា (គិតជាឆ្នាំ)

ជំនួស $A = 3P$ ចូលក្នុងរូបមន្ត យើងបាន ៖

$$3P = P \cdot e^{0.07t}$$

សម្រួល $P$ ទាំងសងខាង ៖

$$e^{0.07t} = 3$$

បំពាក់ឡូការីតនេពែ ($\ln$) លើអង្គទាំងពីរ ៖

$$\ln(e^{0.07t}) = \ln(3)$$

$$0.07t = \ln(3) \implies t = \frac{\ln(3)}{0.07}$$

ដោយ $\ln(3) \approx 1.09861$
នាំឱ្យ ៖

$$t \approx \frac{1.09861}{0.07} \approx 15.69 \text{ ឆ្នាំ}$$

ដូចនេះ គេត្រូវប្រើរយៈពេលប្រហែល **15.69 ឆ្នាំ** (ឬប្រមាណ **15.7 ឆ្នាំ**) ទើបទទួលបានប្រាក់សរុបស្មើនឹង 3 ដងនៃប្រាក់ដើម ។

**9** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y = f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ ហើយមានក្រាប $C_f$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ដែលមានឯកតា $2cm$ ។

**a** គណនាលីមីត និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C_f$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + x + 1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2e^x + xe^x + e^x) = 0 + 0 + 0 = 0$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x + 1)e^x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$
- អាស៊ីមតូត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C_f$ ខាង $-\infty$ ។

**b** បង្ហាញថា $f'(x) = (x + 1)(x + 2)e^x$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)'e^x + (x^2 + x + 1)(e^x)'$$

$f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x = (x^2+3x+2)e^x = (x+1)(x+2)e^x$ (ពិត)

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

  ដោយ $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចកន្សោម $(x+1)(x+2)$ ៖

  - $f'(x) = 0 \iff (x+1)(x+2) = 0 \implies x = -2$ ឬ $x = -1$
  - $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - $f'(x) < 0 \iff x \in (-2, -1) \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

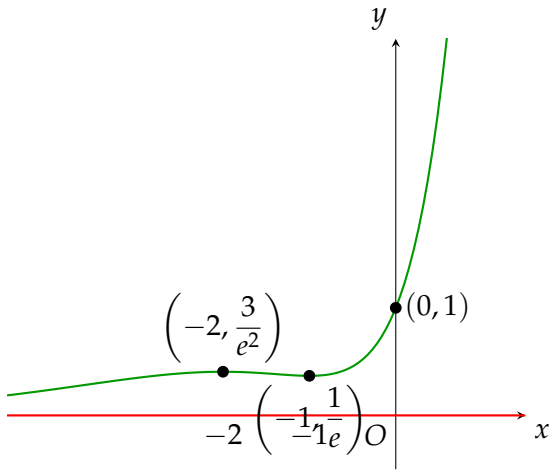
- តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{3}{e^2}$ | ↘ | $\frac{1}{e}$ | ↗ | $+\infty$ |

ⓒ កំណត់តម្លៃបរមាធៀប និងចំណុចពិសេសនៃក្រាប ៖

- តម្លៃអតិបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = -2$ គឺ $f(-2) = ((-2)^2 + (-2) + 1)e^{-2} = \dfrac{3}{e^2} \approx 0.41$
- តម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = -1$ គឺ $f(-1) = ((-1)^2 + (-1) + 1)e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0.37$
- ចំណុចប្រសព្វអ័ក្សកូអរដោនេ ៖
  - ប្រសព្វអ័ក្ស $y'Oy$ $(x = 0)$ ៖ $f(0) = (0+0+1)e^0 = 1 \implies (0,1)$
  - ប្រសព្វអ័ក្ស $x'Ox$ $(f(x) = 0)$ ៖ $x^2 + x + 1 = 0$ គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R} \implies$ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $x'Ox$ ទេ $(f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R})$ ។

ⓓ សង់ក្រាប $C_f$ ៖




ⓔ បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡា $S$ ៖

- បង្ហាញ $F$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f$ ៖

គេមាន $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$

$$F'(x) = (x^2 - x + 2)'e^x + (x^2 - x + 2)(e^x)'$$

$$F'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 2)e^x = (x^2 + x + 1)e^x = f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

- គណនាផ្ទៃក្រឡា $S$ ៖

ដោយ $f(x) > 0 \, \forall x \in [-1, 0]$ នាំឱ្យផ្ទៃក្រឡា $S$ គណនាដោយ ៖

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1)$$

- $F(0) = (0^2 - 0 + 2)e^0 = 2$
- $F(-1) = ((-1)^2 - (-1) + 2)e^{-1} = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$

$$\Longrightarrow S = \left(2 - \frac{4}{e}\right) \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដោយប្រព័ន្ធកូអរដោនេមានឯកតា 2cm នាំឱ្យ 1 ឯកតាផ្ទៃ $= 2\text{cm} \times 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$ ៖

$$S = 4 \times \left(2 - \frac{4}{e}\right) = 8 - \frac{16}{e} \approx 2.11 \text{ cm}^2$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាប្លង់គឺ $**8 - \dfrac{16}{e}$ cm$^2$** (ឬប្រហែល $**2.11$ cm$^2$**) ។

**10** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ និង $g$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x - e^x$ និង $g(x) = (1 - x)e^x$ ហើយ មានក្រាប $C_f, C_g$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ដែលមានឯកតា $2cm$ ។

**a** គណនាលីមីត $f$ និង $g$ ត្រង់ $-\infty, +\infty$ និងសិក្សាអាស៊ីមតូត ៖

- លីមីតនៃ $f(x)$ ៖
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - e^x) = -\infty - 0 = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$)
- លីមីតនៃ $g(x)$ ៖
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - xe^x) = 0 - 0 = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
- អាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C_f$ និង $C_g$ ៖
  - ចំពោះ $C_f$ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C_f$ ខាង $-\infty$ ។
  - ចំពោះ $C_g$ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ី

មតួតដេកនៃក្រាប $C_g$ ខាង $-\infty$ ។

ⓑ គណនា $f'(x), g'(x)$ សង់តារាងអថេរភាព និងបង្ហាញថា $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ៖

- ដេរីវេ ៖
  - $f'(x) = (x - e^x)' = 1 - e^x$
  - $g'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)' = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$
- សិក្សាសញ្ញា និងតារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

  $f'(x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \implies x = 0$

  តម្លៃអតិបរមាធៀប ៖ $f(0) = 0 - e^0 = -1$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

- សិក្សាសញ្ញា និងតារាងអថេរភាពនៃ $g$ ៖

  $g'(x) = 0 \iff -xe^x = 0 \implies x = 0$ (ព្រោះ $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$)

  តម្លៃអតិបរមាធៀប ៖ $g(0) = (1-0)e^0 = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

- បង្ហាញថា $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ៖

  តាមតារាងអថេរភាពនៃ $f$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ $-1$ ត្រង់ $x = 0$ នាំឱ្យ ៖

$$f(x) \leq -1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(ពិត)}$$

ⓒ បង្ហាញថា $h'(x) = 1 - g(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $h$ ៖

- គេមាន $h(x) = f(x) - g(x)$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = (1 - e^x) - (-xe^x) = 1 - e^x + xe^x = 1 - (1-x)e^x = 1 - g(x) \quad \text{(ពិត)}$$

- តារាងអថេរភាពនៃ $h$ ៖

តាមតារាងអថេរភាពនៃ $g$ យើងមាន $g(x) \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ ៖

$$h'(x) = 1 - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដោយ $h'(x) = 0 \iff g(x) = 1 \iff x = 0$ នាំឱ្យ $h$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty - 0 = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x + (x-2)e^x] = +\infty$

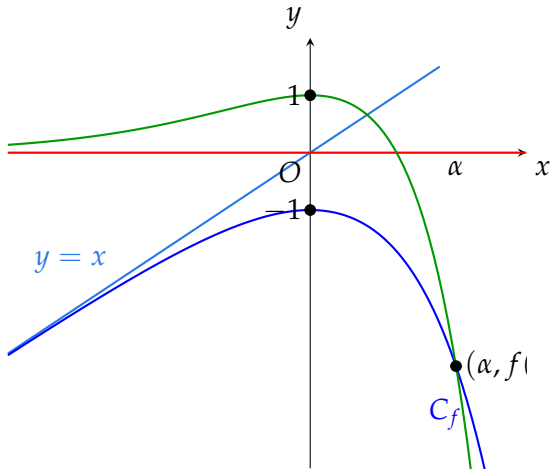
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

ⓓ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្រាប $C_f, C_g$ ប្រសព្វគ្នាតម្លៃមួយគត់ $\alpha \in (1,2)$ ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង $C_f$ និង $C_g$ គឺ $f(x) = g(x) \iff h(x) = 0$
- ដោយ $h(x)$ ជាប់ និងកើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នាំឱ្យសមីការ $h(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha \in \mathbb{R}$
- ពិនិត្យតម្លៃត្រង់ $x = 1$ និង $x = 2$ ៖
  - $h(1) = f(1) - g(1) = (1-e) - 0 = 1 - e \approx -1.72 < 0$
  - $h(2) = f(2) - g(2) = (2-e^2) - (-e^2) = 2 > 0$

  ដោយ $h(1) \cdot h(2) < 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យសមីការ $h(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha$ នៅចន្លោះ $(1,2)$ គឺ $1 < \alpha < 2$ ។

ⓔ សង់ក្រាប $C_f$ និង $C_g$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖




**11** គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ដោយ $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប $C$ ។

ⓐ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2+e^{1-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}\left[(x-2)e^{x-1}+1\right] = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^{x-1} = 0$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2+e^{1-x}) = +\infty - 2 + 0 = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$)

ⓑ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = x-2$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C$ កាលណា $x \to +\infty$ ៖

- គណនា ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D : y = x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$ ។

ⓒ សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ៖

- ពិនិត្យផលដក ៖

$$f(x)-(x-2) = e^{1-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ ក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់អាស៊ីមតូត $D$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ⓓ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x-2+e^{1-x})' = 1-e^{1-x}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

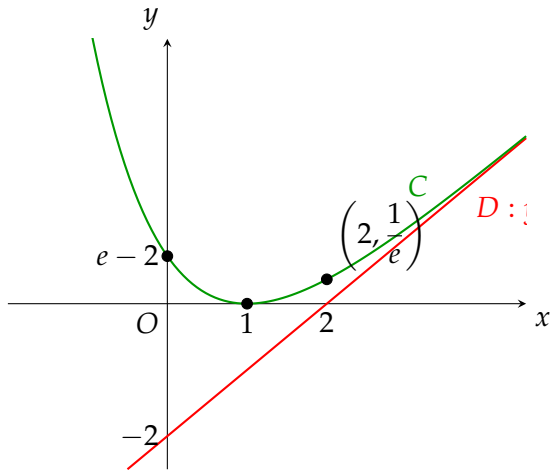
$$f'(x) = 0 \iff 1-e^{1-x} = 0 \iff e^{1-x} = 1 \iff 1-x = 0 \iff x = 1$$

$\cdot$ បើ $x > 1 \implies 1-x < 0 \implies e^{1-x} < 1 \implies f'(x) = 1-e^{1-x} > 0$
$\cdot$ បើ $x < 1 \implies 1-x > 0 \implies e^{1-x} > 1 \implies f'(x) = 1-e^{1-x} < 0$

- តម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1-2+e^0 = 0$
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(e) សង់បន្ទាត់ $D$ និងក្រាប $C$ ៖




(f) គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃប្លង់ ៖

- ដោយក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $D$ លើចន្លោះ $[1,2]$ នាំឱ្យផ្ទៃក្រឡា $S$ គណនាដោយ ៖

$$S = \int_1^2 [f(x) - (x-2)]\,dx = \int_1^2 e^{1-x}\,dx$$

$$S = \left[-e^{1-x}\right]_1^2 = \left(-e^{1-2}\right) - \left(-e^{1-1}\right) = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃប្លង់គឺ $\boxed{1 - \frac{1}{e} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ៕

**12** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y = f(x) = (x^2+x+1)e^x$ ហើយមានក្រាប $C_f$ ក្នុងបម្រាប់អរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ដែលមានរង្វាស់ $2cm$ ។

(a) គណនាលីមីត និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C_f$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x+1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2e^x + xe^x + e^x) = 0+0+0 = 0$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+1)e^x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$
- អាស៊ីមតូតដេក ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'Ox$) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C_f$ ខាង $-\infty$ ៕

**(b)** បង្ហាញ $f'(x) = (x+1)(x+2)e^x$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x^2+x+1)'e^x + (x^2+x+1)(e^x)'$$

$f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x = (x^2+3x+2)e^x = (x+1)(x+2)e^x$ (ពិត)

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  ដោយ $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចកន្សោម $(x+1)(x+2)$ ៖
  - $f'(x) = 0 \iff (x+1)(x+2) = 0 \implies x = -2$ ឬ $x = -1$
  - $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - $f'(x) < 0 \iff x \in (-2, -1) \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{3}{e^2}$ | ↘ | $\frac{1}{e}$ | ↗ | $+\infty$ |

**(c)** កំណត់សញ្ញានៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ៖

- គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ យើងមាន ៖

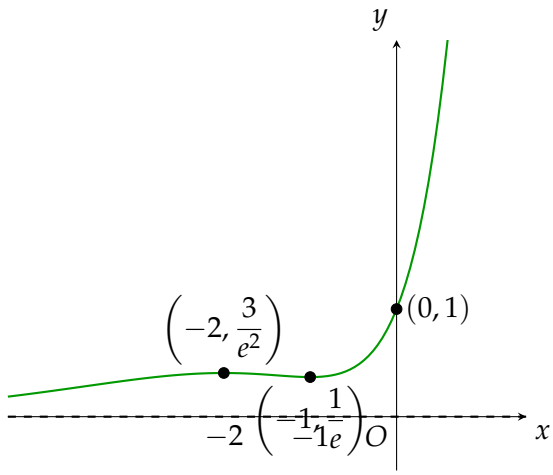
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \text{និង} \quad e^x > 0$$

នាំឱ្យ $f(x) = (x^2+x+1)e^x > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

- (ឬតាមតារាងអថេរភាព តម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ $f(-1) = \frac{1}{e} > 0 \implies f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$)

៕

**(d)** សង់ក្រាប $C_f$ ៖




◈ បង្ហាញ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ៖

○ បង្ហាញ $F$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f$ ៖

គេមាន $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$

$$F'(x) = (x^2 - x + 2)'e^x + (x^2 - x + 2)(e^x)'$$

$$F'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 2)e^x = (x^2 + x + 1)e^x = f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

○ គណនាផ្ទៃក្រឡា $S$ ៖

ដោយ $f(x) > 0\ \forall x \in [-1, 0]$ នាំឱ្យផ្ទៃក្រឡា $S$ គណនាដោយ ៖

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1)$$

· $F(0) = (0^2 - 0 + 2)e^0 = 2$

· $F(-1) = ((-1)^2 - (-1) + 2)e^{-1} = \frac{4}{e}$

$\Longrightarrow S = \left(2 - \frac{4}{e}\right)$ (ឯកតាផ្ទៃ)

ដោយប្រព័ន្ធកូអរដោនេមានឯកតា 2cm នាំឱ្យ 1 ឯកតាផ្ទៃ $= 2\text{cm} \times 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$ ៖

$$S = 4 \times \left(2 - \frac{4}{e}\right) = 8 - \frac{16}{e} \approx 2.11\ \text{cm}^2$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាប្លង់គឺ $\boxed{8 - \frac{16}{e}\ \text{cm}^2}$ ។

**13** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ និង $g$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x - e^x$ និង $g(x) = (1 - x)e^x$ ហើយមានក្រាប

$C_f, C_g$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ដែលមានរង្វាស់ $2cm$ ។

◈ (a) គណនាលីមីតនៃ $f$ និង $g$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- ចំពោះអនុគមន៍ $f(x) = x - e^x$ ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - e^x) = -\infty - 0 = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right) = (+\infty)(1 - +\infty) = -\infty$
  - អាស៊ីមតូត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C_f$ ខាង $-\infty$ ។
- ចំពោះអនុគមន៍ $g(x) = (1 - x)e^x$ ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - xe^x) = 0 - 0 = 0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$)
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1 - x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
  - អាស៊ីមតូត ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C_g$ ខាង $-\infty$ ។

◈ (b) គណនា $f'(x)$ និង $g'(x)$ សិក្សាអថេរភាព និងបង្ហាញ $f(x) < 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៖

- ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)$ ៖
  - $f'(x) = (x - e^x)' = 1 - e^x$
  - $f'(x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
  - បើ $x < 0 \implies e^x < 1 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - បើ $x > 0 \implies e^x > 1 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
  - តម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ $f(0) = 0 - e^0 = -1$
  - **បង្ហាញ $f(x) < 0$ ៖** ដោយ $f(0) = -1$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀប នាំឱ្យ $f(x) \leq -1 < 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in \mathbb{R}$ ។
- ចំពោះអនុគមន៍ $g(x)$ ៖
  - $g'(x) = (1 - x)'e^x + (1 - x)(e^x)' = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$
  - ដោយ $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $g'(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយពី $x$ ៖
    - $g'(x) = 0 \iff x = 0$
    - បើ $x < 0 \implies g'(x) > 0 \implies g$ ជាអនុគមន៍កើន
    - បើ $x > 0 \implies g'(x) < 0 \implies g$ ជាអនុគមន៍ចុះ
  - តម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ $g(0) = (1 - 0)e^0 = 1$

◈ (c) បង្ហាញ $h'(x) = 1 - g(x)$ និងកំណត់សាខាអាស៊ីមតូតនៃ $h$ ៖

- បង្ហាញ $h'(x) = 1 - g(x)$ ៖

$$h(x) = f(x) - g(x) \implies h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$h'(x) = (1-e^x) - (-xe^x) = 1 - e^x + xe^x = 1 - (1-x)e^x = 1 - g(x) \quad \text{(ពិត)}$$

- អថេរភាព និងសាខាអាស៊ីមតូតនៃ $h$ ៖

  · ដោយ $g(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ (តម្លៃអតិបរមានៃ $g$ គឺ $g(0) = 1$) នាំឱ្យ $h'(x) = 1 - g(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
  ដូចនេះ $h$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$
  · **សាខាអាស៊ីមតូត ៖**

$$h(x) = x - e^x - (1-x)e^x = x + (x-2)e^x$$

  * $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x = 0 \implies y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $C_h$ ខាង $-\infty$
  * $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)e^x\right] = +\infty \implies C_h$ មានសាខាប៉ារ៉ាបូលតម្រង់ទិសដៅអ័ក្ស $Oy$ ខាង $+\infty$

ⓓ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $C_f$ និង $C_g$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $1 < \alpha < 2$ តែមួយគត់ ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង $C_f$ និង $C_g$ គឺ ៖

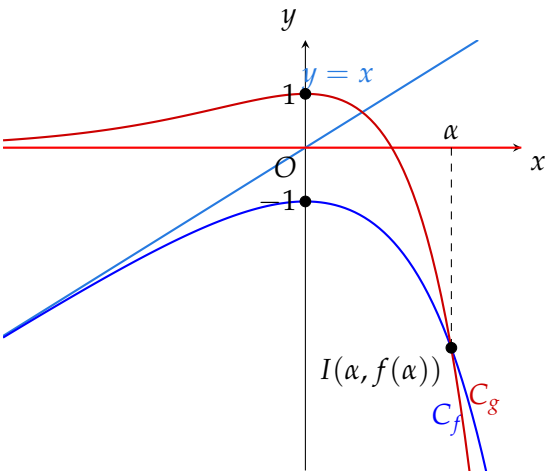
$$f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0 \iff h(x) = 0$$

- អនុគមន៍ $h(x) = x + (x-2)e^x$ ជាប់ និងកើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $[1,2]$
- គណនា ៖

  · $h(1) = 1 + (1-2)e^1 = 1 - e \approx -1.72 < 0$
  · $h(2) = 2 + (2-2)e^2 = 2 > 0$

- ដោយ $h(1)\cdot h(2) < 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $h(x) = 0$ មានឬស $\alpha$ តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $(1,2)$
- ដូចនេះ ក្រាប $C_f$ និង $C_g$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $\alpha$ តែមួយគត់ ដែល $1 < \alpha < 2$ (ដោយ $\alpha \approx 1.69$) ៕

ⓔ សង់ក្រាប $C_f$ និង $C_g$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ ៖




**14** គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ត្រង់គ្រប់ចំនួនពិត $x$ ដោយ $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ ហើយមានក្រាប $C$ ។

**a** គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - 2 + e^{-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left[(x-2)e^{x} + 1\right] = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-2)e^{x} = 0$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - 2 + e^{-x}) = +\infty - 2 + 0 = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

**b** បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D : y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ កាលណា $x \to +\infty$ ៖

- គណនា ៖

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D : y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$ ។

**c** សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ៖

- ពិនិត្យផលដក ៖

$$f(x) - (x-2) = e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ ក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់អាស៊ីមតូត $D$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

**d** គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ៖

- ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x - 2 + e^{-x})' = 1 - e^{-x}$$

○ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=0 \iff 1-e^{-x}=0 \iff e^{-x}=1 \iff -x=0 \iff x=0$$

· បើ $x>0 \implies -x<0 \implies e^{-x}<1 \implies f'(x)=1-e^{-x}>0$

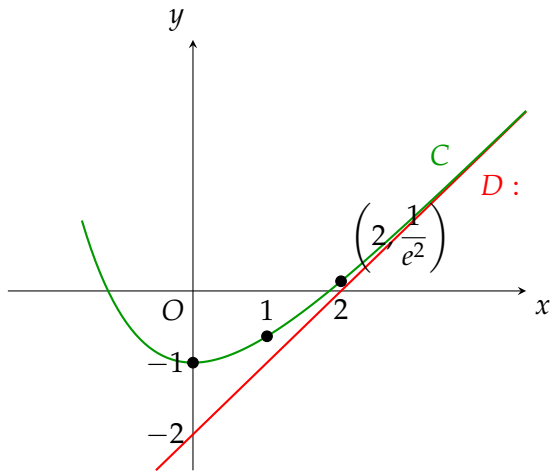
· បើ $x<0 \implies -x>0 \implies e^{-x}>1 \implies f'(x)=1-e^{-x}<0$

○ តម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖ ត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=0-2+e^0=-1$

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ⓔ សង់បន្ទាត់ $D$ និងក្រាប $C$ ៖




ⓕ គណនាតម្លៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងបង្ហ ៖

○ ដោយក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $D$ លើចន្លោះ $[1,2]$ នាំឱ្យផ្ទៃក្រឡា $S$ គណនាដោយ ៖

$$S=\int_1^2 [f(x)-(x-2)]\,dx=\int_1^2 e^{-x}\,dx$$

$$S=\left[-e^{-x}\right]_1^2=-e^{-2}-(-e^{-1})=e^{-1}-e^{-2}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃបង្ហគឺ $\boxed{\frac{e-1}{e^2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ៕

**15** គេឲ្យ $C$ ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=x+3-e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ⓐ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ $D$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+3-e^x) = -\infty+3-0 = -\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{e^x}{x}\right) = (+\infty)(1+0-+\infty) = -\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$)
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)] = \lim_{x\to-\infty}(-e^x) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D: y = x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $-\infty$ ៕

ⓑ សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ៖

- ពិនិត្យផលដក ៖

$$f(x)-(x+3) = -e^x < 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ ក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់អាស៊ីមតូត $D$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៕

ⓒ បង្ហាញថា $f$ មានអតិបរមាមួយ និងកំណត់អាប់ស៊ីសរបស់វា ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x+3-e^x)' = 1-e^x$$

- រកឫស ៖

$$f'(x) = 0 \iff 1-e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

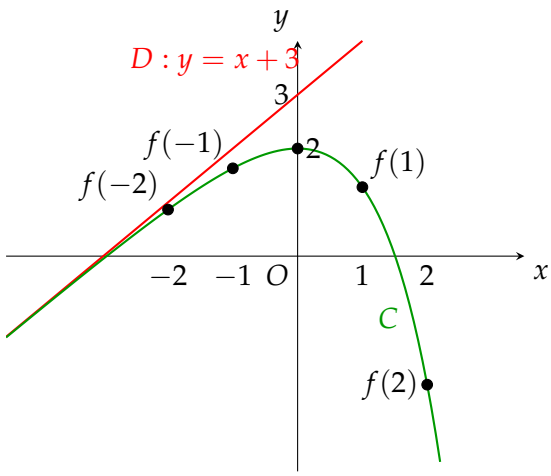
- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  - បើ $x<0 \implies e^x<1 \implies f'(x) = 1-e^x > 0$
  - បើ $x>0 \implies e^x>1 \implies f'(x) = 1-e^x < 0$
- ដោយ $f'(x)$ ដូរសញ្ញាពីវិជ្ជមាន $(+)$ ទៅអវិជ្ជមាន $(-)$ ត្រង់ $x=0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $**x=0**$
- តម្លៃអតិបរមាគឺ $f(0) = 0+3-e^0 = 2$ ៕

ⓓ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

ⓔ គណនា $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$ និងសង់ក្រាប $C$ ៖

- គណនាតម្លៃលេខ ៖
  - $f(-2) = -2+3-e^{-2} = 1-e^{-2} = 1-\dfrac{1}{e^2} \approx 0.86$
  - $f(-1) = -1+3-e^{-1} = 2-e^{-1} = 2-\dfrac{1}{e} \approx 1.63$
  - $f(1) = 1+3-e^{1} = 4-e \approx 1.28$
  - $f(2) = 2+3-e^{2} = 5-e^{2} \approx -2.39$
- សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $D$ ៖




**16** $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x+1+\dfrac{1+x}{e^{2x}}$

ⓐ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x) = (x+1)' + \left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right)'$$

$$f'(x) = 1 + \frac{(1+x)'e^{2x} - (1+x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1\cdot e^{2x} - (1+x)(2e^{2x})}{e^{4x}} = 1 + \frac{e^{2x}[1-2(1+x)]}{e^{4x}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1-2-2x}{e^{2x}} = 1 + \frac{-2x-1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}-2x-1}{e^{2x}}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2x - 1}{e^{2x}}$ ។

(b) គណនា $g'(x)$ គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g$ និងទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

- គណនា $g'(x)$ ៖

$$g(x) = e^{2x} - 2x - 1 \implies g'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$$

- សិក្សាសញ្ញា $g'(x)$ ៖

$$g'(x) = 0 \iff e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

  · បើ $x > 0 \implies e^{2x} > 1 \implies g'(x) > 0$
  · បើ $x < 0 \implies e^{2x} < 1 \implies g'(x) < 0$

- តារាងអថេរភាពនៃ $g$ ៖ (ដោយ $g(0) = e^0 - 2(0) - 1 = 0$)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\searrow$ | | $0$ | $\nearrow$ | |

- ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  តាមតារាងអថេរភាពនៃ $g$ យើងឃើញថា $g(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ (តម្លៃអប្បបរមាគឺ $g(0) = 0$) ។
  ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $e^{2x} > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(ដោយ $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ដូចនេះ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$) ។

(c) គណនាលីមីត និងបង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x+1) + (1+x)e^{-2x}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} (1+x)(1+e^{-2x}) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \dfrac{1+x}{e^{2x}}\right) = +\infty + 1 + 0 = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e^{2x}} + \dfrac{x}{e^{2x}}\right) = 0$)

○ អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{e^{2x}}=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$ ៕

ⓓ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

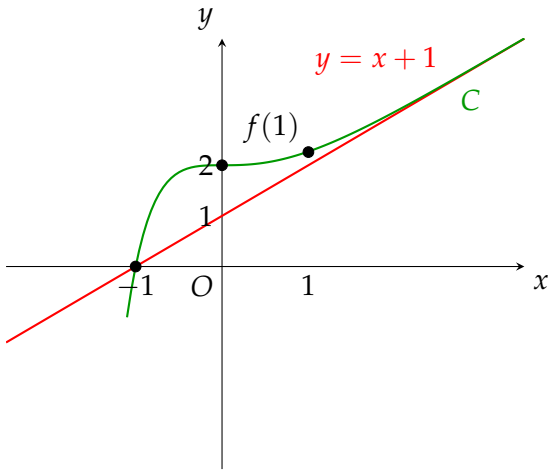
ⓔ គណនា $f(1), f\left(-\frac{3}{2}\right)$ និងសង់ក្រាប $C$ ៖

○ គណនាតម្លៃលេខ ៖

· $f(1)=1+1+\frac{1+1}{e^2}=2+\frac{2}{e^2}=2+2e^{-2}=2+2(0.13)=2.26$

· $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}+1+\frac{1-\frac{3}{2}}{e^{2(-\frac{3}{2})}}=-\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}}{e^{-3}}=-0.5-0.5e^3=-0.5-0.5(20)=-10.5$

○ សង់ក្រាប $C$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖




**17** គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 0$ ដោយ $y=f(x)=x-\frac{e^x}{e^x-1}$ ហើយមានក្រាប $C$ ក្នុងប្លង់កូអរដោនេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ គណនាលីមីត និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ៖

○ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\frac{e^x}{e^x-1}\right)=0-\frac{1}{0^+}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x - \dfrac{e^x}{e^x-1}\right) = 0 - \dfrac{1}{0^-} = +\infty$
- អាស៊ីមតូតឈរ ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ $y'Oy$) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ។
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x - \dfrac{e^x}{e^x-1}\right) = -\infty - 0 = -\infty$
(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - \dfrac{1}{1-e^{-x}}\right) = +\infty - 1 = +\infty$
(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$)

ⓑ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L : y = x$ និង $M : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- ខាង $-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to -\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{e^x}{e^x-1}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $L : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $-\infty$ ។

- ខាង $+\infty$ ៖

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{e^x-1}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $M : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$ ។

ⓒ គណនា $f'(x)$ បង្ហាញថា $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \neq 0$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x)' - \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)' = 1 - \frac{e^x(e^x-1) - e^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)^2 + e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{(e^x-1)^2}$$

- បង្ហាញថា $f'(x) > 0$ ៖
ដោយ $e^x > 0$ និង $(e^x-1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

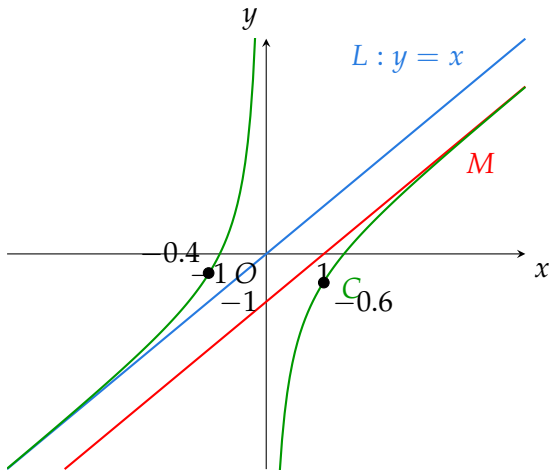
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(-\infty, 0)$ និងលើ $(0, +\infty)$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | $-\infty$ → $+\infty$ | |

ⓓ គណនា $f(1), f(-1)$ និងសង់បន្ទាត់ $L, M$ ព្រមទាំងក្រាប $C$ ៖

- គណនាតម្លៃលេខ ៖
  - $f(1) = 1 - \dfrac{e}{e-1} = 1 - 1.6 = -0.6$
  - $f(-1) = -1 - \dfrac{e^{-1}}{e^{-1}-1} = -1 - \dfrac{1}{1-e} = -1 - (-0.6) = -0.4$
- សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់អាស៊ីមតូត ៖




ⓔ គណនាផ្ទៃក្រឡាក្នុងប្លង់ ៖

- ចំពោះ $x \in [1,2]$ យើងមាន $e^x - 1 > 0$ នាំឱ្យ ៖

$$(x-1) - f(x) = (x-1) - \left(x - \frac{e^x}{e^x-1}\right) = \frac{e^x}{e^x-1} - 1 = \frac{1}{e^x-1} > 0$$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $M : y = x - 1$ ស្ថិតនៅខាងលើក្រាប $C$ លើចន្លោះ $[1,2]$

- ផ្ទៃក្រឡា $S$ គណនាដោយ ៖

$$S = \int_1^2 [(x-1) - f(x)]\, dx = \int_1^2 \frac{1}{e^x-1}\, dx$$

$$S = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx = \left[\ln|1-e^{-x}|\right]_1^2 = \left[\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)\right]_1^2$$

$$S = \ln\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - \ln\left(\frac{e-1}{e}\right) = \ln\left(\frac{e^2-1}{e^2}\cdot\frac{e}{e-1}\right)$$

$$S = \ln\left(\frac{e+1}{e}\right) = \ln(e+1) - \ln e = \ln(e+1) - 1 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃប្លង់គឺ $\boxed{\ln(e+1)-1 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ៕

**18** $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x - 1 + \dfrac{3}{e^x+1}$ និងមានក្រាប $C$ ។

ⓐ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{3}{e^x+1}\right) = +\infty - 1 + 0 = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1} = 0$)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+\dfrac{3}{e^x+1}\right) = -\infty - 1 + \dfrac{3}{0+1} = -\infty + 2 = -\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{e^x+1} = 3$)

ⓑ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x-1)' + \left(\frac{3}{e^x+1}\right)' = 1 - \frac{3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 3e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+2e^x+1-3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  ពិនិត្យភាគយក $e^{2x}-e^x+1$ ៖ តាង $t = e^x > 0$
  យើងបាន $t^2 - t + 1$ មានឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$
  ដោយ $a = 1 > 0$ និង $\Delta < 0$ នាំឱ្យ $t^2 - t + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $t > 0$
  ដូចនេះ $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
  ម្យ៉ាងទៀត $(e^x+1)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x) = \frac{e^{2x}-e^x+1}{(e^x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ៕

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

ⓒ បង្ហាញថា $D_1$ និង $D_2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត និងបញ្ជាក់ទីតាំងធៀប ៖

- អាស៊ីមតូតទ្រេត $D_1 : y = x - 1$ ខាង $+\infty$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x+1} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D_1 : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$ ៕

- អាស៊ីមតូតទ្រេត $D_2 : y = x + 2$ ខាង $-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{e^x+1} - 3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D_2 : y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ខាង $-\infty$ ៕

- បញ្ជាក់ទីតាំងធៀប ៖
  - ធៀបនឹង $D_1$ ៖ $f(x) - (x-1) = \dfrac{3}{e^x+1} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies$ ក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងលើ $D_1$ ជានិច្ច
  - ធៀបនឹង $D_2$ ៖ $f(x) - (x+2) = \dfrac{-3e^x}{e^x+1} < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies$ ក្រាប $C$ ស្ថិតនៅខាងក្រោម $D_2$ ជានិច្ច

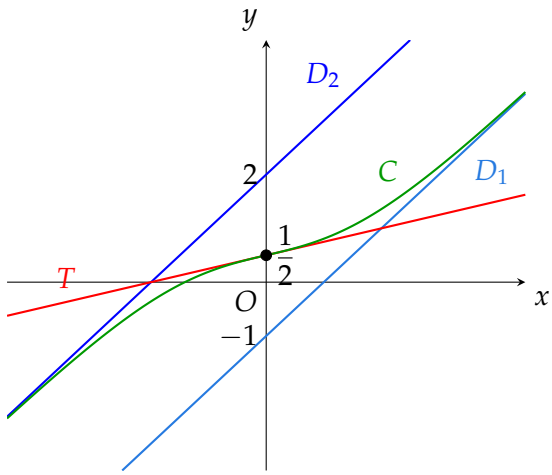
ⓓ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $0$ ៖

- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ និងដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ៖
  - $f(0) = 0 - 1 + \dfrac{3}{e^0+1} = -1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$
  - $f'(0) = \dfrac{e^0 - e^0 + 1}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T$ មានទម្រង់ ៖

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \implies y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $T : y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ ៕

ⓔ សង់បន្ទាត់ $D_1, D_2, T$ និងក្រាប $C$ ៖


y
$D_2$
2
C
$D_1$
1
$\frac{1}{2}$
T
O
x
−1



# អនុគមន៍លោការីត

## ៣.១ លោការីតនេពែ

**ឧទាហរណ៍ 1** : រកតម្លៃ $x$ ដោយដឹងថា $e^x = 1$ ។

តាមដំណោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល គេបាន $e^x = e^0$ ឬ $x = 0$ ។

គេថា $x = 0$ ជាលោការីតនេពែនៃ 1 ហើយគេកំណត់សរសេរ $0 = \ln 1$ ។

**ឧទាហរណ៍ 2** : ដោះស្រាយសមីការ $e^x = e$ ។ គេបាន $e^x = e^1$ ហើយ $x = 1$ ។

គេថា $x = 1$ ជាលោការីតនេពែនៃ $e$ ហើយគេកំណត់សរសេរ $1 = \ln e$ ។

**ដានទូទៅ**

លោការីនេពែនៃចំនួនវិជ្ជមាន $k$ គឺជានិទស្សន្តនៃចំនួនវិជ្ជមាន $x$ នៃ $e^x$ ដែល $e^x = k$ ។

គេកំណត់សរសេរ $x = \ln k \iff e^x = k$

**សម្គាល់** ដោយ $x = \ln k$ និង $e^x = k$ នោះគេបាន $e^{\ln k} = k$ និង $\ln e^k = k$
ចំពោះ $\forall k > 0$ ។

**លំហាត់គំរូ 1** គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ⓐ $e^{\ln 5}$ ⓑ $\ln e^{3x+4}$

**ដំណោះស្រាយ**

ⓐ $e^{\ln 5} = 5$ ⓑ $\ln e^{3x+4} = 3x + 4$

**លំហាត់គំរូ 2** សំយកប្រាក់ 1000 ដុល្លារទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាសប្រចាំឆ្នាំ 5% ទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់ ។

ក. បើសំទុកប្រាក់នៅធនាគាររយៈពេល 10 ឆ្នាំ តើសំទុនបានប្រាក់សរុបចំនួនប៉ុន្មាន?

ខ. តើសំត្រូវទុកប្រាក់នៅធនាគារប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបចំនួនប្រាក់សរុបកើនដល់ 1500 ដុល្លារ ?

**ដំណោះស្រាយ** ក. ចំនួនប្រាក់របស់សំនៅធនាគារ

គេមាន $A = pe^{rt}$ រូបមន្តការប្រាក់សមាស ដែល $p = 1000$ ជាប្រាក់ដើម

$r = \dfrac{5}{100} = 0.05$ ជាអត្រាការប្រាក់សមាស និង $t = 10$ ជាចំនួនឆ្នាំ

គេបាន $A = 1000e^{(0.05)(10)} = 1648.72$

ដូច្នេះ 10 ឆ្នាំក្រោយ សំមានប្រាក់សរុបចំនួន 1648.72 ដុល្លារ ។

ខ. រយៈពេលដើម្បីឱ្យចំនួនប្រាក់កើនដល់ 1500 ដុល្លារ

គេដឹងថា $A = 1500$ សមមូល $1000e^{(0.05)t} = 1500$

សមមូល $e^{0.05t} = 1.5$

សមមូល $e^{0.05t} = e^{\ln 1.5}$

សមមូល $0.05t = \ln 1.5$

សមមូល $t = \dfrac{\ln 1.5}{0.05}$ នាំឱ្យ $t = 8.11$ ។

ដូច្នេះ ដើម្បីបានប្រាក់ 1500 ដុល្លារ សំត្រូវផ្ញើប្រាក់នៅធនាគារចំនួន 8.11 ឆ្នាំ ។

## លំហាត់

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

(a) $e^{\ln 5}$

(b) $e^{\ln 3x+4}$

(c) $e^{\ln 0.5}$

(d) $e^{\ln 4x}$

## ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

(a) $e^{\ln 5} = 5$

(b) $e^{\ln 3x+4}$:

- បើជា $e^{\ln(3x)+4} = e^{\ln(3x)} \cdot e^4 = 3e^4x$ (ចំពោះ $x > 0$)
- បើជា $e^{\ln(3x+4)} = 3x + 4$ (ចំពោះ $x > -\dfrac{4}{3}$)

(c) $e^{\ln 0.5} = 0.5 = \dfrac{1}{2}$

(d) $e^{\ln 4x} = 4x$ (ចំពោះ $x > 0$)

**សម្គាល់**

គេកំណត់សរសេរ $x = \ln k$ និង $e^x = k \Longrightarrow e^{\ln x} = k$ ចំពោះគ្រប់ $k > 0$ ។

## លំហាត់

1 កំណត់តម្លៃ $x$ នៃកន្សោមខាងក្រោម

(a) $e^x = 1$ (c) $e^{2x} = 5$

(b) $e^{2x+1} = e$ (d) $e^x = e^{2x+2}$

2 គណនាតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម

(a) $e^{\ln 3}$ (c) $e^{\ln 0.2}$

(b) $\ln e^{2x+3}$ (d) $\ln e^{-4x}$

## ដំណោះស្រាយ

1 កំណត់តម្លៃ $x$ នៃកន្សោមខាងក្រោម

(a) $e^x = 1 \implies e^x = e^0 \implies x = 0$

(b) $e^{2x+1} = e \implies 2x+1 = 1 \implies 2x = 0 \implies x = 0$

(c) $e^{2x} = 5 \implies 2x = \ln 5 \implies x = \dfrac{\ln 5}{2}$

(d) $e^x = e^{2x+2} \implies x = 2x+2 \implies x = -2$

2 គណនាតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម

រូបមន្តគ្រឹះ៖ $e^{\ln a} = a \quad (a > 0)$ និង $\ln(e^A) = A$

(a) $e^{\ln 3} = 3$

(b) $\ln e^{2x+3} = 2x+3$

(c) $e^{\ln 0.2} = 0.2 = \dfrac{1}{5}$

(d) $\ln e^{-4x} = -4x$

## ៣.២ អនុគមន៍លោការីតនេពែ និងក្រាប

### ៣.២.១ និយមន័យ

គេមាន $e^x = 3 \quad$ គេបាន $x = \ln 3$ ។

គេមានអនុគមន៍ $y = e^x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។ គេបាន $y = e^x$ សមមូល $x = \ln y$ ។ អនុគមន៍នេះមាន $x$ ជាអថេរ ហើយ $y$ ជារូបភាពនៃ $x$ តាម ln គេប្តូរ $x$ ជា $y$ និង $y$ ជា $x$ គេបាន $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $y = e^x$ ។

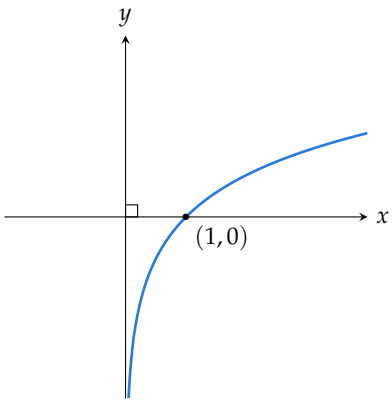
អនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ $y = \ln x$ ហៅថា **អនុគមន៍លោការីតនេពែ** ។

**ជានូទៅ**

- អនុគមន៍ $y = \ln x$ ហៅថាលោការីតនេពែ បានមកពី $\log_e x$ (លោការីតគោល $e$) កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។
- បើ $x > 0$ អនុគមន៍លោការីតនេពែនៃ$x$ កំណត់ដោយ $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគន៍អ៊ិច

សរ្ទេះណង់ស្បែល $y = e^x$ ។

### ៣.២.២ ក្រាបអនុគមន៍លោការីតនេពែ



ក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x) = \ln x$

**ដែនកំណត់ និង សំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ** តាមក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ យើងឃើញថា $f$ មានសំណុំដែនកំណត់លើចន្លោះ $(0, +\infty)$ និង សំណុំរូបភាពលើ $(-\infty, +\infty)$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ កំណត់គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងមានរូបភាពគ្រប់ចំនួនពិត។ មានន័យថា $f$ មានន័យកាល $x > 0$ ។

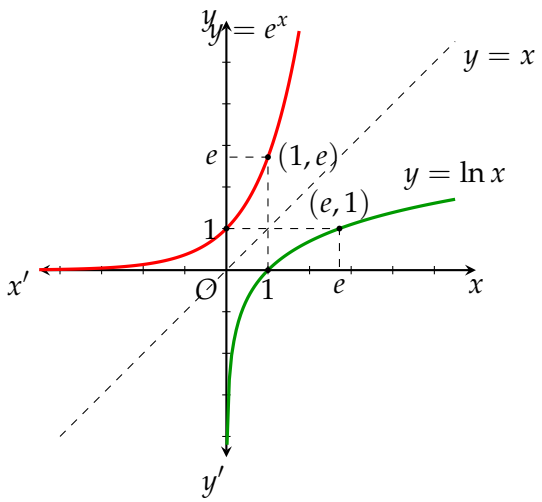
**ឧទាហរណ៍** : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$ និង $y = \ln x$ ។

ដោយអនុគមន៍ $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $y = e^x$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

តារាងតម្លៃលេខនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$ និង $y = \ln x$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y = e^x$ | $\frac{1}{e}$ | $1$ | $e$ |

| $x$ | $\frac{1}{e}$ | $1$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| $y = \ln x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |




## លំហាត់

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = 2 + \ln x$

ⓑ $y = \ln(x - 2)$

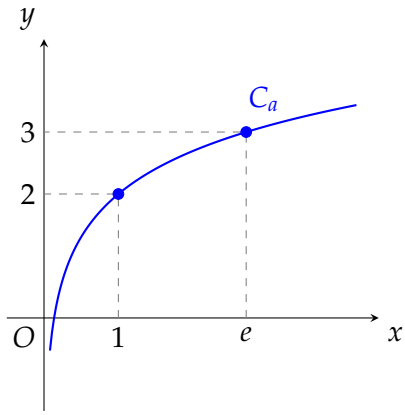
## ដំណោះស្រាយ

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = 2 + \ln x$

តារាងតម្លៃលេខ

| $x$ | $\frac{1}{e}$ | $1$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $2$ | $3$ |

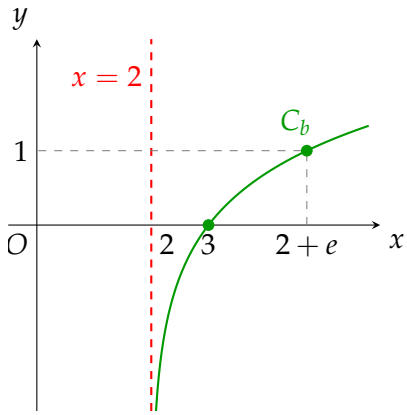



- ដែនកំណត់៖ $D = ]0, +\infty[$
- អាស៊ីមតូតឈរ៖ អ័ក្ស $Oy$ $(x = 0)$

ⓑ $y = \ln(x - 2)$

តារាងតម្លៃលេខ

| $x$ | $2 + \frac{1}{e}$ | $3$ | $2 + e$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |




- ដែនកំណត់៖ $D = ]2, +\infty[$
- អាស៊ីមតូតឈរ៖ បន្ទាត់ $x = 2$

### ៣.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនៃ $\ln$

**សម្គាល់**

ⓐ បើ $y = \ln x$ នោះ $y' = \frac{1}{x}$ $\quad x > 0$

ⓑ បើ $g(x) = \ln U(x)$ នោះ $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

### លំហាត់

**1** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = x^3 + \ln x$
ⓑ $y = x^2 \ln x$
ⓒ $y = x + 2\ln x$
ⓓ $y = x^4 \ln x$
ⓔ $f(x) = 2\ln(x-1)$
ⓕ $f(x) = -\frac{3}{2}\ln(x^2 - 7x + 10)$
ⓖ $f(x) = x + 2 - \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$

**2** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = \ln(x^2 + 2x)$
ⓑ $y = \ln(\cos 2x)$
ⓒ $y = \ln(2x+1)^2$
ⓓ $f(x) = \ln(2x^3)$
ⓔ $f(x) = e^{x^7}$
ⓕ $f(x) = \ln(11x^7)$
ⓖ $f(x) = e^{x^2+x^3}$
ⓗ $f(x) = \log_e(7x^{-2})$
ⓘ $f(x) = e^{-x}$
ⓙ $f(x) = \ln(e^x + x^3)$
ⓚ $f(x) = \ln(e^{x^3})$
ⓛ $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)$

## ដំណោះស្រាយ

**1** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ⓐ $y = x^3 + \ln x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= 3x^2 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{3x^3+1}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{3x^3+1}{x}}$

ⓑ $y = x^2 \ln x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(x^2)\cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x\ln x + x \\ &= x(2\ln x + 1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = x(2\ln x + 1)}$

◈ (c) $y = x + 2\ln x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{x+2}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{x+2}{x}}$

◈ (d) $y = x^4 \ln x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(x^4) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 4x^3 \ln x + x^3 \\ &= x^3(4\ln x + 1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = x^3(4\ln x + 1)}$

◈ (e) $f(x) = 2\ln(x-1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{(x-1)'}{x-1} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{2}{x-1}}$

◈ (f) $f(x) = -\frac{3}{2}\ln(x^2 - 7x + 10)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2-7x+10)'}{x^2-7x+10} \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{2x-7}{x^2-7x+10} \\ &= -\frac{3(2x-7)}{2(x^2-7x+10)} \\ &= \frac{3(7-2x)}{2(x^2-7x+10)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{3(7-2x)}{2(x^2-7x+10)}}$

ⓖ $f(x) = x+2-\ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$

**យើងអាចសរសេរ៖** $f(x) = x+2-\ln(x+2)+\ln(x-3)$
**យើងបាន៖**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x+2)-\frac{d}{dx}(\ln(x+2))+\frac{d}{dx}(\ln(x-3)) \\ &= 1-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3} \\ &= 1+\frac{-(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)} \\ &= 1+\frac{5}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2-x-6+5}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2-x-1}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{x^2-x-1}{(x+2)(x-3)}}$

**2** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

◈ (a) $y = \ln(x^2 + 2x)$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x}$$
$$= \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}}$

◈ (b) $y = \ln(\cos 2x)$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(\cos 2x)}{\cos 2x}$$
$$= \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}$$
$$= -2\tan 2x$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = -2\tan 2x}$

◈ (c) $y = \ln(2x + 1)^2$

$$y = 2\ln(2x + 1)$$
$$y' = 2 \cdot \frac{\frac{d}{dx}(2x + 1)}{2x + 1}$$
$$= 2 \cdot \frac{2}{2x + 1}$$
$$= \frac{4}{2x + 1}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{4}{2x + 1}}$

**d** $f(x) = \ln(2x^3)$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(2x^3)}{2x^3}$$
$$= \frac{6x^2}{2x^3}$$
$$= \frac{3}{x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{3}{x}}$

**e** $f(x) = e^{x^7}$

$$f'(x) = e^{x^7} \cdot \frac{d}{dx}(x^7)$$
$$= e^{x^7} \cdot 7x^6$$
$$= 7x^6 e^{x^7}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = 7x^6 e^{x^7}}$

**f** $f(x) = \ln(11x^7)$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(11x^7)}{11x^7}$$
$$= \frac{77x^6}{11x^7}$$
$$= \frac{7}{x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{7}{x}}$

**g** $f(x) = e^{x^2+x^3}$

$$f'(x) = e^{x^2+x^3} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + x^3)$$
$$= (2x + 3x^2)e^{x^2+x^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = (2x + 3x^2)e^{x^2+x^3}}$

(h) $f(x) = \log_e(7x^{-2})$

$$f(x) = \ln(7x^{-2})$$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(7x^{-2})}{7x^{-2}}$$

$$= \frac{-14x^{-3}}{7x^{-2}}$$

$$= -\frac{2}{x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\frac{2}{x}}$

(i) $f(x) = e^{-x}$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x)$$

$$= -e^{-x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -e^{-x}}$

(j) $f(x) = \ln(e^x + x^3)$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(e^x + x^3)}{e^x + x^3}$$

$$= \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}}$

(k) $f(x) = \ln(e^{x^3})$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 3x^2$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = 3x^2}$

① $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^3-x}\right)$

$$f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^3-x)$$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{\frac{d}{dx}(x^3-x)}{x^3-x}$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{3x^2-1}{x^3-x}$$

$$=\frac{2x(x^3-x)-(3x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^3-x)}$$

$$=\frac{-x^4-4x^2+1}{x^5-x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-x^4-4x^2+1}{x^5-x}}$

## ៣.៤ សមីការ និងវិសមីការលោការីតនេពែ

### ៣.៤.១ សមីការ

**លំហាត់គំរូ 1** ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ : $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$ ។

**ដំណោះស្រាយ** លក្ខខណ្ឌ $x-2>0$ និង $x+2>0$

គេបាន $x>2$ ជាលក្ខខណ្ឌដែលធ្វើឱ្យសមីការមានន័យ

$\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$

$(x-2)(x+2)=45$ ឬ $x^2-49=0$ គេបាន $x=7\,,x=-7$

តាមលក្ខខណ្ឌ $x>2$ ដូច្នេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=7$ ។

**លំហាត់គំរូ 2** ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ : $3e^{2x}+e^x-10=0$ ។

**ដំណោះស្រាយ** សមីការអាចសរសេរ $3(e^x)^2+e^x-10=0$

តាង $t=e^x>0$ សមីការទៅជា $3t^2+t-10=0$

គេបាន $t=\dfrac{5}{3}\,,t=-2$ ដោយ $e^x>0$ គេបាន $e^x=\dfrac{5}{3}\,,x=\ln\dfrac{5}{3}$ ។

**ប្រតិបត្តិ** ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\ln(1-x)+\ln(2x+3)-\ln(x+1)=\ln 3$ ខ. $\dfrac{e^x-2}{e^x-3}=4$ ។

**ចម្លើយ** ក. $x=0$ ខ. $x=\ln\dfrac{10}{3}$ ។

**លំហាត់គំរូ** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ : $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$

លក្ខខណ្ឌនៃប្រព័ន្ធគឺ $x > 0$ និង $y > 0$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរ $\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = \ln e^2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} \frac{y}{x} = e^2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $x = \pm 3$

ដោយ $x > 0$ នោះ $x = 3$ ហើយ $y = 3e^2$ ។

**ប្រតិបត្តិ** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$

**ចម្លើយ** ក. គ្មានចម្លើយ ខ. $(x = 25, y = 40), (x = 40, y = 25)$ ។

### ៣.៤.២ វិសមីការ

**លំហាត់គំរូ** ដោះស្រាយវិសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ : $\ln(x+3) + \ln(x+5) \leq \ln 15$ ។

**ដំណោះស្រាយ** លក្ខខណ្ឌ $x + 3 > 0$ និង $x + 5 > 0$ នាំឱ្យ $x > -3$

វិសមីការអាចសរសេរ $\ln(x+3)(x+5) \leq \ln 15$ ដោយ $e > 1$ វិសមីការមិនប្តូរទិសដៅ $(x+3)(x+5) \leq 15$ ឬ $x^2 + 8x \leq 0$ ដោះស្រាយវិសមីការ $-8 \leq x \leq 0$

តាមលក្ខខណ្ឌ $x > -3$ វិសមីការមានចម្លើយត្រឹមតែ $-3 < x \leq 0$ ។

**ប្រតិបត្តិ** ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln 3x$ ខ. $3e^x - 10e^{-x} + 1 \geq 0$

**ចម្លើយ** ក. $x \in (2e, 4e)$ ខ. $x \geq \ln \frac{5}{3}$ ។

**សម្គាល់**

- បើ $a > 0, a \neq 1$ នោះសមីការ $\log_a x = \log_a y$ គេបាន $x = y$ ។

- បើ $a > 1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$
- បើ $0 < a < 1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ ។

## លំហាត់

**1** ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

(a) $\ln(x-2) + \ln(x-2) = \ln 45$
(b) $3e^{2x} + e^x - 10 = 0$
(c) $\ln(1-x)(2x+3) - \ln(x+1) = \ln 3$
(d) $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 3} = 4$

**2** ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

(a) $\ln(x+3) + \ln(x+5) \leq \ln 15$
(b) $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln 3x$
(c) $3e^x - 10e^{-x} + 1 \geq 0$

**3** ដោះស្រាយប្រពន្ធវិសមីការខាងក្រោម

(a) $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$

## ដំណោះស្រាយ

**1** ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

(a) $\ln(x-2) + \ln(x-2) = \ln 45$

លក្ខខណ្ឌ៖ $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$$2\ln(x-2)=\ln 45$$
$$\ln(x-2)^2=\ln 45$$
$$(x-2)^2=45$$
$$x-2=\sqrt{45} \quad (\text{ព្រោះ } x-2>0)$$
$$x-2=3\sqrt{5}$$
$$x=2+3\sqrt{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=2+3\sqrt{5}}$

◈ b $3e^{2x}+e^x-10=0$

$$3(e^x)^2+e^x-10=0$$

តាង $t=e^x$ $(t>0)$ សមីការទៅជា៖

$$3t^2+t-10=0$$
$$(3t-5)(t+2)=0$$

យើងបាន $t=\frac{5}{3}$ ឬ $t=-2$ (មិនយកព្រោះ $t>0$)

$$e^x=\frac{5}{3}$$
$$x=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

◈ c $\ln(1-x)(2x+3)-\ln(x+1)=\ln 3$

លក្ខខណ្ឌ៖ $\begin{cases} 1-x>0 \\ 2x+3>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$

$$\ln\left(\frac{(1-x)(2x+3)}{x+1}\right)=\ln 3$$

$$\frac{(1-x)(2x+3)}{x+1}=3$$

$$(1-x)(2x+3)=3(x+1)$$

$$-2x^2-x+3=3x+3$$

$$-2x^2-4x=0$$

$$-2x(x+2)=0$$

នាំឲ្យ $x=0$ (យក) ឬ $x=-2$ (មិនយក ព្រោះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ)

ដូចនេះ $\boxed{x=0}$

(d) $\dfrac{e^x-2}{e^x-3}=4$

លក្ខខណ្ឌ៖ $e^x-3\neq 0 \Rightarrow e^x\neq 3 \Rightarrow x\neq \ln 3$

$$e^x-2=4(e^x-3)$$

$$e^x-2=4e^x-12$$

$$3e^x=10$$

$$e^x=\frac{10}{3}$$

$$x=\ln\left(\frac{10}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\ln\left(\frac{10}{3}\right)}$

2 ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

(a) $\ln(x+3)+\ln(x+5)\leq \ln 15$

លក្ខខណ្ឌ៖ $\begin{cases} x+3>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Rightarrow x>-3$

$$\ln((x+3)(x+5)) \leq \ln 15$$

$$(x+3)(x+5) \leq 15$$

$$x^2+8x+15 \leq 15$$

$$x^2+8x \leq 0$$

$$x(x+8) \leq 0$$

ដំណោះស្រាយនៃវិសមីការ $x(x+8) \leq 0$ គឺ $-8 \leq x \leq 0$

ប្រសព្វជាមួយលក្ខខណ្ឌ $x>-3$ យើងបាន៖

ដូចនេះ $\boxed{-3<x\leq 0}$

(b) $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln 3x$

លក្ខខណ្ឌ៖ $\begin{cases} x^2-4e^2>0 \\ 3x>0 \end{cases} \Rightarrow x>2e$

$$\ln(x^2-4e^2)<\ln e+\ln 3x$$

$$\ln(x^2-4e^2)<\ln(3ex)$$

$$x^2-4e^2<3ex$$

$$x^2-3ex-4e^2<0$$

$$(x-4e)(x+e)<0$$

ដំណោះស្រាយនៃវិសមីការគឺ $-e<x<4e$

ប្រសព្វជាមួយលក្ខខណ្ឌ $x>2e$ យើងបាន៖

ដូចនេះ $\boxed{2e<x<4e}$

(c) $3e^x-10e^{-x}+1\geq 0$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $e^x>0$ ៖

$$3(e^x)^2+e^x-10\geq 0$$

តាង $t = e^x$ $(t > 0)$ វិសមីការទៅជា៖

$$3t^2 + t - 10 \geq 0$$

$$(3t - 5)(t + 2) \geq 0$$

ដោយសារ $t > 0$ នាំឲ្យ $t + 2 > 0$ ជានិច្ច ដូចនេះ៖

$$3t - 5 \geq 0$$

$$t \geq \frac{5}{3}$$

ជំនួស $t = e^x$ វិញ៖

$$e^x \geq \frac{5}{3}$$

$$x \geq \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{x \geq \ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

**3** ដោះស្រាយប្រពន្ធវិសមីការខាងក្រោម

**a** $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$

លក្ខខណ្ឌ៖ $x > 0$ និង $y > 0$

$$\ln y - \ln x = 2$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = 2$$

$$\frac{y}{x} = e^2 \Rightarrow y = xe^2$$

$$x(xe^2) = 9e^2$$

$$x^2e^2 = 9e^2$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{ព្រោះ } x > 0)$$

គណនា $y$ ៖ $y = 3e^2$

ដូចនេះ $\boxed{(x,y)=(3,3e^2)}$

**b** $\begin{cases} e^x+2e^y=1 \\ -3e^x+e^y=4 \end{cases}$

គុណសមីការទី១ និង 3 រួចបូកជាមួយសមីការទី២៖

$$3(e^x+2e^y)+(-3e^x+e^y)=3(1)+4$$

$$7e^y=7$$

$$e^y=1\Rightarrow y=0$$

ជំនួស $e^y=1$ ចូលក្នុងសមីការទី១៖

$$e^x+2(1)=1$$

$$e^x=-1$$

ដោយសារ $e^x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះសមីការ $e^x=-1$ គ្មានឫស។

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានដំណោះស្រាយ}}$

**c** $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x+\ln y=\ln 1000 \end{cases}$

លក្ខខណ្ឌ៖ $x>0$ និង $y>0$

$$\ln x+\ln y=\ln 1000$$

$$\ln(xy)=\ln 1000$$

$$xy=1000$$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ៖ $\begin{cases} x+y=65 \\ xy=1000 \end{cases}$ នាំឲ្យ $x$ និង $y$ ជាឫសនៃសមីការ៖

$$t^2-65t+1000=0$$

$$\Delta=(-65)^2-4(1)(1000)=4225-4000=225=15^2$$

$$t_1 = \frac{65+15}{2} = 40$$

$$t_2 = \frac{65-15}{2} = 25$$

ដោយសារ $t_1, t_2 > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ដូចនេះ $\boxed{(x,y) = (40,25) \text{ ឬ } (x,y) = (25,40)}$

## ៣.៥ សិក្សាអនុគមន៍ដែលទាក់ទងនឹងអនុគមន៍លោការីត

**សម្គាល់**

**ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍លោការីតគេត្រូវ**

- (a) ដែនកំណត់ $D$
- (b) ទិសដៅអថេរភាព
  - លីមីត
  - ដេរីវេ
  - សញ្ញាដេរីវេ
  - តារាងអថេរភាព
- (c) សង់ក្រាប
  - ចំណុចប្រសព្វ
  - អាស៊ីមតូត

**លំហាត់គំរូ 1** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = x - \ln x$ ។

**ដំណោះស្រាយ** $C : f(x) = x - \ln x$

- ដែនកំណត់ $D = (0, +\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព
  - លីមីត

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - \ln x) = +\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \ln x) \quad (\text{រាងមិនកំណត់ } +\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0)$$

  - ដេរីវេ : $f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

- សញ្ញានៃដេរីវេ : ដោយ $x>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-1$ ។
  $f'(x)=0$ គេបាន $x-1=0$ នាំឱ្យ $x=1$

- សញ្ញាដេរីវេ

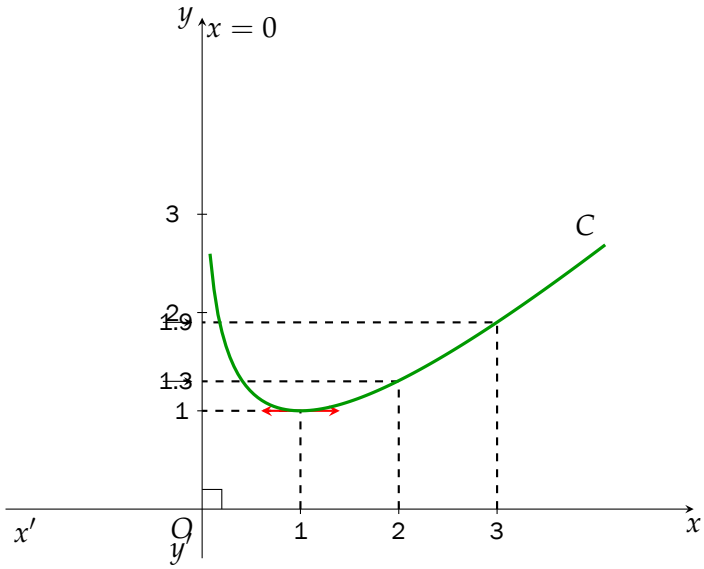
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

  - $f$ ចុះលើ $(0,1)$ ហើយកើនលើ $(1,+\infty)$
  - តម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(1)=1-\ln 1=1-0=1$ ។

- តារាងអថេរភាពនៃ $f$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- សង់ក្រាប
  - បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ។
  - រកចំណុចជំនួយ
    $f(2)=2-\ln 2=2-0.7=1.3 \Rightarrow C$ កាត់តាមចំណុច $(2,1.3)$
    $f(3)=3-\ln 3=3-1.1=1.9 \Rightarrow C$ កាត់តាមចំណុច $(3,1.9)$ ។




**លំហាត់គំរូ 2** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ។

**ដំណោះស្រាយ** $C: f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- ដែនកំណត់ $D=(0,+\infty)$

- ទិសដៅអថេរភាព
  - លីមីត : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$)
    $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
  - ដេរីវេ : $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - (x)' \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
  - សញ្ញានៃដេរីវេ

    ដោយ $x^2 > 0, \forall x \in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-\ln x$ ។

    $1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

    $1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$

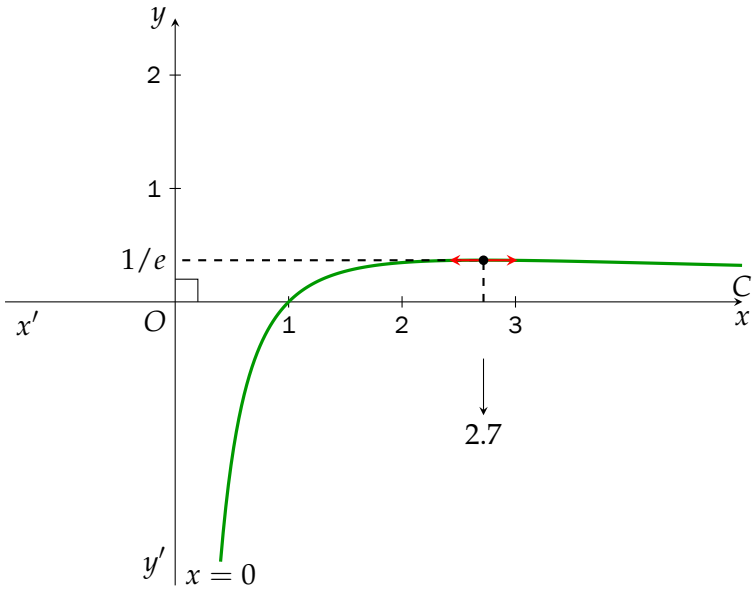
    $1-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

- $f$ កើនលើ $(0,e)$ ហើយចុះលើ $(e,+\infty)$
- តម្លៃអតិបរមាធៀប : $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$
- តារាងអថេរភាពនៃ $f$

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\dfrac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

- សំណង់ក្រាប
  - បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ។
  - បន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ ។
  - ជំនួស : $f(1) = \dfrac{\ln 1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow C$ កាត់តាមចំណុច $(1,0)$ ។




**លំហាត់គំរូ 3** អនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\ln(x^2)$ មានក្រាប $C$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ $d_1$ ប៉ះក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $A(e,2)$ និងបន្ទាត់ $d_2$ ប៉ះក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $B(-e,2)$ ។

ឃ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ សង់ក្រាប $C$ បន្ទាត់ $d_1,d_2$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ មួយ ។

**ដំណោះស្រាយ**

$C: f(x)=\ln(x^2)$ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{0\}$

ក. គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln(x^2)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2)=-\infty$

បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$

- ដេរីវេ $f'(x)=[\ln(x^2)]'=\dfrac{(x^2)'}{x^2}=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$ មានសញ្ញាដូច $x$
- សញ្ញានៃដេរីវេ

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ |

អនុគមន៍ $f$ ចុះលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ ព្រោះ $f'(x)<0$

អនុគមន៍ $f$ កើនលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ព្រោះ $f'(x)>0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

គ. រកសមីការបន្ទាត់ $d_1$ ប៉ះក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $A(e,2)$

$d_1: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ ដោយ $d_1$ ប៉ះ $C$ ត្រង់ $A(e,2)\Rightarrow x_0=e, y_0=2$

និង $f'(x_0)=f'(e)=\dfrac{2}{e}$ នោះ $d_1: y-2=\dfrac{2}{e}(x-e)=\dfrac{2}{e}x-2$

ដូច្នេះ $d_1: y=\dfrac{2}{e}x$ ។

រកសមីការបន្ទាត់ $d_2$ ប៉ះក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $B(-e,2)$

$d_2: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ ដោយ $d_2$ ប៉ះ $C$ ត្រង់ $B(-e,2)\Rightarrow x_0=-e, y_0=2$

និង $f'(x_0)=f'(-e)=\dfrac{2}{-e}=-\dfrac{2}{e}$ នោះ $d_2: y-2=-\dfrac{2}{e}(x-(-e))=-\dfrac{2}{e}x-2$

ដូច្នេះ $d_2: y=-\dfrac{2}{e}x$ ។

ឃ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$C\cap x'x$ ត្រង់ $y=0\Rightarrow \ln(x^2)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

ដូច្នេះ $C$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(-1,0)$ និង $(1,0)$ ។

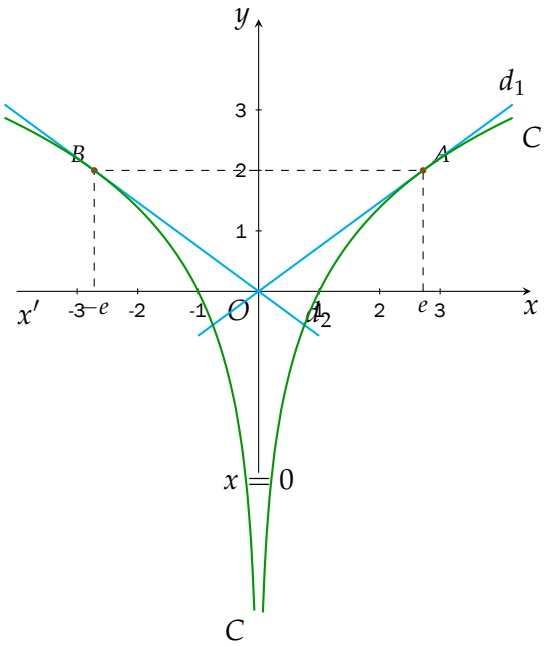
សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $d_1, d_2$

$d_1: y=\dfrac{2}{e}x$

| $x$ | $0$ | $e$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $2$ |

$d_2: y=-\dfrac{2}{e}x$

| $x$ | $0$ | $-e$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $2$ |



**ប្រតិបត្តិ** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = x^2 - 8\ln x$ ខ. $y = x^2 \ln x$ ឃ. $y = g(x) = 2x + \dfrac{x}{\ln x}$ ។

## ៣.៦ អនុវត្ត

**លំហាត់គំរូ 1** តំហាយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ $y = ae^{-kt}$

ធាតុវិទ្យុសកម្មនៃកាបូន $(C-14)$ មានការថយចុះជាបន្តបន្ទាប់ក្នុងអត្រាមួយ ថេរ ។ ពាក់កណ្តាលជីវិតនៃកាបូន $(C-14)$ គឺ 5760 ឆ្នាំ ។ មានន័យថា 5760 ឆ្នាំ កាបូន $(C-14)$ បានពុកផុយម៉ាស ចំនួនពាក់កណ្តាល ។

ក. រកតម្លៃអត្រាថយចុះ $k$ នៃកាបូន $(C-14)$ ?

ខ. អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រខាងបុរាណវិទ្យាបានត្រួតពិនិត្យឆ្អឹងសត្វមួយប្រភេទ ហើយ ប៉ាន់ស្មានថាមានធាតុកាបូន $(C-14)$ នៅសល់ចំនួន 3% ។ តើសត្វនេះបានស្លាប់ប្រហែលប៉ុន្មានឆ្នាំហើយ ?

**ដំណោះស្រាយ** ក. តម្លៃអត្រាថយចុះ $k$ នៃកាបូន $(C-14)$

គេមានរូបមន្តតំហាយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = ae^{-kt}$ ដែល $k$ ជាអត្រាថយចុះ នៃកាបូន $(C-14)$ $a$ ជាចំនួនចាប់ផ្តើម $y$ ជាបរិមាណនៅសល់បន្ទាប់ពី $t = 5760$ ឆ្នាំនៃពាក់កណ្តាលជីវិតរបស់កាបូន $(C-14)$ គឺ $\dfrac{1}{2}a = 0.5a$ ។

គេបាន $y = ae^{-kt}$ សមមូល $0.5a = ae^{-k(5760)}$

សមមូល $0.5 = e^{-5760k}$ សមមូល $\ln 0.5 = \ln e^{-5760k}$

សមមូល $-5760k = \ln 0.5$ សមមូល $k = \dfrac{-\ln 0.5}{5760} = \dfrac{\ln 2}{5760} = 0.00012$

ដូច្នេះ អត្រាថយចុះថេរនៃកាបូន $(C-14)$ គឺ 0.00012 ។

ខ. តាង $a$ ជាបរិមាណដំបូងនៃកាបូន $(C-14)$ ក្នុងខ្លួនផ្ទស៊ីលសត្វ

គេបាន $y = ae^{-0.00012t}$ $\Leftrightarrow 0.03a = ae^{-0.00012t}$

$\Leftrightarrow 0.03 = e^{-0.00012t}$ $\Leftrightarrow \ln 0.03 = \ln e^{-0.00012t}$

$\Leftrightarrow \ln 0.03 = -0.00012t$ $\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 0.03}{-0.00012}$

$\Rightarrow t \approx 29221$ ។

ដូច្នេះ ផ្ទស៊ីលសត្វនេះស្លាប់តាំងពី 29221 ឆ្នាំមុន ។

**លំហាត់គំរូ 2** កំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានទម្រង់ $y = ae^{kt}$ ។ តាមការប៉ាន់ស្មានបានឱ្យដឹងថា នៅឆ្នាំ 2000 ប្រទេសចិនមានប្រជាជនប្រហែល 1.26 ពាន់លាននាក់ ដែលជាចំនួនច្រើនបំផុតនៅលើពិភពលោក ហើយប្រទេសឥណ្ឌាមានប្រជាជន 1.01 ពាន់លាននាក់ ដែលជាចំនួនលំដាប់ទី 2 បន្ទាប់ពី ប្រទេសចិន ។ ចំនួនប្រជាជននៃប្រទេសចិនកើនឡើងតាមសមីការ $C(t) = 1.26e^{0.009t}$ ហើយប្រជាជនឥណ្ឌាកើនឡើងតាមសមីការ $I(t) = 1.01e^{0.015t}$ ។ តាមសមីការនេះ តើប៉ុន្មានឆ្នាំទៀត ទើបប្រទេសឥណ្ឌា មានចំនួនប្រជាជនច្រើនជាងប្រទេសចិន ?

**ដំណោះស្រាយ** គេមានវិសមីការ $I(t) > C(t)$

$$\begin{aligned}
1.01e^{0.015t} &> 1.26e^{0.009t} \\
\ln 1.01e^{0.015t} &> \ln 1.26e^{0.009t} \\
\ln 1.01 + \ln e^{0.015t} &> \ln 1.26 + e^{0.009t} \\
\ln e^{0.015t} - e^{0.015t} &> \ln 1.26 - \ln 1.01 \\
0.006t &> \ln 1.26 - \ln 1.01 \\
t &> \frac{\ln 1.26 - \ln 1.01}{0.0006} \quad \text{នាំឱ្យ } t > 36.86 \text{ ។}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ប្រហែល 37 ឆ្នាំទៀត ប្រទេសឥណ្ឌានឹងមានប្រជាជនច្រើនជាងប្រទេសចិន ។

## លំហាត់

1. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = x - \ln x$ ។
2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ។
3. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = e^x \ln x$ ។
4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = f(x) = x^2 - 8\ln x$ ។
5. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = y = x^2 \ln x$ ។
6. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = 2x + \dfrac{x}{\ln x}$ ។
7. អនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ដោយ $f(x) = \ln(x^2)$ មានក្រាប $C$ ។
   - (a) គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C$ ។
   - (b) សិក្សាអថេរភាពអនុគមន៍ $f$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។
   - (c) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_1$ ក្រាប $C$ ត្រង់ចំនុច $A(e,2)$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ពី ក្រាប $C$ ត្រង់ចំនុច $B(-e,2)$
   - (d) បង្ហាញថាចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ សង់ក្រាប $C$ បន្ទាត់ $d_1, d_2$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ មួយ ។

## ដំណោះស្រាយ

**1** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = x - \ln x$

**a** ដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = ]0, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$
  (នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 0$ ឬអ័ក្សអរដោនេ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$)

**b** គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x)' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

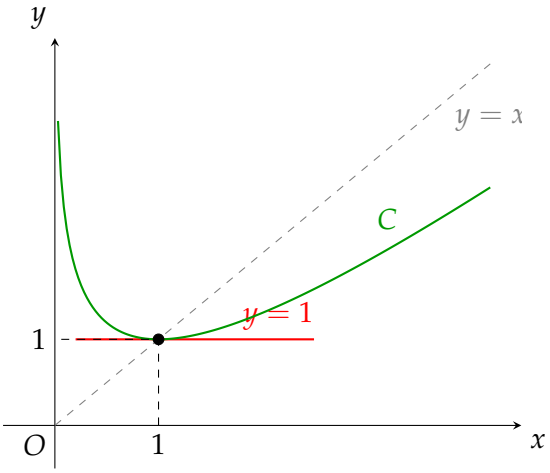
- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  ដោយ $x > 0$ គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $x - 1$ ៖
  - $f'(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$
  - ចំពោះ $x \in ]0, 1[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត
  - ចំពោះ $x \in ]1, +\infty[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត
- តម្លៃបរមាបរិមា ៖
  អនុគមន៍ $f$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**c** អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖

- បន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ។
- ត្រង់ចំណុចអប្បបរមា $A(1,1)$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក (ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y = 1$ ។

**d** សង់ក្រាប $C$ ៖




**2** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ។

**a** ដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = ]0, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$
  (នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 0$ ឬអ័ក្សអរដោនេ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
  (នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ ឬអ័ក្សអាប់ស៊ីស ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$)

**b** គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

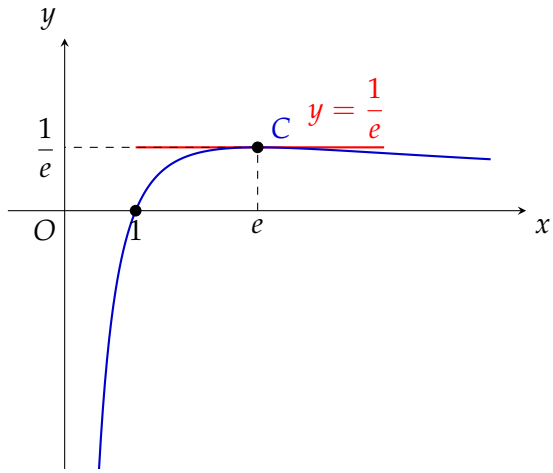
- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  ដោយ $x^2 > 0$ គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $1 - \ln x$ ៖
  - $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$
  - ចំពោះ $x \in ]0, e[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត
  - ចំពោះ $x \in ]e, +\infty[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត
- តម្លៃបរមាបរិមា ៖
  អនុគមន៍ $f$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = e$ គឺ $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

ⓒ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖

- បន្ទាត់ $x=0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ។
- បន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C$ ខាង $+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$
- ត្រង់ចំណុចអតិបរមា $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក (ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y = \frac{1}{e}$ ។

ⓓ សង់ក្រាប $C$ ៖




**3** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = e^x \ln x$

ⓐ ដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = ]0, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x \ln x) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$
  (នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=0$ ឬអ័ក្សអរដោនេ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (e^x \ln x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

ⓑ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  តាង $g(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ លើ $]0,+\infty[$ ៖

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

  - $g'(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$
  - ចំពោះ $x \in ]0,1[$ ៖ $g'(x) < 0 \implies g$ ជាអនុគមន៍ចុះ
  - ចំពោះ $x \in ]1,+\infty[$ ៖ $g'(x) > 0 \implies g$ ជាអនុគមន៍កើន
  - តម្លៃអប្បបរមានៃ $g(x)$ គឺ $g(1) = \ln 1 + \dfrac{1}{1} = 1 > 0$

  ដូចនេះ $g(x) \geq 1 > 0$ គ្រប់ $x \in ]0,+\infty[$ នាំឱ្យ $f'(x) = e^x g(x) > 0$ គ្រប់ $x \in ]0,+\infty[$ ៖

  - $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]0,+\infty[$

- ចំណុចប្រសព្វ ៖
  ក្រាប $C$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $f(x) = 0 \iff e^x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$ គឺចំណុច $(1,0)$ ។

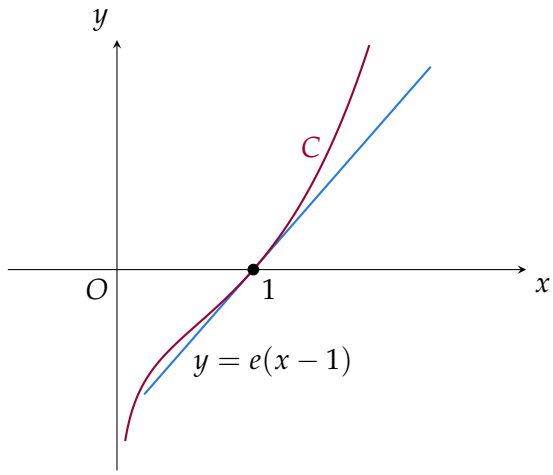
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

◈ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖

- បន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ ។
- ត្រង់ចំណុច $(1,0)$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ះមានសមីការ $y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1)$ ។

◈ សង់ក្រាប $C$ ៖




**4** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = f(x) = x^2 - 8\ln x$

**a** ដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = ]0, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - 8\ln x) = 0 - 8(-\infty) = +\infty$
  (នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 0$ ឬអ័ក្សអរដោនេ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{8\ln x}{x^2}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$)

**b** គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = (x^2)' - 8(\ln x)' = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x}$$

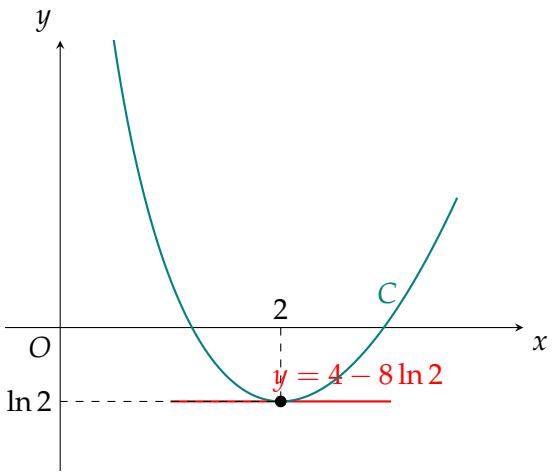
- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  ដោយ $x > 0$ គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $x^2 - 4$ ៖
  - $f'(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = 2$ (ព្រោះ $x > 0$)
  - ចំពោះ $x \in ]0, 2[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត
  - ចំពោះ $x \in ]2, +\infty[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត
- តម្លៃបរមាបរិមា ៖
  អនុគមន៍ $f$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = 2^2 - 8\ln 2 = 4 - 8\ln 2 \approx -1.55$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $4-8\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

ⓒ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖

- បន្ទាត់ $x=0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ។
- ត្រង់ចំណុចអប្បបរមា $A(2,4-8\ln 2)$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក (ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y=4-8\ln 2$ ។

ⓓ សង់ក្រាប $C$ ៖




**5** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=y=x^2\ln x$

ⓐ ដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=]0,+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x)=0$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x=0$ នាំឱ្យក្រាប $C$ ទិតជិតចំណុចគល់ $O(0,0)$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\ln x)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

ⓑ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

ដោយ $x>0$ គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃ $2\ln x+1$ ៖

· $f'(x)=0 \iff 2\ln x+1=0 \iff \ln x=-\dfrac{1}{2} \iff x=e^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

· ចំពោះ $x\in\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$ ៖ $f'(x)<0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត

· ចំពោះ $x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$ ៖ $f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

○ តម្លៃបរមាបរិមា ៖

អនុគមន៍ $f$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ គឺ $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$ ។

○ ចំណុចប្រសព្វ ៖

ក្រាប $C$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $f(x)=0 \iff x^2\ln x=0 \iff x=1$ គឺចំណុច $(1,0)$ ។

○ តារាងអថេរភាព ៖

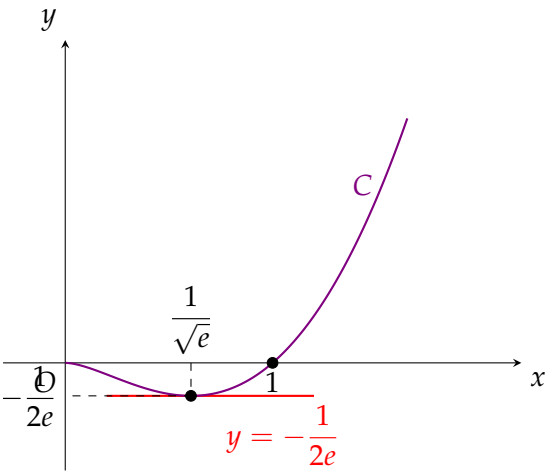
| $x$ | $0$ | | $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ‖ $0$ | ↘ | $-\dfrac{1}{2e}$ | ↗ | $+\infty$ |

ⓒ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖

○ ក្រាប $C$ គ្មានអាស៊ីមតូតទេ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ។

○ ត្រង់ចំណុចអប្បបរមា $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},-\dfrac{1}{2e}\right)$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ះដេក (ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y=-\dfrac{1}{2e}$ ។

ⓓ សង់ក្រាប $C$ ៖




**6** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=2x+\dfrac{x}{\ln x}$

**a** ដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x+\dfrac{x}{\ln x}\right)=0+0=0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x+\dfrac{x}{\ln x}\right)=2+(-\infty)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x+\dfrac{x}{\ln x}\right)=2+(+\infty)=+\infty$

  (នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\dfrac{x}{\ln x}\right)=+\infty+(+\infty)=+\infty$

**b** គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញារបស់វា និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=2+\frac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{2(\ln x)^2+\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

  ដោយ $(\ln x)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាមសញ្ញានៃភាគយក $2(\ln x)^2+\ln x-1$ ៖

  · $f'(x)=0 \iff \ln x=-1$ ឬ $\ln x=\dfrac{1}{2} \iff x=\dfrac{1}{e}$ ឬ $x=\sqrt{e}$

  · ចំពោះ $x\in\left]0,\dfrac{1}{e}\right[\cup]\sqrt{e},+\infty[$ ៖ $f'(x)>0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

  · ចំពោះ $x\in\left]\dfrac{1}{e},1\right[\cup]1,\sqrt{e}[$ ៖ $f'(x)<0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត

- តម្លៃបរមាបរិមា ៖

  · អនុគមន៍ $f$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\dfrac{1}{e}$ គឺ $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}$ ។

  · អនុគមន៍ $f$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\sqrt{e}$ គឺ $f(\sqrt{e})=4\sqrt{e}$ ។

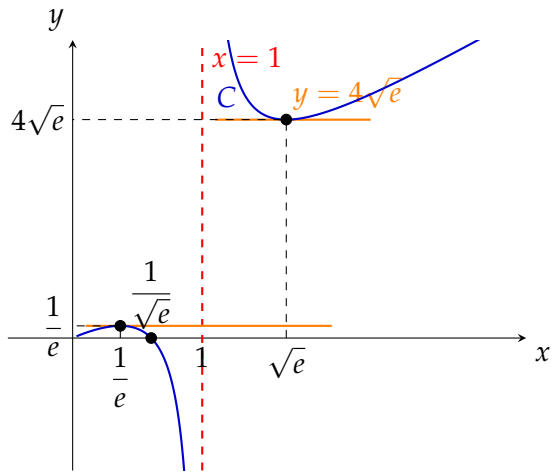
- ចំណុចប្រសព្វ ៖
  ក្រាប $C$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $f(x)=0 \iff \ln x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ គឺចំណុច $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | $4\sqrt{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | | $-\infty$ | | | $+\infty$ | | | |

ⓒ អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ៈ ៖

- បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ ។
- ត្រង់ចំណុចអតិបរមា $A\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ៈដេក (ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y=\frac{1}{e}$ ។
- ត្រង់ចំណុចអប្បបរមា $B(\sqrt{e},4\sqrt{e})$ ក្រាប $C$ មានបន្ទាត់ប៉ៈដេក (ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y=4\sqrt{e}$ ។

ⓓ សង់ក្រាប $C$ ៖




**7** អនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ដោយ $f(x)=\ln(x^2)$ មានក្រាប $C$ ។

ⓐ គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ និងរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$
- អាស៊ីមតូត ៖ បន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ៕

(b) សិក្សាអថេរភាពអនុគមន៍ $f$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(x^2)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖
  - ចំពោះ $x \in ]-\infty, 0[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត
  - ចំពោះ $x \in ]0, +\infty[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត
- តារាងអថេរភាព ៖

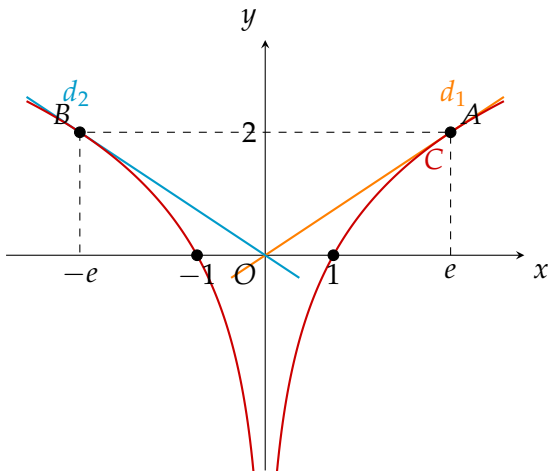
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $d$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

(c) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_1$ និង $d_2$ ៖

- បន្ទាត់ប៉ះ $d_1$ ត្រង់ $A(e, 2)$ ៖
  មេគុណប្រាប់ទិស $f'(e) = \frac{2}{e} \implies d_1 : y = \frac{2}{e}(x - e) + 2 = \frac{2}{e}x$ ៕
- បន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ត្រង់ $B(-e, 2)$ ៖
  មេគុណប្រាប់ទិស $f'(-e) = -\frac{2}{e} \implies d_2 : y = -\frac{2}{e}(x + e) + 2 = -\frac{2}{e}x$ ៕

(d) ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងការសង់ក្រាប ៖

- ចំណុចប្រសព្វ ៖ $f(x) = 0 \iff \ln(x^2) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$ គឺចំណុច $(-1, 0)$ និង $(1, 0)$ ៕
- សង់ក្រាប $C, d_1$ និង $d_2$ ៖




## ការប្រែងលំហាត់បន្ថែម

**1** គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ⓐ $e^{\ln 7}$ ⓑ $\ln e^{x-2}$ ⓒ $\ln e^{7x}$

**2** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \ln x$ ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln x)}{x^2}$ ⓒ $\lim\limits_{x\to 0}(x \ln x)$

**3** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ ⓑ $y = x^2\sqrt{\ln x}$ ⓒ $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

**4** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $y = \ln \dfrac{e^x}{e^x+1}$ ⓑ $y = x \ln x - x$ ⓒ $y = x^2 \ln \dfrac{1}{x^2}$

**5** សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ⓐ $y = 3 - \ln x$ ⓑ $y = \ln(x-3)$ ⓒ $y = \ln(2+e^x)$

**6** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $y = \dfrac{x}{\ln x}$ ⓑ $y = \ln x + e^x$ ⓒ $y = \ln^2 x + \dfrac{1}{\ln^2 x + 2}$ ។

**7** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

ⓑ $y = 2x - x\ln x$

**8** ⓐ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប $C$ របស់អនុគមន៍ $y = -2\ln|x| + x - 2$

ⓑ ក្រាប $C$ កាត់ $Ox$ ត្រង់បីចំណុច $P, Q, R$ ដែលមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $p, q, r$ ។
ចូរបៀបធៀប $p, q, r$ និងបណ្តាចំនួន $-1, 0, 1, 5, 6$ ។

**9** រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយបានទិញម៉ាស៊ីនហុត្តតម្លៃ 250 ដុល្លារ ហើយមានអត្រាតម្លៃថយចុះ 25 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើបីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហុត្តនេះនឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាន ?

**10** បាក់តេរីមួយប្រភេទបំបែកខ្លួនដោយមានមេគុណអត្រាកំណើន $k = 0.872$ ដែល $t$ គិតជាថ្ងៃ ។
បើដំបូងមានបាក់តេរីចំនួន 9 តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 738 ?

**11** នៅទីក្រុងមួយកាលពី 10 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 45600 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 64800 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះ ។

## ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

**1** គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ⓐ $e^{\ln 7} = 7$

ⓑ $\ln e^{x-2} = x - 2$

ⓒ $\ln e^{7x} = 7x$

**2** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \ln x$

កាលណា $x \to +\infty$ យើងបាន $x^5 \to +\infty$ និង $\ln x \to +\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \ln x = +\infty$

ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

បំបែកភាគយក ៖

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ និងតាមរូបមន្តគ្រឹះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2} = 0 + 0 = 0$

ⓒ $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x)$

តាមរូបមន្តលីមីតគ្រឹះ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ (ចំពោះ $n > 0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x) = 0$

**3** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

◈ $y = \sqrt{x} \cdot \ln x \quad (x > 0)$

តាមរូបមន្តផលគុណដេរីវេ $(uv)' = u'v + uv'$ ៖

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x})' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

◈ $y = x^2\sqrt{\ln x} \quad (x > 1)$

តាមរូបមន្តផលគុណដេរីវេ $(uv)' = u'v + uv'$ និងរូបមន្តបណ្តាក់ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ៖

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \cdot \sqrt{\ln x} + x^2 \cdot (\sqrt{\ln x})' \\ &= 2x\sqrt{\ln x} + x^2 \cdot \frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} \\ &= 2x\sqrt{\ln x} + x^2 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} \\ &= 2x\sqrt{\ln x} + \frac{x}{2\sqrt{\ln x}} \\ &= \frac{4x\ln x + x}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{x(4\ln x + 1)}{2\sqrt{\ln x}} \end{aligned}$$

◈ $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

តាមរូបមន្តដេរីវេបណ្តាក់ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ ដែល $u = x + \sqrt{1 + x^2}$ ៖

គណនា $u'$ ៖

$$u' = (x + \sqrt{1 + x^2})' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ជំនួសចូលរូបមន្ត $y' = \dfrac{u'}{u}$ ៖

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

**4** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

**a** $y = \ln \dfrac{e^x}{e^x+1}$

សម្រួលអនុគមន៍តាមលក្ខណៈលោការីត ៖ $y = \ln(e^x) - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1)$

គណនាដេរីវេ ៖

$$\begin{aligned} y' &= (x - \ln(e^x+1))' \\ &= 1 - \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} \\ &= 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{1}{e^x+1} \end{aligned}$$

**b** $y = x\ln x - x$

គណនាដេរីវេតាមរូបមន្តផលគុណ $(uv)' = u'v + uv'$ ៖

$$\begin{aligned} y' &= (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)' \\ &= 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 = \ln x \end{aligned}$$

**c** $y = x^2 \ln \dfrac{1}{x^2}$

សម្រួលអនុគមន៍តាមលក្ខណៈលោការីត ៖ $y = x^2\ln(x^{-2}) = -2x^2\ln x$

គណនាដេរីវេ ៖

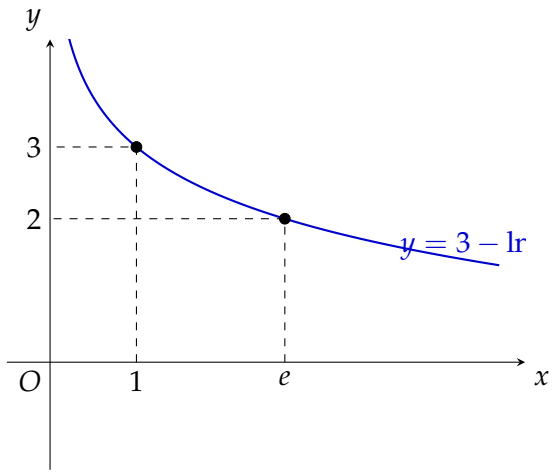
$$\begin{aligned} y' &= (-2x^2)'\ln x + (-2x^2)(\ln x)' \\ &= -4x\ln x - 2x^2\cdot\frac{1}{x} \\ &= -4x\ln x - 2x \\ &= -2x(2\ln x + 1) \end{aligned}$$

**5** សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

**a** អនុគមន៍ $y = 3 - \ln x$ ៖

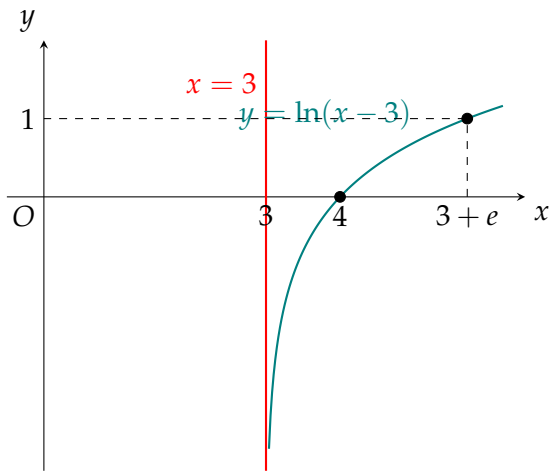
- ដែនកំណត់ ៖ $D = ]0, +\infty[$

- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}(3-\ln x)=+\infty$ (បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ)
  $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\ln x)=-\infty$
- ដេរីវេ ៖ $y'=-\dfrac{1}{x}<0$ គ្រប់ $x>0 \implies$ អនុគមន៍ចុះដាច់ខាត




**b** អនុគមន៍ $y=\ln(x-3)$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=]3,+\infty[$
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to 3^+}\ln(x-3)=-\infty$ (បន្ទាត់ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ)
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-3)=+\infty$
- ដេរីវេ ៖ $y'=\dfrac{1}{x-3}>0$ គ្រប់ $x>3 \implies$ អនុគមន៍កើនដាច់ខាត

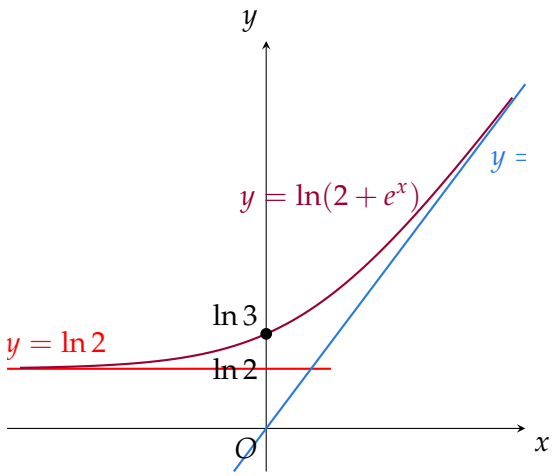



**c** អនុគមន៍ $y=\ln(2+e^x)$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=]-\infty,+\infty[$
- លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(2+e^x)=\ln 2 \implies y=\ln 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2+e^x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2+e^x)-x]=0 \Longrightarrow y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

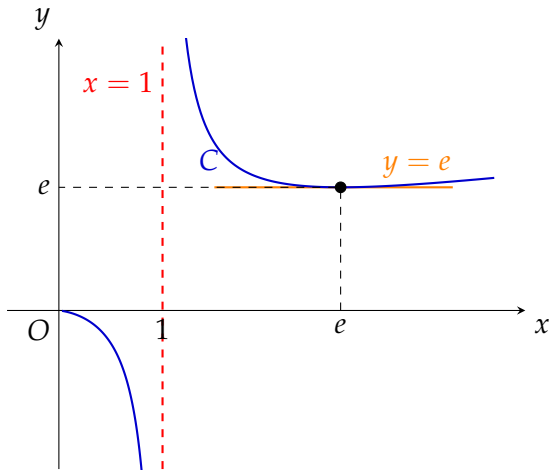
- ដេរីវេ ៖ $y'=\dfrac{e^x}{2+e^x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ អនុគមន៍កើនដាច់ខាត




**6** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

**a** អនុគមន៍ $y=\dfrac{x}{\ln x}$ ៖

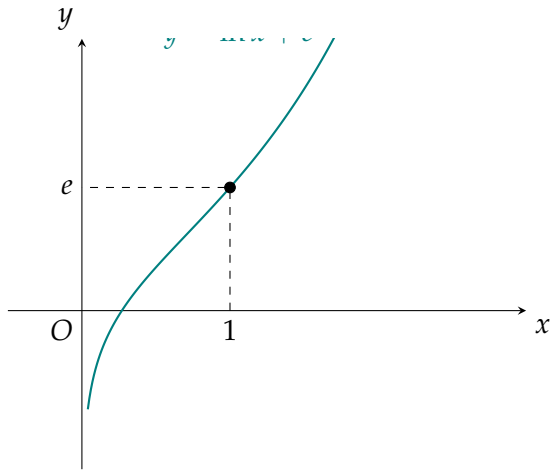
- ដែនកំណត់ ៖ $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$ ($x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ), $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$
- ដេរីវេ ៖ $y'=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$
- អប្បបរមា ៖ ត្រង់ $x=e$ គឺ $y=e$




**b** អនុគមន៍ $y=\ln x+e^x$ ៖

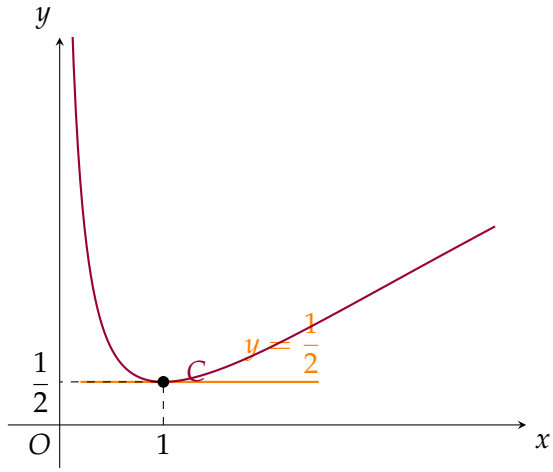
- ដែនកំណត់ ៖ $D=]0,+\infty[$

- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+e^x)=-\infty$ (បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ), $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+e^x)=+\infty$
- ដេរីវេ ៖ $y'=\dfrac{1}{x}+e^x>0$ គ្រប់ $x>0\implies$ អនុគមន៍កើនដាច់ខាត




◈ អនុគមន៍ $y=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x+2}$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=]0,+\infty[$
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=+\infty$ (បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ), $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$
- ដេរីវេ ៖ $y'=\dfrac{2\ln x}{x}\left(1-\dfrac{1}{(\ln^2 x+2)^2}\right)$
- អប្បបរមា ៖ ត្រង់ $x=1$ គឺ $y=\dfrac{1}{2}$



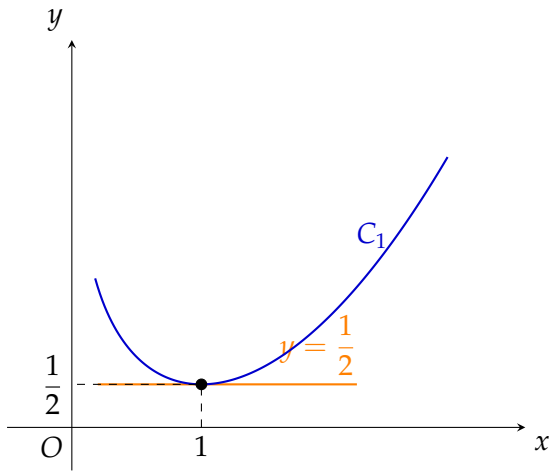

**7** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

◈ អនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D=]0,+\infty[$

- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ($x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ), $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2-1}{x}$
- អប្បបរមា ៖ ត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1) = \dfrac{1}{2}$
- តារាងអថេរភាព ៖

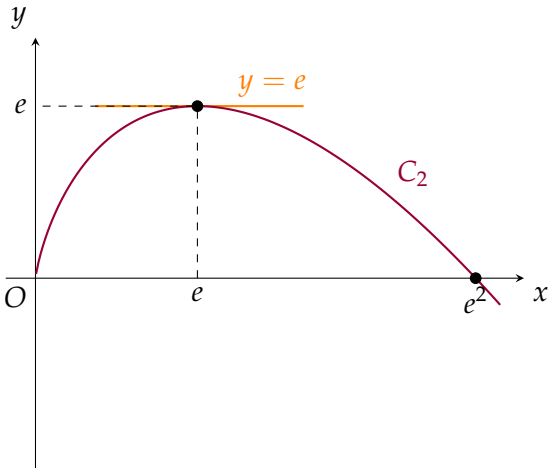
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |




**b** អនុគមន៍ $y = g(x) = 2x - x\ln x$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = ]0, +\infty[$
- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$
- ដេរីវេ ៖ $g'(x) = 1 - \ln x$
- អតិបរមា ៖ ត្រង់ $x = e$ គឺ $g(e) = e$
- ប្រសព្វអ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖ ត្រង់ $x = e^2$
- តារាងអថេរភាព ៖

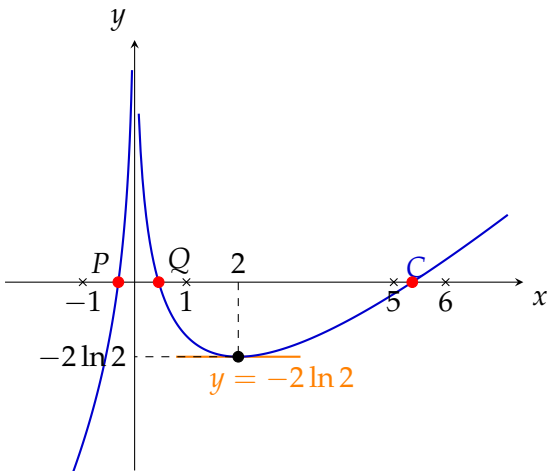
| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ | $0$ ↗ | $e$ | ↘ $-\infty$ | |




**8** ◈ **a** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $C$ ៖

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
- លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
  - បន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ។
- ដេរីវេ និងអថេរភាព ៖ $f'(x) = \dfrac{x-2}{x}$
  - ចំពោះ $x \in ]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - ចំពោះ $x \in ]0, 2[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
  - តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = -2\ln 2 \approx -1.39$
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-2\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |




(b) ប្រៀបធៀប $p, q, r$ និងបណ្តាចំនួន $-1, 0, 1, 5, 6$ ៖

- កំណត់ទីតាំង $p$ ៖ $f(-1) = -3 < 0$ និង $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty > 0$ ដោយ $f$ ជាប់ និងកើនដាច់ខាតលើ $]-1, 0[$ នាំឱ្យ $p \in ]-1, 0[ \implies -1 < p < 0$ ។
- កំណត់ទីតាំង $q$ ៖ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty > 0$ និង $f(1) = -1 < 0$ ដោយ $f$ ជាប់ និងចុះដាច់ខាតលើ $]0, 1[$ នាំឱ្យ $q \in ]0, 1[ \implies 0 < q < 1$ ។
- កំណត់ទីតាំង $r$ ៖ $f(5) = 3 - 2\ln 5 \approx -0.22 < 0$ និង $f(6) = 4 - 2\ln 6 \approx 0.42 > 0$ ដោយ $f$ ជាប់ និងកើនដាច់ខាតលើ $]5, 6[$ នាំឱ្យ $r \in ]5, 6[ \implies 5 < r < 6$ ។

សន្និដ្ឋាន ៖ $-1 < p < 0 < q < 1 < 5 < r < 6$

**9** រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយបានទិញម៉ាស៊ីនហុត្តតម្លៃ 250 ដុល្លារ ហើយមានអត្រាតម្លៃថយចុះ 25 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើបីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហុត្តនេះនឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាន ?

តាមរូបមន្ត

$$V = V_0 \times (1 - r)^t$$

ប្រាប់ទិន្នន័យ៖

- តម្លៃដើម $(V_0) = 250$ ដុល្លារ
- អត្រាតម្លៃថយចុះ $(r) = 25\% = 0.25$
- រយៈពេល $(t) = 3$ ឆ្នាំ

រៀបគណនា៖

$$\begin{aligned} V &= 250 \times (1 - 0.25)^3 \\ &= 250 \times (0.75)^3 \\ &= 250 \times 0.421875 \\ &= 105.46875 \text{ ដុល្លារ} \end{aligned}$$

សន្និដ្ឋាន៖
ដូចនេះ បីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីននេះនឹងមានតម្លៃប្រមាណ 105.47 ដុល្លារ (ឬ 105.46875 ដុល្លារ) ។

**10** បាក់តេរីមួយប្រភេទបំបែកខ្លួនដោយមានមេគុណអត្រាកំណើន $k = 0.872$ ដែល $t$ គិតជាថ្ងៃ ។ បើដំបូងមានបាក់តេរីចំនួន 9 តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 738 ?

តាមរូបមន្ត $N(t) = N_0\, e^{kt}$

ប្រាប់ទិន្នន័យ៖

- ចំនួនបាក់តេរីដើម ($N_0$) = 9
- មេគុណអត្រាកំណើន ($k$) = 0.872
- ចំនួនបាក់តេរីសរុប ($N(t)$) = 738
- រយៈពេល ($t$) គិតជាថ្ងៃ

រៀបគណនា៖

$$\begin{aligned} 738 &= 9 \cdot e^{0.872t} \\ \frac{738}{9} &= e^{0.872t} \\ 82 &= e^{0.872t} \end{aligned}$$

បំពាក់លោការីតធម្មជាតិ (ln) លើអង្គទាំងពីរ ៖

$$\begin{aligned} \ln(82) &= \ln\left(e^{0.872t}\right) \\ \ln(82) &= 0.872t \\ t &= \frac{\ln(82)}{0.872} \end{aligned}$$

ដោយសារ $\ln(82) \approx 4.4067$ ៖

$$t \approx \frac{4.4067}{0.872} \approx 5.05 \text{ ថ្ងៃ}$$

សន្និដ្ឋាន៖

ដូចនេះ រយៈពេលប្រមាណ 5.05 ថ្ងៃ (ឬប្រហែល 5 ថ្ងៃ) ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនឡើងដល់ 738 ។

**11** នៅទីក្រុងមួយកាលពី 10 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 45600 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 64800 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះ ។

តាមរូបមន្តកំណើនសមាស $P(t) = P_0(1+r)^t$

ប្រាប់ទិន្នន័យ៖

- ចំនួនប្រជាជនកាលពី 10 ឆ្នាំមុន ($P_0$) = 45600 នាក់
- ចំនួនប្រជាជនបច្ចុប្បន្ន ($P(t)$) = 64800 នាក់
- រយៈពេល ($t$) = 10 ឆ្នាំ
- អត្រាកំណើនប្រចាំឆ្នាំ ($r$) ជាភាគរយដែលត្រូវរក

របៀបគណនា៖

$$\begin{aligned} 64800 &= 45600 \cdot (1+r)^{10} \\ \frac{64800}{45600} &= (1+r)^{10} \\ \frac{27}{19} &= (1+r)^{10} \\ 1.42105 &\approx (1+r)^{10} \end{aligned}$$

ទាញឫសទី 10 លើអង្គទាំងពីរ ៖

$$\begin{aligned} 1+r &= (1.42105)^{\frac{1}{10}} \\ 1+r &\approx 1.03576 \\ r &\approx 1.03576 - 1 = 0.03576 \implies r \approx 3.58\% \end{aligned}$$

## លំហាត់បាក់ឌុប

**1** (ឆ្នាំ ២០២៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

**a** គេមានអនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = 2 + 2e^{2x} - 5e^x$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (e^x - 2)(2e^x - 1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ទៅតាមតម្លៃនៃ $x$ នៅលើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

**b** គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{2x+18}{9}$ និងគេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វា ។

រកលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ រកដេរីវេ $f'(x)$ នៃ $f(x)$ រួចបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x$,

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

ⓒ សិក្សាអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថាគ្រប់ $x$ ក្នុងចន្លោះ $[-\ln 2, +\ln 2]$ $f(x)$ វិជ្ជមាន ។

ⓓ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D_1)$ សមីការ $y = \frac{2}{9}x + 3$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និងបន្ទាត់ $(D_2)$ សមីការ $y = \frac{2}{9}x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបបន្ទាត់ $(D_1)$ និងទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបបន្ទាត់ $(D_2)$ ។

ⓔ សង់ក្រាប $(C)$ អាស៊ីមតូត $(D_1)$ និង $(D_2)$ ។ (គេឲ្យតម្លៃ $\frac{2}{9}\ln 2 \approx 0.15$ និង $\ln 2 \approx 0.7$)

**2** (ឧបឆ្នាំ ២០២៥ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $g$ ដែល $g(x) = \ln\left(\frac{-x-3}{x-3}\right)$

ⓐ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g$ និងសិក្សាថាតើ $g$ ជាអនុគមន៍គូ ឬអនុគមន៍សេស ?
($g$ អនុគមន៍គូលុះត្រាតែ $g(-x) = g(x)$ និង $g$ ជាអនុគមន៍សេសលុះត្រាតែ $g(-x) = -g(x)$) ។

ⓑ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ $g$ ត្រង់ $-3$ និងត្រង់ $+3$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ $g$ លើដែនកំណត់របស់វា។ សង់តារាងអថេរភាពរបស់វា។

ⓒ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។ តាង $C$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $g$ ក្នុងតម្រុយនេះ។ កំណត់សមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះ $T$ ទៅនឹងក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $0$ ។ សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $T$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ទៅតាមតម្លៃនៃ $x$ ។

ⓓ i គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $h$ ដែល $h(x) = xg(x)$ ។

ii រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់នៅចន្លោះក្រាប $C$ អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = 0$ និង $x = 1$ ។

**3** (ឧបឆ្នាំ ២០២៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(1, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) - x + 2$ ។ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ⓐ បង្ហាញថា $f(x) = 2 - x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $1$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

ⓑ បង្ហាញថានៅលើ $(1, +\infty)$ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f$ គឺ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

ⓒ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d)$ មានសមីការ $y = -x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

ⓓ ប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $(d)$ ។ សង់ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ $(d)$ ។ (ប្រើតម្លៃ $\ln 3 \approx 1.1$) ។

**4** (ឧបឆ្នាំ ២០២៣ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ។ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់ $f$ ។

ⓐ i ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត $x$, $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

($\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$) ។

ii បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

iii សិក្សាទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $(D)$ ។

b i គណនា $f'(x)$ ដែល $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ និងគណនាតម្លៃអតិបរមារបស់ $f$ ។

ii $A$ ជាចំណុចនៃ $(C)$ ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ ទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុច $A$ ។

iii បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\beta$ នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

iv សង់បន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ អាស៊ីមតូត $(D)$ និងក្រាប $(C)$ ។

**5** (ឧបឆ្នាំ ២០២២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

a គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=x-\ln(1+x)$ ។ យើងតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់ $f$ ។

i រកដែនកំណត់ $D$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ii សិក្សាអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយភ្ជាប់តារាងអថេរភាពនៅលើ $D$ និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f(x)$ លើ $D$ ។

b គេចង់សិក្សាទីតាំងរបស់ក្រាប $(C)$ នៃ $f$ ធៀបទៅនឹងក្រាប $(P)$ ដែលមានសមីការ $y=\frac{1}{2}x^2$ ។

i ក្នុងន័យនេះ គេបង្កើតអនុគមន៍ $g$ កំណត់លើ $D$ ដែនកំណត់របស់ $f$ ដោយ $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g$ និងទាញយកសញ្ញានៃ $g(x)$ កាលណា $x$ រត់នៅលើ $D$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $(C)$ ធៀបនឹងក្រាប $(P)$ ។

ii សង់ក្រាប $(C)$ និងក្រាប $(P)$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

**6** (ឧបឆ្នាំ ២០២១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x)=x-2+\frac{2(x+1)}{e^x}$ ។ យើងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f$ នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

a រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$) ។

b បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប $(C)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $(D)$ ។

c យើងតាង $f'(x)$ ដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ បង្ហាញថា៖ $f'(x)=\frac{e^x-2x}{e^x}$ ។ គេដឹងថាគ្រប់ $x$ ជាធាតុរបស់ $\mathbb{R}, e^x-2x>0$ ។ ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីទាញយកការសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

d បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ ទៅនឹង $(C)$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D)$ ។ សង់បន្ទាត់ $(D),(\Delta)$ និងក្រាប $(C)$ ។

**7** (ឧបឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

អនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}-\ln x$ ☐ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f$ នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ i បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x$ លើ $(0,+\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$ និង $f(x)=\dfrac{1}{x}(x^2-x\ln x-2)$ ។

ii ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ។

ⓑ i គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x$ លើ $(0,+\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2-x+2)$ ។

ii សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា ។

ⓒ i រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុច $A$ នៅលើ $(C)$ ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1 ។

ii រកកូអរដោនេចំណុច $B$ នៃ $(C)$ ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅ $(C)$ ត្រង់ $B$ ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

ⓓ សង់ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A$ និងត្រង់ $B$ ។ (គេឲ្យតម្លៃ $\ln 2\approx 0.7$) ។

**8** (ឧបឆ្នាំ ២០១៨ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វា នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ គណនាលីមីតនៃ $f$ ត្រង់ 1 និង $+\infty$ ។

ⓑ ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1,+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f$ គឺ $f'(x)=\dfrac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ លើ $(1,+\infty)$ ។

ⓒ i បង្ហាញបន្ទាត់ $d_1$ ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។

ii បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x$ លើ $(1,+\infty)$ $\dfrac{x+1}{x-1}>1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $d_1$ ។

ⓓ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ $(C)$ ដែលបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\dfrac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ នេះ ។

ⓔ សង់ក្រាប $(C)$ អាស៊ីមតូត $d_1$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3=1.1$ និងក្រាប $(C)$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(4.5,0)$ ។

**9** (ឧបឆ្នាំ ២០១៧ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+\dfrac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ គេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វា នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ $f$ ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $d_1$ ដែលមានសមីការ $y=x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $(C)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_1$ ។

(b) គណនាលីមីត $f$ ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $d_2$ ដែលមានសមីការ $y=x-3$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $(C)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_2$ ។

(c) i គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x$, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

ii សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត $d_1$ និង $d_2$ របស់វា ។

**10** (ឧបឆ្នាំ ២០១៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) i គណនាលីមីតនៃ $f$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

ii សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $C$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_1$ ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ។

(b) i ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

ii សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

(c) i តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ទៅនឹងក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុច $I$ ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln(3)$ ?

ii សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $C$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_2$ ។

(d) i បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ $d_3$ ទៅនឹងក្រាប $C$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y=\dfrac{1}{4}x+1$ ។

ii ដោយសន្មតថាចំណុច $I$ ជាផ្ចិតស្នុះនៃក្រាប $(C)$ និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln(3)$ ចូរសង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_1,d_2,d_3$ ។ (នៅលើតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ 2cm) ។

**11** (ឧបឆ្នាំ ២០១៥ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

(a) គេឲ្យអនុគមន៍ $g$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$ ។

i a បង្ហាញថា $g$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

b គណនា $g(1)$ ។

ii a ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំណួរទី១ បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម៖
បើ $x\geq 1$ នោះ៖ $x^2+\ln x\geq 1$ និង បើ $0<x\leq 1$ នោះ៖ $x^2+\ln x\leq 1$ ។

b កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ តាលណា $x$ នៅលើ $(0,+\infty)$ ។

(b) គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយ $C$ ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

i សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) ។

ii បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f$ គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ។

iii ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ លើ $(0,+\infty)$ ។

iv a បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta$ មានសមីការ $y=x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប $C$ ត្រង់ $+\infty$ ។

b សិក្សាទីតាំង $C$ ធៀបនឹង $\Delta$ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ $I$ រវាងក្រាប $C$ និង $\Delta$ ។ សង់ $\Delta$ និងក្រាប $C$ ។

**12** (ឧបត្ថម្ភ ២០១៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ លើកទី២)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $I=]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ ។

a $h$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I$ ដោយ $h(x)=-x+1-2\ln x$ ។ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ដោយគេមិនតម្រូវឲ្យគណនាលីមីតនៃ $h(x)$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ឡើយ។

b i គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ។

ii គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

iii បង្ហាញថានៅលើ $I$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ។

iv ទាញយកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ $I$ និងសង់ក្រាប $C$ នៃ $f(x)$ នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

**13** (ឧបត្ថម្ភ ២០១៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ លើកទី១)

$f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$ និង $C$ ជាក្រាបរបស់វា។

a i រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ii $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ។

iii ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $\Delta$ ដែលមានសមីការ $y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង $C$ នៅជិត $+\infty$ ។

iv កំណត់អាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង $\Delta$ និងខ្សែកោង $C$ ។

b i បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x$ លើ $]0,+\infty[$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។

ii សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ដោយដឹងថាសមីការ $g(x)=0$ មានចម្លើយ $x'=1$ និង $x''=\alpha,(1<\alpha)$ ។

**14** (ឧបត្ថម្ភ ២០១៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ លើកទី១)

$f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ។ គេតាងដោយ $C$ ជាក្រាបរបស់វា ។

a i រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ii បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D$ មានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង $C$ ។

iii តើខ្សែកោង $C$ នៅលើ ឬនៅក្រោមបន្ទាត់ $D$ ចូរបញ្ជាក់។

iv ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត $x$, $f(x)=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$ ។

v រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$) ។

(b) (i) គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ $f$ ។

(ii) $A$ ជាចំណុចមួយលើខ្សែកោង $C$ ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង $C$ ត្រង់ $A$ ។

(iii) បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ $\beta$ នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

**15** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៦ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x}$ និង $(C)$ ជាក្រាបរបស់វា ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) (i) រកចំនួនពិត $a, b, c$ ដែលគ្រប់ $x \neq 1, f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ ។

(ii) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ មានសមីការ $y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។

(c) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ និងសង់ក្រាប $(C)$ រួចអាស៊ីមតូតទ្រេត និងឈររបស់ $(C)$ ។

**16** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៥ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x) = \dfrac{2-x-2x^2}{-1-x}$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) កំណត់ចំនួនពិត $a, b, c$ ដែល $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ ។

(c) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d$ ដែលមានសមីការ $y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $C$ របស់អនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

(d) សិក្សាទីតាំងនៃ $d$ ធៀបនឹងក្រាប $C$ ។

(e) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។ សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $d$ ។

**17** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៤ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{-x^2+x+3}{x+1}$ ។ យើងតាងក្រាប $(C)$ តំណាង $f$ ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) បង្ហាញថា $f(x) = -x + 2 + \dfrac{1}{x+1}$ ។

(c) គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ ។

(d) រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

(e) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។

**18** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៣ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ និងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ។

(c) បង្ហាញថាដេរីវេនៃ $f$ គឺ $f'(x)=\dfrac{-3x-1}{(x-1)^3}$ ។

(d) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ $f(x)$ ។

**19** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២២ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{4-x^2}{1-x}$ និងគេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) បង្ហាញថា $f(x)=x+1+\dfrac{3}{1-x}$ ។

(c) គណនា $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ហើយទាញយកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ក្រាប $(C)$ ។

(d) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។

**20** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២១ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{2-x}$ ។ យើងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) បង្ហាញថា $f(x)=3-x+\dfrac{1}{2-x}$ ។

(c) គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty, +\infty$ និង $2$ ។

(d) ចូរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

(e) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ និងសង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។

**21** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$ ។ យើងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍នេះ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{3}{x+1}$ ។

(b) ចូរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

(c) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។

**22** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៨ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ ។ យើងតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វានៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) រកដែនកំណត់ $D$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញយកសមីការអាស៊ីមតូត $d$ ទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

(c) (i) ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x \in D$, ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{-3(x^2-6x+8)}{(x^2-5x+7)^2}$ ។

(ii) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(iii) សង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ។

**23** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៧ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ ។ យើងតាង $C$ ក្រាបរបស់វានៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $-\infty$ ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$ ។

(b) សិក្សាអថេរភាពនិងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(c) (i) រកចំនួនពិត $a,b,c$ ដែលគ្រប់ $x \neq 2, f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។

(ii) គេតាង $d$ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x+1$ ។ បង្ហាញថា $d$ អាស៊ីមតូតទៅ $C$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $C$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d$ ។

(iii) សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $d$ ។

**24** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៦ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$ ។

(a) សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $-\infty$ ត្រង់ $-2$ ត្រង់ $+2$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ចូរបញ្ជាក់អំពីអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(c) សង់នៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $f$ ។

**25** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៥ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x) = \dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និងគេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

(b) បង្ហាញថា $f(x) = x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ។

(c) បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

(d) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ $f$ ។

**26** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់សង្គម លើកទី២)

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{1-x}$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃ $f(x)$ ។

(b) បង្ហាញថា $f(x) = -x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ។

(c) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{1-x}$ ។

**27** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់សង្គម លើកទី១)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2}{9}x$ និងតាង $C$ តាងក្រាបរបស់ $f$ ។

ⓐ អនុគមន៍ $g$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$ ៖

i ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$ ។

ii ទាញយកតាមតម្លៃនៃ $x$ សញ្ញានៃ $g(x)$ ។

ⓑ i រក $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។

ii អនុគមន៍ $f$ មានដេរីវេ $f'$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

iii សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ លើ $\mathbb{R}$ ។

## ចម្លើយលំហាត់បាក់ឌុប

**1** (ឆ្នាំ ២០២៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

ⓐ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ៖

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\begin{aligned}(e^x-2)(2e^x-1)&=2e^{2x}-e^x-4e^x+2\\&=2e^{2x}-5e^x+2=g(x)\quad\text{(ពិត)}\end{aligned}$$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ៖

ឱ្យ $g(x)=0\iff(e^x-2)(2e^x-1)=0$

· $e^x-2=0\iff e^x=2\iff x=\ln 2$

· $2e^x-1=0\iff e^x=\dfrac{1}{2}\iff x=-\ln 2$

សន្និដ្ឋានសញ្ញានៃ $g(x)$ ៖

· ចំពោះ $x\in]-\infty,-\ln 2[\cup]\ln 2,+\infty[$ ៖ $g(x)>0$

· ចំពោះ $x\in]-\ln 2,\ln 2[$ ៖ $g(x)<0$

· ចំពោះ $x=-\ln 2$ ឬ $x=\ln 2$ ៖ $g(x)=0$

ⓑ រកលីមីត និងដេរីវេ $f'(x)$ ៖

- លីមីត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2x+18}{9}\right)=1+(-\infty)=-\infty$

· $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2x+18}{9}\right)=0+(+\infty)=+\infty$

- ដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} = \frac{-9e^x + 2(1+2e^x+e^{2x})}{9(1+e^x)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{9(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{9(1+e^x)^2}$$

ដោយសារ $9(1+e^x)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឲ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៕

ⓒ សិក្សាអថេរភាព និងបង្ហាញថា $f(x) > 0$ លើ $[-\ln 2, \ln 2]$ ៖

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in ]-\infty, -\ln 2[ \cup ]\ln 2, +\infty[ \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in ]-\ln 2, \ln 2[ \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- តម្លៃបរមា ៖
  - អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -\ln 2$ គឺ $f(-\ln 2) = \dfrac{24 - 2\ln 2}{9} \approx 2.51$
  - អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = \ln 2$ គឺ $f(\ln 2) = \dfrac{21 + 2\ln 2}{9} \approx 2.49$
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\dfrac{24-2\ln 2}{9}$ | ↘ | $\dfrac{21+2\ln 2}{9}$ | ↗ | $+\infty$ |

- បង្ហាញថា $f(x) > 0$ លើ $[-\ln 2, \ln 2]$ ៖
  លើចន្លោះ $[-\ln 2, \ln 2]$, $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ ដូច្នេះតម្លៃតូចបំផុតរបស់វាគឺអប្បបរមាធៀប $f(\ln 2)$ ៖

$$f(x) \geq f(\ln 2) = \frac{21 + 2\ln 2}{9} > 0 \quad (\text{ព្រោះ } 21 + 2\ln 2 > 0)$$

ដូចនេះ $f(x) > 0$ គ្រប់ $x \in [-\ln 2, \ln 2]$ ៕

ⓓ អាស៊ីមតូត និងទីតាំងធៀប ៖

- អាស៊ីមតូតទ្រេត $(D_1)$ ត្រង់ $-\infty$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_{D_1}] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2x+18}{9} - \left(\frac{2}{9}x + 3\right)\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^x}{1+e^x} = 0$$

នាំឲ្យបន្ទាត់ $(D_1) : y = \dfrac{2}{9}x + 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ ៕

○ អាស៊ីមតូតទ្រេត $(D_2)$ ត្រង់ $+\infty$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_{D_2}]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{2x+18}{9}-\left(\frac{2}{9}x+2\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$$

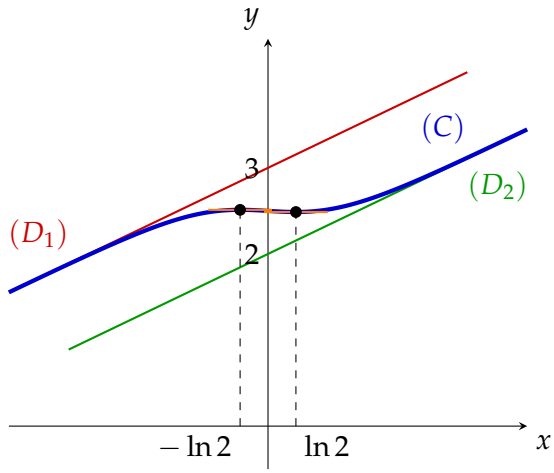
នាំឲ្យបន្ទាត់ $(D_2): y=\frac{2}{9}x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។

○ ទីតាំងធៀប ៖

· $f(x)-y_{D_1}=\frac{-e^x}{1+e^x}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}\implies$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $(D_1)$

· $f(x)-y_{D_2}=\frac{1}{1+e^x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}\implies$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងលើបន្ទាត់ $(D_2)$

ⓔ សង់ក្រាប $(C)$, $(D_1)$ និង $(D_2)$ ៖




## 2 ( ឧបឆ្នាំ ២០២៥ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

គេមានអនុគមន៍ $g$ ដែល $g(x)=\ln\left(\frac{-x-3}{x-3}\right)$

ⓐ រកដែនកំណត់ និងសិក្សាភាពគូ-សេសនៃអនុគមន៍ $g$ ៖

○ ដែនកំណត់ ៖

អនុគមន៍ $g(x)=\ln\left(\frac{-x-3}{x-3}\right)=\ln\left(\frac{x+3}{3-x}\right)$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$\frac{x+3}{3-x}>0$$

ឱ្យ $x+3=0\iff x=-3$ និង $3-x=0\iff x=3$ ។

តាមតារាងសញ្ញា យើងបានកន្សោម $\frac{x+3}{3-x}>0$ ចំពោះ $x\in]-3,3[$ ៖

$$D_g=]-3,3[$$

○ សិក្សាភាពគូ-សេស ៖

· គ្រប់ $x \in D_g = ]-3,3[$ នាំឲ្យ $-x \in ]-3,3[ = D_g$ (សំណុំ $D_g$ មានផ្ចិតធៀបនឹង 0)

· គណនា $g(-x)$ ៖

$$g(-x) = \ln\left(\frac{-(-x)-3}{(-x)-3}\right) = \ln\left(\frac{x-3}{-x-3}\right) = \ln\left(\frac{-(3-x)}{-(x+3)}\right) = \ln\left(\frac{3-x}{x+3}\right)$$

ដោយសារ $\ln\left(\frac{3-x}{x+3}\right) = \ln\left(\left(\frac{x+3}{3-x}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{x+3}{3-x}\right) = -g(x)$

ព្រោះ $g(-x) = -g(x)$ ដូចនេះ $g$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ⓑ គណនាលីមីត សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

○ លីមីត ៖

· $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \ln\left(\frac{x+3}{3-x}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x = -3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $-\infty$

· $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \ln\left(\frac{x+3}{3-x}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $+\infty$

○ ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

សរសេរ $g(x) = \ln(x+3) - \ln(3-x)$ ៖

$$g'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{-1}{3-x} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{3-x} = \frac{3-x+x+3}{(x+3)(3-x)} = \frac{6}{9-x^2}$$

ដោយសារគ្រប់ $x \in ]-3,3[$ នាំឱ្យ $x^2 < 9 \iff 9-x^2 > 0$ ដូច្នេះ $g'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in D_g$ ។

នាំឱ្យ $g$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-3,3[$ ។

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-3$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | $-\infty$ ‖ | $-\infty \longrightarrow +\infty$ | ‖ $+\infty$ |

ⓒ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T$, សង់ក្រាប $C$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ៖

○ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T$ ត្រង់ $x = 0$ ៖

· $g(0) = \ln\left(\frac{3}{3}\right) = \ln(1) = 0$

· $g'(0) = \frac{6}{9-0^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

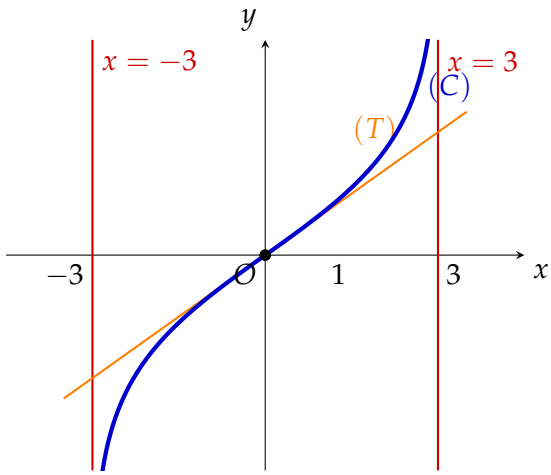
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T$ មានទម្រង់ $y = g'(0)(x-0)+g(0) \implies (T): y = \frac{2}{3}x$ ។

- សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ទៅតាមតម្លៃ $x$ ៖

  ដោយសារ $g$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]-3,3[$ និង $g(0)=0$ ៖

  - ចំពោះ $x \in ]-3,0[$ ៖ $g(x)<0$
  - ចំពោះ $x=0$ ៖ $g(x)=0$
  - ចំពោះ $x \in ]0,3[$ ៖ $g(x)>0$

- សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $T$ ៖




(d) គណនាដេរីវេ $h'(x)$ និងផ្ទៃក្រឡា ៖

(i) គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $h(x)=xg(x)$ ៖

$$h'(x) = (x)'g(x)+xg'(x) = 1\cdot g(x)+x\cdot\frac{6}{9-x^2} = g(x)+\frac{6x}{9-x^2}$$

(ii) រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ ៖

ចំពោះ $x\in[0,1], g(x)\geq 0$ នាំឱ្យផ្ទៃក្រឡា $S$ កំណត់ដោយ ៖

$$S = \int_0^1 g(x)\,dx$$

តាមសំនួរ (i) យើងមាន $g(x) = h'(x) - \frac{6x}{9-x^2}$ ៖

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= h(x) - \int \frac{6x}{9-x^2}\,dx \\ &= xg(x)+3\ln(9-x^2) \quad \left(\text{ព្រោះ } \int \frac{-2x}{9-x^2}dx = \ln(9-x^2)\right)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ៖

$$\begin{aligned} S &= \left[xg(x) + 3\ln(9-x^2)\right]_0^1 \\ &= (1\cdot g(1) + 3\ln(8)) - (0\cdot g(0) + 3\ln(9)) \\ &= \ln\left(\frac{4}{2}\right) + 3\ln(2^3) - 3\ln(3^2) \\ &= \ln 2 + 9\ln 2 - 6\ln 3 \\ &= 10\ln 2 - 6\ln 3 \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃ}) \end{aligned}$$

**3** (ឧបឆ្នាំ ២០២៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) - x + 2$ ។ តេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

**a** បង្ហាញកន្សោម $f(x)$ និងគណនាលីមីត ៖

○ បង្ហាញថា $f(x) = 2 - x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ៖

គ្រប់ $x \in ]1,+\infty[$ យើងមាន $x+1>0$ និង $x-1>0$ ៖

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1) - \ln(x-1) - x + 2 \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - x + 2 \\ &= 2 - x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (\text{ពិត}) \end{aligned}$$

○ គណនាលីមីត ៖

· $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[2 - x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = 1 + \ln(+\infty) = +\infty$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2 - x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = -\infty + \ln(1) = -\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0\right)$

**b** បង្ហាញដេរីវេ $f'(x)$, សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- បង្ហាញដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(x+1)]' - [\ln(x-1)]' - [x]' + [2]' \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - 1 \\ &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} - 1 = \frac{-2}{x^2-1} - 1 \\ &= \frac{-2-(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{-(x^2+1)}{x^2-1} = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \quad \text{(ពិត)} \end{aligned}$$

- ទិសដៅអថេរភាព ៖

  គ្រប់ $x \in ]1,+\infty[$ យើងមាន $x^2+1>0$ និង $(x+1)(x-1)=x^2-1>0$ ៖

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} < 0 \quad \forall x \in ]1,+\infty[$$

  នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]1,+\infty[$ ៕

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

ⓒ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d)$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y=-x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ៕

ⓓ ប្រៀបធៀបទីតាំងធៀប និងសង់ក្រាប ៖

- ប្រៀបធៀបទីតាំងធៀបនៃ $(C)$ និង $(d)$ ៖

  ពិនិត្យផលដក $f(x)-y_{(d)}=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ៖

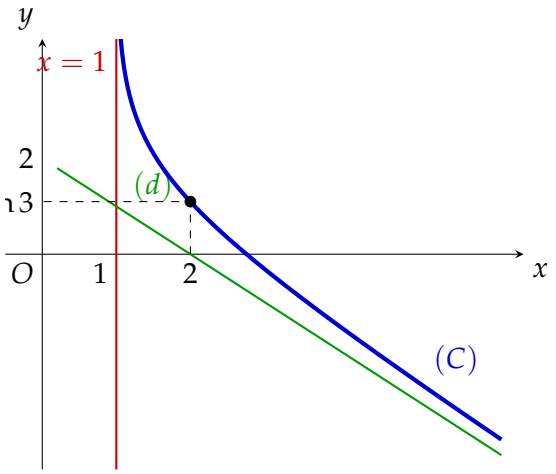
  ចំពោះ $x>1 \implies x+1>x-1>0 \implies \frac{x+1}{x-1}>1$

  នាំឱ្យ $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0 \implies f(x)-y_{(d)}>0$ គ្រប់ $x\in]1,+\infty[$ ៕

  ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $(d)$ ជានិច្ចលើចន្លោះ $]1,+\infty[$ ៕

- សង់ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ $(d)$ ៖

  ចំណុចពិសេស ៖ ត្រង់ $x=2 \implies f(2)=2-2+\ln 3=\ln 3\approx 1.1$




**4** (ឌុបឆ្នាំ ២០២៣ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ។ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់ $f$ ។

(a) (i) ផ្ទៀងផ្ទាត់កន្សោម $f(x)$ និងគណនាលីមីត ៖

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

  គ្រប់ចំនួនពិត $x$ យើងមាន ៖

$$\frac{4e^x-xe^x-2}{e^x}=\frac{4e^x}{e^x}-\frac{xe^x}{e^x}-\frac{2}{e^x}=4-x-2e^{-x}=f(x) \quad \text{(ពិត)}$$

- គណនាលីមីត ៖

  · $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x-2e^{-x})=-\infty$

  $\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-x}=0\right)$

  · $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}=-\infty$

  $\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+ \text{ និង } \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0 \implies \text{ភាគយក} \to -2\right)$

(ii) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)]=\lim_{x\to+\infty}[(4-x-2e^{-x})-(-x+4)]=\lim_{x\to+\infty}(-2e^{-x})=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D): y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ៕

(iii) សិក្សាទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $(D)$ ៖

ពិនិត្យផលដក $f(x)-y_{(D)}=-2e^{-x}$ ៖

ដោយសារ $e^{-x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R} \implies -2e^{-x}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៕

ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $(D)$ ជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

(b) (i) គណនា $f'(x)$, សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃអតិបរមា ៖

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x) = (4 - x - 2e^{-x})' = -1 - 2(-e^{-x}) = -1 + 2e^{-x} = \frac{2 - e^x}{e^x}$$

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ឱ្យ $f'(x) = 0 \iff -1 + 2e^{-x} = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$
  - ចំពោះ $x \in ]-\infty, \ln 2[$ ៖ $e^x < 2 \implies 2 - e^x > 0 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - ចំពោះ $x \in ]\ln 2, +\infty[$ ៖ $e^x > 2 \implies 2 - e^x < 0 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- តម្លៃអតិបរមា ៖

  អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = \ln 2$ គឺ ៖

$$f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2} = 4 - \ln 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \ln 2 \approx 2.31$$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3 - \ln 2$ | ↘ | $-\infty$ |

(ii) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ ត្រង់ចំណុច $A$ ៖

- ចំណុច $A$ មានអាប់ស៊ីស $x_0 = 0 \implies y_0 = f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 2 \implies A(0, 2)$
- មេគុណប្រាប់ទិស $f'(0) = -1 + 2e^0 = 1$

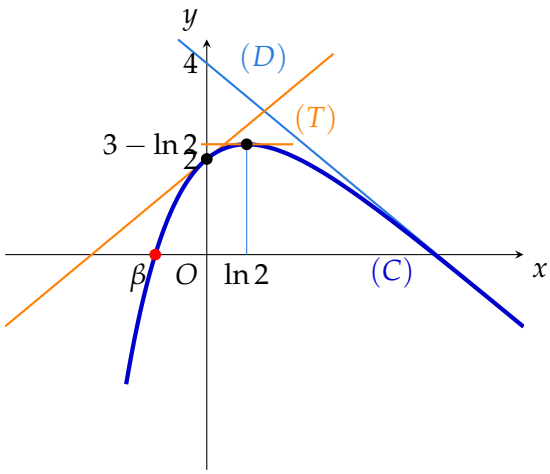
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ មានទម្រង់ $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \implies (T) : y = x + 2$ ។

(iii) បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\beta \in [-1, 0]$ ៖

- លើចន្លោះ $[-1, 0] \subset ]-\infty, \ln 2]$, អនុគមន៍ $f$ ជាប់ និងកើនដាច់ខាត
- $f(-1) = 4 - (-1) - 2e^1 = 5 - 2e \approx -0.44 < 0$
- $f(0) = 2 > 0$

ដោយសារ $f(-1)\cdot f(0)<0$, តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយ យ៉ាងតិចមួយ $\beta\in]-1,0[$ ។ ហើយដោយសារ $f$ កើនដាច់ខាតលើ $[-1,0]$ នាំឱ្យចម្លើយ $\beta$ នេះមានតែមួយគត់ ៕

iv សង់បន្ទាត់ប៉ះ $(T)$, អាស៊ីមតូត $(D)$ និងក្រាប $(C)$ ៖




## 5 (ឧបឆ្នាំ ២០២២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

a សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=x-\ln(1+x)$ ៖

i រកដែនកំណត់ $D$ និងគណនាលីមីត ៖

- ដែនកំណត់ ៖

  អនុគមន៍ $f$ មានន័យលុះត្រាតែ $1+x>0\iff x>-1$ ៖

  $$D=]-1,+\infty[$$

- គណនាលីមីត ៖

  · $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}[x-\ln(1+x)]=-1-(-\infty)=+\infty$
  $\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$

  · $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(1+x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=+\infty\cdot(1-0)=+\infty$

ii សិក្សាអថេរភាព តារាងអថេរភាព និងសញ្ញានៃ $f(x)$ ៖

- ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

  $$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

  · ឱ្យ $f'(x)=0\iff x=0$

  · ចំពោះ $x\in]-1,0[$ ៖ $x<0$ និង $1+x>0\implies f'(x)<0\implies f$ ជា

អនុគមន៍ចុះ

· ចំពោះ $x \in ]0,+\infty[$ ៖ $x > 0$ និង $1+x > 0 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន

○ តម្លៃអប្បបរមា ៖

អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប (និងជាថ់ខាត) ត្រង់ $x = 0$ គឺ $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$ ។

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

○ បញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f(x)$ លើ $D$ ៖

ដោយសារ $f(0) = 0$ ជាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃ $f$ លើ $D = ]-1,+\infty[$ ៖

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]-1,+\infty[ \quad (\text{និង } f(x) = 0 \iff x = 0)$$ ។

ⓑ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប $(C)$ និងប៉ារ៉ាបូល $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ ៖

ⓘ សិក្សាអថេរភាពនៃ $g(x)$, រកសញ្ញា និងប្រៀបធៀបទីតាំង ៖

○ ដេរីវេនៃ $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 = x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2$ ៖

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - x = \frac{x}{1+x} - x = \frac{x - x(1+x)}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

○ ទិសដៅអថេរភាព និងសញ្ញានៃ $g(x)$ ៖

គ្រប់ $x \in ]-1,+\infty[$ យើងមាន $1+x > 0$ និង $-x^2 \leq 0$ នាំឱ្យ $g'(x) \leq 0$ គ្រប់ $x \in D$ (និង $g'(x) = 0 \iff x = 0$) ។

ដូចនេះ $g$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-1,+\infty[$ ។

ដោយសារ $g(0) = f(0) - \frac{1}{2}(0)^2 = 0 - 0 = 0$ ៖

· ចំពោះ $x \in ]-1,0[$ ៖ $x < 0 \implies g(x) > g(0) = 0$

· ចំពោះ $x = 0$ ៖ $g(0) = 0$

· ចំពោះ $x \in ]0,+\infty[$ ៖ $x > 0 \implies g(x) < g(0) = 0$

○ សន្និដ្ឋានទីតាំងធៀប ៖

· ចំពោះ $x \in ]-1,0[$ ៖ $g(x) > 0 \implies f(x) > \frac{1}{2}x^2$

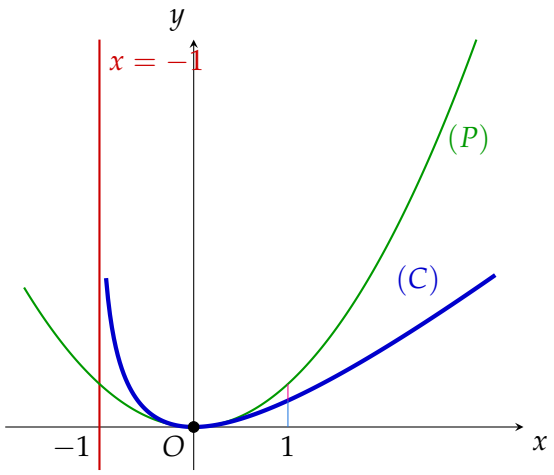
$\Longrightarrow$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងលើប៉ារ៉ាបូល $(P)$

· ចំពោះ $x=0$ ៖ $g(0)=0 \Longrightarrow$ ក្រាប $(C)$ និង $(P)$ ប្រសព្វគ្នានៅគល់តម្រុយ $O(0,0)$

· ចំពោះ $x\in]0,+\infty[$ ៖ $g(x)<0 \Longrightarrow f(x)<\dfrac{1}{2}x^2$

$\Longrightarrow$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងក្រោមប៉ារ៉ាបូល $(P)$

ii សង់ក្រាប $(C)$ និងប៉ារ៉ាបូល $(P)$ ៖




**6** (ឧបឆ្នាំ ២០២១ ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x)=x-2+\dfrac{2(x+1)}{e^x}$ ។ យើងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f$ នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

a រកដែនកំណត់ និងគណនាលីមីត ៖

○ ដែនកំណត់ ៖

ដោយសារ $e^x>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យភាគបែងខុសពី 0 ជានិច្ច ៖

$$D=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

○ គណនាលីមីត ៖

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}\right)=+\infty-2+0+0=+\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0 \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0\right)$

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-2+2(x+1)e^{-x}\right)=-\infty+(-\infty\cdot+\infty)=-\infty$

b បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត និងសិក្សាទីតាំងធៀប ៖

○ អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{e^x}=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D): y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។

- ទីតាំងធៀបនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $(D)$ ៖

  ពិនិត្យផលដក $f(x) - y_{(D)} = \dfrac{2(x+1)}{e^x}$ ៖

  ដោយសារ $e^x > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ សញ្ញានៃផលដកអាស្រ័យលើសញ្ញានៃ $(x+1)$ ៖

  · ចំពោះ $x \in ]-\infty, -1[$ ៖ $x + 1 < 0 \implies f(x) - y_{(D)} < 0$

  $\implies$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $(D)$

  · ចំពោះ $x = -1$ ៖ $f(-1) = -3 = y_{(D)}$

  $\implies$ ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ $(D)$ ប្រសព្វគ្នានៅចំណុច $I(-1, -3)$

  · ចំពោះ $x \in ]-1, +\infty[$ ៖ $x + 1 > 0 \implies f(x) - y_{(D)} > 0$

  $\implies$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងលើបន្ទាត់ $(D)$

ⓒ បង្ហាញដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាអថេរភាព ៖

- បង្ហាញដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)' + \left[\frac{2(x+1)}{e^x}\right]' \\ &= 1 + \frac{2(e^x) - 2(x+1)e^x}{(e^x)^2} \\ &= 1 + \frac{2e^x - 2xe^x - 2e^x}{e^{2x}} = 1 - \frac{2xe^x}{e^{2x}} = 1 - \frac{2x}{e^x} = \frac{e^x - 2x}{e^x} \quad \text{(ពិត)} \end{aligned}$$

- ទិសដៅអថេរភាព ៖

  គេមាន $e^x - 2x > 0$ និង $e^x > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ ៖

$$f'(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ⓓ បង្ហាញភាពស្របនៃបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ និងសង់ក្រាប ៖

- បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ ស្របនឹង $(D)$ ៖

· អាប់ស៊ីសចំណុចប៉ះគឺ $x_0 = 0$

$\Longrightarrow y_0 = f(0) = 0 - 2 + \dfrac{2(0+1)}{e^0} = 0 \Longrightarrow O(0,0)$

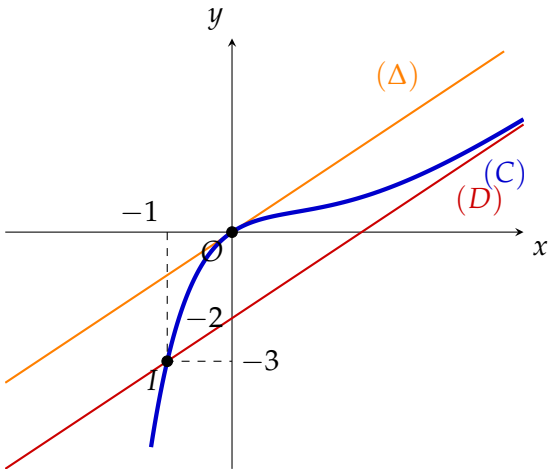
· មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ គឺ $f'(0) = \dfrac{e^0 - 2(0)}{e^0} = 1$

· មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $(D) : y = x - 2$ គឺ $a = 1$

ដោយសារមេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា $(f'(0) = a = 1)$ នាំឱ្យបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D)$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(\Delta)$ គឺ $y = 1(x-0) + 0 \Longrightarrow (\Delta) : y = x$ ។

○ សង់បន្ទាត់ $(D), (\Delta)$ និងក្រាប $(C)$ ៖




## 7 (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

អនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x} - \ln x$ តាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f$ នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

a i បង្ហាញកន្សោមនៃ $f(x)$ ទាំងពីរទម្រង់ ៖

គ្រប់ $x \in ]0,+\infty[$ យើងមាន ៖

○ $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x} - \ln x = x - \dfrac{2}{x} - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$ (ពិត)

○ $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x} - \ln x = \dfrac{x^2 - 2 - x\ln x}{x} = \dfrac{1}{x}(x^2 - x\ln x - 2)$ (ពិត)

ii គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ៖

○ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}(x^2 - x\ln x - 2)\right] = (+\infty)(0-0-2) = -\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\right)$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$

○ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)\right] = (+\infty)(1-0-0) = +\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0 \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2} = 0\right)$

(b) (i) គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបញ្ជាក់សញ្ញា ៖

- គណនាដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\left(x-\frac{2}{x}-\ln x\right)'=1-\left(-\frac{2}{x^2}\right)-\frac{1}{x}=1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+2}{x^2}$$

- បញ្ជាក់សញ្ញា ៖
  ដោយសារ $x^2>0$ គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចគ្នាទៅនឹងសញ្ញានៃភាគយក $(x^2-x+2)$ គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ ។

(ii) សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ពិនិត្យកន្សោម $x^2-x+2$ មាន $\Delta=(-1)^2-4(1)(2)=1-8=-7<0$
- ដោយសារ $\Delta<0$ និងមេគុណ $a=1>0$ នាំឱ្យ $x^2-x+2>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
- ដូចនេះ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]0,+\infty[$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

(c) (i) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $A$ ដែលមានអាប់ស៊ីស $1$ ៖

- អាប់ស៊ីស $x_A=1\implies y_A=f(1)=\frac{1^2-2}{1}-\ln 1=-1\implies A(1,-1)$
- មេគុណប្រាប់ទិស $f'(1)=\frac{1^2-1+2}{1^2}=2$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T_A)$ ត្រង់ $A$ គឺ ៖

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=2(x-1)-1\implies (T_A):y=2x-3$$ ។

(ii) រកកូអរដោនេចំណុច $B$ ដែលបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ៖

- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $B$ ស្របនឹងបន្ទាត់ $y=x$ លុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា ៖

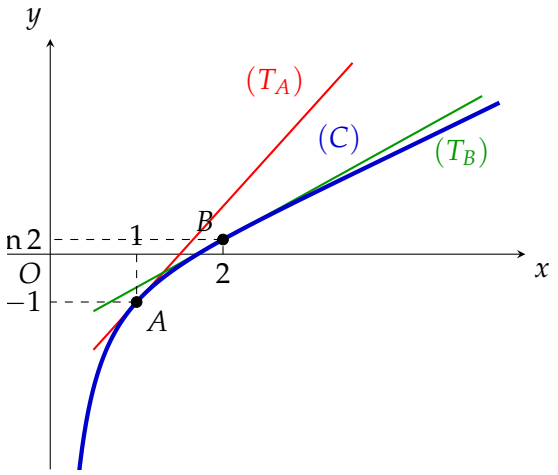
$$f'(x)=1\iff\frac{x^2-x+2}{x^2}=1\iff x^2-x+2=x^2\iff -x+2=0\iff x=2$$

- អរដោនេនៃចំណុច $B$ គឺ ៖

$$y_B = f(2) = \frac{2^2-2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2 \approx 1 - 0.7 = 0.3$$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច $B$ គឺ $B(2, 1-\ln 2)$ (ឬ $B(2, 0.3)$) ។
(សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T_B)$ ត្រង់ $B$ គឺ $(T_B) : y = x - 1 - \ln 2$) ។

**d** សង់ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A$ និងត្រង់ $B$ ៖




**8** (ឧបឆ្នាំ ២០១៨ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $(1, +\infty)$ ដោយ $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វា នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

**a** គណនាលីមីតនៃ $f$ ត្រង់ 1 និង $+\infty$ ៖

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = 3 + \ln(+\infty) = +\infty$
  $\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \implies \lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty\right)$
  $\implies$ បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = -\infty + \ln(1) = -\infty$
  $\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1 \implies \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0\right)$

**b** បង្ហាញដេរីវេ $f'(x)$, សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- បង្ហាញដេរីវេ $f'(x)$ ៖

គ្រប់ $x \in ]1,+\infty[$ យើងមាន ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x+4)' + [\ln(x+1) - \ln(x-1)]' \\ &= -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= -1 + \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -1 - \frac{2}{x^2-1} \\ &= \frac{-(x^2-1)-2}{x^2-1} = \frac{-x^2+1-2}{x^2-1} = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \quad \text{(ពិត)} \end{aligned}$$

- ទិសដៅអថេរភាព ៖

  គ្រប់ $x \in ]1,+\infty[$ យើងមាន $x^2+1>0$ និង $(x+1)(x-1) = x^2-1 > 0$ ៖

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} < 0 \quad \forall x \in ]1,+\infty[$$

  នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]1,+\infty[$ ។

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

(c) (i) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = -x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)] = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1 : y = -x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ។

(ii) បង្ហាញថា $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ និងប្រៀបធៀបទីតាំង ៖

- ចំពោះគ្រប់ $x>1 \implies x+1>x-1>0$ ៖

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1 \quad \text{(ពិត, ព្រោះ } \frac{2}{x-1} > 0\text{)}$$

- ពិនិត្យផលដក $f(x) - y_{d_1} = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ៖

ដោយសារ $\dfrac{x+1}{x-1} > 1 \implies \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) > 0 \implies f(x) - y_{d_1} > 0$ គ្រប់ $x \in ]1,+\infty[$ ។

ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់អាស៊ីមតូត $d_1$ ជានិច្ចលើចន្លោះ $]1,+\infty[$ ។

ⓓ កំណត់កូអរដោនេចំណុចប៉ះ និងសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ៖

- រកកូអរដោនេចំណុចប៉ះ ៖

  មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ គឺ $f'(x) = -\dfrac{5}{3}$ ៖

$$\begin{aligned}\frac{-(x^2+1)}{x^2-1} = -\frac{5}{3} &\iff 3(x^2+1) = 5(x^2-1)\\ &\iff 3x^2+3 = 5x^2-5\\ &\iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \implies x = 2 \quad (\text{ព្រោះ } x>1)\end{aligned}$$

  អរដោនេនៃចំណុចប៉ះ ៖

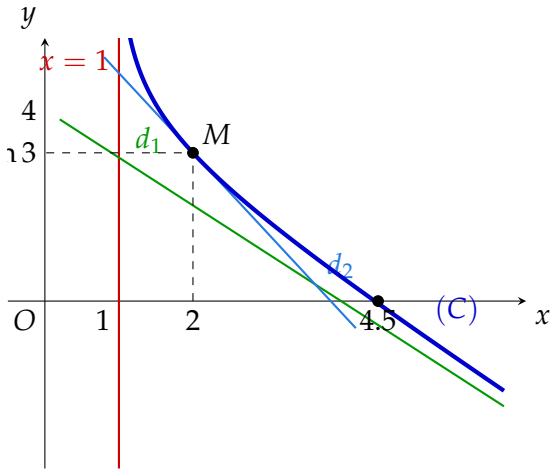
$$y = f(2) = -2+4+\ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = 2+\ln 3 \approx 2+1.1 = 3.1$$

  ដូចនេះ ចំណុចប៉ះមានកូអរដោនេ $M(2,2+\ln 3)$ (ឬ $M(2,3.1)$) ។

- សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ៖

$$\begin{aligned}y &= f'(2)(x-2)+f(2)\\ &= -\frac{5}{3}(x-2)+(2+\ln 3)\\ &= -\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}+2+\ln 3\\ &= -\frac{5}{3}x+\frac{16}{3}+\ln 3 \quad \left(\text{ឬ } y \approx -\frac{5}{3}x+6.43\right)\end{aligned}$$ ។

ⓔ សង់ក្រាប $(C)$, អាស៊ីមតូត $d_1$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ៖




**9** (ឧបត្ថម្ភ ២០១៧ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+\dfrac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ គេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វា នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ បង្ហាញកន្សោម $f(x)$, គណនាលីមីត, អាស៊ីមតូតទ្រេត $d_1$ និងទីតាំងធៀប ៖

- បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ ៖
  គ្រប់ចំនួនពិត $x$ យើងមាន ៖

$$x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}=x+\frac{(1+e^x)-4e^x}{1+e^x}=x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}=f(x)\quad\text{(ពិត)}$$

- គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty+1-0=-\infty$
  $\left(\text{ព្រោះ }\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\right)$
- បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1:y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ ៕

- ទីតាំងធៀបនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $d_1$ ៖
  ពិនិត្យផលដក $f(x)-y_{d_1}=-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ ៖
  ដោយសារ $e^x>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}\implies 1+e^x>0\implies -\dfrac{4e^x}{1+e^x}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៕
  ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $d_1$ ជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ៕

ⓑ គណនាលីមីតត្រង់ $+\infty$, អាស៊ីមតូតទ្រេត $d_2$ និងទីតាំងធៀប ៖

- គណនាលីមីតត្រង់ $+\infty$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^x(e^{-x}-3)}{e^x(e^{-x}+1)}\right) = +\infty - 3 = +\infty$$

- បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖
  $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3e^x}{1+e^x}+3\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-3e^x+3+3e^x}{1+e^x}$
  $= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+e^x} = 0$
  ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2 : y = x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ ៕
- ទីតាំងធៀបនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $d_2$ ៖
  ពិនិត្យផលដក $f(x) - y_{d_2} = \frac{4}{1+e^x}$ ៖
  ដោយសារ $1+e^x > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R} \implies \frac{4}{1+e^x} > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៕
  ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ $d_2$ ជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ៕

(c) (i) គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញកន្សោម ៖

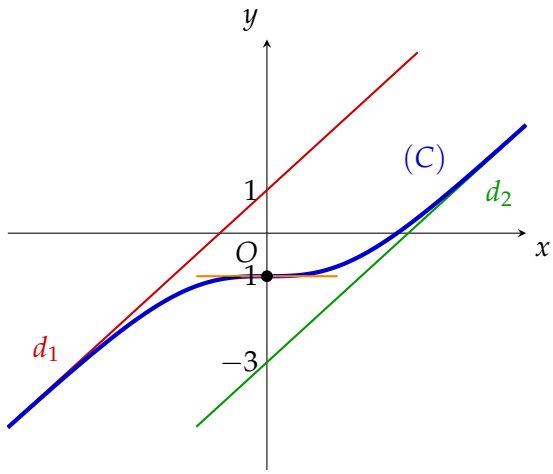
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}\right)' \\
&= 1-4\cdot\frac{e^x(1+e^x)-e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} \\
&= 1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \\
&= \frac{(1+e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{(1+e^x)^2} \\
&= \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \quad \text{(ពិត)}
\end{aligned}$$

(ii) សិក្សាអថេរភាព តារាងអថេរភាព និងសង់ក្រាប ៖

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  គ្រប់ចំនួនពិត $x$ យើងមាន $\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geq 0$ នាំឱ្យ $f'(x) \geq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៕
  ចំណាំ ៖ $f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$ ។
  ដោយសារ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \neq 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ៕
  តម្លៃត្រង់ចំណុចពិសេស ៖ $f(0) = 0 + \frac{1-3(1)}{1+1} = -1$ (ក្រាប $(C)$ មានបន្ទាត់ប៉ះផ្តេកត្រង់ចំណុចរបត់ $I(0,-1)$) ៕
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |

- សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត $d_1$ និង $d_2$ ៖




**10** (ឧបឆ្នាំ ២០១៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

**a** i គណនាលីមីតនៃ $f$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=-\infty+2-0=-\infty$
  $\left(\text{ព្រោះ }\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\implies\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+3}=0\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\dfrac{4}{1+3e^{-x}}\right)=+\infty+2-4=+\infty$
  $\left(\text{ព្រោះ }\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0\implies\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+3}=4\right)$

ii សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $(C)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_1: y=x+2$ ៖

ពិនិត្យផលដក $f(x)-y_{d_1}=-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ៖

ដោយសារ $e^x>0$ និង $e^x+3>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}\implies-\dfrac{4e^x}{e^x+3}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $d_1$ ជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

(ចំណាំ ៖ ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_{d_1}]=0$ នាំឱ្យ $d_1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $(C)$ ត្រង់ $-\infty$)

៕

(b) (i) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ៖

គ្រប់ចំនួនពិត $x$ យើងមាន ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+2)' - 4\cdot\left[\frac{e^x}{e^x+3}\right]' \\ &= 1 - 4\cdot\frac{e^x(e^x+3)-e^x(e^x)}{(e^x+3)^2} \\ &= 1 - \frac{12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x+3)^2-12e^x}{(e^x+3)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2} \\ &= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2} = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \quad \text{(ពិត)} \end{aligned}$$

(ii) សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- ទិសដៅអថេរភាព ៖

  គ្រប់ចំនួនពិត $x$ យើងមាន $f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ៕

  ចំណាំ ៖ $f'(x) = 0 \iff e^x - 3 = 0 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$ ៕

  ដោយសារ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \neq \ln 3$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ៕

- តម្លៃអរដោនេត្រង់ចំណុចពិសេស $x = \ln 3$ ៖

$$f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{4(3)}{3+3} = \ln 3 + 2 - 2 = \ln 3 \approx 1.1$$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\ln 3$ | ↗ | $+\infty$ |

(c) (i) កំណត់លក្ខណៈនៃបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ត្រង់ចំណុច $I(\ln 3)$ ៖

- អាប់ស៊ីសនៃចំណុច $I$ គឺ $x_I = \ln 3 \implies y_I = f(\ln 3) = \ln 3 \implies I(\ln 3, \ln 3)$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ គឺ $f'(\ln 3) = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ $d_2$ ជាបន្ទាត់ប៉ះផ្តេកត្រង់ចំណុច $I$ ហើយមានសមីការ $d_2 : y = \ln 3$ ។

ii សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $(C)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_2$ ៖

ដោយសារ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ និង $f(\ln 3) = \ln 3$ ៖

- ចំពោះ $x \in ]-\infty, \ln 3[$ ៖ $f(x) < f(\ln 3) = \ln 3 \implies$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $d_2$
- ចំពោះ $x = \ln 3$ ៖ $f(\ln 3) = \ln 3 \implies$ ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ $d_2$ ប្រសព្វគ្នានៅចំណុច $I(\ln 3,$
- ចំពោះ $x \in ]\ln 3, +\infty[$ ៖ $f(x) > f(\ln 3) = \ln 3 \implies$ ក្រាប $(C)$ នៅខាងលើបន្ទាត់ $d_2$

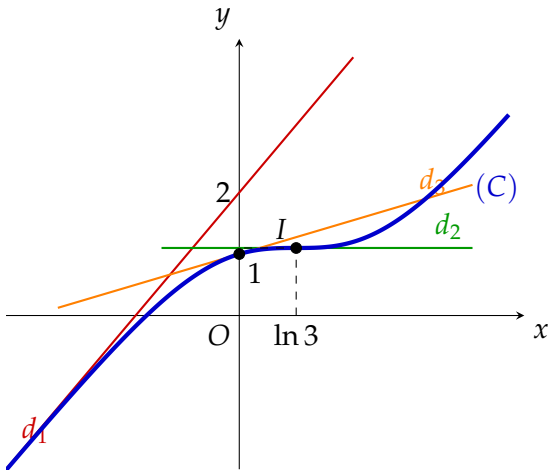
d i បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3$ ត្រង់ $x = 0$ គឺ $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ ៖

- អាប់ស៊ីសចំណុចប៉ះ $x_0 = 0 \implies y_0 = f(0) = 0 + 2 - \dfrac{4(1)}{1+3} = 1$
- មេគុណប្រាប់ទិស $f'(0) = \left(\dfrac{1-3}{1+3}\right)^2 = \left(\dfrac{-2}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3$ គឺ ៖

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \implies d_3 : y = \frac{1}{4}x + 1 \text{ ។}$$

ii សង់ក្រាប $(C)$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_1, d_2, d_3$ ៖




## 11 (ឧបឆ្នាំ ២០១៥ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

a សិក្សាអនុគមន៍ $g(x) = x^2 + \ln x$ លើ $(0, +\infty)$ ៖

i a បង្ហាញថា $g$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ៖

គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ យើងមាន ៖

$$g'(x) = (x^2 + \ln x)' = 2x + \frac{1}{x}$$

ដោយសារ $x > 0 \implies 2x > 0$ និង $\dfrac{1}{x} > 0$ នាំឱ្យ $g'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ ។

ដូចនេះ $g$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0, +\infty[$ ។

**b** គណនា $g(1)$ ៖

$$g(1) = 1^2 + \ln(1) = 1 + 0 = 1 \text{ ។}$$

**ii** **a** ទាញបញ្ជាក់លទ្ធផល ៖

ដោយសារ $g$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]0, +\infty[$ ៖

· បើ $x \geq 1 \implies g(x) \geq g(1) \implies x^2 + \ln x \geq 1$ ។

· បើ $0 < x \leq 1 \implies g(x) \leq g(1) \implies x^2 + \ln x \leq 1$ ។

**b** កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ ៖

· ចំពោះ $x \in ]0, 1[$ ៖ $g(x) < g(1) = 1 \implies x^2 + \ln x - 1 < 0$

· ចំពោះ $x = 1$ ៖ $g(1) = 1 \implies x^2 + \ln x - 1 = 0$

· ចំពោះ $x \in ]1, +\infty[$ ៖ $g(x) > g(1) = 1 \implies x^2 + \ln x - 1 > 0$

**b** សិក្សាអនុគមន៍ $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ លើ $(0, +\infty)$ ៖

**i** សិក្សាលីមីតត្រង់ 0 និង $+\infty$ ៖

○ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left( x + 1 - \dfrac{\ln x}{x} \right) = 0 + 1 - \left( \dfrac{-\infty}{0^+} \right) = 1 - (-\infty) = +\infty$

$\implies$ បន្ទាត់ $x = 0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$

○ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( x + 1 - \dfrac{\ln x}{x} \right) = +\infty + 1 - 0 = +\infty$

$\left( \text{ព្រោះ } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \right)$

**ii** បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$ ៖

គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ យើងមាន ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)' - \left( \frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= 1 - \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - (1 - \ln x)}{x^2} = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} \quad \text{(ពិត)} \end{aligned}$$

**iii** សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

○ សញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

ដោយសារ $x^2 > 0$ គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចសញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ (តាមលទ្ធផលសំណួរ A.2-ab) ៖

· ចំពោះ $x \in ]0, 1[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

· ចំពោះ $x=1$ ៖ $f'(1)=0$

· ចំពោះ $x\in]1,+\infty[$ ៖ $f'(x)>0 \Longrightarrow$ $f$ ជាអនុគមន៍កើន

○ តម្លៃអប្បបរមា ៖

អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប (និងជាច់ខាត) ត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=1+1-\dfrac{\ln 1}{1}=2$ ៕

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

iv a បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\Delta: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $+\infty$ ៕

b សិក្សាទីតាំងធៀប, កំណត់ចំណុចប្រសព្វ $I$ និងសង់ក្រាប ៖

○ ទីតាំងធៀបនៃ $C$ និង $\Delta$ ៖

ពិនិត្យផលដក $f(x)-y_\Delta=-\dfrac{\ln x}{x}$ ៖

· ចំពោះ $x\in]0,1[$ ៖ $\ln x<0$

$\Longrightarrow -\dfrac{\ln x}{x}>0 \Longrightarrow$ ក្រាប $C$ នៅខាងលើបន្ទាត់ $\Delta$

· ចំពោះ $x=1$ ៖ $f(1)-y_\Delta(1)=0$

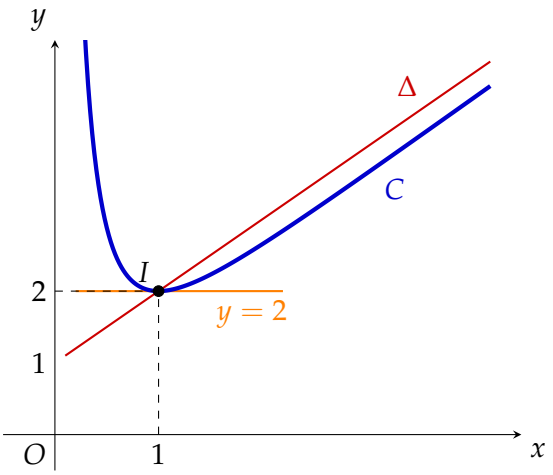
$\Longrightarrow$ ក្រាប $C$ ប្រសព្វបន្ទាត់ $\Delta$ ត្រង់ចំណុច $I(1,2)$

· ចំពោះ $x\in]1,+\infty[$ ៖ $\ln x>0 \Longrightarrow -\dfrac{\ln x}{x}<0$

$\Longrightarrow$ ក្រាប $C$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $\Delta$

○ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $I$ ៖ $I(1,2)$ (ត្រូវជាចំណុចអប្បបរមានៃក្រាប $C$ ផងដែរ) ៕

○ សង់បន្ទាត់ $\Delta$ និងក្រាប $C$ ៖




**12** (ឧបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ លើកទី២)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $I=]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ ។

ⓐ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)=-x+1-2\ln x$ លើ $I=]0,+\infty[$ ៖

- គណនា $h(1)$ ៖

$$h(1)=-1+1-2\ln(1)=0-0=0 \text{ ॥}$$

- សិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ៖

គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ យើងមាន ៖

$$h'(x)=(-x+1-2\ln x)'=-1-\frac{2}{x}=\frac{-x-2}{x}$$

ដោយសារ $x>0 \implies -x-2<0$ នាំឱ្យ $h'(x)<0$ គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ ॥

ដូចនេះ អនុគមន៍ $h$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0,+\infty[$ ॥

(ទាញយកសញ្ញានៃ $h(x)$ ៖ ព្រោះ $h$ ចុះដាច់ខាត និង $h(1)=0$ នាំឱ្យចំពោះ $x\in]0,1[, h(x)>0$ និងចំពោះ $x\in]1,+\infty[, h(x)<0$

ⓑ សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ លើ $I=]0,+\infty[$ ៖

ℹ គណនាលីមីតត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ៖

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\ln x}{x^2}=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to 0^+}(x+\ln x)=-\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+\right)$

$\implies$ បន្ទាត់ $x=0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0+0=0$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\right)$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $+\infty$

**ii** គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ៖

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x+\ln x)'(x^2)-(x+\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}\\&=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-(x+\ln x)(2x)}{x^4}\\&=\frac{x^2+x-2x^2-2x\ln x}{x^4}\\&=\frac{-x^2+x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(-x+1-2\ln x)}{x^4}=\frac{-x+1-2\ln x}{x^3}\end{aligned}$$ ॥

**iii** បង្ហាញថាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដូច $h(x)$ លើ $I$ ៖

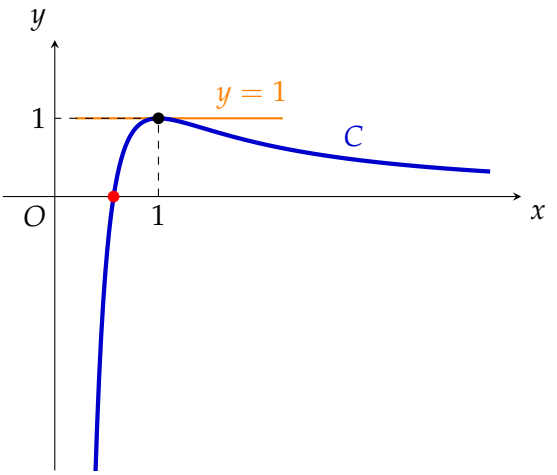
ដោយសារ $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$ ហើយគ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ ភាគបែង $x^3>0$ ជានិច្ច នាំឱ្យដេរីវេ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នានឹង $h(x)$ គ្រប់ $x\in]0,+\infty[$ ॥

**iv** ទាញយកអថេរភាព និងសង់ក្រាប $C$ ៖

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ចំពោះ $x\in]0,1[$ ៖ $h(x)>0\Longrightarrow f'(x)>0\Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - ចំពោះ $x=1$ ៖ $f'(1)=\frac{h(1)}{1^3}=0$
  - ចំពោះ $x\in]1,+\infty[$ ៖ $h(x)<0\Longrightarrow f'(x)<0\Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- តម្លៃអតិបរមា ៖
  អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប (និងជាច់ខាត) ត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\frac{1+\ln 1}{1^2}=1$ ॥
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

- សង់ក្រាប $C$ ៖




**13** (ឧបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ លើកទី១)

$f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$ និង $C$ ជាក្រាបរបស់វា។

**a** **i** រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-5+\frac{8\ln x}{x}+\frac{9}{x}\right)=+\infty-5+0+0=+\infty$$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{x}=0\right)$ ។

**ii** រក $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ៖

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x-5+\frac{8\ln x+9}{x}\right)=-\infty$$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to0^+}(8\ln x+9)=-\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to0^+} x=0^+ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{8\ln x+9}{x}=-\infty\right)$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x=0$ (អ័ក្សអរដោនេ) ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង $C$ ។

**iii** បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-5)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8\ln x+9}{x}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\Delta: y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង $C$ នៅជិត $+\infty$ ។

**iv** កំណត់អាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង $\Delta$ និងខ្សែកោង $C$ ៖

ឱ្យ $f(x)-y_\Delta=0 \iff \dfrac{8\ln x+9}{x}=0$ ៖

$$8\ln x+9=0 \iff \ln x=-\frac{9}{8} \iff x=e^{-\frac{9}{8}}.$$

ដូចនេះ អាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង $\Delta$ និងខ្សែកោង $C$ គឺ $x = e^{-\frac{9}{8}}$ ។

**b** **i** បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ៖

គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ យើងមាន ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-5)' + 8 \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' + \left(\frac{9}{x}\right)' \\ &= 1 + 8 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} - \frac{9}{x^2} \\ &= 1 + \frac{8(1-\ln x) - 9}{x^2} = 1 + \frac{8 - 8\ln x - 9}{x^2} \\ &= 1 + \frac{-8\ln x - 1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 8\ln x - 1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \quad (\text{ពិត, ដែល } g(x) = x^2 - 8\ln x - 1) \text{ ។} \end{aligned}$$

**ii** សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ៖

- សញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

  ដោយសារ $x^2 > 0$ គ្រប់ $x \in ]0, +\infty[$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $]0, +\infty[$ ។

  គេដឹងថាសមីការ $g(x) = 0$ មានបួសពីរគឺ $x' = 1$ និង $x'' = \alpha > 1$ ៖

  - ចំពោះ $x \in ]0, 1[ \cup ]\alpha, +\infty[$ ៖ $g(x) > 0 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - ចំពោះ $x \in ]1, \alpha[$ ៖ $g(g) < 0 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
  - ចំពោះ $x = 1$ ឬ $x = \alpha$ ៖ $f'(x) = 0$

- តម្លៃបរមា ៖

  - តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 - 5 + \dfrac{8\ln 1 + 9}{1} = -4 + 9 = 5$
  - តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = \alpha$ គឺ $f(\alpha) = \alpha - 5 + \dfrac{8\ln\alpha + 9}{\alpha}$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $5$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**14** (ឧបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ លើកទី១)

$f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ។ តេតាងដោយ $C$ ជាក្រាបរបស់វា ។

(a) (i) រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4-x-2e^{-x})=-\infty$$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-x}=0\right)$ ។

(ii) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)]=\lim_{x\to+\infty}(-2e^{-x})=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង $C$ ត្រង់ $+\infty$ ។

(iii) បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង $C$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $D$ ៖

ពិនិត្យផលដក $f(x)-y_D=-2e^{-x}$ ៖

ដោយសារ $e^{-x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R} \implies -2e^{-x}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ ខ្សែកោង $C$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $D$ ជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

(iv) ផ្ទៀងផ្ទាត់កន្សោម $f(x)$ ៖

គ្រប់ចំនួនពិត $x$ យើងមាន ៖

$$\frac{4e^x-xe^x-2}{e^x}=\frac{4e^x}{e^x}-\frac{xe^x}{e^x}-\frac{2}{e^x}=4-x-2e^{-x}=f(x) \quad \text{(ពិត)}$$

(v) រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x-xe^x-2}{e^x}=-\infty$$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+ \text{ និង } \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0 \implies \text{ភាគយក} \to -2\right)$ ។

(b) (i) គណនា $f'(x)$, សិក្សាអថេរភាព និងរកតម្លៃអតិបរមា ៖

- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x) = (4 - x - 2e^{-x})' = -1 - 2(-e^{-x}) = -1 + 2e^{-x} = \frac{2 - e^x}{e^x}$$

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  - ឱ្យ $f'(x) = 0 \iff -1 + 2e^{-x} = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$
  - ចំពោះ $x \in ]-\infty, \ln 2[$ ៖ $e^x < 2 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  - ចំពោះ $x \in ]\ln 2, +\infty[$ ៖ $e^x > 2 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- តម្លៃអតិបរមា ៖

  អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប (និងដាច់ខាត) ត្រង់ $x = \ln 2$ គឺ ៖

$$f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2} = 4 - \ln 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \ln 2 \approx 2.31\,.$$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3 - \ln 2$ | ↘ | $-\infty$ |

(ii) កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $A(0, f(0))$ ៖

- អាប់ស៊ីសចំណុចប៉ះ $x_0 = 0 \implies y_0 = f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 2 \implies A(0,2)$
- មេគុណប្រាប់ទិស $f'(0) = -1 + 2e^0 = 1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A$ មានទម្រង់ ៖

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \implies (T_A) : y = x + 2$$ ¶

(iii) បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\beta \in [-1, 0]$ ៖

- លើចន្លោះ $[-1, 0] \subset ]-\infty, \ln 2]$, អនុគមន៍ $f$ ជាប់ និងកើនដាច់ខាត
- $f(-1) = 4 - (-1) - 2e^1 = 5 - 2e \approx -0.44 < 0$
- $f(0) = 2 > 0$

ដោយសារ $f(-1) \cdot f(0) < 0$, តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយយ៉ាងតិចមួយ $\beta \in ]-1, 0[$ ។ ហើយដោយសារ $f$ កើនដាច់ខាតលើ $[-1, 0]$ នាំឱ្យចម្លើយ $\beta$

នេះមានតែមួយគត់ ៕

**15** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៦ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-4}{1-x}$ និង $(C)$ ជាក្រាបរបស់វា។

**a** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{1-x}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$1-x\neq 0 \iff x\neq 1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[}$ ៕

**b** **i** រកចំនួនពិត $a,b,c$ ៖

គ្រប់ $x\neq 1$, ដោយសារ $1-x=-(x-1)$ យើងអាចសរសេរ ៖

$$f(x)=\frac{x^2-4}{-(x-1)}=\frac{-x^2+4}{x-1}$$

ធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(-x^2+4)\div(x-1)$ ៖

$$\frac{-x^2+4}{x-1}=\frac{-x(x-1)-(x-1)+3}{x-1}=-(x+1)+\frac{3}{x-1}=-x-1+\frac{3}{x-1}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយទម្រង់ $ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ យើងបាន ៖

$$a=-1,\quad b=-1,\quad c=3$$ ៕

ដូចនេះ $\boxed{a=-1,\quad b=-1,\quad c=3}$

**ii** បង្ហាញអាស៊ីមតូតទ្រេត និងអាស៊ីមតូតឈរ ៖

- អាស៊ីមតូតទ្រេត $(D):y=-x-1$ ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-1}=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\boxed{(D):y=-x-1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ៕

- អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ ៖

$$\cdot\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x-1+\frac{3}{x-1}\right)=-2+\left(\frac{3}{0^-}\right)=-\infty$$
$$\cdot\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-x-1+\frac{3}{x-1}\right)=-2+\left(\frac{3}{0^+}\right)=+\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $\boxed{x=1}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ៕

◈ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ព្រមទាំងអាស៊ីមតូត ៖

○ ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

គ្រប់ $x\in D$ តាមកន្សោម $f(x)=-x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ៖

$$f'(x)=-1-\frac{3}{(x-1)^2}=\frac{-(x-1)^2-3}{(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2}$$

ភាគយក $-x^2+2x-4$ មាន $\Delta'=1^2-(-1)(-4)=-3<0$ និងមេគុណ $a=-1<0$ នាំឱ្យ $-x^2+2x-4<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ៕

ដោយសារ $(x-1)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$ នាំឱ្យ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in D$ ៕

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty,1[$ និងលើចន្លោះ $]1,+\infty[$ ៕

○ លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-1+\dfrac{3}{x-1}\right)=+\infty$

· $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x-1+\dfrac{3}{x-1}\right)=-\infty$

○ តារាងអថេរភាព ៖

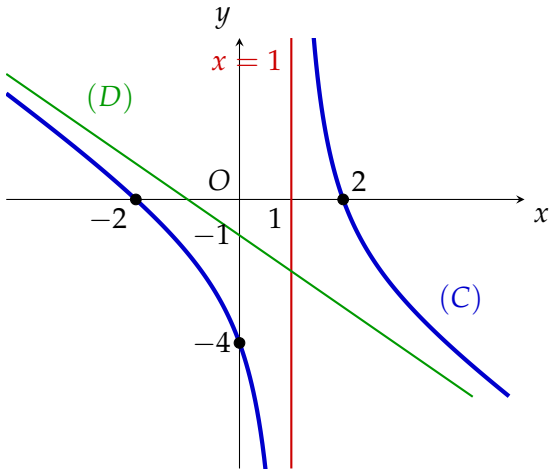
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

○ ចំណុចប្រសព្វសំខាន់ៗ ៖

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Ox)$ ៖ $f(x)=0\iff x^2-4=0\iff x=-2$ ឬ $x=2$ នាំឱ្យបានចំណុច $(-2,0)$ និង $(2,0)$

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0\implies f(0)=-4$ នាំឱ្យបានចំណុច $(0,-4)$

○ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**16** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៥ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x)=\dfrac{2-x-2x^2}{-1-x}$ ។

ⓐ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2-x-2x^2}{-1-x}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$-1-x\neq 0 \iff x\neq -1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[ \text{ ॥}$$

ⓑ កំណត់ចំនួនពិត $a,b,c$ ៖

គ្រប់ $x\neq -1$, យើងអាចសរសេរ ៖

$$f(x)=\frac{-(2x^2+x-2)}{-(x+1)}=\frac{2x^2+x-2}{x+1}$$

ធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(2x^2+x-2)\div(x+1)$ ៖

$$\frac{2x^2+x-2}{x+1}=\frac{2x(x+1)-(x+1)-1}{x+1}=2x-1-\frac{1}{x+1}=2x-1+\frac{-1}{x+1}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយទម្រង់ $ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ យើងបាន ៖

$$a=2,\quad b=-1,\quad c=-1 \text{ ॥}$$

ⓒ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d : y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (2x-1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d : y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ៕

ⓓ សិក្សាទីតាំងនៃ $d$ ធៀបនឹងក្រាប $C$ ៖

ពិនិត្យផលដក $f(x) - y_d = -\frac{1}{x+1}$ ៖

· ចំពោះ $x \in ]-\infty, -1[$ ៖ $x+1 < 0 \implies -\frac{1}{x+1} > 0 \implies$ ក្រាប $C$ នៅខាងលើបន្ទាត់ $d$

· ចំពោះ $x \in ]-1, +\infty[$ ៖ $x+1 > 0 \implies -\frac{1}{x+1} < 0 \implies$ ក្រាប $C$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $d$

ⓔ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $C$ ព្រមទាំងបន្ទាត់ $d$ ៖

○ ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

គ្រប់ $x \in D$ តាមកន្សោម $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ ៖

$$f'(x) = 2 - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ដោយសារ $(x+1)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D \implies \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \implies f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in D$ ៕

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty, -1[$ និងលើចន្លោះ $]-1, +\infty[$ ៕

○ លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

· $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x - 1 - \frac{1}{x+1}\right) = -\infty$

· $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(2x - 1 - \frac{1}{x+1}\right) = -3 - \left(\frac{1}{0^-}\right) = +\infty$

· $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(2x - 1 - \frac{1}{x+1}\right) = -3 - \left(\frac{1}{0^+}\right) = -\infty$

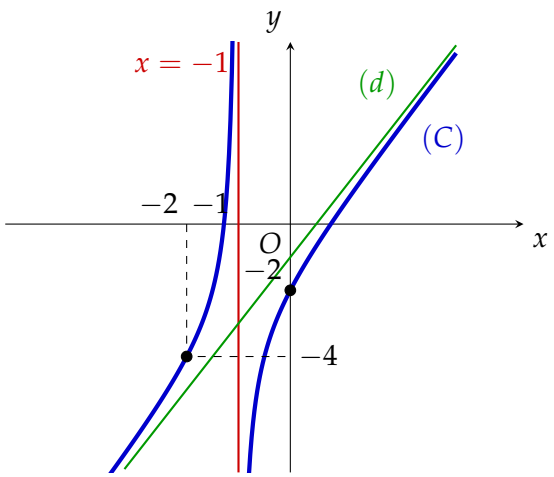
$\implies$ បន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$

· $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - 1 - \frac{1}{x+1}\right) = +\infty$

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | |

- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=-2 \implies (0,-2)$
  - ត្រង់ $x=-2$ ៖ $f(-2)=2(-2)-1-\dfrac{1}{-1}=-4 \implies (-2,-4)$
- សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $d$ ៖




**17** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៤ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{-x^2+x+3}{x+1}$ ។ យើងតាងក្រាប $(C)$ តំណាង $f$ ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2+x+3}{x+1}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$x+1\neq 0 \iff x\neq -1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[ \text{ ។}$$

(b) បង្ហាញថា $f(x)=-x+2+\dfrac{1}{x+1}$ ៖

គ្រប់ $x \in D$ យើងអាចសរសេរ ៖

$$f(x) = \frac{-x(x+1)+2(x+1)+1}{x+1} = \frac{(x+1)(-x+2)+1}{x+1} = -x+2+\frac{1}{x+1} \quad \text{(ពិត)} \text{ ॥}$$

ⓒ គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(-x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = 3+\left(\dfrac{1}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(-x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = 3+\left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$

ⓓ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖
  ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ॥
- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖
  ដោយសារ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(d) : y = -x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ॥

ⓔ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ៖

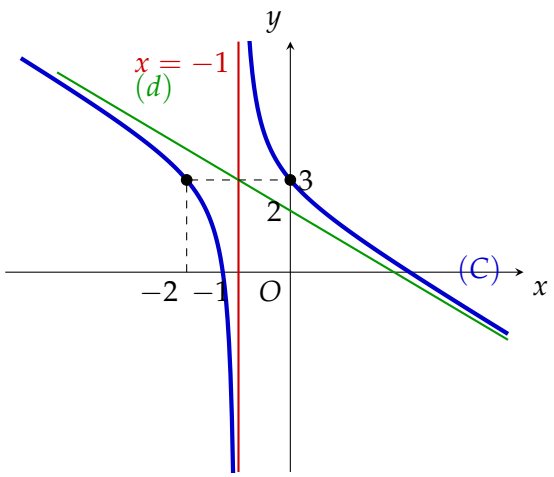
- ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖
  គ្រប់ $x \in D$ តាមកន្សោម $f(x) = -x+2+\dfrac{1}{x+1}$ ៖

$$f'(x) = -1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2}$$

  ដោយសារ $-(x+1)^2-1 < 0$ និង $(x+1)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D$ នាំឱ្យ $f'(x) < 0$ គ្រប់ $x \in D$ ॥
  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty,-1[$ និងលើចន្លោះ $]-1,+\infty[$ ॥
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | |

- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=3 \implies (0,3)$
  - ត្រង់ $x=-2$ ៖ $f(-2)=-(-2)+2+\dfrac{1}{-2+1}=3 \implies (-2,3)$
  - ត្រង់ $x=1$ ៖ $f(1)=1.5 \implies (1,1.5)$
- សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**18** (ប៉ាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២៣ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ និងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$(x-1)^2 \neq 0 \iff x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[ \text{ ។}$$

(b) គណនាលីមីត និងរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

○ គណនាលីមីត ៖

· $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to 1}(3x-1) = 2 \text{ និង } (x-1)^2 > 0\ \forall x \neq 1\right)$

· $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

· $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

○ រកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

· ដោយសារ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។

· ដោយសារ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = 0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

ⓒ បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{-3x-1}{(x-1)^3}$ ៖

គ្រប់ $x \in D$ តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x-1)'(x-1)^2 - (3x-1)[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} \\ &= \frac{3(x-1)^2 - (3x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)[3(x-1) - 2(3x-1)]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x-3-6x+2}{(x-1)^3} = \frac{-3x-1}{(x-1)^3} \quad \text{(ពិត)} \text{ ។} \end{aligned}$$

ⓓ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ $f(x)$ ៖

○ ទិសដៅអថេរភាព ៖

· ឱ្យ $f'(x) = 0 \iff -3x-1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{3}$

· ចំពោះ $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$ ៖ $-3x-1 > 0$ និង $(x-1)^3 < 0$

$\implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

· ចំពោះ $x \in \left]-\dfrac{1}{3}, 1\right[$ ៖ $-3x-1 < 0$ និង $(x-1)^3 < 0$

$\implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន

· ចំពោះ $x \in ]1, +\infty[$ ៖ $-3x-1 < 0$ និង $(x-1)^3 > 0 \implies f'(x) < 0$

$\implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

○ តម្លៃអប្បបរមាធៀប ៖

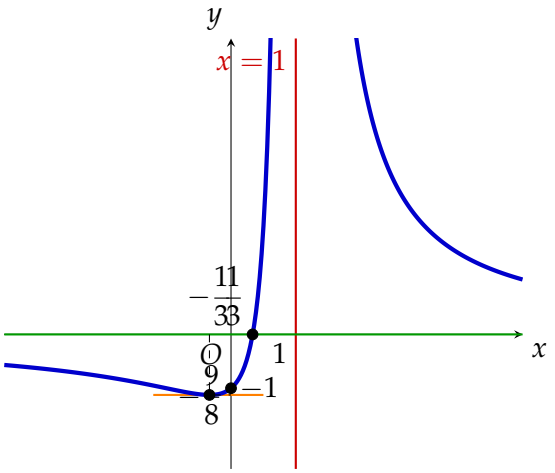
អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-\dfrac{1}{3}$ គឺ ៖

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2}=\frac{-2}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{-2}{\frac{16}{9}}=-\frac{9}{8}=-1.125\,.$$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{9}{8}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ |

- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=-1 \implies (0,-1)$
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Ox)$ ៖ $f(x)=0 \iff 3x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{3} \implies \left(\dfrac{1}{3},0\right)$
- សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**19** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២២ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{4-x^2}{1-x}$ និងគេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ $f$ ។

(a) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4-x^2}{1-x}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$1-x\neq 0 \iff x\neq 1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[ \text{ ។}$$

ⓑ បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{1-x}$ ៖

គ្រប់ $x \in D$ យើងមាន ៖

$$x + 1 + \frac{3}{1-x} = \frac{(x+1)(1-x)+3}{1-x} = \frac{1-x^2+3}{1-x} = \frac{4-x^2}{1-x} = f(x) \quad \text{(ពិត) ។}$$

ⓒ គណនាលីមីត និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖

- គណនាលីមីត ៖
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left( x + 1 + \dfrac{3}{1-x} \right) = 2 + \left( \dfrac{3}{0^-} \right) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left( x + 1 + \dfrac{3}{1-x} \right) = 2 + \left( \dfrac{3}{0^+} \right) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( x + 1 + \dfrac{3}{1-x} \right) = +\infty + 0 = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left( x + 1 + \dfrac{3}{1-x} \right) = -\infty + 0 = -\infty$
- ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត ៖
  - ដោយសារ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។
  - ដោយសារ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{1-x} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(d) : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

ⓓ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

  គ្រប់ $x \in D$ តាមកន្សោម $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{1-x}$ ៖

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2+3}{(1-x)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(1-x)^2}$$

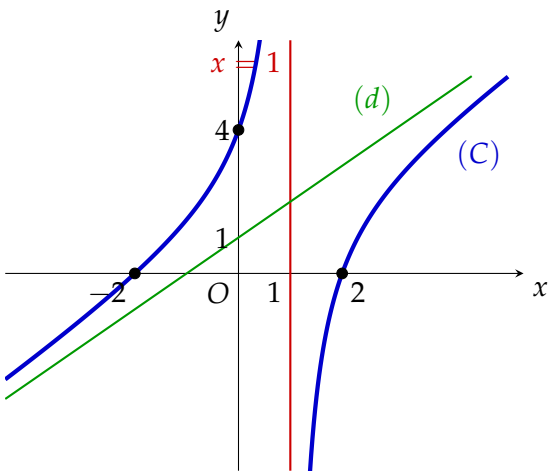
  ភាគយក $x^2 - 2x + 4$ មាន $\Delta' = (-1)^2 - (1)(4) = -3 < 0$ និងមេគុណ $a = 1 > 0$ នាំឱ្យ $x^2 - 2x + 4 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

  ដោយសារ $(1-x)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D$ នាំឱ្យ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in D$ ។

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty, 1[$ និងលើចន្លោះ $]1, +\infty[$ ។
- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | |

- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=4 \implies (0,4)$
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Ox)$ ៖ $f(x)=0 \iff 4-x^2=0 \iff x=-2$ ឬ $x=2$ នាំឱ្យបានចំណុច $(-2,0)$ និង $(2,0)$
- សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**20** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០២១ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{2-x}$ ។ យើងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

**a** រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{2-x}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$2-x\neq 0 \iff x\neq 2$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[ \text{ ។}$$

◈ **b** បង្ហាញថា $f(x)=3-x+\dfrac{1}{2-x}$ ៖

គ្រប់ $x\in D$ យើងមាន ៖

$$3-x+\frac{1}{2-x}=\frac{(3-x)(2-x)+1}{2-x}=\frac{6-5x+x^2+1}{2-x}=\frac{x^2-5x+7}{2-x}=f(x)\quad \text{(ពិត)}\ \blacksquare$$

◈ **c** គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty,+\infty$ និង $2$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-x+\dfrac{1}{2-x}\right)=+\infty+0=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-x+\dfrac{1}{2-x}\right)=-\infty+0=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(3-x+\dfrac{1}{2-x}\right)=1+\left(\dfrac{1}{0^+}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(3-x+\dfrac{1}{2-x}\right)=1+\left(\dfrac{1}{0^-}\right)=-\infty$

◈ **d** រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

- អាស៊ីមតូតឈរ ៖

  ដោយសារ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ $\blacksquare$

- អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

  ដោយសារ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x+3)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2-x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(d):y=-x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ $\blacksquare$

◈ **e** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ៖

- ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

  គ្រប់ $x\in D$ តាមកន្សោម $f(x)=3-x+\dfrac{1}{2-x}$ ៖

  $$f'(x)=-1+\frac{1}{(2-x)^2}=\frac{-(2-x)^2+1}{(2-x)^2}=\frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$$

  ដោយសារ $(2-x)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចសញ្ញានៃភាគយក $-x^2+4x-3$ ៖

  · ឱ្យ $f'(x)=0\iff -x^2+4x-3=0\iff x=1$ ឬ $x=3$

  · ចំពោះ $x\in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ ៖ $f'(x)<0\implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

  · ចំពោះ $x\in]1,2[\cup]2,3[$ ៖ $f'(x)>0\implies f$ ជាអនុគមន៍កើន

- តម្លៃបរមា ៖

  · តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=3-1+\dfrac{1}{2-1}=3$

  · តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ គឺ $f(3)=3-3+\dfrac{1}{2-3}=-1$

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | ↗ | ‖ | ↗ | $-1$ | ↘ | |
| | | | $3$ | | ‖ | $-\infty$ | | | $-\infty$ |

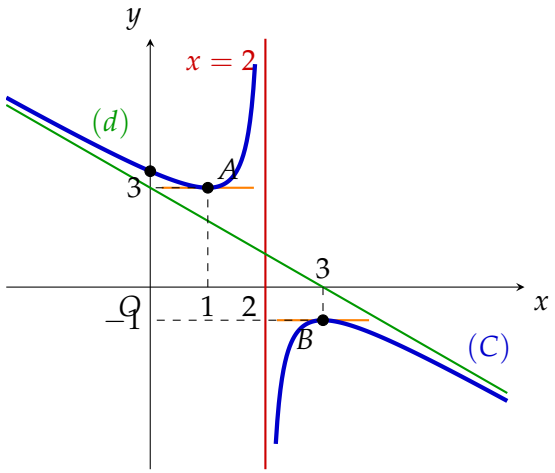
○ ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=\dfrac{7}{2}=3.5 \implies (0,3.5)$

· ចំណុចអប្បបរមាធៀប ៖ $A(1,3)$

· ចំណុចអតិបរមាធៀប ៖ $B(3,-1)$

○ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**21** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$ ។ យើងតាង $(C)$ ក្រាបរបស់អនុគមន៍នេះ ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{3}{x+1}$ ៖

គ្រប់ $x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ យើងមាន ៖

$$x+1-\frac{3}{x+1}=\frac{(x+1)^2-3}{x+1}=\frac{x^2+2x+1-3}{x+1}=\frac{x^2+2x-2}{x+1}=f(x) \quad \text{(ពិត) chaos ॥}$$

ⓑ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ៖

○ អាស៊ីមតូតឈរ ៖

· $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(x+1-\dfrac{3}{x+1}\right) = 0-\left(\dfrac{3}{0^-}\right) = +\infty$

· $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(x+1-\dfrac{3}{x+1}\right) = 0-\left(\dfrac{3}{0^+}\right) = -\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។

○ អាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(d): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

◈ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ ៖

○ ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

គ្រប់ $x\in D$ តាមកន្សោម $f(x)=x+1-\dfrac{3}{x+1}$ ៖

$$f'(x) = 1-\left(-\frac{3}{(x+1)^2}\right) = 1+\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2+3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$$

ដោយសារ $(x+1)^2>0$ និង $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ គ្រប់ $x\in D$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in D$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty,-1[$ និងលើចន្លោះ $]-1,+\infty[$ ។

○ លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\dfrac{3}{x+1}\right) = -\infty-0 = -\infty$

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\dfrac{3}{x+1}\right) = +\infty-0 = +\infty$

○ តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

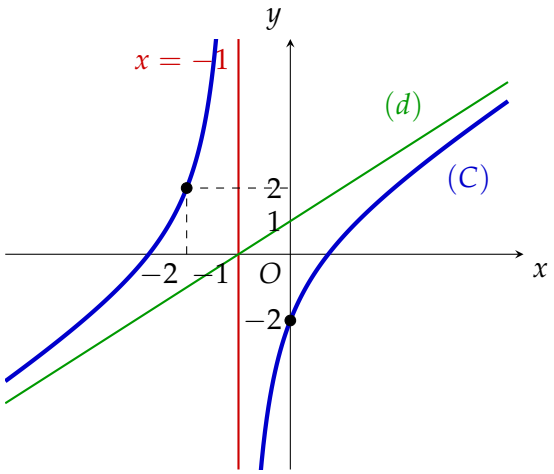
○ ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \Longrightarrow f(0)=-2 \Longrightarrow (0,-2)$

· ត្រង់ $x=-2$ ៖ $f(-2)=-2+1-\dfrac{3}{-2+1}=2 \Longrightarrow (-2,2)$

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Ox)$ ៖ $f(x)=0 \Longleftrightarrow x^2+2x-2=0 \Longrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$

○ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**22** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៨ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ ។ យើងតាងដោយ $(C)$ ក្រាបរបស់វានៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ⓐ រកដែនកំណត់ $D$ នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$x^2-5x+7\neq 0$$

ពិនិត្យឌីស្គ្រីមីណង់ភាគបែង ៖ $\Delta=(-5)^2-4(1)(7)=25-28=-3<0$

ដោយសារ $\Delta<0$ និងមេគុណ $a=1>0$ នាំឱ្យ $x^2-5x+7>0$ គ្រប់ចំនួនពិត $x\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[ \text{ chaos } \P$$

ⓑ សិក្សាលីមីត និងទាញយកសមីការអាស៊ីមតូត $d$ ៖

○ គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

- សមីការអាស៊ីមតូត ៖

  ដោយសារ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $d : y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ៕

(c) (i) ស្រាយបំភ្លឺថា $f'(x) = \dfrac{-3(x^2-6x+8)}{(x^2-5x+7)^2}$ ៖

គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2-7x+5)'(x^2-5x+7)-(2x^2-7x+5)(x^2-5x+7)'}{(x^2-5x+7)^2} \\ &= \frac{(4x-7)(x^2-5x+7)-(2x^2-7x+5)(2x-5)}{(x^2-5x+7)^2} \\ &= \frac{(4x^3-27x^2+63x-49)-(4x^3-24x^2+45x-25)}{(x^2-5x+7)^2} \\ &= \frac{-3x^2+18x-24}{(x^2-5x+7)^2} = \frac{-3(x^2-6x+8)}{(x^2-5x+7)^2} \end{aligned}$$ (ពិត) chaos ៕

(ii) សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

- សញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

  ដោយសារ $(x^2-5x+7)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចសញ្ញានៃ $-3(x^2-6x+8)$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2-6x+8 = 0 \\ &\iff (x-2)(x-4) = 0 \implies x = 2 \text{ ឬ } x = 4 \end{aligned}$$

  · ចំពោះ $x \in ]-\infty, 2[ \cup ]4, +\infty[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

  · ចំពោះ $x \in ]2, 4[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន

- តម្លៃបរមា ៖

  · តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = \dfrac{2(2)^2-7(2)+5}{2^2-5(2)+7} = \dfrac{-1}{1} = -1$

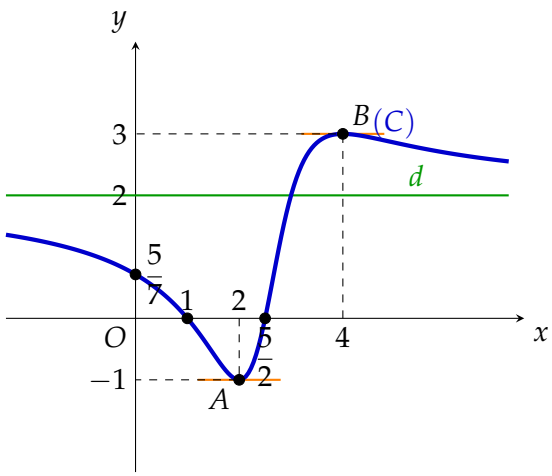
  · តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 4$ គឺ $f(4) = \dfrac{2(4)^2-7(4)+5}{4^2-5(4)+7} = \dfrac{9}{3} = 3$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $2$ |

iii សង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=\frac{5}{7}\approx 0.71 \implies \left(0,\frac{5}{7}\right)$
  - ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Ox)$ ៖ $f(x)=0 \iff 2x^2-7x+5=0 \iff x=1$ ឬ $x=\frac{5}{2}=2.5$
  - ចំណុចអប្បបរមាធៀប ៖ $A(2,-1)$
  - ចំណុចអតិបរមាធៀប ៖ $B(4,3)$
- ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត $d$ ៖




**23** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៧ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$ ។ យើងតាង $C$ ក្រាបរបស់វានៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

a សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $-\infty$, ត្រង់ $2$ និងត្រង់ $+\infty$ ៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x-1)=1 \text{ និង } x-2<0\right)$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\left(\text{ព្រោះ } \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x-1)=1 \text{ និង } x-2>0\right)$

$\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

ⓑ សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ៖

- ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

គ្រប់ $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(x^2-x-1)'(x-2)-(x^2-x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}\\ &=\frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-1)(1)}{(x-2)^2}\\ &=\frac{2x^2-5x+2-x^2+x+1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

ដោយសារ $(x-2)^2>0$ គ្រប់ $x\neq 2$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចសញ្ញានៃភាគយក $x^2-4x+3$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff x^2-4x+3=0\\ &\iff (x-1)(x-3)=0 \Longrightarrow x=1 \quad \text{ឬ} \quad x=3\end{aligned}$$

- ចំពោះ $x\in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ ៖ $f'(x)>0\Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើន
- ចំពោះ $x\in]1,2[\cup]2,3[$ ៖ $f'(x)<0\Longrightarrow f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

- តម្លៃបរមា ៖

- តម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\dfrac{1^2-1-1}{1-2}=1$
- តម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ គឺ $f(3)=\dfrac{3^2-3-1}{3-2}=5$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | ‖ | $+\infty$ | $5$ | ↗ | $+\infty$ |

ⓒ (i) រកចំនួនពិត $a, b, c$ ៖

គ្រប់ $x \neq 2$, យើងអាចធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(x^2 - x - 1) \div (x - 2)$ ៖

$$\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \frac{x(x-2) + 1(x-2) + 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$$

ធៀងផ្ទាត់ជាមួយទម្រង់ $ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ យើងបាន ៖

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

(ii) បង្ហាញអាស៊ីមតូតទ្រេត និងសិក្សាទីតាំងធៀប ៖

- បង្ហាញបន្ទាត់ $d : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $C$ ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ៕

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប $C$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d$ ៖

ពិនិត្យផលដក $f(x) - y_d = \dfrac{1}{x-2}$ ៖

· ចំពោះ $x \in ]-\infty, 2[$ ៖ $x - 2 < 0 \implies \dfrac{1}{x-2} < 0 \implies$ ក្រាប $C$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $d$

· ចំពោះ $x \in ]2, +\infty[$ ៖ $x - 2 > 0 \implies \dfrac{1}{x-2} > 0 \implies$ ក្រាប $C$ នៅខាងលើបន្ទាត់ $d$

(iii) សង់ក្រាប $C$ និងបន្ទាត់ $d$ ៖

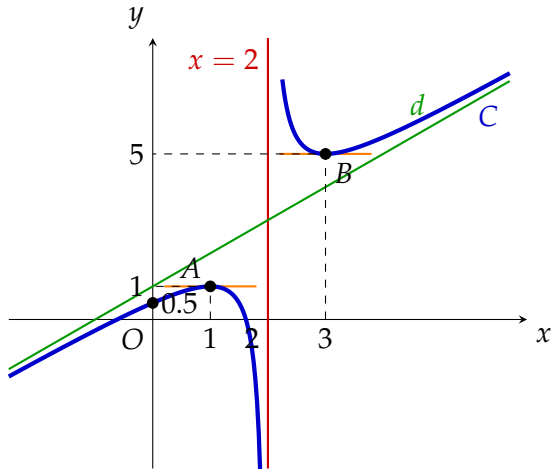
- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x = 0 \implies f(0) = \dfrac{1}{2} = 0.5 \implies (0, 0.5)$

· ចំណុចអតិបរមាធៀប ៖ $A(1, 1)$

· ចំណុចអប្បបរមាធៀប ៖ $B(3, 5)$

- សង់ក្រាប ៖




**24** (ប៉ាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៦ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ ។

ⓐ សិក្សាលីមីត និងបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

○ គណនាលីមីត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

· $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$

· $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$

· $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$

· $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$

○ បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូត ៖

· ដោយសារ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

· ដោយសារ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-2$ និង $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប $(C)$ ។

ⓑ សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាព ៖

○ ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

គ្រប់ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ តាមរូបមន្តដេរីវេផលចែក $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2)'(x^2-4) - (2x^2)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{4x(x^2-4) - 2x^2(2x)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

ដោយសារ $(x^2-4)^2 > 0$ គ្រប់ $x \neq \pm 2$ នាំឱ្យសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺដូចសញ្ញានៃភាគយក $-16x$ ៖

- ឱ្យ $f'(x) = 0 \iff -16x = 0 \iff x = 0$
- ចំពោះ $x \in ]-\infty,-2[ \cup ]-2,0[$ ៖ $-16x > 0 \implies f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
- ចំពោះ $x \in ]0,2[ \cup ]2,+\infty[$ ៖ $-16x < 0 \implies f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

○ តម្លៃអតិបរមាធៀប ៖

អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $f(0) = \frac{2(0)^2}{0^2-4} = 0$ ។

○ តារាងអថេរភាព ៖

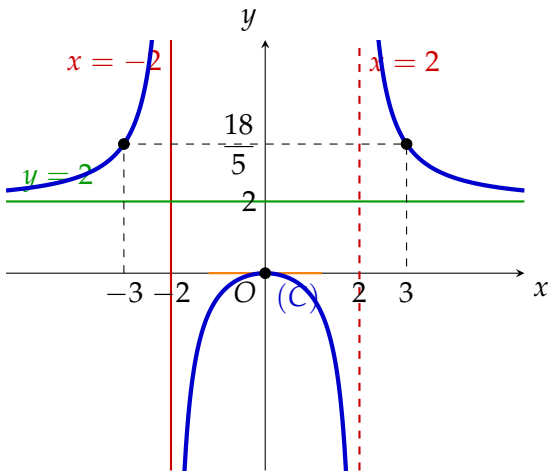
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | $+\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ | ↘ | $2$ |

ⓒ សង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

○ ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖

- ប្រសព្វជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ ៖ គល់ $O(0,0)$ ជាចំណុចអតិបរមាធៀបផងដែរ
- ត្រង់ $x = \pm 3$ ៖ $f(\pm 3) = \frac{2(9)}{9-4} = \frac{18}{5} = 3.6 \implies (-3,3.6)$ និង $(3,3.6)$

○ សង់ក្រាប ៖




**25** (ចាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៥ ថ្នាក់សង្គម)

គេមានអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និងគេតាងដោយ $(C)$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f$ ។

ⓐ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$x+1\neq 0 \iff x\neq -1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[ \text{ chaos នាំឱ្យ ។}$$

ⓑ បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ៖

គ្រប់ $x\in D$ យើងមាន ៖

$$x-2-\frac{1}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)-1}{x+1}=\frac{x^2-x-2-1}{x+1}=\frac{x^2-x-3}{x+1}=f(x) \quad \text{(ពិត) chaos ។}$$

ⓒ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

គណនាលីមីតផលដក ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $d:y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

ⓓ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ $f$ ៖

- ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

  គ្រប់ $x \in D$ តាមកន្សោម $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x+1}$ ៖

$$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

  ដោយសារ $(x+1)^2 > 0$ និង $(x+1)^2 + 1 > 0$ គ្រប់ $x \in D$ នាំឱ្យ $f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in D$ ៕

  ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty, -1[$ និងលើចន្លោះ $]-1, +\infty[$ ៕

- លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូតឈរ ៖

  · $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - 2 - \dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty - 0 = -\infty$

  · $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 2 - \dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty - 0 = +\infty$

  · $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(x - 2 - \dfrac{1}{x+1}\right) = -3 - \left(\dfrac{1}{0^-}\right) = +\infty$

  · $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(x - 2 - \dfrac{1}{x+1}\right) = -3 - \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = -\infty$

  $\Longrightarrow$ បន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\|\|$ | ↗ | $+\infty$ |

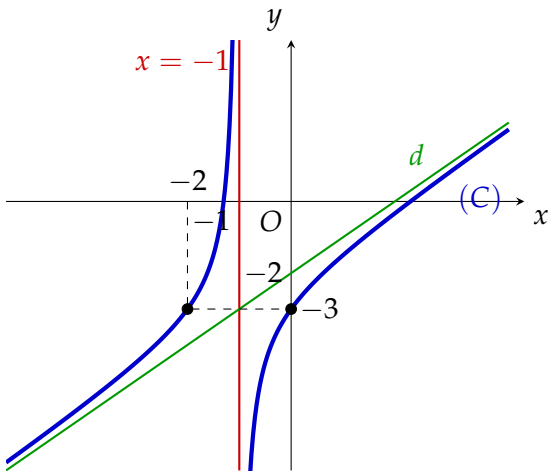
- ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖

  · ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3 \Longrightarrow (0, -3)$

  · ត្រង់ $x = -2$ ៖ $f(-2) = -2 - 2 - \dfrac{1}{-2+1} = -3 \Longrightarrow (-2, -3)$

  · ត្រង់ $x = 1$ ៖ $f(1) = 1 - 2 - \dfrac{1}{2} = -1.5 \Longrightarrow (1, -1.5)$

- សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**26** (ចាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់សង្គម លើកទី២)

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{1-x}$ ។

ⓐ រកដែនកំណត់នៃ $f(x)$ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{1-x}=\dfrac{x^2-4}{1-x}$ មានន័យលុះត្រាតែ ៖

$$1-x\neq 0 \iff x\neq 1$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ ៖

$$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$ chaos នាំឱ្យ ។

ⓑ បង្ហាញថា $f(x)=-x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ៖

គ្រប់ $x\in D$ យើងមាន ៖

$$\begin{aligned}-x-1+\frac{3}{x-1}&=\frac{(-x-1)(x-1)+3}{x-1}\\&=\frac{-(x^2-1)+3}{x-1}\\&=\frac{-x^2+1+3}{x-1}=\frac{-x^2+4}{x-1}\\&=\frac{x^2-4}{-(x-1)}=\frac{(x+2)(x-2)}{1-x}=f(x)\end{aligned}$$ (ពិត) chaos ។

ⓒ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $(C)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

○ លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត ៖

· $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-1+\dfrac{3}{x-1}\right)=+\infty-0=+\infty$

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x-1+\dfrac{3}{x-1}\right) = -\infty+0 = -\infty$

· $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(-x-1+\dfrac{3}{x-1}\right) = -2+\left(\dfrac{3}{0^-}\right) = -\infty$

· $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left(-x-1+\dfrac{3}{x-1}\right) = -2+\left(\dfrac{3}{0^+}\right) = +\infty$

· ដោយសារ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប $(C)$ ។

· ដោយសារ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x-1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-1} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(D): y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

○ ដេរីវេ និងទិសដៅអថេរភាព ៖

គ្រប់ $x\in D$ តាមកន្សោម $f(x) = -x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ៖

$$f'(x) = -1-\frac{3}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2-3}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2}$$

ដោយសារ $-(x-1)^2-3<0$ និង $(x-1)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$ នាំឱ្យ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in D$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $]-\infty,1[$ និងលើចន្លោះ $]1,+\infty[$ ។

○ តារាងអថេរភាព ៖

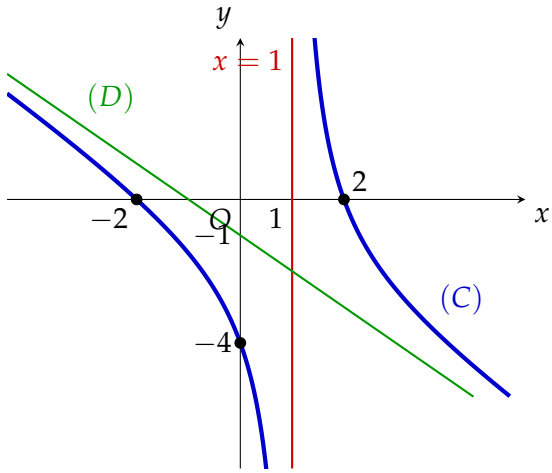
| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ |

○ ចំណុចពិសេសសំខាន់ៗ ៖

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Oy)$ ៖ $x=0 \implies f(0)=-4 \implies (0,-4)$

· ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(Ox)$ ៖ $f(x)=0 \iff (x+2)(x-2)=0 \iff x=-2$ ឬ $x=2$ នាំឱ្យបានចំណុច $(-2,0)$ និង $(2,0)$

○ សង់ក្រាប $(C)$ និងអាស៊ីមតូត ៖




**27** (បាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៤ ថ្នាក់សង្គម លើកទី១)

គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2}{9}x$ និងតាង $C$ តាងក្រាបរបស់ $f$ ។

**a** i ផ្ទៀងផ្ទាត់កន្សោម $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$ ៖

គ្រប់ចំនួនពិត $x\in\mathbb{R}$ យើងមាន ៖

$$(2e^x-1)(e^x-2)=2e^{2x}-4e^x-e^x+2=2e^{2x}-5e^x+2=g(x)\quad\text{(ពិត)}\quad\text{៕}$$

ii សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ តាមតម្លៃនៃ $x$ ៖

ឱ្យ $g(x)=0\iff(2e^x-1)(e^x-2)=0$ ៖

$$\begin{cases}2e^x-1=0\iff e^x=\frac{1}{2}\iff x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2\\ e^x-2=0\iff e^x=2\iff x=\ln 2\end{cases}$$

ដោយសារ $-\ln 2<\ln 2$, យើងទាញបានសញ្ញានៃ $g(x)$ ដូចខាងក្រោម ៖

- ចំពោះ $x\in]-\infty,-\ln 2[\cup]\ln 2,+\infty[$ ៖ $g(x)>0$
- ចំពោះ $x\in]-\ln 2,\ln 2[$ ៖ $g(x)<0$
- ចំពោះ $x=-\ln 2$ ឬ $x=\ln 2$ ៖ $g(x)=0$

**b** i រក $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ៖

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2}{9}x\right)=0+(+\infty)=+\infty$

  $\left(\text{ព្រោះ }\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\implies\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^x}=0\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2}{9}x\right)=1+(-\infty)=-\infty$

  $\left(\text{ព្រោះ }\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\implies\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^x}=1\right)$

ii បង្ហាញថា $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ៖
គ្រប់ចំនួនពិត $x \in \mathbb{R}$ តាមរូបមន្តដេរីវេ ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x\right)' = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} \\ &= -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{-9e^x + 2(1+e^x)^2}{9(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-9e^x + 2(1+2e^x+e^{2x})}{9(1+e^x)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{9(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{9(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

ដោយសារ $9(1+e^x)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ (ភាគបែងជានិច្ចកាលវិជ្ជមានដាច់ខាត) នាំឱ្យ $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ញ ។

iii សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ លើ $\mathbb{R}$ ៖

- ទិសដៅអថេរភាព ៖
  ដោយសារ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ៖

  · ចំពោះ $x \in ]-\infty, -\ln 2[ \cup ]\ln 2, +\infty[$ ៖ $f'(x) > 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍កើន
  · ចំពោះ $x \in ]-\ln 2, \ln 2[$ ៖ $f'(x) < 0 \implies f$ ជាអនុគមន៍ចុះ

- តម្លៃបរមា ៖

  · អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = -\ln 2$ គឺ ៖

  $$f(-\ln 2) = \frac{1}{1+e^{-\ln 2}} - \frac{2}{9}\ln 2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}\ln 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}\ln 2 \approx 0.51$$

  · អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = \ln 2$ គឺ ៖

  $$f(\ln 2) = \frac{1}{1+e^{\ln 2}} + \frac{2}{9}\ln 2 = \frac{1}{1+2} + \frac{2}{9}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2 \approx 0.49$$

- តារាងអថេរភាព ៖

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\ln 2$ | ↘ | $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |