វិទ្យាល័យ ព្រែកលៀប
PREK LEAP HIGH SCHOOL

ដេរីវេអនុគមន៍

សម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ និងសង្គម

ថ្នាក់ទី ១២

DERIVATIVE

១ ដេរីវេអនុគមន៍
២ អនុវត្តន៍ដេរីវេ
៣ អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀតនៃដេរីវេ

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី 2026

អារម្ភកថា

សួស្តីប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីរាប់អាន!

នេះជាសៀវភៅ **ភើវេនៃអនុគមន៍** ថ្នាក់ទី១២ ដែលរៀបរាប់អំពីមេរៀនសង្ខេបស្របតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា រួមជាមួយលំហាត់សម្រាប់អនុវត្តន៍នៃមេរៀននីមួយៗតាមលំដាប់លំដោយ។

គោលបំណងចម្បងនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះ គឺដើម្បីជំនួយដល់ការរៀនរបស់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងការបង្រៀនរបស់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូផងដែរ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងក្លាយជាឯកសារដ៏ល្អជាទីគាប់ចិត្តសម្រាប់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូប។ តែទោះបីជាយើងខ្ញុំព្យាយាមសរសេរផ្តែផ្តង់យ៉ាងណាក្តី ក៏នៅមានចំណុចខ្វះខាតកើតមានឡើងផងដែរ ។ អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំសូមអភ័យទោស និងរង់ចាំនូវការរិះគន់ កែលម្អក្នុងន័យស្ថាបនាពីសំណាក់ សិស្សានុសិស្ស លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ក៏ដូចជាប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយពេញចិត្ត។

ជាចុងក្រោយខ្ញុំសូមគោរពជូនពរ លោកអ្នកមានគុណរួមជាមួយសិស្សានុសិស្ស ទាំងអស់ជួបតែសំណាងល្អ សុខភាពល្អ និងរកទទួលទានមានបានជោគជ័យគ្រប់ភារៈកិច្ចការងារ។

ថ្ងៃ ចន្ទ ទី២៤ ខែសីហាឆ្នាំ ២០២៦

សេង ធារ៉ុន

រៀបរៀង និងនាយអត្ថបទដោយ

លោកគ្រូ សេង ធារ៉ុន

រចនាក្រុមដោយ

លោកគ្រូ សេង ធារ៉ុន

គណកម្មការត្រួតពិនិត្យ



NGSPL Teams



មាតិកា

១	ដើរបង្ហើរ	៧
១.១	ដើរបង្ហើរនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0	៧
១.២	ដើរបង្ហើរនៃអនុគមន៍បណ្តាក់	៧
១.៣	ដើរបង្ហើរនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ	១០
១.៣.១	ដើរបង្ហើរនៃអនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុស	១០
១.៣.២	ដើរបង្ហើរនៃអនុគមន៍តង់សង់និងកូតង់សង់	១២
១.៤	ដើរបង្ហើរអនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ	១៥
១.៤.១	ដើរបង្ហើរអនុគមន៍ច្រាសស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស	១៥
១.៤.២	ដើរបង្ហើរអនុគមន៍ច្រាសតង់សង់ និងកូតង់សង់	១៨
១.៥	ដើរបង្ហើរលំដាប់ខ្ពស់	២១
១.៥.១	ដើរបង្ហើរទី 2នៃអនុគមន៍	២១
១.៥.២	ដើរបង្ហើរលំដាប់ខ្ពស់	២៣
២	អនុវត្តន៍នៃដើរបង្ហើរ	៧៧
២.១	អនុវត្តក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា	៧៧
២.២	អត្រាបំប្រែបម្រួល	៨១
២.៣	ល្បឿននិងសំទុះនៃចលនា	៨៣
២.៣.១	ល្បឿននៃចលនា	៨៣
២.៣.២	សំទុះនៃចលនា	៨៤
៣	អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀតនៃដើរបង្ហើរ	១១១
៣.១	ឌីផេរ៉ង់ស្យែល	១១១
៣.២	វិសមភាពកំណើនមានកំណត់	១១៣

៣.៣ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច ១១៥

៣.៤ ប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាល ១១៥

៣.៥ ប្រាក់ចំណូលម៉ាឌីណាល ១១៧

៣.៦ ប្រាក់ចំណូលសរុប ១១៧

៣.៦.១ ប្រាក់ចំណូលម៉ាដីណាល ១១៨

៣.៧ ប្រាក់ចំណេញម៉ាដីណាល ១២១

៣.៧.១ ប្រាក់ចំណេញសរុប ១២១

៣.៧.២ ប្រាក់ចំណេញម៉ាដីណាល ១២២

៣.៧.៣ ប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាដីណាល ១២៤



ដេរីវេ

១.១ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0

ដេរីវេត្រង់ x_0 នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀបកើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 គេសរសេរ $y'_0=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ។

ឧទាហរណ៍ : រកដេរីវេត្រង់ $x_0=2$ នៃអនុគមន៍ $y=x^2-1$ ។

គេបាន $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-1-(2^2-1)}{h}=h+4$

ដូច្នេះ $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}(h+4)=4$ ។

ប្រតិបត្តិ

a. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=3x^3+x$ ត្រង់ $x=1$ ។

b. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{3}x^3-x+2$ ត្រង់ $x=0$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a. $f'(1)=7$

b. $f'(0)=-1$

១.២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ឧទាហរណ៍ : សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយ បានចំណាយប្រាក់ចំនួន 18 ពាន់រៀល ក្នុងការផលិតសម្ភារៈមួយគ្រឿង ហើយរយៈពេល 1h សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈបានចំនួន 40 គ្រឿង ។

គេបានអត្រាបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងរយៈពេល 1h គឺ

$$(18\text{ ពាន់រៀលក្នុង }1\text{ គ្រឿង})\times(40\text{ គ្រឿងក្នុង }1\text{h})=720\text{ ពាន់រៀល ។}$$

ដូច្នេះ បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយមានអត្រា 720 ពាន់រៀលក្នុង 1h ។

បើ x ជាបរិមាណសម្ភារៈដែលបានផលិត ហើយ t ជារយៈពេលគិតជាម៉ោង នោះក្នុងករណីខាងលើគេបានប្រាក់ចំណាយជាអនុគមន៍នៃបរិមាណសម្ភារៈ $y=f(x)$ និងបរិមាណសម្ភារៈជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល $x=g(t)$

។

គេបាន $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ ដែល $\frac{dy}{dt}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុង 1h

$\frac{dy}{dx}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុង 1 គ្រឿង

$\frac{dx}{dt}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃបរិមាណសម្ភារៈផលិតបានក្នុង 1h ។

ជាទូទៅ

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ ឬ

$\frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$ ដែលត្រូវមាន $\frac{dy}{du}$ និង $\frac{du}{dx}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ គេឱ្យ $F(x) = f[g(x)]$ ដោយប្រើភាពមានដេរីវេត្រង់ $x = c$

គេត្រូវបង្ហាញថា $F'(c) = f'[g(c)] \times g'(c)$

តាមនិយមន័យ $F'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{x - c}$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} \times \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right], \quad g(x) \neq g(c)$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} \times \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$= f'[g(c)] \times g'(c) \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = (5x + 1)^3$ ។ គណនា $\frac{dy}{dx}$

ដំណោះស្រាយ តាង $u = 5x + 1$ នោះ $y = u^3$

គេបាន $\frac{du}{dx} = 5$ និង $\frac{dy}{du} = 3u^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times 5 = 15u^2$

ជំនួស $u = 5x + 1$ គេបាន $\frac{dy}{dx} = 15(5x + 1)^2$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b. $y = \frac{1}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2(2x+3)}{(x^2+3x+1)^3}$

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = (3x^2+5x-2)^3$

តាង $u = 3x^2+5x-2$ នោះ $y = u^3$

គេបាន $\dfrac{du}{dx} = 6x+5$ និង $\dfrac{dy}{du} = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times (6x+5) = 3(3x^2+5x-2)^2(6x+5)$$

ដូច្នេះ $\dfrac{dy}{dx} = 3(3x^2+5x-2)^2(6x+5)$ ។

ដានូទៅ

បើ $y = u^n$ ដែល u ជាអនុគមន៍ x នោះ $\dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1} \times \dfrac{du}{dx} = nu^{n-1} \times u'$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ គេមាន $y = u^n$

គេបាន $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{du}(u^n) \times \dfrac{du}{dx} = nu^{n-1} \times \dfrac{du}{dx}$ ។

វិបាក ករណី $n = \dfrac{1}{2}$ គេបាន $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \times u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ដូច្នេះ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = (x^2-4x)^6$

ដំណោះស្រាយ តាង $u = x^2-4x$ នោះ $y = u^6$

គេបាន $y' = 6u^5 \times u' = 6(x^2-4x)^5 \times (x^2-4x)'$

$= 6(x^2-4x)^5 \times (2x-4) = 12(x-2)(x^2-4x)^5$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = 3\sqrt[3]{x^2-3x+1}$

ដំណោះស្រាយ គេអាចសរសេរ $y = 3\sqrt[3]{x^2-3x+1} = 3(x^2-3x+1)^{\frac{1}{3}}$

តាង $u = x^2-3x+1$ នោះ $y = 3u^{\frac{1}{3}}$

គេបាន $y' = 3 \times \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \times u' = (x^2-3x+1)^{-\frac{2}{3}} \times (x^2-3x+1)'$

$= (x^2-3x+1)^{-\frac{2}{3}} \times (2x-3)$

$= \dfrac{2x-3}{(x^2-3x+1)^{\frac{2}{3}}}$

ដូច្នេះ $y' = \dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

a $f(x) = (x^2+8x)^{10}$ b $f(x) = 6\sqrt[3]{2x+5}$ c $f(x) = (3x^4-1)^5$

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $f'(x) = 20(x+4)(x^2+8x)^9$

b $f'(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$

c $f'(x) = 60x^3(3x^4-1)^4$

១.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១.៣.១ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុស

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \sin x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

គេបាន $y' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ ប្រើសមភាព $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] = 1\times\cos x = \cos x$$

ដូច្នេះ $y' = \cos x$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេឱ្យ $f(x) = \cos x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

គេបាន $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ ប្រើសមភាព $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= -1\times\sin x = -\sin x$$

ដូច្នេះ $f'(x) = -\sin x$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : គេឱ្យ $y = \sin(x^2-3)$

តាង $u = x^2-3$ នោះ $y = \sin u$

គេបាន $\frac{du}{dx} = 2x$ និង $\frac{dy}{dx} = \cos u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2x \times \cos u = 2x\cos(x^2 - 3)$$

ដូច្នេះ $y' = 2x\cos(x^2 - 3)$ ។

ជាទូទៅ

- បើ $y = \sin x$ នោះ $y' = \cos x$
- បើ $y = \cos x$ នោះ $y' = -\sin x$
- បើ $y = \sin u$ នោះ $y' = u'\cos u$ ដោយ u ជាអនុគមន៍នៃ x
- បើ $y = \cos u$ នោះ $y' = -u'\sin u$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

a $f(x) = \sin x - x\cos x$ **b** $f(x) = \cos^2 x + x\sin x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $f(x) = \sin x - x\cos x$ ដោយ $(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + v'u$

គេបាន $f'(x) = \cos x - [(x)'\cos x + x(\cos x)']$

$= \cos x - (\cos x - x\sin x)$

$= x\sin x$

ដូច្នេះ $f'(x) = x\sin x$

b $f(x) = \cos^2 x + x\sin x$

តាមរូបមន្ត $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$, $(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + v'u$

គេបាន $f'(x) = 2\cos x(\cos x)' + [x'\sin x + x(\sin x)']$

$= -2\cos x\sin x + \sin x + x\cos x$

$= -\sin 2x + \sin x + x\cos x$

ដូច្នេះ $f'(x) = -\sin 2x + \sin x + x\cos x$

លំហាត់គំរូ 2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = -3x^4 + \sin(2x^3 - 1)$ b $f(x) = x^2 \cos(3x + 1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $f(x) = -3x^4 + \sin(2x^3 - 1)$

តាមរូបមន្ត $(x^n)' = nx^{n-1}, (\sin u)' = u' \cos u$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន} f'(x) &= -12x^3 + (2x^3 - 1)' \cos(2x^3 - 1) \\ &= -12x^3 + 6x^2 \cos(2x^3 - 1) \\ \text{ដូច្នេះ } f'(x) &= -12x^3 + 6x^2 \cos(2x^3 - 1) \end{aligned}$$

b $f(x) = x^2 \cos(3x + 1)$

តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u, (\cos u)' = (-u)' \sin u$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= (x^2)' \cos(3x + 1) + x^2[\cos(3x + 1)]' \\ &= 2x \cos(3x + 1) + x^2 \times [-3 \sin(3x + 1)] \\ &= 2x \cos(3x + 1) - 3x^2 \sin(3x + 1) \\ \text{ដូច្នេះ } f'(x) &= 2x \cos(3x + 1) - 3x^2 \sin(3x + 1) \end{aligned}$$

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = x^3 \cos x + 2 \sin x$

b $f(x) = \cos(5x^4 - 3) + x \sin 2x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x + 2 \cos x$

b $f'(x) = -20x^3 \sin(5x^4 - 3) + \sin 2x + 2x \cos 2x$ ។

១.៣.២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍តង់សង់និងកូតង់សង់

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យ $y = \tan x$ ចំពោះ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

គេអាចសរសេរ $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

ដូចេ្នះ $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេឱ្យ $f(x) = \cot x$ ចំពោះ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

គេអាចសរសេរ $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

ដូចេ្នះ $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : គេឱ្យ $y = \tan(3x^2 - 5)$

តាង $u = 3x^2 - 5$ នោះ $y = \tan u$

គេបាន $\dfrac{du}{dx} = 6x$ និង $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 6x \times \frac{1}{\cos^2 u} = 6x \times \frac{1}{\cos^2(3x^2 - 5)}$$ ។

ជាទូទៅ

បើ $y = \tan x$ នោះ $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

បើ $y = \cot x$ នោះ $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

បើ $y = \tan u$ នោះ $y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ ដោយ u ជាអនុគមន៍នៃ x

បើ $y = \cot u$ នោះ $y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = x^3 \tan x$

b $f(x) = (2 + \cot x)^3$

ដំណោះស្រាយ

a $f(x) = x^3 \tan x$

តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$

គេបាន $f'(x) = (x^3)' \tan x + x^3(\tan x)' = 3x^2 \tan x + \dfrac{x^3}{\cos^2 x}$

ដូច្នេះ $f'(x) = 3x^2 \tan x + \dfrac{x^3}{\cos^2 x}$ ។

b $f(x) = (2 + \cot x)^3$

តាមរូបមន្ត $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

គេបាន $f'(x) = 3(2 + \cot x)^2 (2 + \cot x)'$

$= 3(2 + \cot x)^2 \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

ដូច្នេះ $f'(x) = -\dfrac{3(2 + \cot x)^2}{\sin^2 x}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = 3x^2 + \tan(x^3 - 1)$

b $f(x) = x \cot(5x^3 + 7)$

ដំណោះស្រាយ

a $f(x) = 3x^2 + \tan(x^3 - 1)$

តាមរូបមន្ត $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

គេបាន $f'(x) = 6x + \dfrac{(x^3 - 1)'}{\cos^2(x^3 - 1)} = 6x + \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3 - 1)}$

ដូច្នេះ $f'(x) = 6x + \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3 - 1)}$ ។

b $f(x) = x\cot(5x^3+7)$

តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$, $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= \cot(5x^3+7) + x[\cot(5x^3+7)]' \\ &= \cot(5x^3+7) + x \times \left[-\frac{15x^2}{\sin^2(5x^3+7)}\right] \\ \text{ដូច្នេះ } f'(x) &= \cot(5x^3+7) - \frac{15x^3}{\sin^2(5x^3+7)} \quad \text{។} \end{aligned}$$

ប្រតិបត្តិ

រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = 3x^2\tan^3 x$

b $f(x) = (1+\tan x)^2$

c $f(x) = 3\cot(x^4-3)$

d $f(x) = x\tan(2x^2-3)$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $f'(x) = 6x\tan^3 x + 9x^2\tan^2 x(1+\tan^2 x)$

b $f'(x) = 2(1+\tan x)(1+\tan^2 x)$

c $f'(x) = -12x^3[1+\cot^2(x^4-3)]$

d $f'(x) = \tan(2x^2-3) + \dfrac{4x^2}{\cos^2(2x^2-3)}$ ។

១.៤ ដេរីវេអនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ

១.៤.១ ដេរីវេអនុគមន៍ច្រាសស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

គេមានអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ច្រាសគ្នា

នោះគេបាន $f[g(x)] = x$ និង $g[f(x)] = x$

ហើយនិង $g'(x) = \dfrac{1}{f'[g(x)]}$ ដែល $f'[g(x)] \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ គេមានអនុគមន៍ $y = \sin^{-1} x$ សមមូល $\sin y = x$

ចំពោះ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ នោះ $-1 \leq x \leq 1$ ។

តាង $f(x) = \sin x$ និង $g(x) = \sin^{-1} x$

នោះគេបាន $g'(x) = \dfrac{1}{f'[g(x)]} = \dfrac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$ (1) ។

ដោយ $y = \sin^{-1} x$ នាំឱ្យ $\cos(\sin^{-1} x) = \cos y$

តាមលក្ខណៈ $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

នាំឱ្យ $\cos(\sin^{-1} x) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

តាម (1) គេបាន $g'(x) = \dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ។

ដាទូទៅ

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = x^2 + \sin^{-1} x$

b $y = \ln 2x - 3\sin^{-1} x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $y' = (x^2 + \sin^{-1} x)' = (x^2)' + (\sin^{-1} x)' = 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ។

b $y' = (\ln 2x - 3\sin^{-1} x)' = (\ln 2x)' - 3(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = 2x^2 + 4\sin^{-1} x$

b $y = 5\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + 6\sin^{-1} x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y' = 4x + \dfrac{4}{\sqrt{1 - x^2}}$

b $y' = -\dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{\sqrt{1 - x^2}}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \cos^{-1} x$ សមមូល $\cos y = x$

ចំពោះ $0 \le y \le \pi$ នោះ $-1 \le x \le 1$ ។

តាង $f(x) = \cos x$ និង $g(x) = \cos^{-1} x$

គេបាន $g'(x) = \dfrac{1}{f'[g(x)]} = \dfrac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)}$

សម្រាយដូចគ្នានឹងអនុគមន៍ច្រាសស៊ីនុសគេបាន

$g'(x) = \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ដានូទៅ

$\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = 3e^{2x} - \cos^{-1} x$ b $y = x\cos^{-1} x$ c $y = \dfrac{\cos^{-1} x}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $y' = (3e^{2x} - \cos^{-1} x)' = (3e^{2x})' - (\cos^{-1} x)' = 6e^{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ។

b $y' = (x\cos^{-1} x)' = x'\cos^{-1} x + (\cos^{-1} x)'x = \cos^{-1} x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ។

c $y' = \left(\dfrac{\cos^{-1} x}{x}\right)' = \dfrac{(\cos^{-1} x)'x - x'\cos^{-1} x}{x^2} = \dfrac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \cos^{-1} x}{x^2}$

$= \dfrac{-(x + \sqrt{1-x^2}\cos^{-1} x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = \dfrac{1}{4}e^{2x} + 3\cos^{-1} x$ b $y = 6x^2\cos^{-1} x$ c $y = \dfrac{1}{\cos^{-1} x}$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y' = \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

b $y' = 12x\cos^{-1} x - \dfrac{6x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

c $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\cos^{-1} x)^2}$

១.៤.២ ដេរីវេអនុគមន៍ត្រាសតង់សង់ និងកូតង់សង់

ឧទាហរណ៍ ៖ គេមានអនុគមន៍ $y = \tan^{-1} x$ សមមូល $\tan y = x$
ចំពោះ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ។
តាង $f(x) = \tan x$ និង $g(x) = \tan^{-1} x$
នោះគេបាន $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$ ដោយ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
នាំឱ្យ $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(\tan^{-1} x)}$ (1)
ដោយ $\cos^2(\tan^{-1} x) = \cos^2 y$
តាមលក្ខណៈ: $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 y$)
គេបាន $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ នាំឱ្យ $\cos^2(\tan^{-1} x) = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ ។

ដានូទៅ

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a) $y = 4\sin^{-1} x - 10\tan^{-1} x$ b) $y = x\tan^{-1} x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a) $y' = (4\sin^{-1} x - 10\tan^{-1} x)' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{10}{1+x^2}$ ។

b) $y' = (x\tan^{-1} x)' = x'\tan^{-1} x + (\tan^{-1} x)'x = \tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a) $y = 2\sin^{-1} x + 16\tan^{-1} x$ b) $y = \sin x + x^2\tan^{-1} x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a) $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{16}{1+x^2}$ b) $y' = \cos x + 2x\tan^{-1} x + \frac{x^2}{1+x^2}$

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = 4\sin^{-1}x - 10\tan^{-1}x$ b $y = x\tan^{-1}x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $y' = (4\sin^{-1}x - 10\tan^{-1}x)' = \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{10}{1+x^2}$ ។

b $y' = (x\tan^{-1}x)' = x'\tan^{-1}x + (\tan^{-1}x)'x = \tan^{-1}x + \dfrac{x}{1+x^2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = 2\sin^{-1}x + 16\tan^{-1}x$ b $y = \sin x + x^2\tan^{-1}x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{16}{1+x^2}$ b $y' = \cos x + 2x\tan^{-1}x + \dfrac{x^2}{1+x^2}$

ឧទាហរណ៍ ៖ គេមានអនុគមន៍ $y = \cot^{-1}x$ សមមូល $\cot y = x$

តាង $f(x) = \cot x$ និង $g(x) = \cot^{-1}x$
នោះគេបាន $g'(x) = \dfrac{1}{f'[g(x)]}$ ដោយ $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
នាំឱ្យ $g'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(\cot^{-1}x)}$ ដោយ $\sin^2(\cot^{-1}x) = \sin^2 y$
តាមលក្ខណៈ: $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sin^2 y$)
គេបាន $\cot^2 y + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 y}$ នាំឱ្យ $\sin^2(\cot^{-1}x) = 1 + \cot^2 y = 1 + x^2$ ។

ដានូទៅ!

$\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = x\cot^{-1}x$ b $y = \cos^{-1}x + 20\cot^{-1}x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $y' = (x\cot^{-1}x)' = x'\cot^{-1}x + (\cot^{-1}x)'x = \cot^{-1}x - \dfrac{x}{1+x^2}$ ។

b $y' = (\cos^{-1}x)' + 20(\cot^{-1}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{20}{1+x^2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = x^2\cot^{-1}x$

b $y = 2x\cot^{-1}x - \sin^{-1}x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y' = 2x\cot^{-1}x - \dfrac{x^2}{1+x^2}$

b $y' = 2\cot^{-1}x - \dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ។

រូបមន្ត

i $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}u) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

ii $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}u) = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

iii $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \dfrac{u'}{1+u^2}$

iv $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}u) = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = 4\sin^{-1}3x + \tan^{-1}5x$

b $y = 10\cos^{-1}2x - 7\cot^{-1}4x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $y' = (4\sin^{-1}3x + \tan^{-1}5x)' = 4\cdot\dfrac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} + \dfrac{(5x)'}{1+(5x)^2} = \dfrac{12}{\sqrt{1-9x^2}} + \dfrac{5}{1+25x^2}$ ។

b $y' = (10\cos^{-1}2x - 7\cot^{-1}4x)' = 10\left[-\dfrac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right] - 7\left[-\dfrac{(4x)'}{1+(4x)^2}\right]$

$= -\dfrac{20}{\sqrt{1-4x^2}} + \dfrac{28}{1+16x^2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = \frac{1}{3}\cos^{-1} 7x + 2\tan^{-1} 8x$

b $y = x\sin^{-1} x + 6\cot^{-1} 9x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y' = -\frac{7}{3\sqrt{1-49x^2}} + \frac{16}{1+64x^2}$

b $y' = \sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{54}{1+81x^2}$

១.៥ ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

១.៥.១ ដេរីវេទី 2នៃអនុគមន៍

ឧទាហរណ៍ 1 ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

គេបាន $f'(x) = 4x^3 - 6x$

$[f'(x)]' = f''(x) = 12x^2 - 6$

ឧទាហរណ៍ 2 ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = x^3 + 3\sin 2x$

គេបាន $y' = 3x^2 + 6\cos 2x$

$[y']' = 6x - 12\sin 2x = 6(x - 2\sin 2x)$ ។

ដានូទៅ

ដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់តាងដោយ y'' ឬ $f''(x)$ ឬ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = x^3 - 12x + 1$

b $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ ។

ដំណោះស្រាយ

a $f(x) = x^3 - 12x + 1$ គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 12$ នោះ $f''(x) = 6x$ ។

b $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2x(x^2-9)-x^2\times 2x}{(x^2-9)^2}=\dfrac{-18x}{(x^2-9)^2}$

$$f''(x)=\frac{-18(x^2-9)^2+18x\times 2(x^2-9)\times 2x}{(x^2-9)^4}$$
$$=\frac{-18(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4}=\frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$$

លំហាត់គំរូ 2 រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

a $x^2+y^2=4$ **b** $xy+y^2-x^2=5$ ។

ដំណោះស្រាយ

a រក y' នៃ $x^2+y^2=4$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ $\dfrac{d}{dx}[x^2+y^2]=\dfrac{d}{dx}[4]$

$$\frac{d}{dx}[x^2]+\frac{d}{dx}[y^2]=\frac{d}{dx}[4]$$
$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$2x+2yy'=0 \quad (1)$$

ដូច្នេះ $y'=-\dfrac{x}{y}$ បើ $y\neq 0$ ។

រក y'' នៃ $x^2+y^2=4$

តាម (1) : $x+yy'=0$

គេបាន $1+y'y'+yy''=0$ នោះ $y''=\dfrac{-1-(y')^2}{y}$

ដោយ $y'=-\dfrac{x}{y}$

ដូច្នេះ $y''=-\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$ ។

b រក y' នៃ $xy+y^2-x^2=5$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\dfrac{d}{dx}[xy+y^2-x^2]=\dfrac{d}{dx}[5]$

$$\frac{d}{dx}[xy]+\frac{d}{dx}[y^2]-\frac{d}{dx}[x^2]=\frac{d}{dx}[5]$$
$$(y+xy')+2yy'-2x=0 \quad (1)$$
$$y+(x+2y)y'-2x=0$$

ដូច្នេះ $y'=\dfrac{2x-y}{x+2y}$ ។

រក y'' នៃ $xy + y^2 - x^2 = 5$

តាម (1) គេបាន $y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' - 2 = 0$

$(x + 2y)y'' = 2 - 2y' - 2(y')^2$

$y'' = \dfrac{2 - 2y' - 2(y')^2}{x + 2y}$

ដោយ $y' = \dfrac{2x - y}{x + 2y}$ នោះ $y'' = \dfrac{2(x + 2y)^2 - 2(2x - y)(x + 2y) - 2(2x - y)^2}{(x + 2y)^3}$

$= \dfrac{10(xy + y^2 - x^2)}{(x + 2y)^3} = \dfrac{50}{(x + 2y)^3}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = x^4 - 3x^2 + x^{-2}$

b $f(x) = \sin 3x^2 + 1$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y'' = 6x^{-4} + 12x^2 - 6$

b $f''(x) = 6\cos 3x^2 - 36x^2 \sin 3x^2$ ។

ប្រតិបត្តិ

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

a $xy + yx^2 = 2$

b $4xy = x^2 + y^2$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $y' = \dfrac{-4 - 2xy}{x(1 + x)}, y'' = \dfrac{-2x^3y' - 3x^2y' + 2x^2y - xy' + 2xy + y}{x^2(1 + x)^2}$

b $y' = \dfrac{x - 2y}{-y + 2x}, y'' = \dfrac{-3xy' + 3y}{(-y + 2x)^2}$ ។

១.៥.២ ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ឧទាហរណ៍ ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + x - 10$

គេបាន $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 1$, $f''(x) = 60x^3 - 42x$, $f'''(x) = 180x^2 - 42$,

$f^{(4)}(x) = 360x\,,\, f^{(5)}(x) = 360\,,\, f^{(6)}(x) = 0$

ដាទូទៅ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត គេហៅដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថា ដេរីវេទី 1 , ទី $2, \ldots,$ ទី n

គេតាងដោយ $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ ។

សម្គាល់

គេប្រើទម្រង់ $f^{(n)}$ ចាប់ពី $n = 4$ ទៅ ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាដេរីវេទី 4 នៃ $f(x) = x^4 + 3x$

ដំណោះស្រាយ គេបាន $f'(x) = 4x^3 + 3\,,\, f''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = 24x\,,\, f^{(4)}(x) = 24$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាដេរីវេទី 100 នៃ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ គេមាន $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

គេបាន $f'(x) = -2x^{-3} = (-1)^1 2x^{-3}$

$f''(x) = (-1)^1(2) \times (-3)x^{-4} = (-1)^2(2)(3)x^{-4}$

$f'''(x) = (-1)^2(2)(3)(-4)x^{-5} = (-1)^3(2)(3)(4)x^{-5}$

$f^{(4)}(x) = (-1)^3(2)(3)(4)(-5)x^{-6} = (-1)^4(2)(3)(4)(5)x^{-6}$

. . . . . .

. . . . . .

$f^{(100)}(x) = (-1)^{100}101!x^{-102} = 101!x^{-102}$

ដូច្នេះ $f^{(100)}(x) = \dfrac{101!}{x^{102}}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = \cos 3x - 5x^7$

b $f(x) = 2x^4 - \sin 4x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a $f^{(5)}(x) = -243\sin 3x - 12600x^2$ b $f^{(5)}(x) = -1024\cos 4x$ ។

លំហាត់គំរូ 3 គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = \sin x$

ដំណោះស្រាយ គេមាន $y = \sin x$

$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\text{ដោយ } \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\right)$

$y'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\times\frac{\pi}{2}\right)$

$y''' = \left[\sin\left(x + 2\times\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + 2\times\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\times\frac{\pi}{2}\right)$

.....

ឧបមាថាពិតរហូតដល់ដេរីវេទី $n = k$ គឺ $y^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

យើងត្រូវបង្ហាញថាពិតរហូតដល់ដេរីវេទី $n = k+1$

គេបាន $y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = \left[\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right]'$

$= \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$

$= \sin\left[x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$ ពិត

ដូច្នេះ $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ ។

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = \cos x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ។

កំណត់

I. **ដេរីវេតាមន័យមធ្យម** ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ x_0 (បើមាន) គឺជាលីមីតនៃផលធៀបកើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតជិតសូន្យ ។
គេកំណត់សរសេរ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

II. ដេរីវេតាមរូបមន្ត

i អនុគមន៍ពហុធា

- (a) $y = k \quad k \in \mathbb{R} \Longrightarrow y' = 0$
- (b) $y = ax \Longrightarrow y' = a$
- (c) $y = x^n \Longrightarrow y' = nx^{n-1}$
- (d) $y = u^n \Longrightarrow y' = nu'u^{n-1}$
- (e) $y = \sqrt{x} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- (f) $y = \sqrt{u} \Longrightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- (g) $y = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$
- (h) $y = \dfrac{1}{u} \Longrightarrow y' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- (i) $y = \dfrac{1}{x^n} \Longrightarrow y' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
- (j) $y = \dfrac{1}{u^n} \Longrightarrow y' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$
- (k) $y = uv \Longrightarrow y' = u'v + v'u$
- (l) $y = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
- (m) $y = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

ii អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- (a) $y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x$
- (b) $y = \sin u \Longrightarrow y' = u' \cos u$
- (c) $y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x$
- (d) $y = \cos u \Longrightarrow y' = -u' \sin u$
- (e) $y = \tan x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- (f) $y = \tan u \Longrightarrow y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
- (g) $y = \cot x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
- (h) $y = \cot u \Longrightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

iii អ៊ិចស្ប៉ូ និងលោការីត

- (a) $y = e^x \Longrightarrow y' = e^x$
- (b) $y = e^u \Longrightarrow y' = u'e^u$
- (c) $y = \ln x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$
- (d) $y = \ln u \Longrightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$
- (e) $y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \ln a$
- (f) $y = a^u \Longrightarrow y' = u'a^u \ln a$
- (g) $y = \log_a x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- (h) $y = \log_a u \Longrightarrow y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
- (i) $y = [u(x)]^{v(x)} \Longrightarrow$ បំពាក់ ln លើអង្គសងខាងរួចធ្វើដេរីវេអង្គសងខាង

សម្គាល់

- ដេរីវេខាងឆ្វេងត្រង់ x_0 នៃអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- ដេរីវេខាងស្តាំត្រង់ x_0 នៃអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- បើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 លុះត្រាតែ $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

ការប្រែងលំហាត់បន្ថែម

1 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម(ដោយប្រើនិយមន័យ)៖

a. $y = f(x) = x^2$ ត្រង់ $x_0 = 2$

b. $y = v(x) = \sqrt{x}$ ត្រង់ $x_0 = 1$

c. $y = f(x) = \sqrt{2x+3}$ ត្រង់ $x_0 = 1$

d. $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ ត្រង់ $x_0 = 3$

e. $y = f(x) = \sin x$ ត្រង់ $x_0 = \pi$

f. $y = f(x) = \cos x$ ត្រង់ $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a. $y = 20$

b. $y = -32$

c. $y = -15\pi + e$

d. $y = -2x^2 - x$

e. $y = 3x + 5$

f. $y = x^2 + 5x - 7$

g. $y = x^{21} - 3x^{-5}$

h. $y = x^{-2} + x^{-5}$

i. $y = -2x^7 + 5$

j. $y = -2x^3 - 6x^2 + 5x - 7$

k. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 12x - 1$

l. $y = -7x^2 + 4x^{-5} + 2x + 3$

3 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a. $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{2x+3}$

b. $y = -\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{2x+3}$

c. $y = \sqrt{2x+3} + \dfrac{4}{-3x+4}$

d. $y = \dfrac{1}{x^2+5} - \sqrt{x^2+5}$

e. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+3x-4} + \dfrac{1}{-2x^2+1}$

f. $y = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^3-x+1}$

g. $y = \sqrt{2x^2+4x-1} - \dfrac{3}{x}$

h. $y = \sqrt{-x+3} - \dfrac{3}{x+2}$

i. $y = \sqrt{x^3+3x-8} + \dfrac{2}{x^2+3x-1}$

j. $y = 4\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^3+2}$

4 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a $y=(x+2)^3$

b $y=(2x+3)^4$

c $y=\frac{3}{2}(x^2+3x+5)^5$

d $y=\left(\frac{1}{3}x^6+3x^2+2\right)^{12}$

e $y=(x+5)(x+3)$

f $y=\frac{2}{3}(3x+1)(5x-3)$

g $y=(3x+1)\left(\frac{2}{3}x^3+1\right)$

h $y=(5x^2-3)(4x^3+x)$

i $y=(x^3+1)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x+3}\right)$

j $y=(2x+1)\sqrt{3x+4}$

k $y=\frac{x+2}{2x+3}$

l $y=\frac{x^2+3x-6}{x-2}$

m $y=\frac{x^2-2x+5}{2x-2}$

n $y=\frac{2x^2+3x-7}{x^2+3x-8}$

5 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x)=(2x+1)^4$

b $f(x)=\sqrt{2x^6-12}$

c $f(x)=(x^5-4x^2+8)^8$

d $f(x)=(3x^4-7x^2+9)^5$

e $f(x)=\frac{1}{5x^2-6x+2}$

f $f(x)=\frac{2}{(6x^2+5x+1)^2}$ ។

6 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$

b $y=\frac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

c $y=\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$

d $y=\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$

e $y=(x+2)^3(2x-1)^5$

f $y=2(3x+1)^4(5x-3)^2$ ។

7 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ និងដេរីវេនៃស្ទ័យគុណ រួចបង្ហាញថាវិធីទាំងពីរមានលទ្ធផលដូចគ្នា ៖

a $f(x)=(3x+5)^2$

b $f(x)=(7-4x)^2$ ។

8 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a $y=e^x$

b $y=3e^x$

c $y=e^{4x}$

d $y=2e^{5x}$

e $y=e^{5x}-e^{2x}$

f $y=2e^{3x}+e^{-x}$

g $y=e^{2x}e^{7x}$

h $y=e^{x^2}$

i $y = e^{x^2-2x+7}$

j $y = -3e^{-x^4}$

k $y = 2^x$

l $y = 3^{2x} - 3^{-2x+1}$

m $y = 3^{2x}$

n $y = 9^{3x+1}$

o $y = 2^x \times 3^x$

p $y = 8^{x^2+1}$

q $y = (2^x)^3$

r $y = (3^x)^2$

9 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a $y = \ln x + \ln 3x$

b $y = \ln(3x+1) + \ln x^2$

c $y = \ln x + 2\ln(2x+3)$

d $y = 5\ln 3x + \ln x^5$

e $y = 7\ln(3x+1)x - \ln(4x^3)$

f $y = \ln(x^2+3x-1) + 3\ln x^3$

g $y = \ln\sqrt{x+9}$

h $y = \ln(x^2-5)$

i $y = \ln\dfrac{x+1}{x-2}$

j $y = \ln\dfrac{2x-3}{x+2}$

k $y = \ln\sqrt{(x+1)^3}$

l $y = \ln\sqrt{x^3-e^{2x}}$

m $y = \log_3 x$

n $y = \log_5(x+2)$

o $y = \log_2(x^2+3x-1)$

p $y = \log_3(4x^2+x+7)$

q $y = \log_2\dfrac{x+2}{2x+1}$

r $y = \log\sqrt{2x+3}$

10 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

b $y = 3x^3 - 2\sin x\cos x$

c $y = (2x - \sin x)^3$

d $y = \sin x - x^2\cos x$

e $y = x^2 - \tan^2 x$

f $y = 3x\cot^2 x$ ។

11 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $f(x) = \sin^2 x^2$

b $f(x) = x^3 - \cos^2 5x$

c $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{1-\cos x}$

d $f(x) = x^3 - \sin(x^2-5x)$

e $f(x) = \sin 5x + \cos(x^3-1)$

f $f(x) = \tan(2x^3-5x)$ ។

12 គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ ៖

a $y = 3x^2 - \sin 2x$

b $y = -3x^4 + 2x^2$

c $y = x + \dfrac{1}{x}$

d $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e $g(x) = (x^2+4)^3$

f $g(x) = (x^3-1)^4$ ។

13 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a $y = \cos x + 2\sin x$

b $y = -\sin x + 4\cos x$

c $y = 3\cos 2x - 2\sin 5x$

d $y = \cos(3x+2) - 3\sin(4x-2)$

e $y = 5\cos(x^2+1) - 5\sin(x^2+3x)$

f $y = \tan x + 2\cot x$

g $y = \tan 3x - \cot(2x+1)$

h $y = 2\tan(-2x+5) + 3\cot 5x$

i $y = \cot 4x^2 + 3\tan(2023x+1)$

j $y = 4\tan(-x^2-2x+1) + \cot(x^2-x+1)$

14 គណនាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a $y = x^2 + \sin 2x$

b $y = -5x^4 - x^3$

c $y = -3x - \dfrac{2}{x}$

d $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

e $y = (x^2+4)^3$

f $y = (x^3-1)^4$

g $y = \sin x + \cos x$

h $y = xe^x + 2023$

i $y = \cos(\sin x)$

j $y = \ln(\sin x)$

k $y = \sin(\ln x)$

l $y = \cos(e^{-x})$

15 រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

a $x = \tan y$

b $x = \sin y$

c $xy + \sin y = 0$

d $x + \sin y = xy$

e $x + \tan(xy) = 0$

f $y^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x$ ។

16 រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

a $2x^2 + y^2 = 4$

b $2x^3 + y^3 = 8$

c $x^2 + xy + y^2 = -1$

d $x^3 + 2xy - y^2 = 3$

e $x^3 + y^3 = 3xy$

f $x^3y + xy^3 = 3x^2$ ។

17 គណនា ៖

a $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

b $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

c $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$

d $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{120}{x^6}$ ។

18 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

a រក a, b, c $\quad f = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$

b រក $f', f'', \ldots, f^{(2022)}$ ។

19 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = 20\tan^{-1} x + \sin^{-1} 3x$

b $y = x\tan^{-1} 2x - \cot^{-1} 4x$

c $y = 2x\cot^{-1} 3x - \cos^{-1} 7x$ ។

20 គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a $y = \frac{1}{x}$ **b** $y = \frac{1}{x+1}$ **c** $y = \sin(3x+1)$ ។

ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

1 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម(ដោយប្រើនិយមន័យ)៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = f(x) = x^2$ ត្រង់ $x_0 = 2$

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2^2 = 4 \\
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(2) = 4}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = v(x) = \sqrt{x}$ ត្រង់ $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
v(1) &= \sqrt{1} = 1 \\
v'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(1+h) - v(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{v'(1) = \frac{1}{2}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = f(x) = \sqrt{2x+3}$ ត្រង់ $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sqrt{2(1)+3} = \sqrt{5} \\
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)+3} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2h+5} - \sqrt{5}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2h+5} - \sqrt{5})(\sqrt{2h+5} + \sqrt{5})}{h(\sqrt{2h+5} + \sqrt{5})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h+5-5}{h(\sqrt{2h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2h+5} + \sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(1) = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ ត្រង់ $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}
f(3) &= 3^2 + 2(3) + 3 = 18 \\
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(3+h)^2 + 2(3+h) + 3] - 18}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 6 + 2h + 3 - 18}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{8h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (8 + h) = 8
\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(3)=8}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y=f(x)=\sin x$ ត្រង់ $x_0=\pi$

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \sin\pi = 0 \\ f'(\pi) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi+h)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{h} = -1 \quad \left(\text{ព្រោះ } \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\right) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(\pi)=-1}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y=f(x)=\cos x$ ត្រង់ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{h} = -1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1}$

2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y=20$

$$y' = (20)' = 0$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=0}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y=-32$

$$y' = (-32)' = 0$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=0}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = -15\pi + e$

$$y' = (-15\pi + e)' = 0 \quad (\text{ព្រោះ } -15\pi + e \text{ ជាចំនួនថេរ})$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 0}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = -2x^2 - x$

$$y' = (-2x^2 - x)' = -4x - 1$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -4x - 1}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = 3x + 5$

$$y' = (3x + 5)' = 3$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = x^2 + 5x - 7$

$$y' = (x^2 + 5x - 7)' = 2x + 5$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2x + 5}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = x^{21} - 3x^{-5}$

$$y' = (x^{21} - 3x^{-5})' = 21x^{20} - 3(-5x^{-6}) = 21x^{20} + 15x^{-6}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 21x^{20} + 15x^{-6}}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = x^{-2} + x^{-5}$

$$y' = (x^{-2} + x^{-5})' = -2x^{-3} - 5x^{-6}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -2x^{-3} - 5x^{-6}}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = -2x^7 + 5$

$$y' = (-2x^7 + 5)' = -14x^6$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -14x^6}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = -2x^3 - 6x^2 + 5x - 7$

$$y' = (-2x^3 - 6x^2 + 5x - 7)' = -6x^2 - 12x + 5$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -6x^2 - 12x + 5}$

k គណនាដេរីវេនៃ $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 12x - 1$

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 12x - 1\right)' = x^2 + \frac{1}{2}x - 12$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = x^2 + \frac{1}{2}x - 12}$

l គណនាដេរីវេនៃ $y = -7x^2 + 4x^{-5} + 2x + 3$

$$y' = (-7x^2 + 4x^{-5} + 2x + 3)' = -14x - 20x^{-6} + 2$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -14x - 20x^{-6} + 2}$

3 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{2x+3}$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3 \cdot 2}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{2x+3}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{2x+3}}}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = -\frac{3}{x} + \frac{5}{2x+3}$

$$\begin{aligned} y' &= -3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2}\right) \\ &= \frac{3}{x^2} - \frac{10}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{3}{x^2} - \frac{10}{(2x+3)^2}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = \sqrt{2x+3} + \dfrac{4}{-3x+4}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} + 4 \cdot \left(-\frac{(-3x+4)'}{(-3x+4)^2} \right) \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} + 4 \cdot \left(-\frac{-3}{(-3x+4)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{12}{(-3x+4)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}} + \dfrac{12}{(-3x+4)^2}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{1}{x^2+5} - \sqrt{x^2+5}$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x^2+5)'}{(x^2+5)^2} - \frac{(x^2+5)'}{2\sqrt{x^2+5}} \\ &= -\frac{2x}{(x^2+5)^2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \\ &= -\frac{2x}{(x^2+5)^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\dfrac{2x}{(x^2+5)^2} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+3x-4} + \dfrac{1}{-2x^2+1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} - \frac{(-2x^2+1)'}{(-2x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x+3}{3\sqrt{x^2+3x-4}} + \frac{4x}{(-2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{2x+3}{3\sqrt{x^2+3x-4}} + \dfrac{4x}{(-2x^2+1)^2}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^3-x+1}$

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{(x^3-x+1)'}{(x^3-x+1)^2} \right) \\ &= -\frac{5}{x^2} - \frac{2(3x^2-1)}{(x^3-x+1)^2} \\ &= -\frac{5}{x^2} - \frac{6x^2-2}{(x^3-x+1)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{5}{x^2} - \frac{6x^2-2}{(x^3-x+1)^2}}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = \sqrt{2x^2+4x-1} - \frac{3}{x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^2+4x-1)'}{2\sqrt{2x^2+4x-1}} - 3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{4x+4}{2\sqrt{2x^2+4x-1}} + \frac{3}{x^2} \\ &= \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x-1}} + \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x-1}} + \frac{3}{x^2}}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = \sqrt{-x+3} - \frac{3}{x+2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-x+3)'}{2\sqrt{-x+3}} - 3\cdot\left(-\frac{(x+2)'}{(x+2)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-x+3}} + \frac{3}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{1}{2\sqrt{-x+3}} + \frac{3}{(x+2)^2}}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = \sqrt{x^3+3x-8} + \frac{2}{x^2+3x-1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3+3x-8)'}{2\sqrt{x^3+3x-8}} + 2\cdot\left(-\frac{(x^2+3x-1)'}{(x^2+3x-1)^2}\right) \\ &= \frac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x-8}} - \frac{4x+6}{(x^2+3x-1)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x-8}} - \frac{4x+6}{(x^2+3x-1)^2}}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = 4\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3+2}$

$$\begin{aligned} y' &= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} - 2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\cdot\left(-\frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2}{x^2} - \frac{6x^2}{(x^3+2)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2}{x^2} - \frac{6x^2}{(x^3+2)^2}}$

4 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = (x+2)^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3(x+2)^2 \cdot (x+2)' \\ &= 3(x+2)^2 \cdot 1 \\ &= 3(x+2)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3(x+2)^2}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = (2x+3)^4$

$$\begin{aligned} y' &= 4(2x+3)^3 \cdot (2x+3)' \\ &= 4(2x+3)^3 \cdot 2 \\ &= 8(2x+3)^3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 8(2x+3)^3}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = \frac{3}{2}(x^2+3x+5)^5$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2} \cdot 5(x^2+3x+5)^4 \cdot (x^2+3x+5)' \\ &= \frac{15}{2}(x^2+3x+5)^4(2x+3) \\ &= \frac{15(2x+3)(x^2+3x+5)^4}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{15(2x+3)(x^2+3x+5)^4}{2}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = \left(\frac{1}{3}x^6 + 3x^2 + 2\right)^{12}$

$$\begin{aligned} y' &= 12\left(\frac{1}{3}x^6 + 3x^2 + 2\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{3}x^6 + 3x^2 + 2\right)' \\ &= 12\left(\frac{1}{3}x^6 + 3x^2 + 2\right)^{11}(2x^5 + 6x) \\ &= (24x^5 + 72x)\left(\frac{1}{3}x^6 + 3x^2 + 2\right)^{11} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = (24x^5 + 72x)\left(\frac{1}{3}x^6 + 3x^2 + 2\right)^{11}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = (x+5)(x+3)$

$$\begin{aligned} y' &= (x+5)'(x+3) + (x+5)(x+3)' \\ &= 1 \cdot (x+3) + (x+5) \cdot 1 \\ &= x + 3 + x + 5 \\ &= 2x + 8 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2x + 8}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = \frac{2}{3}(3x+1)(5x-3)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3}\left[(3x+1)'(5x-3) + (3x+1)(5x-3)'\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[3(5x-3) + 5(3x+1)\right] \\ &= \frac{2}{3}(15x - 9 + 15x + 5) \\ &= \frac{2}{3}(30x - 4) = 20x - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 20x - \frac{8}{3}}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = (3x+1)\left(\frac{2}{3}x^3 + 1\right)$

$$\begin{aligned} y' &= (3x+1)'\left(\frac{2}{3}x^3 + 1\right) + (3x+1)\left(\frac{2}{3}x^3 + 1\right)' \\ &= 3\left(\frac{2}{3}x^3 + 1\right) + (3x+1)(2x^2) \\ &= 2x^3 + 3 + 6x^3 + 2x^2 \\ &= 8x^3 + 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 8x^3 + 2x^2 + 3}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = (5x^2 - 3)(4x^3 + x)$

$$\begin{aligned} y' &= (5x^2 - 3)'(4x^3 + x) + (5x^2 - 3)(4x^3 + x)' \\ &= 10x(4x^3 + x) + (5x^2 - 3)(12x^2 + 1) \\ &= 40x^4 + 10x^2 + 60x^4 + 5x^2 - 36x^2 - 3 \\ &= 100x^4 - 21x^2 - 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 100x^4 - 21x^2 - 3}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = (x^3 + 1)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+3}\right)$

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 + 1)'\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+3}\right) + (x^3 + 1)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+3}\right)' \\ &= 3x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+3}\right) + (x^3 + 1)\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{3}{(x+3)^2}\right) \\ &= 6x + \frac{9x^2}{x+3} - \frac{2(x^3+1)}{x^2} - \frac{3(x^3+1)}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 6x + \frac{9x^2}{x+3} - \frac{2(x^3+1)}{x^2} - \frac{3(x^3+1)}{(x+3)^2}}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = (2x + 1)\sqrt{3x + 4}$

$$\begin{aligned} y' &= (2x + 1)'\sqrt{3x + 4} + (2x + 1)\left(\sqrt{3x + 4}\right)' \\ &= 2\sqrt{3x + 4} + (2x + 1) \cdot \frac{(3x + 4)'}{2\sqrt{3x + 4}} \\ &= 2\sqrt{3x + 4} + \frac{3(2x + 1)}{2\sqrt{3x + 4}} \\ &= \frac{4(3x + 4) + 3(2x + 1)}{2\sqrt{3x + 4}} \\ &= \frac{18x + 19}{2\sqrt{3x + 4}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{18x + 19}{2\sqrt{3x + 4}}}$

k គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+2)'(2x+3) - (x+2)(2x+3)'}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{1(2x+3) - 2(x+2)}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{2x+3-2x-4}{(2x+3)^2} \\ &= -\frac{1}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\dfrac{1}{(2x+3)^2}}$

l គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{x^2+3x-6}{x-2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+3x-6)'(x-2) - (x^2+3x-6)(x-2)'}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(2x+3)(x-2) - (x^2+3x-6)(1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-x-6-x^2-3x+6}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}}$

m គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{x^2-2x+5}{2x-2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-2x+5)'(2x-2) - (x^2-2x+5)(2x-2)'}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2-2x+5)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2-8x+4-2x^2+4x-10}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-4x-6}{(2x-2)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{2x^2-4x-6}{(2x-2)^2}}$

n គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{2x^2+3x-7}{x^2+3x-8}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^2+3x-7)'(x^2+3x-8)-(2x^2+3x-7)(x^2+3x-8)'}{(x^2+3x-8)^2} \\ &= \frac{(4x+3)(x^2+3x-8)-(2x^2+3x-7)(2x+3)}{(x^2+3x-8)^2} \\ &= \frac{(4x^3+15x^2-23x-24)-(4x^3+12x^2-5x-21)}{(x^2+3x-8)^2} \\ &= \frac{3x^2-18x-3}{(x^2+3x-8)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{3x^2-18x-3}{(x^2+3x-8)^2}}$

5 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = (2x+1)^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(2x+1)^3 \cdot (2x+1)' \\ &= 4(2x+1)^3 \cdot 2 \\ &= 8(2x+1)^3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 8(2x+1)^3}$

b គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \sqrt{2x^6-12}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^6-12)'}{2\sqrt{2x^6-12}} \\ &= \frac{12x^5}{2\sqrt{2x^6-12}} \\ &= \frac{6x^5}{\sqrt{2x^6-12}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = \dfrac{6x^5}{\sqrt{2x^6-12}}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = (x^5 - 4x^2 + 8)^8$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8(x^5 - 4x^2 + 8)^7 \cdot (x^5 - 4x^2 + 8)' \\ &= 8(x^5 - 4x^2 + 8)^7(5x^4 - 8x) \\ &= 8(5x^4 - 8x)(x^5 - 4x^2 + 8)^7 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 8(5x^4 - 8x)(x^5 - 4x^2 + 8)^7}$

d គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = (3x^4 - 7x^2 + 9)^5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(3x^4 - 7x^2 + 9)^4 \cdot (3x^4 - 7x^2 + 9)' \\ &= 5(3x^4 - 7x^2 + 9)^4(12x^3 - 14x) \\ &= 5(12x^3 - 14x)(3x^4 - 7x^2 + 9)^4 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 5(12x^3 - 14x)(3x^4 - 7x^2 + 9)^4}$

e គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \dfrac{1}{5x^2 - 6x + 2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(5x^2 - 6x + 2)'}{(5x^2 - 6x + 2)^2} \\ &= -\frac{10x - 6}{(5x^2 - 6x + 2)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{10x - 6}{(5x^2 - 6x + 2)^2}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \dfrac{2}{(6x^2 + 5x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \left(-\frac{2(6x^2 + 5x + 1)'}{(6x^2 + 5x + 1)^3}\right) \\ &= -\frac{4(12x + 5)}{(6x^2 + 5x + 1)^3} \\ &= -\frac{48x + 20}{(6x^2 + 5x + 1)^3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{48x + 20}{(6x^2 + 5x + 1)^3}}$

6 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(\sqrt{4x^2+1})'}{(\sqrt{4x^2+1})^2} \\ &= -\frac{\frac{(4x^2+1)'}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} \\ &= -\frac{\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} \\ &= -\frac{4x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\dfrac{4x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(\sqrt{5x^3+2})'}{(\sqrt{5x^3+2})^2} \\ &= -\frac{\frac{(5x^3+2)'}{2\sqrt{5x^3+2}}}{5x^3+2} \\ &= -\frac{\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3+2}}}{5x^3+2} \\ &= -\frac{15x^2}{2(5x^3+2)\sqrt{5x^3+2}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\dfrac{15x^2}{2(5x^3+2)\sqrt{5x^3+2}}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = \sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-1}}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}} \\ &= \frac{\frac{(3x+1)'(2x-1)-(3x+1)(2x-1)'}{(2x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{3(2x-1)-2(3x+1)}{(2x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}}$$
$$= -\frac{5}{2(2x-1)^2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{5}{2(2x-1)^2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$

$$y' = 3\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+2}{2-x}\right)'$$
$$= 3\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2 \cdot \frac{(x+2)'(2-x)-(x+2)(2-x)'}{(2-x)^2}$$
$$= 3\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2 \cdot \frac{1(2-x)-(x+2)(-1)}{(2-x)^2}$$
$$= 3\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2 \cdot \frac{4}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{12(x+2)^2}{(2-x)^4}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{12(x+2)^2}{(2-x)^4}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = (x+2)^3(2x-1)^5$

$$y' = [(x+2)^3]'(2x-1)^5 + (x+2)^3[(2x-1)^5]'$$
$$= 3(x+2)^2(2x-1)^5 + (x+2)^3 \cdot 5(2x-1)^4(2x-1)'$$
$$= 3(x+2)^2(2x-1)^5 + 10(x+2)^3(2x-1)^4$$
$$= (x+2)^2(2x-1)^4[3(2x-1)+10(x+2)]$$
$$= (x+2)^2(2x-1)^4(16x+17)$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = (x+2)^2(2x-1)^4(16x+17)}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = 2(3x+1)^4(5x-3)^2$

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left[[(3x+1)^4]'(5x-3)^2 + (3x+1)^4[(5x-3)^2]'\right] \\
&= 2\left[4(3x+1)^3(3)(5x-3)^2 + (3x+1)^4 \cdot 2(5x-3)(5)\right] \\
&= 2\left[12(3x+1)^3(5x-3)^2 + 10(3x+1)^4(5x-3)\right] \\
&= 2(3x+1)^3(5x-3)[12(5x-3) + 10(3x+1)] \\
&= 2(3x+1)^3(5x-3)(90x-26) \\
&= 4(3x+1)^3(5x-3)(45x-13)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 4(3x+1)^3(5x-3)(45x-13)}$

7 គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = (3x+5)^2$ តាមពីរវិធី៖

វិធីទី១៖ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ

$$\begin{aligned}
f(x) &= (3x+5)(3x+5) \\
f'(x) &= (3x+5)'(3x+5) + (3x+5)(3x+5)' \\
&= 3(3x+5) + (3x+5)(3) \\
&= 9x + 15 + 9x + 15 \\
&= 18x + 30
\end{aligned}$$

វិធីទី២៖ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃស្វ័យគុណ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(3x+5)^{2-1} \cdot (3x+5)' \\
&= 2(3x+5) \cdot 3 \\
&= 6(3x+5) \\
&= 18x + 30
\end{aligned}$$

សន្និដ្ឋាន៖ វិធីទាំងពីរផ្តល់លទ្ធផលដូចគ្នាគឺ $\boxed{f'(x) = 18x + 30}$

8 គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = (7-4x)^2$ តាមពីរវិធី៖

វិធីទី១៖ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ

$$\begin{aligned} f(x) &= (7-4x)(7-4x) \\ f'(x) &= (7-4x)'(7-4x) + (7-4x)(7-4x)' \\ &= -4(7-4x) + (7-4x)(-4) \\ &= -28 + 16x - 28 + 16x \\ &= 32x - 56 \end{aligned}$$

វិធីទី២៖ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃស្វ័យគុណ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(7-4x)^{2-1} \cdot (7-4x)' \\ &= 2(7-4x)(-4) \\ &= -8(7-4x) \\ &= -56 + 32x \\ &= 32x - 56 \end{aligned}$$

សន្និដ្ឋាន៖ វិធីទាំងពីរផ្តល់លទ្ធផលដូចគ្នាគឺ $\boxed{f'(x) = 32x - 56}$

9 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = e^x$

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \\ &= e^x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = e^x}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = 3e^x$

$$\begin{aligned} y' &= 3(e^x)' \\ &= 3e^x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3e^x}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = e^{4x}$

$$\begin{aligned} y' &= (4x)'e^{4x} \\ &= 4e^{4x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 4e^{4x}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = 2e^{5x}$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot (5x)'e^{5x} \\ &= 2 \cdot 5e^{5x} \\ &= 10e^{5x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 10e^{5x}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = e^{5x} - e^{2x}$

$$\begin{aligned} y' &= (5x)'e^{5x} - (2x)'e^{2x} \\ &= 5e^{5x} - 2e^{2x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 5e^{5x} - 2e^{2x}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = 2e^{3x} + e^{-x}$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot (3x)'e^{3x} + (-x)'e^{-x} \\ &= 2 \cdot 3e^{3x} - 1 \cdot e^{-x} \\ &= 6e^{3x} - e^{-x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 6e^{3x} - e^{-x}}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = e^{2x}e^{7x}$

$$\begin{aligned} y &= e^{2x+7x} = e^{9x} \\ y' &= (9x)'e^{9x} \\ &= 9e^{9x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 9e^{9x}}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = e^{x^2}$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' e^{x^2} \\ &= 2x e^{x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2x e^{x^2}}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = e^{x^2-2x+7}$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 2x + 7)' e^{x^2-2x+7} \\ &= (2x - 2) e^{x^2-2x+7} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = (2x - 2) e^{x^2-2x+7}}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = -3e^{-x^4}$

$$\begin{aligned} y' &= -3 \cdot (-x^4)' e^{-x^4} \\ &= -3 \cdot (-4x^3) e^{-x^4} \\ &= 12x^3 e^{-x^4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 12x^3 e^{-x^4}}$

k គណនាដេរីវេនៃ $y = 2^x$

$$y' = 2^x \ln 2$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2^x \ln 2}$

l គណនាដេរីវេនៃ $y = 3^{2x} - 3^{-2x+1}$

$$\begin{aligned} y' &= (2x)' 3^{2x} \ln 3 - (-2x + 1)' 3^{-2x+1} \ln 3 \\ &= 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - (-2) \cdot 3^{-2x+1} \ln 3 \\ &= 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 + 2 \cdot 3^{-2x+1} \ln 3 \\ &= 2 \ln 3 (3^{2x} + 3^{-2x+1}) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2 \ln 3 (3^{2x} + 3^{-2x+1})}$

m គណនាដេរីវេនៃ $y = 3^{2x}$

$$\begin{aligned} y' &= (2x)'3^{2x}\ln 3 \\ &= 2\cdot 3^{2x}\ln 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2\cdot 3^{2x}\ln 3}$

n គណនាដេរីវេនៃ $y = 9^{3x+1}$

$$\begin{aligned} y' &= (3x+1)'9^{3x+1}\ln 9 \\ &= 3\cdot 9^{3x+1}\ln 9 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3\cdot 9^{3x+1}\ln 9}$

o គណនាដេរីវេនៃ $y = 2^x \times 3^x$

$$\begin{aligned} y &= (2\times 3)^x = 6^x \\ y' &= 6^x\ln 6 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 6^x\ln 6}$

p គណនាដេរីវេនៃ $y = 8^{x^2+1}$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'8^{x^2+1}\ln 8 \\ &= 2x\cdot 8^{x^2+1}\ln 8 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2x\cdot 8^{x^2+1}\ln 8}$

q គណនាដេរីវេនៃ $y = (2^x)^3$

$$\begin{aligned} y &= 2^{3x} \\ y' &= (3x)'2^{3x}\ln 2 \\ &= 3\cdot 2^{3x}\ln 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3\cdot 2^{3x}\ln 2}$

r គណនាដេរីវេនៃ $y = (3^x)^2$

$$\begin{aligned} y &= 3^{2x} \\ y' &= (2x)'3^{2x}\ln 3 \\ &= 2\cdot 3^{2x}\ln 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2\cdot 3^{2x}\ln 3}$

10 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln x + \ln 3x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} + \frac{(3x)'}{3x} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{3}{3x} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{2}{x}}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln(3x+1) + \ln x^2$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x+1)'}{3x+1} + \frac{(x^2)'}{x^2} \\ &= \frac{3}{3x+1} + \frac{2x}{x^2} \\ &= \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{x} \\ &= \frac{3x+2(3x+1)}{x(3x+1)} \\ &= \frac{9x+2}{x(3x+1)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{9x+2}{x(3x+1)}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln x + 2\ln(2x+3)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{(2x+3)'}{2x+3} \\ &= \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{2}{2x+3} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{4}{2x+3} \\ &= \frac{2x+3+4x}{x(2x+3)} \\ &= \frac{6x+3}{x(2x+3)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{6x+3}{x(2x+3)}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = 5\ln 3x + \ln x^5$

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot \frac{(3x)'}{3x} + \frac{(x^5)'}{x^5} \\ &= 5 \cdot \frac{3}{3x} + \frac{5x^4}{x^5} \\ &= \frac{5}{x} + \frac{5}{x} \\ &= \frac{10}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{10}{x}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = 7x\ln(3x+1) - \ln(4x^3)$

$$\begin{aligned} y' &= (7x)'\ln(3x+1) + 7x[\ln(3x+1)]' - \frac{(4x^3)'}{4x^3} \\ &= 7\ln(3x+1) + 7x \cdot \frac{(3x+1)'}{3x+1} - \frac{12x^2}{4x^3} \\ &= 7\ln(3x+1) + 7x \cdot \frac{3}{3x+1} - \frac{3}{x} \\ &= 7\ln(3x+1) + \frac{21x}{3x+1} - \frac{3}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 7\ln(3x+1) + \frac{21x}{3x+1} - \frac{3}{x}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln(x^2+3x-1)+3\ln x^3$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+3x-1)'}{x^2+3x-1} + 3\cdot\frac{(x^3)'}{x^3} \\ &= \frac{2x+3}{x^2+3x-1} + 3\cdot\frac{3x^2}{x^3} \\ &= \frac{2x+3}{x^2+3x-1} + \frac{9}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{2x+3}{x^2+3x-1} + \frac{9}{x}}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln\sqrt{x+9}$

$$\begin{aligned} y &= \ln(x+9)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x+9) \\ y' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+9)'}{x+9} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+9} \\ &= \frac{1}{2(x+9)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{1}{2(x+9)}}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln(x^2-5)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-5)'}{x^2-5} \\ &= \frac{2x}{x^2-5} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{2x}{x^2-5}}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln\dfrac{x+1}{x-2}$

$$\begin{aligned} y &= \ln(x+1) - \ln(x-2) \\ y' &= \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{(x-2)'}{x-2} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{(x-2)-(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= -\frac{3}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln\dfrac{2x-3}{x+2}$

$$\begin{aligned} y &= \ln(2x-3) - \ln(x+2) \\ y' &= \frac{(2x-3)'}{2x-3} - \frac{(x+2)'}{x+2} \\ &= \frac{2}{2x-3} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{2(x+2)-(2x-3)}{(2x-3)(x+2)} \\ &= \frac{2x+4-2x+3}{(2x-3)(x+2)} \\ &= \frac{7}{(2x-3)(x+2)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{7}{(2x-3)(x+2)}}$

k គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln\sqrt{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned} y &= \ln(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\ln(x+1) \\ y' &= \frac{3}{2}\cdot\frac{(x+1)'}{x+1} \\ &= \frac{3}{2(x+1)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{3}{2(x+1)}}$

l គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln\sqrt{x^3 - e^{2x}}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\ln(x^3 - e^{2x}) \\ y' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^3 - e^{2x})'}{x^3 - e^{2x}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2 - 2e^{2x}}{x^3 - e^{2x}} \\ &= \frac{3x^2 - 2e^{2x}}{2(x^3 - e^{2x})} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{3x^2 - 2e^{2x}}{2(x^3 - e^{2x})}}$

m គណនាដេរីវេនៃ $y = \log_3 x$

$$y' = \frac{1}{x\ln 3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{1}{x\ln 3}}$

n គណនាដេរីវេនៃ $y = \log_5(x+2)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+2)'}{(x+2)\ln 5} \\ &= \frac{1}{(x+2)\ln 5} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{1}{(x+2)\ln 5}}$

o គណនាដេរីវេនៃ $y = \log_2(x^2 + 3x - 1)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 3x - 1)'}{(x^2 + 3x - 1)\ln 2} \\ &= \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)\ln 2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)\ln 2}}$

p គណនាដេរីវេនៃ $y = \log_3(4x^2 + x + 7)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x^2 + x + 7)'}{(4x^2 + x + 7)\ln 3} \\ &= \frac{8x + 1}{(4x^2 + x + 7)\ln 3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{8x + 1}{(4x^2 + x + 7)\ln 3}}$

q គណនាដេរីវេនៃ $y = \log_2 \dfrac{x + 2}{2x + 1}$

$$\begin{aligned} y &= \log_2(x + 2) - \log_2(2x + 1) \\ y' &= \frac{(x + 2)'}{(x + 2)\ln 2} - \frac{(2x + 1)'}{(2x + 1)\ln 2} \\ &= \frac{1}{(x + 2)\ln 2} - \frac{2}{(2x + 1)\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{(2x + 1) - 2(x + 2)}{(x + 2)(2x + 1)}\right] \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{2x + 1 - 2x - 4}{(x + 2)(2x + 1)}\right] \\ &= -\frac{3}{(x + 2)(2x + 1)\ln 2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\dfrac{3}{(x + 2)(2x + 1)\ln 2}}$

r គណនាដេរីវេនៃ $y = \log \sqrt{2x + 3}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\log(2x + 3) \\ y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 3)'}{(2x + 3)\ln 10} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2x + 3)\ln 10} \\ &= \frac{1}{(2x + 3)\ln 10} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{1}{(2x + 3)\ln 10}}$

11 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin^2 x)' + (\cos^2 x)' \\ &= 2\sin x(\sin x)' + 2\cos x(\cos x)' \\ &= 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 0}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = 3x^3 - 2\sin x\cos x$

$$\begin{aligned} y' &= (3x^3)' - 2[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'] \\ &= 9x^2 - 2(\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x) \\ &= 9x^2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 9x^2 - 2\cos 2x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 9x^2 - 2\cos 2x}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = (2x - \sin x)^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3(2x - \sin x)^2\cdot(2x - \sin x)' \\ &= 3(2x - \sin x)^2(2 - \cos x) \\ &= 3(2 - \cos x)(2x - \sin x)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3(2 - \cos x)(2x - \sin x)^2}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = \sin x - x^2\cos x$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' - [(x^2)'\cos x + x^2(\cos x)'] \\ &= \cos x - [2x\cos x + x^2(-\sin x)] \\ &= \cos x - 2x\cos x + x^2\sin x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = x^2 - \tan^2 x$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' - (\tan^2 x)' \\ &= 2x - 2\tan x \cdot (\tan x)' \\ &= 2x - 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 2x - \frac{2\tan x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2x - \frac{2\tan x}{\cos^2 x}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = 3x\cot^2 x$

$$\begin{aligned} y' &= (3x)'\cot^2 x + 3x(\cot^2 x)' \\ &= 3\cot^2 x + 3x \cdot 2\cot x \cdot (\cot x)' \\ &= 3\cot^2 x + 6x\cot x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \\ &= 3\cot^2 x - \frac{6x\cot x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 3\cot^2 x - \frac{6x\cot x}{\sin^2 x}}$

12 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \sin^2 x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x^2) \cdot (\sin x^2)' \\ &= 2\sin(x^2) \cdot (x^2)'\cos(x^2) \\ &= 2\sin(x^2) \cdot 2x\cos(x^2) \\ &= 4x\sin(x^2)\cos(x^2) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 4x\sin(x^2)\cos(x^2)}$

b គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = x^3 - \cos^2 5x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' - 2\cos(5x)\cdot(\cos 5x)' \\ &= 3x^2 - 2\cos(5x)\cdot\left[-(5x)'\sin(5x)\right] \\ &= 3x^2 - 2\cos(5x)(-5\sin 5x) \\ &= 3x^2 + 10\sin(5x)\cos(5x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 10\sin(5x)\cos(5x)}$

c គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{1-\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\tan 2x)'(1-\cos x) - \tan 2x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\frac{(2x)'}{\cos^2 2x}(1-\cos x) - \tan 2x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}(1-\cos x) - \tan 2x\sin x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{2(1-\cos x) - \sin x\sin 2x\cos 2x}{(1-\cos x)^2\cos^2 2x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(1-\cos x) - \sin x\sin 2x\cos 2x}{(1-\cos x)^2\cos^2 2x}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = x^3 - \sin(x^2 - 5x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' - (x^2-5x)'\cos(x^2-5x) \\ &= 3x^2 - (2x-5)\cos(x^2-5x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 3x^2 - (2x-5)\cos(x^2-5x)}$

e គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \sin 5x + \cos(x^3 - 1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x)'\cos 5x - (x^3-1)'\sin(x^3-1) \\ &= 5\cos 5x - 3x^2\sin(x^3-1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = 5\cos 5x - 3x^2\sin(x^3-1)}$

f គណនាដេរីវេនៃ $f(x) = \tan(2x^3 - 5x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^3 - 5x)'}{\cos^2(2x^3 - 5x)} \\ &= \frac{6x^2 - 5}{\cos^2(2x^3 - 5x)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x) = \dfrac{6x^2 - 5}{\cos^2(2x^3 - 5x)}}$

13 គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = 3x^2 - \sin 2x$

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2)' - (\sin 2x)' \\ &= 6x - (2x)' \cos 2x \\ &= 6x - 2\cos 2x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 6x - 2\cos 2x}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = -3x^4 + 2x^2$

$$\begin{aligned} y' &= (-3x^4)' + (2x^2)' \\ &= -12x^3 + 4x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -12x^3 + 4x}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = x + \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} y' &= (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2)'(x+1)-x^2(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1)-x^2(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{g'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $g(x)=(x^2+4)^3$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(x^2+4)^2\cdot(x^2+4)' \\ &= 3(x^2+4)^2\cdot 2x \\ &= 6x(x^2+4)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{g'(x)=6x(x^2+4)^2}$

f គណនាដេរីវេនៃ $g(x)=(x^3-1)^4$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4(x^3-1)^3\cdot(x^3-1)' \\ &= 4(x^3-1)^3\cdot 3x^2 \\ &= 12x^2(x^3-1)^3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{g'(x)=12x^2(x^3-1)^3}$

14 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y=\cos x+2\sin x$

$$\begin{aligned} y' &= (\cos x)'+2(\sin x)' \\ &= -\sin x+2\cos x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=-\sin x+2\cos x}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = -\sin x + 4\cos x$

$$\begin{aligned} y' &= -(\sin x)' + 4(\cos x)' \\ &= -\cos x - 4\sin x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\cos x - 4\sin x}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = 3\cos 2x - 2\sin 5x$

$$\begin{aligned} y' &= 3\cdot\left(-(2x)'\sin 2x\right) - 2\cdot\left((5x)'\cos 5x\right) \\ &= 3(-2\sin 2x) - 2(5\cos 5x) \\ &= -6\sin 2x - 10\cos 5x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -6\sin 2x - 10\cos 5x}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = \cos(3x+2) - 3\sin(4x-2)$

$$\begin{aligned} y' &= -(3x+2)'\sin(3x+2) - 3(4x-2)'\cos(4x-2) \\ &= -3\sin(3x+2) - 3(4)\cos(4x-2) \\ &= -3\sin(3x+2) - 12\cos(4x-2) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -3\sin(3x+2) - 12\cos(4x-2)}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = 5\cos(x^2+1) - 5\sin(x^2+3x)$

$$\begin{aligned} y' &= 5\left(-(x^2+1)'\sin(x^2+1)\right) - 5\left((x^2+3x)'\cos(x^2+3x)\right) \\ &= 5(-2x\sin(x^2+1)) - 5(2x+3)\cos(x^2+3x) \\ &= -10x\sin(x^2+1) - 5(2x+3)\cos(x^2+3x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -10x\sin(x^2+1) - 5(2x+3)\cos(x^2+3x)}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = \tan x + 2\cot x$

$$\begin{aligned} y' &= (\tan x)' + 2(\cot x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{\sin^2 x}}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = \tan 3x - \cot(2x+1)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} - \left(-\frac{(2x+1)'}{\sin^2(2x+1)}\right) \\ &= \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{2}{\sin^2(2x+1)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{2}{\sin^2(2x+1)}}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = 2\tan(-2x+5) + 3\cot 5x$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \frac{(-2x+5)'}{\cos^2(-2x+5)} + 3 \cdot \left(-\frac{(5x)'}{\sin^2 5x}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{-2}{\cos^2(-2x+5)} - 3 \cdot \frac{5}{\sin^2 5x} \\ &= -\frac{4}{\cos^2(-2x+5)} - \frac{15}{\sin^2 5x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{4}{\cos^2(-2x+5)} - \frac{15}{\sin^2 5x}}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = \cot 4x^2 + 3\tan(2023x+1)$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(4x^2)'}{\sin^2 4x^2} + 3 \cdot \frac{(2023x+1)'}{\cos^2(2023x+1)} \\ &= -\frac{8x}{\sin^2 4x^2} + 3 \cdot \frac{2023}{\cos^2(2023x+1)} \\ &= -\frac{8x}{\sin^2 4x^2} + \frac{6069}{\cos^2(2023x+1)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{8x}{\sin^2 4x^2} + \frac{6069}{\cos^2(2023x+1)}}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = 4\tan(-x^2-2x+1) + \cot(x^2-x+1)$

$$\begin{aligned} y' &= 4 \cdot \frac{(-x^2-2x+1)'}{\cos^2(-x^2-2x+1)} - \frac{(x^2-x+1)'}{\sin^2(x^2-x+1)} \\ &= 4 \cdot \frac{-2x-2}{\cos^2(-x^2-2x+1)} - \frac{2x-1}{\sin^2(x^2-x+1)} \\ &= -\frac{8x+8}{\cos^2(-x^2-2x+1)} - \frac{2x-1}{\sin^2(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{8x+8}{\cos^2(-x^2-2x+1)} - \frac{2x-1}{\sin^2(x^2-x+1)}}$

15 គណនាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y = x^2 + \sin 2x$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' + (\sin 2x)' \\ &= 2x + (2x)' \cos 2x \\ &= 2x + 2\cos 2x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2x + 2\cos 2x}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = -5x^4 - x^3$

$$\begin{aligned} y' &= (-5x^4)' - (x^3)' \\ &= -20x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -20x^3 - 3x^2}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = -3x - \dfrac{2}{x}$

$$\begin{aligned} y' &= (-3x)' - 2\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -3 - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -3 + \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -3 + \dfrac{2}{x^2}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $y = (x^2+4)^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3(x^2+4)^2 \cdot (x^2+4)' \\ &= 3(x^2+4)^2 \cdot 2x \\ &= 6x(x^2+4)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 6x(x^2+4)^2}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y = (x^3-1)^4$

$$\begin{aligned} y' &= 4(x^3-1)^3 \cdot (x^3-1)' \\ &= 4(x^3-1)^3 \cdot 3x^2 \\ &= 12x^2(x^3-1)^3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 12x^2(x^3-1)^3}$

g គណនាដេរីវេនៃ $y = \sin x + \cos x$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' + (\cos x)' \\ &= \cos x - \sin x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \cos x - \sin x}$

h គណនាដេរីវេនៃ $y = xe^x + 2023$

$$\begin{aligned} y' &= (x)'e^x + x(e^x)' + (2023)' \\ &= 1 \cdot e^x + xe^x + 0 \\ &= e^x(1+x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = (x+1)e^x}$

i គណនាដេរីវេនៃ $y = \cos(\sin x)$

$$\begin{aligned} y' &= -(\sin x)' \sin(\sin x) \\ &= -\cos x \sin(\sin x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\cos x \sin(\sin x)}$

j គណនាដេរីវេនៃ $y = \ln(\sin x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)'}{\sin x} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \cot x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \cot x}$

k គណនាដេរីវេនៃ $y = \sin(\ln x)$

$$\begin{aligned} y' &= (\ln x)' \cos(\ln x) \\ &= \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ &= \frac{\cos(\ln x)}{x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}}$

l គណនាដេរីវេនៃ $y = \cos(e^{-x})$

$$\begin{aligned} y' &= -(e^{-x})' \sin(e^{-x}) \\ &= -(-1 \cdot e^{-x}) \sin(e^{-x}) \\ &= e^{-x} \sin(e^{-x}) \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = e^{-x} \sin(e^{-x})}$

16 រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $x = \tan y$

$$\begin{aligned} (x)' &= (\tan y)' \\ 1 &= \frac{y'}{\cos^2 y} \\ y' &= \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \dfrac{1}{1+x^2}}$

b គណនាដេរីវេនៃ $x = \sin y$

$$\begin{aligned}(x)' &= (\sin y)' \\ 1 &= y' \cos y \\ y' &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{1}{\cos y}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $xy + \sin y = 0$

$$\begin{aligned}(xy + \sin y)' &= 0 \\ y + xy' + y' \cos y &= 0 \\ y'(x + \cos y) &= -y \\ y' &= -\frac{y}{x + \cos y}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{y}{x + \cos y}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $x + \sin y = xy$

$$\begin{aligned}(x + \sin y)' &= (xy)' \\ 1 + y' \cos y &= y + xy' \\ y' \cos y - xy' &= y - 1 \\ y'(\cos y - x) &= y - 1 \\ y' &= \frac{y-1}{\cos y - x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \frac{y-1}{\cos y - x}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $x + \tan(xy) = 0$

$$
\begin{aligned}
(x + \tan(xy))' &= 0 \\
1 + \frac{(xy)'}{\cos^2(xy)} &= 0 \\
1 + \frac{y + xy'}{\cos^2(xy)} &= 0 \\
\cos^2(xy) + y + xy' &= 0 \\
xy' &= -(y + \cos^2(xy)) \\
y' &= -\frac{y + \cos^2(xy)}{x}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{y + \cos^2(xy)}{x}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $y^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x$

$$
\begin{aligned}
(y^2)' &= (\sin^4 2x)' + (\cos^4 2x)' \\
2yy' &= 4\sin^3 2x \cdot (2\cos 2x) + 4\cos^3 2x \cdot (-2\sin 2x) \\
&= 8\sin^3 2x \cos 2x - 8\cos^3 2x \sin 2x \\
&= 8\sin 2x \cos 2x(\sin^2 2x - \cos^2 2x) \\
&= 4\sin 4x(-\cos 4x) \\
&= -2\sin 8x \\
y' &= -\frac{\sin 8x}{y}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{\sin 8x}{y}}$

17 រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $2x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned}(2x^2 + y^2)' &= (4)' \\ 4x + 2yy' &= 0 \\ 2yy' &= -4x \\ y' &= -\frac{4x}{2y} \\ y' &= -\frac{2x}{y}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{2x}{y}}$

b គណនាដេរីវេនៃ $2x^3 + y^3 = 8$

$$\begin{aligned}(2x^3 + y^3)' &= (8)' \\ 6x^2 + 3y^2y' &= 0 \\ 3y^2y' &= -6x^2 \\ y' &= -\frac{6x^2}{3y^2} \\ y' &= -\frac{2x^2}{y^2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{2x^2}{y^2}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $x^2 + xy + y^2 = -1$

$$\begin{aligned}(x^2 + xy + y^2)' &= (-1)' \\ 2x + (y + xy') + 2yy' &= 0 \\ 2x + y + y'(x + 2y) &= 0 \\ y'(x + 2y) &= -(2x + y) \\ y' &= -\frac{2x + y}{x + 2y}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}}$

d គណនាដេរីវេនៃ $x^3+2xy-y^2=3$

$$\begin{aligned}(x^3+2xy-y^2)' &= (3)'\\ 3x^2+2(y+xy')-2yy' &= 0\\ 3x^2+2y+2xy'-2yy' &= 0\\ y'(2x-2y) &= -(3x^2+2y)\\ y' &= -\frac{3x^2+2y}{2x-2y}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}}$

e គណនាដេរីវេនៃ $x^3+y^3=3xy$

$$\begin{aligned}(x^3+y^3)' &= (3xy)'\\ 3x^2+3y^2y' &= 3(y+xy')\\ x^2+y^2y' &= y+xy'\\ y^2y'-xy' &= y-x^2\\ y'(y^2-x) &= y-x^2\\ y' &= \frac{y-x^2}{y^2-x}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}}$

f គណនាដេរីវេនៃ $x^3y+xy^3=3x^2$

$$\begin{aligned}(x^3y+xy^3)' &= (3x^2)'\\ (3x^2y+x^3y')+(y^3+3xy^2y') &= 6x\\ y'(x^3+3xy^2)+3x^2y+y^3 &= 6x\\ y'(x^3+3xy^2) &= 6x-3x^2y-y^3\\ y' &= \frac{6x-3x^2y-y^3}{x^3+3xy^2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=\frac{6x-3x^2y-y^3}{x^3+3xy^2}}$

18 គណនា ៖

a គណនា $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f^{(4)}(x) = 0}$

b គណនា $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^6 - 2\cos 2x \\ f''(x) &= 6x^5 + 4\sin 2x \\ f'''(x) &= 30x^4 + 8\cos 2x \\ f^{(4)}(x) &= 120x^3 - 16\sin 2x \\ f^{(5)}(x) &= 360x^2 - 32\cos 2x \\ f^{(6)}(x) &= 720x + 64\sin 2x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f^{(6)}(x) = 720x + 64\sin 2x}$

c គណនា $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^7 - 10x - \sin x \\ f''(x) &= 56x^6 - 10 - \cos x \\ f'''(x) &= 336x^5 + \sin x \\ f^{(4)}(x) &= 1680x^4 + \cos x \\ f^{(5)}(x) &= 6720x^3 - \sin x \\ f^{(6)}(x) &= 20160x^2 - \cos x \\ f^{(7)}(x) &= 40320x + \sin x \\ f^{(8)}(x) &= 40320 + \cos x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f^{(8)}(x) = 40320 + \cos x}$

d គណនា $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x)=\dfrac{120}{x^6}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 120x^{-6}\\
f'(x) &= 120(-6)x^{-7}\\
f''(x) &= 120(-6)(-7)x^{-8}\\
&\vdots\\
f^{(10)}(x) &= 120(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)(-13)(-14)(-15)x^{-16}\\
&= 5!\cdot\frac{15!}{5!}\cdot\frac{1}{x^{16}} \quad (\text{ព្រោះ } 120=5!)\\
&= \frac{15!}{x^{16}}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f^{(10)}(x)=\dfrac{15!}{x^{16}}}$

19 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

a រក a,b និងគណនាដេរីវេនៃ $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

១. រូបមន្តដេរីវេទូទៅ (ជាអនុគមន៍នៃ a និង b)៖

$$\begin{aligned}
f(x) &= a(x+1)^{-1}+b(x+2)^{-1}\\
f'(x) &= -a(x+1)^{-2}-b(x+2)^{-2}=-\frac{a}{(x+1)^2}-\frac{b}{(x+2)^2}\\
f''(x) &= 2!\,a(x+1)^{-3}+2!\,b(x+2)^{-3}=\frac{2a}{(x+1)^3}+\frac{2b}{(x+2)^3}\\
f'''(x) &= -3!\,a(x+1)^{-4}-3!\,b(x+2)^{-4}=-\frac{6a}{(x+1)^4}-\frac{6b}{(x+2)^4}\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n\cdot n!\left[\frac{a}{(x+1)^{n+1}}+\frac{b}{(x+2)^{n+1}}\right]
\end{aligned}$$

សម្រាប់ $n=2022$ (ដោយសារ $(-1)^{2022}=1$) គេបាន៖

$$f^{(2022)}(x)=2022!\left[\frac{a}{(x+1)^{2023}}+\frac{b}{(x+2)^{2023}}\right]$$

២. ករណីជាក់ស្តែង (ឧទាហរណ៍ បើ $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$)៖

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$$
$$1=a(x+2)+b(x+1)$$

- ជំនួស $x=-1$ គេបាន៖ $1=a(-1+2)\implies \mathbf{a=1}$ - ជំនួស $x=-2$ គេបាន៖ $1=b(-2+1)\implies \mathbf{b=-1}$

ដូចនេះ៖

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$
$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{2}{(x+2)^3}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{f^{(2022)}(x)=2022!\left[\frac{1}{(x+1)^{2023}}-\frac{1}{(x+2)^{2023}}\right]}$$

20 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a គណនាដេរីវេនៃ $y=20\tan^{-1}x+\sin^{-1}3x$

$$y'=20\cdot\frac{(x)'}{1+x^2}+\frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}}$$
$$=20\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$
$$=\frac{20}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y'=\dfrac{20}{1+x^2}+\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}$

b គណនាដេរីវេនៃ $y = x\tan^{-1}2x - \cot^{-1}4x$

$$\begin{aligned} y' &= (x)'\tan^{-1}2x + x(\tan^{-1}2x)' - (\cot^{-1}4x)' \\ &= 1\cdot\tan^{-1}2x + x\cdot\frac{(2x)'}{1+(2x)^2} - \left(-\frac{(4x)'}{1+(4x)^2}\right) \\ &= \tan^{-1}2x + \frac{2x}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = \tan^{-1}2x + \frac{2x}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^2}}$

c គណនាដេរីវេនៃ $y = 2x\cot^{-1}3x - \cos^{-1}7x$

$$\begin{aligned} y' &= (2x)'\cot^{-1}3x + 2x(\cot^{-1}3x)' - (\cos^{-1}7x)' \\ &= 2\cot^{-1}3x + 2x\cdot\left(-\frac{(3x)'}{1+(3x)^2}\right) - \left(-\frac{(7x)'}{\sqrt{1-(7x)^2}}\right) \\ &= 2\cot^{-1}3x - \frac{6x}{1+9x^2} + \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y' = 2\cot^{-1}3x - \frac{6x}{1+9x^2} + \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}}$

21 គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a គណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{x^2} = \frac{(-1)^1\cdot 1!}{x^{1+1}} \\ y'' &= \frac{2}{x^3} = \frac{(-1)^2\cdot 2!}{x^{2+1}} \\ y''' &= -\frac{6}{x^4} = \frac{(-1)^3\cdot 3!}{x^{3+1}} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}}$

b គណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$y' = -\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{(x+1)^{1+1}}$$
$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{(x+1)^{2+1}}$$
$$y''' = -\frac{6}{(x+1)^4} = \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{(x+1)^{3+1}}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}}$

c គណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \sin(3x+1)$

$$y' = 3\cos(3x+1) = 3\sin\left(3x+1+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -9\sin(3x+1) = 3^2\sin\left(3x+1+\frac{2\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -27\cos(3x+1) = 3^3\sin\left(3x+1+\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = 3^n\sin\left(3x+1+\frac{n\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y^{(n)} = 3^n\sin\left(3x+1+\dfrac{n\pi}{2}\right)}$



អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

២.១ អនុវត្តក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា

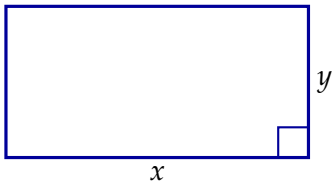
វិលីក

បន្ទាត់ប៉ះ d ទៅ នឹង ក្រាប $(C) : y = f(x)$ ត្រង់ ចំណុច $A(x_o, y_o)$ កំណត់ ដោយ សមីការ $\boxed{(d) : y - y_o = y'_o(x - x_o)}$ ដែល $y'_o = f'(x_o)$ ។

សម្គាល់ គេមានបន្ទាត់ $(D) : y = ax + b$ និង $(L) : y = a'x + b'$ ។

- $(D) \perp (L)$ នោះ $a \times a' = -1$
- $(D) \parallel (L)$ នោះ $a = a'$

លំហាត់គំរូ ១៖ កសិករម្នាក់ចង់ធ្វើរបងព័ទ្ធចំការមួយដែលមានរាងជាចតុកោណកែងដែលមានបរិមាត្រស្មើនឹង 400 m



a. គណនាផ្ទៃក្រឡាចំការនេះជាអនុគមន៍ x

b. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាចំការនេះមានតម្លៃធំបំផុត ។

ដំណោះស្រាយ

a. គណនាផ្ទៃក្រឡាចំការជាអនុគមន៍នៃ x

ដោយចំការនេះមានរាងជាចតុកោណកែង គេបានផ្ទៃក្រឡាចំការគឺ $S = xy$

ដោយបរិមាត្រចំការស្មើនឹង 400 m

$$2x + 2y = 400$$

$$x + y = 200 \implies y = 200 - x$$

នោះគេបាន៖

$$\begin{aligned} S &= x(200-x) \\ &= 200x - x^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ ផ្ទៃក្រឡាចំការជាអនុគមន៍នៃ x គឺ $\boxed{A(x) = 200x - x^2}$

b កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាចំការនេះមានតម្លៃធំបំផុត គេមាន $A(x) = 200x - x^2$

$$\begin{aligned} A'(x) &= (200x - x^2)' \\ &= 200 - 2x \end{aligned}$$

ឱ្យ $A'(x) = 0 \iff 200 - 2x = 0 \iff x = 100$

គណនាដេរីវេទី២ ៖

$$A''(x) = (200 - 2x)' = -2 < 0$$

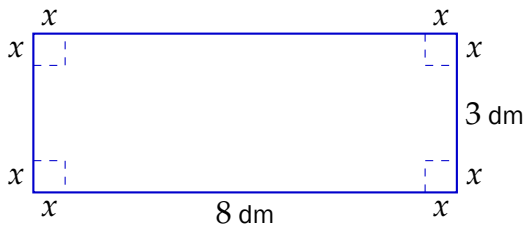
ដោយ $A''(100) = -2 < 0$ នាំឱ្យ $A(x)$ មានតម្លៃអតិបរិមាត្រង់ $x = 100$ ។

ចំពោះ $x = 100$ គេបាន៖

$$\begin{aligned} y &= 200 - 100 \\ &= 100 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាចំការមានតម្លៃធំបំផុត គេត្រូវជ្រើសរើស $\boxed{x = 100\,\text{m}, y = 100\,\text{m}}$

លំហាត់គំរូ ២ គេចង់ធ្វើប្រអប់បើកមួយពីក្រដាសតែកាតុងដែលមានរាងជាចតុកោណកែងដោយកាត់កាតេតូចៗ នៅគ្រប់ជ្រុងកែងចេញ (ដូចរូប)។ គេដឹងថាបណ្តោយ 8 dm និងទទឹង 3 dm ។



a គណនាមាឌនៃប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x

b កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌអតិបរមា រួចគណនាមាឌអតិបរមានោះ ។

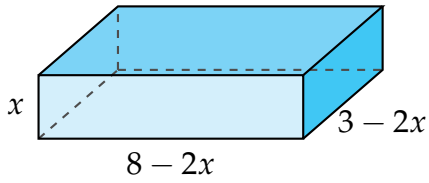
ដំណោះស្រាយ

a គណនាមាឌនៃប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x

ដើម្បីធ្វើប្រអប់បានលុះត្រាតែ

$0 < 2x < 3 \iff 0 < x < 1.5$ ដោយប្រអប់បើកមានរាង

ជាប្រអប់ប្រលេពីប៉ែតកែង គេបានមាឌប្រអប់គឺ៖



$$\begin{aligned} V(x) &= (8-2x)(3-2x)x \\ &= (8-2x)(3x-2x^2) \\ &= 24x - 16x^2 - 6x^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 22x^2 + 24x \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ មាឌនៃប្រអប់គឺ $\boxed{V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x}$

b កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានតម្លៃមាឌអតិបរមា

គេមាន $V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$

គេបាន $V'(x) = (4x^3 - 22x^2 + 24x)' = 12x^2 - 44x + 24$

គេឱ្យ $V'(x) = 0 \iff 12x^2 - 44x + 24 = 0 \iff 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$$\iff (3x-2)(x-3) = 0$$

$$\iff x = \frac{2}{3} \quad , \quad x = 3$$

ដោយ $0 < x < 1.5$ នោះ $x = 3$ មិនយក

តារាងអថេរភាព៖

x	0		$\frac{2}{3}$		1.5
$V'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$V(x)$	‖	↗	អតិបរមា	↘	‖

មាឌអតិបរមា $V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{209}{27}\ \text{dm}^3$

ដូចនេះ៖ $x = \frac{2}{3}$ dm ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌអតិបរមា និងមានមាឌអតិបរមាគឺ $\boxed{V\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{209}{27}\ \text{dm}^3}$

លំហាត់គំរូ ៣៖ ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់ចំនួន 2 ពាន់រៀល សម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ 1 គ្រឿង ។ គេដឹងថាបើក្រុមហ៊ុនលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿង តម្លៃ 5 ពាន់រៀល នោះក្នុងមួយខែលក់អស់ 4000 គ្រឿង ។ អ្នកគ្រប់គ្រងក្រុមហ៊ុនបានសង្កេតឃើញថា កាលណាតម្លៃសម្ភារៈកើនឡើងម្តង 1 ពាន់រៀល នោះបរិមាណ

សម្ភារៈលក់ចេញក្នុង 1 ខែ ថយចុះម្តង 400 គ្រឿង ។ កំណត់តម្លៃសម្ភារៈ 1 គ្រឿង ដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x ជាតម្លៃលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿង និង $P(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប ។

ប្រាក់ចំណេញសរុប = (ប្រាក់ចំណេញក្នុង 1 គ្រឿង) $\times$ (បរិមាណសម្ភារៈ)

តាមសមម្មតិកម្ម គេបាន ប្រាក់ចំណេញក្នុង 1 គ្រឿង $= x - 2$ ពាន់រៀល ។

- បើលក់ 5 ពាន់រៀល ក្នុងមួយគ្រឿង នោះបរិមាណលក់ 4000 គ្រឿង ក្នុងមួយខែ
- បើលក់ 6 ពាន់រៀល ក្នុងមួយគ្រឿង នោះបរិមាណលក់ $4000 - 400(6-5)$ គ្រឿង ក្នុងមួយខែ

....

- បើលក់ x ពាន់រៀល ក្នុងមួយគ្រឿង នោះបរិមាណលក់ $4000 - 400(x-5)$ គ្រឿង ក្នុងមួយខែ

គេបាន៖

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)[4000 - 400(x-5)] \\ &= 400(x-2)(10 - x + 5) \\ &= 400(x-2)(15-x) \end{aligned}$$

គណនាដេរីវេ $P'(x)$ ៖

$$\begin{aligned} P'(x) &= 400(15-x) - 400(x-2) \\ &= 400(15 - x - x + 2) \\ &= 400(17 - 2x) \end{aligned}$$

ឱ្យ $P'(x) = 0 \iff 17 - 2x = 0 \implies x = \dfrac{17}{2} = 8.5$

តារាងអថេរភាព៖

x	8.5
$P'(x)$	$+$ 0 $-$
$P(x)$	↗ អតិបរមា ↘

គណនាប្រាក់ចំណេញអតិបរមា៖

$$P(8.5) = 400(8.5-2)(15-8.5) = 16900 \text{ ពាន់រៀល}$$

ដូចនេះ៖ ដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនចំណេញបានជាអតិបរមាចំនួន $\boxed{16900 \text{ ពាន់រៀល}}$ ក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿង តម្លៃ $\boxed{8.5 \text{ ពាន់រៀល}}$ (ឬ 8500 ន) ។

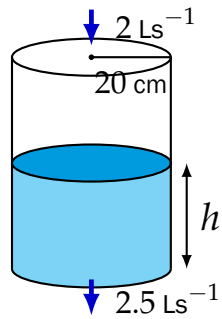
ប្រតិបត្តិ

គេយកសំណុំសីមួយផ្ទាំងមានរាងជាចតុកោណកែងមានបណ្តោយ 180 cm និងទទឹង 120 cm មកធ្វើហិបមួយរាងប្រលេពីប៉ែតកែងដែលគ្មានគម្រប ។ តើគេត្រូវធ្វើហិបនោះកម្ពស់ប៉ុន្មាន ដើម្បីឱ្យហិបនោះមានមាឌអតិបរមា?

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ដូចនេះ៖ ដើម្បីឱ្យហិបមានមាឌអតិបរមា គេត្រូវធ្វើហិបមានកម្ពស់ $\boxed{x = 10(5 - \sqrt{7}) \text{ cm}}$

២.២ អត្រាបំរែបម្រួល



ឧទាហរណ៍ ១៖ គេបង្ហូរទឹកចេញពីធុងរាងស៊ីឡាំងដែលមានបាតមានកាំស្មើនឹង 20 cm ដោយអត្រា 2.5 L/s និងចាក់ទឹកចូលដោយអត្រា 2 L/s (មើលរូប) ។ តើកម្រិតទឹកក្នុងធុងប្រែប្រួលដោយអត្រាប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

តាង h (cm) ជាជម្រៅទឹកក្នុងរយៈពេល t (s) ។

អត្រាបំប្រែបម្រួលមាឌទឹក V (cm^3) គឺ៖

$$\frac{dV}{dt} = 2000 - 2500 = -500 \text{ cm}^3/\text{s}$$

ដោយ $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ ដូច្នេះ ទឹកចាក់ចូលមានមាឌ 2000 cm^3 និងទឹកបង្ហូរចេញមានមាឌ 2500 cm^3 ក្នុងមួយវិនាទី ។

បម្រែបម្រួលកម្រិតទឹកគឺ $\frac{dh}{dt}$ នោះគេបាន៖

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$$

ដោយ $V = \pi r^2 h$ នោះគេបាន $\frac{dV}{dh} = \pi r^2 = 400\pi$ (ព្រោះ $r = 20 \text{ cm}$) ។

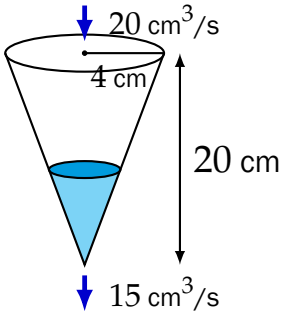
ដូច្នេះ៖

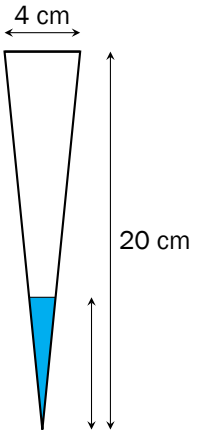
$$-500 = 400\pi \times \frac{dh}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{500}{400\pi} = -0.40 \text{ cm/s}$$

ដូចនេះ៖ នេះបញ្ជាក់ថាកម្រិតទឹកបានថយចុះក្នុងអត្រា $\boxed{0.40 \text{ cm/s}}$

ឧទាហរណ៍ ២៖ គេដាក់កោនប្រហោងមួយឱ្យកំពូលចុះក្រោមតាមអ័ក្សឈរ (មើលរូប) ។ គេចាក់អង្គធាតុរាវបញ្ចូលក្នុងកោន ដោយមានអត្រាថេរ $20 \text{ cm}^3/\text{s}$ ប៉ុន្តែហូរចេញវិញតាមប្រហោងតូចត្រង់កំពូលកោន ដោយមានអត្រាថេរ $15 \text{ cm}^3/\text{s}$ ។ តើជម្រៅអង្គធាតុរាវក្នុងកោនប្រែប្រួលដោយអត្រាប៉ុន្មាន បើទឹកមានកម្ពស់ 12 cm ?





ដំណោះស្រាយ

បើ V (cm^3) ជាមាឌអង្គធាតុរាវនៅក្នុងកោនក្នុងរយៈពេល t (s)

នោះគេបាន $\frac{dV}{dt} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}^3/\text{s}$

តាង h (cm) ជាកម្ពស់អង្គធាតុរាវក្នុងរយៈពេល t (s)

គេត្រូវរក $\frac{dh}{dt}$ ។ គេបាន $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$ ដូច្នេះ គេត្រូវរកទំនាក់ទំនងរវាង V និង h ។

យក r ជាកាំមុខកាត់នៃផ្ទៃអង្គធាតុរាវពាសលើ ។

គេបាន $\tan\theta = \frac{4}{20} = \frac{r}{h} \Longrightarrow r = \frac{h}{5}$ និង $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{75}$

នាំឱ្យ $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi h^2}{25}$ នោះគេបាន $\frac{dV}{dt} = 5 = \frac{\pi \times 12^2}{25} \times \frac{dh}{dt}$

នាំឱ្យ $\frac{dh}{dt} = \frac{25 \times 5}{\pi \times 144} \approx 0.28 \text{ cm/s}$

ដូចនេះ៖ ជម្រៅអង្គធាតុរាវគឺកើនបានក្នុងអត្រា $\boxed{0.28 \text{ cm/s}}$

ប្រតិបត្តិ

ប្រតិបត្តិ៖ ផ្ទៃរង្វង់មួយបានថយចុះដោយអត្រា $2\ \text{cm}^2/\text{s}$ ។ តើកាំរង្វង់ថយចុះដោយអត្រាប៉ុន្មាន កាលណាផ្ទៃរង្វង់ស្មើនឹង $9\pi\ \text{cm}^2$?

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ដូចនេះ៖ កាំរង្វង់ថយចុះដោយអត្រា $\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{2}{6\pi} \approx 0.106\ \text{cm/s}}$

២.៣ ល្បឿននិងសំទុះនៃចលនា

២.៣.១ ល្បឿននៃចលនា

ជាទូទៅ

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$ ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។

លំហាត់គំរូ៖ គេទម្លាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះ ដែលខណៈ t វិនាទី វត្ថុនោះធ្លាក់បានចម្ងាយ $S(t) = 16t^2$ (m) ។ កំណត់ល្បឿននៃវត្ថុខណៈពេល $t = 3$ វិនាទី ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $V(t) = \frac{dS}{dt} = S'(t) = 32t\ , V(3) = 32 \times 3$

ដូចនេះ៖ ល្បឿននៃវត្ថុខណៈពេល $t = 3\,\text{s}$ គឺ $\boxed{96\ \text{m/s}}$

លំហាត់គម្រូ៖ កីឡាករទម្លាក់លោតទឹកពីកម្ពស់ $3.2\ \text{m}$ ។ ទីតាំងនៃកីឡាករនៅខណៈពេល t វិនាទី ឱ្យតាមអនុគមន៍ $S(t) = -1.6t^2 + 1.6t + 3.2 \quad (S \text{ គិតជា m})$ ។

a. កំណត់រយៈពេលដែលកីឡាកធ្លាក់ដល់ទឹក

b. រកល្បឿនរបស់កីឡាករនៅខណៈពេលនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

a. កំណត់រយៈពេលដែលកីឡាករធ្លាក់ដល់ទឹក

កាលណាកីឡាករធ្លាក់ដល់ទឹក នោះទីតាំង $S(t) = 0$

$$\begin{aligned} &\iff -1.6t^2 + 1.6t + 3.2 = 0 \\ &\iff t^2 - t - 2 = 0 \\ &\iff (t-2)(t+1) = 0 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ $t = 2\,\text{s}$ ឬ $t = -1\,\text{s}$ (មិនយក ព្រោះ $t > 0$) ។

ដូចនេះ៖ រយៈពេលដែលកីឡាករធ្លាក់ដល់ទឹកគឺ $\boxed{t = 2\,\text{s}}$

b រកល្បឿនរបស់កីឡាករនៅខណៈពេលនោះ

អនុគមន៍ល្បឿន $V(t) = S'(t) = (-1.6t^2 + 1.6t + 3.2)' = -3.2t + 1.6$

ខណៈពេលកីឡាករធ្លាក់ដល់ទឹក ($t = 2\,\text{s}$) គេបាន៖

$$V(2) = -3.2(2) + 1.6 = -6.4 + 1.6 = -4.8\,\text{m/s}$$

ដូចនេះ៖ ល្បឿនរបស់កីឡាករនៅខណៈពេលនោះគឺ $\boxed{V(2) = -4.8\,\text{m/s}}$

២.៣.២ សំទុះនៃចលនា

ឧទាហរណ៍៖ រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមផ្លាស់ទីដោយល្បឿន V បន្ទាប់ពីរយៈពេល t វិនាទី ក្រោយមកគេបាន V ជាអនុគមន៍ t គឺ $V(t)$ ។ សំទុះនៃរថយន្តពីខណៈ t ទៅ $t + \Delta t$ កំណត់តាងដោយ

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

បើ $\Delta t \to 0$ នោះ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V'(t)$$

$V'(t)$ ហៅថា សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t តាងដោយ $a(t)$ ។

ដានទូទៅ

សំទុះនៃចលនានៅខណៈ t គឺ $a(t) = \dfrac{dV}{dt} = V'(t)$ ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

លំហាត់គម្រូ គេទម្លាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះ ។ នៅខណៈពេល t វិនាទី វត្ថុនោះធ្លាក់បានចម្ងាយដោយអនុគមន៍ $S(t) = 4.905t^2 + 30.94\,(\text{m})$ ។ កំណត់ល្បឿន និងសំទុះនៃវត្ថុខណៈពេល $t = 2\,(\text{s})$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ល្បឿននៃចលនាគឺ៖

$$V(t) = S'(t) = (4.905t^2 + 30.94)'$$
$$= 2 \times 4.905t = 9.81t$$

ខណៈពេល $t = 2\,\text{s}$ ល្បឿននៃវត្ថុគឺ៖

$$V(2) = 9.81(2) = 19.620\,\text{m/s}$$

អនុគមន៍សំទុះនៃចលនាគឺ៖

$$a(t) = V'(t) = (9.81t)' = 9.81\,\text{m/s}^2$$

ខណៈពេល $t = 2\,\text{s}$ សំទុះនៃវត្ថុគឺ៖

$$a(2) = 9.810\,\text{m/s}^2$$

ដូចនេះ៖ នៅខណៈពេល $t = 2\,\text{s}$ ល្បឿននៃវត្ថុគឺ $\boxed{V(2) = 19.620\,\text{m/s}}$ និងសំទុះនៃវត្ថុគឺ $\boxed{a(2) = 9.810\,\text{m/s}^2}$ ។

ការប្រឌលំហាត់បន្ថែម

1. ⓐ រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = f(x) = x^3 - 3x$ ។
   ⓑ រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = f(x) - x^3 + 3x$ ។
   ⓒ រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = f(x) = 2x^3 - 6x + 2$ ។
   ⓓ ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $80\,\text{m}$ ។ រកប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាអតិបរមា ។
   ⓔ ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $1600\,\text{m}$ ។ រកប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាអតិបរមា ។
2. គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយ ជ្រុងមានរង្វាស់ a ។ M ជាចំណុចមួយនៅលើ AB ដែល $AM = x$ ។ គេសង់ចតុកោណកែង $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត ។
3. រកពីរចំនួនវិជ្ជមានដើម្បីឱ្យផលគុណរបស់វាមានតម្លៃអតិបរមា បើគេដឹងថាផលបូកនៃពីរចំនួននោះស្មើ 110 ។
4. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេឡូពីប៉ែតកែង មានបាតជាការេគ្មានគម្របហើយមានមាឌ $V = 32\,\text{dm}^3$ ។ រកវិមាត្រនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់នៃប្រអប់អប្បបរមា ។
5. ក្រដាសកាតុង 1 សន្លឹកមានរាងជាការេដែលជ្រុងមានរង្វាស់ $a\,(\text{m})$ ។ គេកាត់តែមជ្រុងទាំងបួនជាការេ 4 ប៉ុនគ្នាដើម្បីឱ្យផ្នែកនៅសល់បត់បានជាប្រអប់មួយរាងជាប្រលេឡូពីប៉ែតកែងមានមាឌធំបំផុត ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងត្រូវកាត់ចេញនោះ ។

6 ក្រដាសកាតុង 1 សន្លឹកមានរាងជាចតុកោណកែងមានវិមាត្រ 30 cm និង 48 cm គេកាត់កៀនជ្រុងទាំងបួនជាការេប៉ុនគ្នាដើម្បីឱ្យផ្នែកនៅសល់បត់បានជាប្រអប់មួយរាងជាប្រលេឡូពីប៉ែតកែងគ្មានគម្រប ។ រកវិមាត្រនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = 1 - x\ln x$ កំណត់ចំពោះ $x > 0$ និងមានក្រាប (C) ។

7
- **a** រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(1,1)$
- **b** រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង (d) និងក្រាប $(C_1) : y = e^x - x + 1$

8 គេមានអនុគមន៍ $C_1 : y = (x+1)e^{-x}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។
- **a** រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d ទៅនឹងក្រាប C_1 ត្រង់ចំណុច $A(-1,0)$ ។
- **b** រកសមីការបន្ទាត់ L ស្របនឹង d ហើយកាត់ចំណុច $B(1,1)$ ។
- **c** បើ $C_2 : y = (1-x)e^x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ x ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាក្រាប C_1 និង C_2 កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $C(0,1)$ ។
- **d** យកចំណុច D ជាប្រសព្វរវាងក្រាប C_2 និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ រកកូអរដោនេចំណុច D ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពាយ $ACBD$ យកឯកតា 1 cm ។

9
- **a** កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែជាងតាងអនុគមន៍ $y = \dfrac{e^x}{1-\sin x}$ នៅត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ ។
- **b** រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (T) និងខ្សែជាងតាងអនុគមន៍ $y = 2x + 1 + \ln(x-1)$ ។

10
- **a** កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះខ្សែបោងតាងអនុគមន៍ $y = x\ln x - 1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$ ។
- **b** រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ B រវាងបន្ទាត់ (L) និងខ្សែបោង (K) តាងអនុគមន៍ $y = x + e^x - 3$ ។

11 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែជាង (H) តាងអនុគមន៍ $y = \dfrac{e^x}{1+\cos x}$ ត្រង់ $x_0 = 0$ ។

12 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = -4x^3 + x^2 + 14x - 1$ ។
- **a** រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f'(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។
- **b** រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f''(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។

13 គេមានអនុគមន៍ $g(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ ។
- **a** រកដេរីវេទី១ និងទី២នៃអនុគមន៍ g ។
- **b** សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី១ និងសញ្ញាដេរីវេទី២ ។

14 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = 2x^3 - 16x + 11$ មានក្រាប (C) ។
- **a** រកសមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(2,-5)$ ។
- **b** រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប (C) ។

15 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 1$ មានក្រាប (C) ។
- **a** រកកូអរដោនេនៃគ្រប់ចំណុចប៉ះនៃក្រាប (C) ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក ។
- **b** រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ ។

16 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=3x^2-4x+1$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ និង មានក្រាប (C) ។

ⓐ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ $y=-\dfrac{x}{5}+2$ ។

ⓑ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $y=x+5$

17 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ និង មានក្រាប (C) ។

ⓐ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស a ។

ⓑ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A កាត់ក្រាប (C) ម្តងទៀតត្រង់ B ។ រកកូអរដោនេនៃ B

18 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+2$ ដែលមានអតិបរមាមធៀបត្រង់ $x=1$ និងមាន អប្បបរមាមធៀបត្រង់ $x=2$ ។

ⓐ រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ។

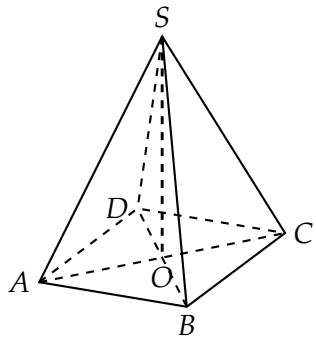
ⓑ រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាមធៀបនៃ f ។

19 គេឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖ $f(x)=a\ln x+bx^2+x+2$ ។ កំណត់តម្លៃ a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍ f មានបរមាត្រង់ $x_1=1$ និង $x_2=2$ ។

20 អនុគមន៍ g មួយកំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែលកំណត់ដោយ $g(x)=ax+1+b\ln x$ មានក្រាប (H) ហើយបន្ទាត់ (D) មួយមានសមីការ $y=x-1$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ (D) ប៉ះនឹងក្រាប (H) ត្រង់ចំណុច $A(1,0)$ ។

21

ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយត $SABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាខាង S_ℓ ។ គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាត ដើម្បីឱ្យមាឌពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយតមានតម្លៃអតិបរមា ។



22 ផលបូកបរិមាត្រកាវមួយនិងរង្វង់មួយមានប្រវែង ℓ ។ គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់និងជ្រុងការេដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេ និងរង្វង់មានតម្លៃអប្បបរមា ។

23 ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើនិងបាតក្រោមជាការេ ហើយមានមាឌ $250\ \text{cm}^3$ ។ សម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើគម្របលើ និងបាតក្រោមតម្លៃ $2000\ ៛/\text{cm}^2$ ហើយសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងតម្លៃ $1000\ ៛/\text{cm}^2$ ។ កំណត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារៈមានតម្លៃអប្បបរមា រួចគណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ ។

24 ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យ ដែលរយៈពេល t នាទី ក្រោយមក ទូកនោះមានចម្ងាយពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t)=t^3+60t$ គិតជាម៉ែត្រ ។

ⓐ រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើម

ⓑ កំណត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t=3\ \text{mn}$

25 រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{100t}{t+15}$ m/s ។ កំណត់សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេល ៖

◈ a $t = 5\,\text{s}$ ◈ b $t = 10\,\text{s}$ ◈ c $t = 20\,\text{s}$

26 រថយន្តមួយផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែល t វិនាទី តាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{22t}{0.44t + 3.3}$ ម៉ែត្រក្នុងមួយវិនាទី ។ កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណៈពេល ៖

◈ a 5 វិនាទី ◈ b 10 វិនាទី ◈ c 20 វិនាទី ◈ d 30 វិនាទី

27 គេសង់ជម្រកមួយរាងកោនបរិវដ្តន៍ ដែលមានមាឌ V ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់នៃកោន និងកាំបាតដើម្បីឱ្យជម្រកនោះមានផ្ទៃក្រឡាខាងអប្បបរមា ។

28 ត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រស្មើនឹង $2p$ និងជ្រុងមួយមានរង្វាស់ $\dfrac{3p}{4}$ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណធំបំផុត រួចអនុវត្តជាលេខកាលណា $P = 40\,\text{m}$ ។

29 គេចាក់ទឹកចូលក្នុងស៊ីឡាំងមួយដែលមានកាំបាត $10\,\text{cm}$ ដោយអត្រា $360\,\text{cm}^3/\text{s}$ ហើយលិចចេញវិញដោយអត្រា $40\,\text{cm}^3/\text{s}$ ។ តើកម្រិតទឹកប្រែប្រួលដោយអត្រាប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

1 ◈ a រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = f(x) = x^3 - 3x$

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R}$
- ដេរីវេ ៖ $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
- ឱ្យ $f'(x) = 0 \implies 3(x^2-1) = 0 \implies x = 1$ ឬ $x = -1$

តារាងអថេរភាព ៖

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចបរមា ៖

- ចំពោះ $x = -1 \implies f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$
- ចំពោះ $x = 1 \implies f(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$

ដូចនេះ ៖

- តម្លៃអតិបរមារៀបគឺ $\boxed{f(-1) = 2}$ ត្រង់ $x = -1$

- តម្លៃអប្បបរមារៀបគឺ $\boxed{f(1) = -2}$ ត្រង់ $x = 1$

ⓑ រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = f(x) = -x^3 + 3x$

- ដែនកំណត់៖ $D = \mathbb{R}$
- ដេរីវេ៖ $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$
- ឱ្យ $f'(x) = 0 \implies -3(x^2 - 1) = 0 \implies x = 1$ ឬ $x = -1$

តារាងអថេរភាព៖

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	

គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចបរមា៖

- ចំពោះ $x = -1 \implies f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$
- ចំពោះ $x = 1 \implies f(1) = -(1)^3 + 3(1) = -1 + 3 = 2$

ដូចនេះ៖ តម្លៃអប្បបរមារៀបនៃអនុគមន៍គឺ $\boxed{f(-1) = -2}$ ត្រង់ $x = -1$

ⓒ រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = f(x) = 2x^3 - 6x + 2$

- ដែនកំណត់៖ $D = \mathbb{R}$
- ដេរីវេ៖ $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$
- ឱ្យ $f'(x) = 0 \implies 6(x^2 - 1) = 0 \implies x = 1$ ឬ $x = -1$

តារាងអថេរភាព៖

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចបរមា៖

- ចំពោះ $x = -1 \implies f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 2 = -2 + 6 + 2 = 6$
- ចំពោះ $x = 1 \implies f(1) = 2(1)^3 - 6(1) + 2 = 2 - 6 + 2 = -2$

ដូចនេះ៖

- តម្លៃអតិបរមារៀបគឺ $\boxed{f(-1) = 6}$ ត្រង់ $x = -1$
- តម្លៃអប្បបរមារៀបគឺ $\boxed{f(1) = -2}$ ត្រង់ $x = 1$

ⓓ ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $80\,\text{m}$ ។ រកប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាអតិបរមា ។

- តាង x ជាទទឹង និង y ជាបណ្តោយនៃចតុកោណកែង ដែល $x > 0$ និង $y > 0$ ។
- តាមបម្រាប់ បរិមាត្រគឺ $P = 2x + 2y = 80 \implies x + y = 40 \implies y = 40 - x$
- ដោយសារ $y > 0 \implies 40 - x > 0 \implies x < 40$ ហេតុនេះដែនកំណត់គឺ $x \in (0, 40)$ ។
- អនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡា៖ $A(x) = x \cdot y = x(40 - x) = 40x - x^2$
- ដេរីវេ៖ $A'(x) = 40 - 2x$
- ឱ្យ $A'(x) = 0 \implies 40 - 2x = 0 \implies x = 20$

តារាងអថេរភាព៖

x	0		20		40
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	↗	400	↘	0

គណនាប្រវែងជ្រុង និងផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា៖

- ចំពោះ $x = 20 \implies$ ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាគឺ $A(20) = 40(20) - (20)^2 = 800 - 400 = 400\,\text{m}^2$
- ទាញរកប្រវែងបណ្តោយ៖ $y = 40 - x = 40 - 20 = 20\,\text{m}$

ដូចនេះ៖ ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ចតុកោណកែងនេះត្រូវមានរាងជាការេ ដែលមានប្រវែងជ្រុង $\boxed{x = 20\,\text{m}, y = 20\,\text{m}}$ ។

ⓔ ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $1600\,\text{m}$ ។ រកប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាអតិបរមា ។

- តាង x ជាទទឹង និង y ជាបណ្តោយនៃចតុកោណកែង ដែល $x > 0$ និង $y > 0$ ។
- តាមបម្រាប់ បរិមាត្រគឺ $P = 2x + 2y = 1600 \implies x + y = 800 \implies y = 800 - x$
- ដោយសារ $y > 0 \implies 800 - x > 0 \implies x < 800$ ។ ហេតុនេះដែនកំណត់គឺ $x \in (0, 800)$ ។
- អនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡា៖ $A(x) = x \cdot y = x(800 - x) = 800x - x^2$
- ដេរីវេ៖ $A'(x) = 800 - 2x$
- ឱ្យ $A'(x) = 0 \implies 800 - 2x = 0 \implies x = 400$

តារាងអថេរភាព៖

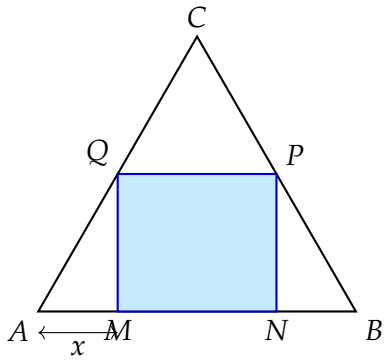
x	0		400		800
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	↗	160000	↘	0

គណនាប្រវែងជ្រុង និងផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា៖

- ចំពោះ $x = 400 \implies$ ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាគឺ $A(400) = 800(400) - (400)^2 = 320000 - 160000 = 160000\,\text{m}^2$
- ទាញរកប្រវែងបណ្តោយ៖ $y = 800 - x = 800 - 400 = 400\,\text{m}$

ដូចនេះ៖ ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ចតុកោណកែងនេះត្រូវមានរាងជាការេ ដែលមានប្រវែងជ្រុង $\boxed{x = 400\,\text{m}, y = 400\,\text{m}}$ ។

2 គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយ ជ្រុងមានរង្វាស់ a ។ M ជាចំណុចមួយនៅលើ AB ដែល $AM = x$ ។ គេសង់ចតុកោណកែង $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត ។



- តាមរូប គេបានចតុកោណកែង $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស មានកំពូល $M, N \in AB, P \in BC$ និង $Q \in AC$ ។
- ក្នុងត្រីកោណកែង AMQ (ត្រង់ M) មានមុំ $\widehat{A} = 60^\circ$ និង $AM = x$
- គេបាន កម្ពស់ចតុកោណកែង $MQ = AM \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$
- ប្រវែង $AQ = \dfrac{AM}{\cos 60^\circ} = 2x$ ។ ដោយសារ Q នៅលើជ្រុង AC នោះ $0 < 2x < a \implies x \in \left(0, \dfrac{a}{2}\right)$
- ដោយសារភាពស៊ីម៉េទ្រី គេបាន $BN = x \implies MN = AB - AM - BN = a - 2x$
- អនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង៖ $S(x) = MN \cdot MQ = (a - 2x) \cdot x\sqrt{3} = \sqrt{3}(ax - 2x^2)$
- ដេរីវេ៖ $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x)$
- ឱ្យ $S'(x) = 0 \implies \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \implies x = \dfrac{a}{4}$

តារាងអថេរភាព៖

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	↗	$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$	↘	0

គណនាតម្លៃផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា៖

- ចំពោះ $x = \frac{a}{4} \implies S\left(\frac{a}{4}\right) = \sqrt{3}\left(a\left(\frac{a}{4}\right) - 2\left(\frac{a}{4}\right)^2\right) = \sqrt{3}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះ៖

- ដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត គេត្រូវជ្រើសរើស $\boxed{x = \frac{a}{4}}$ ហើយផ្ទៃក្រឡាអតិបរមានោះគឺ $S_{\max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ ។

3 រកពីរចំនួនវិជ្ជមានដើម្បីឱ្យផលគុណរបស់វាមានតម្លៃអតិបរមា បើគេដឹងថាផលបូកនៃពីរចំនួននោះស្មើ 110 ។

- តាង x និង y ជាពីរចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $x > 0$ និង $y > 0$ ។
- តាមបម្រាប់ ផលបូកនៃពីរចំនួនគឺ $x + y = 110 \implies y = 110 - x$
- ដោយសារ $y > 0 \implies 110 - x > 0 \implies x < 110$ ។ ហេតុនេះដែនកំណត់គឺ $x \in (0, 110)$
- អនុគមន៍ផលគុណ៖ $P(x) = x \cdot y = x(110 - x) = 110x - x^2$
- ដេរីវេ៖ $P'(x) = 110 - 2x$
- ឱ្យ $P'(x) = 0 \implies 110 - 2x = 0 \implies x = 55$

តារាងអថេរភាព៖

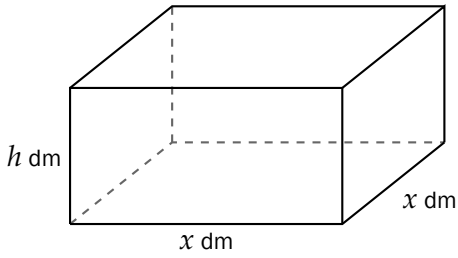
x	0		55		110
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	0	↗	3025	↘	0

គណនាចំនួនទីពីរ និងផលគុណអតិបរមា៖

- ចំពោះ $x = 55 \implies y = 110 - 55 = 55$
- ផលគុណអតិបរមានោះគឺ $P(55) = 55 \times 55 = 3025$

ដូចនេះ៖ ពីរចំនួនវិជ្ជមានដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{x = 55 \text{ និង } y = 55}$ ។

4 ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេឡូពីប៉ែតកែង មានបាតជាការេគ្មានគម្របហើយមានមាឌ $V = 32\,\text{dm}^3$ ។ រកវិមាត្រនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់នៃប្រអប់អប្បបរមា ។



- តាង x ជាប្រវែងជ្រុងបាតការេ និង h ជាកម្ពស់នៃប្រអប់ ដែល $x > 0$ និង $h > 0$ (គិតជា dm) ។
- តាមបម្រាប់ មាឌប្រអប់គឺ $V = x^2 \cdot h = 32 \implies h = \dfrac{32}{x^2}$
- ដែនកំណត់គឺ $x \in (0, +\infty)$
- អនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡាសរុប (គ្មានគម្រប)៖ $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x\left(\dfrac{32}{x^2}\right) = x^2 + \dfrac{128}{x}$
- ដេរីវេ៖ $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 128}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 64)}{x^2}$
- ឱ្យ $S'(x) = 0 \implies 2(x^3 - 64) = 0 \implies x^3 = 64 \implies x = 4$

តារាងអថេរភាព៖

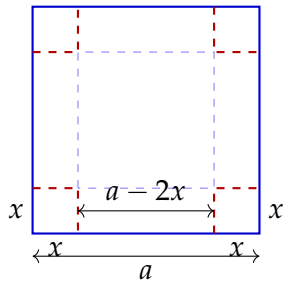
x	0		4		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	48	$\nearrow$	$+\infty$

គណនាវិមាត្រនៃប្រអប់ និងផ្ទៃក្រឡាអប្បបរមា៖

- ចំពោះ $x = 4 \implies$ កម្ពស់ប្រអប់គឺ $h = \dfrac{32}{4^2} = \dfrac{32}{16} = 2$ dm
- ផ្ទៃក្រឡាសរុបអប្បបរមានោះគឺ $S(4) = 4^2 + \dfrac{128}{4} = 16 + 32 = 48$ dm^2

ដូចនេះ៖ វិមាត្រនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាសរុបអប្បបរមាគឺ ជ្រុងបាត $\boxed{x = 4 \text{ dm}}$ និងកម្ពស់ $\boxed{h = 2 \text{ dm}}$

5 ក្រដាសកាតុង 1 សន្លឹកមានរាងជាការេដែលជ្រុងមានរង្វាស់ a (m) ។ គេកាត់តែមជ្រុងទាំងបួនជាការេ 4 ប៉ុនគ្នាដើម្បីឱ្យផ្នែកនៅសល់បត់បានជាប្រអប់មួយរាងជាប្រលេឡូពីប៉ែតកែងមានមាឌធំបំផុត ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងត្រូវកាត់ចេញនោះ ។



- តាង x ជាប្រវែងជ្រុងនៃការេតូចៗទាំងបួនដែលត្រូវកាត់ចេញ (គិតជា m) ដែល $x > 0$ ។
- ប្រវែងជ្រុងបាតនៃប្រអប់គឺ $a - 2x$ និងកម្ពស់នៃប្រអប់គឺ x ។
- ដោយសារជ្រុងបាតត្រូវតែវិជ្ជមាន $\implies a - 2x > 0 \implies x < \frac{a}{2}$ ។ ហេតុនេះដែនកំណត់គឺ $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ ។
- អនុគមន៍មាឌប្រអប់ៈ $V(x) = x(a-2x)^2 = x(a^2 - 4ax + 4x^2) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$
- ដេរីវេៈ $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = (2x - a)(6x - a)$
- ឱ្យ $V'(x) = 0 \implies (2x-a)(6x-a) = 0 \implies x = \frac{a}{2}$ (មិនយក) ឬ $x = \frac{a}{6}$ (យក)

តារាងអថេរភាពៈ

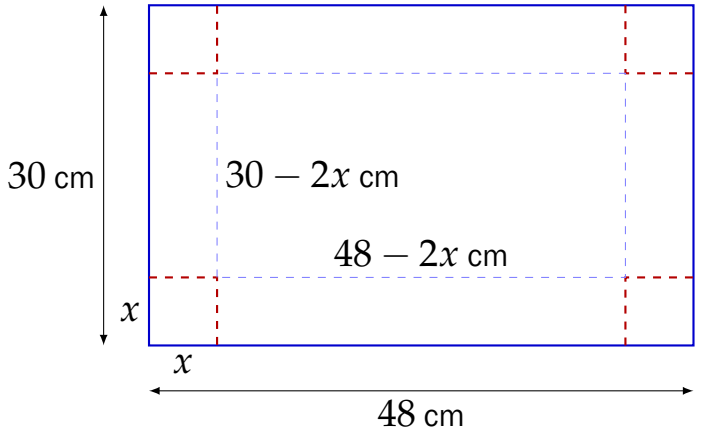
x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$	↘	0

គណនាមាឌអតិបរមាៈ

- ចំពោះ $x = \frac{a}{6} \implies V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6}\left(a - 2\left(\frac{a}{6}\right)\right)^2 = \frac{a}{6}\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{2a^3}{27}$ m^3

ដូចនេះៈ ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត រង្វាស់ជ្រុងនៃការេដែលត្រូវកាត់ចេញគឺ $\boxed{x = \frac{a}{6} \text{ m}}$ ។

6 ក្រដាសកាតុង 1 សន្លឹកមានរាងជាចតុកោណកែងមានវិមាត្រ 30 cm និង 48 cm គេកាត់កៀនជ្រុងទាំងបួនជាការេប៉ុនគ្នាដើម្បីឱ្យផ្នែកនៅសល់បត់បានជាប្រអប់មួយរាងជាប្រលេឡូពីប៉ែតកែងគ្មានគម្រប ។ រកវិមាត្រនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត



- តាង x ជាប្រវែងជ្រុងនៃការេដែលត្រូវកាត់ចេញ (គិតជា cm) ដែល $x > 0$ ។
- វិមាត្រនៃប្រអប់ដែលទទួលបានគឺៈ ទទឹង $30 - 2x$, បណ្តោយ $48 - 2x$ និងកម្ពស់ x ។
- លក្ខខណ្ឌប្រវែងជ្រុងបាតៈ $30 - 2x > 0 \implies x < 15$ ។ ហេតុនេះដែនកំណត់គឺ $x \in (0, 15)$ ។

- អនុគមន៍មាឌប្រអប់៖ $V(x) = x(30-2x)(48-2x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$
- ដេរីវេ៖ $V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 12(x^2 - 26x + 120) = 12(x-6)(x-20)$
- ឱ្យ $V'(x) = 0 \implies x = 20$ (មិនយក ព្រោះនៅក្រៅដែនកំណត់) ឬ $x = 6$ (យក)

តារាងអថេរភាព៖

x	0		6		15
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	3888	↘	0

គណនាវិមាត្រនៃប្រអប់៖

- ចំពោះ $x = 6 \implies$ កម្ពស់ប្រអប់៖ $h = 6$ cm
- ទទឹងប្រអប់៖ $30 - 2(6) = 18$ cm
- បណ្តោយប្រអប់៖ $48 - 2(6) = 36$ cm
- មាឌអតិបរមានោះគឺ $V(6) = 6 \times 18 \times 36 = 3888$ cm^3

ដូចនេះ៖ វិមាត្រនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យមាឌធំបំផុតគឺ $\boxed{\text{ទទឹង } 18 \text{ cm}, \text{ បណ្តោយ } 36 \text{ cm} \text{ និងកម្ពស់ } 6 \text{ cm}}$ ។

7 គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = 1 - x\ln x$ កំណត់ចំពោះ $x > 0$ និងមានក្រាប (C) ។

a រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(1,1)$ ៖

- គណនាតម្លៃដេរីវេ៖ $f'(x) = -(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = -(1 + \ln x) = -1 - \ln x$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 1$ គឺ $f'(1) = -1 - \ln 1 = -1 - 0 = -1$
- រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ៖ $y - y_A = f'(1)(x - x_A)$
  $\implies y - 1 = -1(x-1) \implies y - 1 = -x + 1 \implies y = -x + 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{d : y = -x + 2}$

b រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង (d) និងក្រាប $(C_1) : y = e^x - x + 1$ ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (C_1) គឺ៖
- $e^x - x + 1 = -x + 2 \implies e^x = 2 - 1 \implies e^x = 1 \implies x = 0$
- ចំពោះ $x = 0 \implies y = -(0) + 2 = 2$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{M(0,2)}$

8 គេមានអនុគមន៍ $C_1 : y = (x+1)e^{-x}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

a រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d ទៅនឹងក្រាប C_1 ត្រង់ចំណុច $A(-1,0)$ ៖

- គណនាតម្លៃដេរីវេ៖ $y' = 1 \cdot e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x - 1) = -xe^{-x}$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = -1$ គឺ $y'(-1) = -(-1)e^{-(-1)} = e$
- រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ៖ $y - y_A = y'(-1)(x - x_A) \implies y - 0 = e(x - (-1)) \implies$
  $y = e(x+1) = ex + e$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{d : y = ex + e}$

(b) រកសមីការបន្ទាត់ L ស្របនឹង d ហើយកាត់ចំណុច $B(1,1)$ ៖

- ដោយសារបន្ទាត់ $L \parallel d$ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃ L គឺ $m = e$
- សមីការបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម $B(1,1)$ គឺ $y - y_B = m(x - x_B)$

$\implies y - 1 = e(x-1) \implies y = ex - e + 1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $\boxed{L : y = ex - e + 1}$

(c) ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាក្រាប C_1 និង C_2 កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $C(0,1)$ ៖

- ចំពោះក្រាប $C_1 : y = (x+1)e^{-x}$ ជំនួស $x = 0 \implies y = (0+1)e^0 = 1$

$\implies C(0,1) \in C_1$

- ចំពោះក្រាប $C_2 : y = (1-x)e^x$ ជំនួស $x = 0 \implies y = (1-0)e^0 = 1$

$\implies C(0,1) \in C_2$

ដូចនេះ ក្រាប C_1 និង C_2 ពិតជាកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $\boxed{C(0,1)}$

(d) រកកូអរដោនេចំណុច D និងគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណញ្ជាយ $ACBD$ ៖

- D ជាប្រសព្វរវាង C_2 និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ($y = 0$) ៖
- $(1-x)e^x = 0 \implies 1 - x = 0 \implies x = 1$ (ព្រោះ $e^x > 0$)
- នោះ កូអរដោនេចំណុច D គឺ $\boxed{D(1,0)}$
- គណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពាយ $ACBD$៖
- តាមកូអរដោនេនៃចំណុច $A(-1,0), C(0,1), B(1,1), D(1,0)$៖
- ជ្រុងបាតធំ $AD = |x_D - x_A| = |1 - (-1)| = 2$ cm (នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស)
- ជ្រុងបាតតូច $CB = |x_B - x_C| = |1 - 0| = 1$ cm (នៅលើបន្ទាត់ $y = 1$)
- កម្ពស់ចតុកោណពាយ $h = |y_C - y_A| = |1 - 0| = 1$ cm
- ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពាយ $S_{ACBD} = \dfrac{(AD + CB) \times h}{2} = \dfrac{(2+1) \times 1}{2} = 1.5\ \text{cm}^2$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពាយគឺ $\boxed{S_{ACBD} = 1.5\ \text{cm}^2}$

9 (a) កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែជាងតាងអនុគមន៍ $y = \dfrac{e^x}{1 - \sin x}$ នៅត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ ៖

- តាង $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - \sin x}$
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ $x = 0$ ៖ $f(0) = \dfrac{e^0}{1 - \sin 0} = \dfrac{1}{1-0} = 1$
- គណនាតម្លៃដេរីវេ ៖ $f'(x) = \dfrac{e^x(1 - \sin x) - e^x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \dfrac{e^x(1 - \sin x + \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 0$ គឺ

$f'(0) = \dfrac{e^0(1 - \sin 0 + \cos 0)}{(1 - \sin 0)^2} = \dfrac{1(1 - 0 + 1)}{1^2} = 2$

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ៖ $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$\implies y - 1 = 2x \implies y = 2x + 1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(T): y = 2x+1}$

ⓑ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (T) និងខ្សែជាងតាងអនុគមន៍ $y = 2x+1+\ln(x-1)$

- លក្ខខណ្ឌកំណត់៖ $x-1>0 \implies x>1$
- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (T) និង $y = 2x+1+\ln(x-1)$ គឺ៖
- $2x+1+\ln(x-1) = 2x+1$
- $\implies \ln(x-1) = 0 \implies x-1 = e^0 = 1 \implies x = 2$ (យក ព្រោះ $2>1$)
- ចំពោះ $x=2 \implies y = 2(2)+1 = 5$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{M(2,5)}$

10 ⓐ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះខ្សែបោងតាងអនុគមន៍ $y = x\ln x - 1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$

- តាង $f(x) = x\ln x - 1$ ដែលកំណត់ចំពោះ $x>0$
- គណនាតម្លៃដេរីវេ ៖ $f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x=1$ គឺ $f'(1) = \ln 1 + 1 = 0+1 = 1$
- រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - y_A = f'(1)(x-x_A)$
- $\implies y-(-1) = 1(x-1) \implies y+1 = x-1 \implies y = x-2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(L): y = x-2}$

ⓑ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ B រវាងបន្ទាត់ (L) និងខ្សែបោង $(K): y = x+e^x-3$ ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (L) និង (K) គឺ៖
- $x+e^x-3 = x-2$
- $\implies e^x-3 = -2 \implies e^x = 1 \implies x = 0$
- ចំពោះ $x=0 \implies y = 0-2 = -2$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{B(0,-2)}$

11 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែជាង (H) តាងអនុគមន៍ $y = \dfrac{e^x}{1+\cos x}$ ត្រង់ $x_0 = 0$

- តាង $f(x) = \dfrac{e^x}{1+\cos x}$
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ $x_0 = 0$ ៖ $f(0) = \dfrac{e^0}{1+\cos 0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$
- គណនាតម្លៃដេរីវេ ៖ $f'(x) = \dfrac{e^x(1+\cos x) - e^x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{e^x(1+\cos x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0 = 0$ គឺ
  $f'(0) = \dfrac{e^0(1+\cos 0+\sin 0)}{(1+\cos 0)^2} = \dfrac{1(1+1+0)}{2^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
- រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - f(0) = f'(0)(x-x_0)$
  $\implies y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(x-0) \implies y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(T): y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$

12 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = -4x^3 + x^2 + 14x - 1$ ។

a រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f'(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x) = -12x^2 + 2x + 14$
- ឱ្យ $f'(x) = 0 \implies -12x^2 + 2x + 14 = 0$
- ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $-2 \implies 6x^2 - x - 7 = 0$
- ដោយសារ $a - b + c = 6 - (-1) + (-7) = 0$ គេទាញបានឫស៖
- $x_1 = -1$ និង $x_2 = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{6}$
- ដូចនេះ តម្លៃ x ដែលឱ្យ $f'(x) = 0$ គឺ $\boxed{x = -1 \text{ ឬ } x = \dfrac{7}{6}}$
- តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖ (ដោយសារ $a = -12 < 0$)

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- ចំពោះ $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{7}{6}, +\infty\right) \implies f'(x) < 0$
- ចំពោះ $x \in \left(-1, \dfrac{7}{6}\right) \implies f'(x) > 0$
- ចំពោះ $x = -1 \text{ ឬ } x = \dfrac{7}{6} \implies f'(x) = 0$

b រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f''(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ៖

- គណនាដេរីវេទី២ ៖ $f''(x) = (f'(x))' = (-12x^2 + 2x + 14)' = -24x + 2$
- ឱ្យ $f''(x) = 0 \implies -24x + 2 = 0 \implies 24x = 2 \implies x = \dfrac{1}{12}$
- ដូចនេះ តម្លៃ x ដែលឱ្យ $f''(x) = 0$ គឺ $\boxed{x = \dfrac{1}{12}}$
- តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$ ៖

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

- ចំពោះ $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{12}\right) \implies f''(x) > 0$ (ខ្សែជាងប៉ោងឡើងលើ)
- ចំពោះ $x \in \left(\dfrac{1}{12}, +\infty\right) \implies f''(x) < 0$ (ខ្សែជាងផតចុះក្រោម)
- ចំពោះ $x = \dfrac{1}{12} \implies f''(x) = 0$ (ចំណុចរបត់)

13 គេមានអនុគមន៍ $g(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ ។

a រកដេរីវេទី១ និងទី២នៃអនុគមន៍ g ៖

- ដេរីវេទី១ ៖ $g'(x) = (3x^4 - 2x^2 + 4)' = 12x^3 - 4x = 4x(3x^2 - 1)$

- ដេរីវេទី២ ៖ $g''(x) = (12x^3 - 4x)' = 36x^2 - 4 = 4(9x^2 - 1)$

ដូចនេះ ៖ $\boxed{g'(x) = 12x^3 - 4x}$ និង $\boxed{g''(x) = 36x^2 - 4}$

(b) សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី១ និងសញ្ញាដេរីវេទី២ ៖

- សិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ ៖
- ឱ្យ $g'(x) = 0 \implies 4x(3x^2 - 1) = 0$

$\implies x = 0$ ឬ $3x^2 - 1 = 0 \implies x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ឬ $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- $g'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $g'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
- $g'(x) = 0$ ចំពោះ $x \in \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$
- សិក្សាសញ្ញានៃ $g''(x)$ ៖
- ឱ្យ $g''(x) = 0 \implies 4(9x^2 - 1) = 0 \implies x^2 = \dfrac{1}{9} \implies x = -\dfrac{1}{3}$ ឬ $x = \dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $g''(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$
- $g''(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$
- $g''(x) = 0$ ចំពោះ $x = -\dfrac{1}{3}$ ឬ $x = \dfrac{1}{3}$

14 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = 2x^3 - 16x + 11$ មានក្រាប (C) ។

(a) រកសមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $A(2, -5)$ ៖

- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x) = 6x^2 - 16$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 2$ គឺ $f'(2) = 6(2)^2 - 16 = 24 - 16 = 8$
- រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - y_A = f'(2)(x - x_A)$

$\implies y - (-5) = 8(x - 2) \implies y + 5 = 8x - 16 \implies y = 8x - 21$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{L : y = 8x - 21}$

(b) រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប (C) ៖

- តាង x_0 ជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប៉ះ

- តាមបម្រាប់ មេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-10 \implies f'(x_0) = -10 \implies 6x_0^2 - 16 = -10 \implies 6x_0^2 = 6 \implies x_0^2 = 1 \implies x_0 = 1$ ឬ $x_0 = -1$
- ចំពោះ $x_0 = 1$ ៖
- $y_0 = f(1) = 2(1)^3 - 16(1) + 11 = 2 - 16 + 11 = -3$
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះទី១ ៖ $y - (-3) = -10(x-1) \implies y + 3 = -10x + 10 \implies y = -10x + 7$
- ចំពោះ $x_0 = -1$ ៖
- $y_0 = f(-1) = 2(-1)^3 - 16(-1) + 11 = -2 + 16 + 11 = 25$
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះទី២ ៖ $y - 25 = -10(x - (-1)) \implies y - 25 = -10(x+1) \implies y = -10x + 15$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរគឺ $\boxed{y = -10x + 7}$ និង $\boxed{y = -10x + 15}$

15 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 1$ មានក្រាប (C) ។

a រកកូអរដោនេនៃគ្រប់ចំណុចប៉ះនៃក្រាប (C) ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក ៖

- បន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក លុះត្រាតែមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 0 គឺ $f'(x) = 0$
- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x) = 12x^2 + 18x - 30 = 6(2x^2 + 3x - 5)$
- ឱ្យ $f'(x) = 0 \implies 2x^2 + 3x - 5 = 0$
- ដោយសារ $a + b + c = 2 + 3 + (-5) = 0 \implies x_1 = 1$ ឬ $x_2 = -\dfrac{5}{2}$
- ចំពោះ $x = 1$ ៖ $y = f(1) = 4(1)^3 + 9(1)^2 - 30(1) + 1 = -16$
- ចំពោះ $x = -\dfrac{5}{2}$ ៖ $y = f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 4\left(-\dfrac{125}{8}\right) + 9\left(\dfrac{25}{4}\right) - 30\left(-\dfrac{5}{2}\right) + 1 = \dfrac{279}{4}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប៉ះដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកគឺ $\boxed{A(1,-16)}$ និង $\boxed{B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{279}{4}\right)}$

b រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ ៖

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកមានទម្រង់ $y = y_0$
- ត្រង់ចំណុច $A(1,-16) \implies y = -16$
- ត្រង់ចំណុច $B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{279}{4}\right) \implies y = \dfrac{279}{4}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកទាំងពីរគឺ $\boxed{y = -16}$ និង $\boxed{y = \dfrac{279}{4}}$

16 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ និង មានក្រាប (C) ។

a រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ $y = -\dfrac{x}{5} + 2$ ៖

- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x) = 6x - 4$
- បន្ទាត់ $y = -\dfrac{x}{5} + 2$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m_1 = -\dfrac{1}{5}$
- ដោយសារបន្ទាត់ប៉ះកែងនឹងបន្ទាត់នេះ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $m = -\dfrac{1}{m_1} = 5$

  គេបាន $f'(x) = 5 \implies 6x - 4 = 5 \implies 6x = 9 \implies x = \dfrac{3}{2}$

- គណនាតម្លៃ y ៖ $f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{27}{4} - 6 + 1 = \frac{7}{4}$
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - \frac{7}{4} = 5\left(x - \frac{3}{2}\right) \implies y = 5x - \frac{15}{2} + \frac{7}{4} = 5x - \frac{23}{4}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{y = 5x - \frac{23}{4}}$

(b) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x + 5$ ៖

- បន្ទាត់ $y = x + 5$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m_2 = 1$
- ដោយសារបន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់នេះ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $m = m_2 = 1$
- គេបាន $f'(x) = 1 \implies 6x - 4 = 1 \implies 6x = 5 \implies x = \frac{5}{6}$
- គណនាតម្លៃ y ៖ $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{5}{6}\right) + 1 = \frac{25}{12} - \frac{20}{6} + 1 = -\frac{1}{4}$
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖ $y - \left(-\frac{1}{4}\right) = 1\left(x - \frac{5}{6}\right) \implies y = x - \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = x - \frac{13}{12}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{y = x - \frac{13}{12}}$

17 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 3x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ និង មានក្រាប (C) ។

(a) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស a ៖

- កូអរដោនេចំណុចប៉ះគឺ $A(a, a^3 - 3a)$
- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x) = 3x^2 - 3$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = a$ គឺ $f'(a) = 3a^2 - 3$
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A គឺ ៖
- $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
- $\implies y - (a^3 - 3a) = (3a^2 - 3)(x - a)$
  $\implies y = (3a^2 - 3)x - 3a^3 + 3a + a^3 - 3a = (3a^2 - 3)x - 2a^3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{y = (3a^2 - 3)x - 2a^3}$

(b) រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និងក្រាប (C) ម្តងទៀត ៖

- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ ៖
- $x^3 - 3x = (3a^2 - 3)x - 2a^3$
- $\implies x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$
- ដោយសារបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ $x = a$ នោះ $x = a$ ជាឫសឌុប ៖
- $(x - a)^2(x + 2a) = 0$
  $\implies x = a$ (អាប់ស៊ីសនៃចំណុច A) ឬ $x = -2a$ (អាប់ស៊ីសនៃចំណុច B)
- គណនាតម្លៃ y_B ៖ $y_B = f(-2a) = (-2a)^3 - 3(-2a) = -8a^3 + 6a$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច B គឺ $\boxed{B(-2a, -8a^3 + 6a)}$

18 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + 2$ ដែលមានអតិបរមាមធៀបត្រង់ $x = 1$ និងមាន អប្បបរ

មានចៀបត្រង់ $x=2$ ។

ⓐ រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ៖

- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x)=3x^2+6ax+3b$
- ដោយសារអនុគមន៍មានអតិបរមាមចៀបត្រង់ $x=1$ និងអប្បបរមាមចៀបត្រង់ $x=2$ នោះ $x=1$ និង $x=2$ ជាឫសនៃសមីការ $f'(x)=0$
- គេបានប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3(1)^2+6a(1)+3b=0 \\ 3(2)^2+6a(2)+3b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6a+3b=-3 \\ 12a+3b=-12 \end{cases}$$

ចែកសមីការទាំងពីរនឹង 3 ៖ $\begin{cases} 2a+b=-1 \quad (1) \\ 4a+b=-4 \quad (2) \end{cases}$

- ដកសមីការ (2) នឹង (1) ៖ $(4a+b)-(2a+b)=-4-(-1) \Longrightarrow 2a=-3 \Longrightarrow a=-\dfrac{3}{2}$
- ជំនួស $a=-\dfrac{3}{2}$ ក្នុង (1) ៖ $2\left(-\dfrac{3}{2}\right)+b=-1 \Longrightarrow -3+b=-1 \Longrightarrow b=2$

ដូចនេះ តម្លៃចំនួនពិតគឺ $\boxed{a=-\dfrac{3}{2}}$ និង $\boxed{b=2}$

ⓑ រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាមចៀបនៃ f ៖

- ជំនួស $a=-\dfrac{3}{2}$ និង $b=2$ ចូលក្នុងអនុគមន៍ $f(x)$ ៖ $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+2$
- តម្លៃអតិបរមាមចៀប ៖ $f(1)=(1)^3-\dfrac{9}{2}(1)^2+6(1)+2=1-\dfrac{9}{2}+6+2=9-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}$
- តម្លៃអប្បបរមាមចៀប ៖ $f(2)=(2)^3-\dfrac{9}{2}(2)^2+6(2)+2=8-18+12+2=4$
- ផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាមចៀបគឺ ៖ $f(1)-f(2)=\dfrac{9}{2}-4=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ផលដកនៃតម្លៃបរមាមចៀបទាំងពីរគឺ $\boxed{f(1)-f(2)=\dfrac{1}{2}}$

19 គេឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖ $f(x)=a\ln x+bx^2+x+2$ ។ កំណត់តម្លៃ a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍ f មានបរមាត្រង់ $x_1=1$ និង $x_2=2$

- ដែនកំណត់គឺ $x\in(0,+\infty)$
- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$
- ដោយសារអនុគមន៍ f មានបរមាត្រង់ $x_1=1$ និង $x_2=2$ នោះ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $f'(x)=0$
- គេបានប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1}+2b(1)+1=0 \\ \frac{a}{2}+2b(2)+1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+2b=-1 \quad (1) \\ \frac{a}{2}+4b=-1 \quad (2) \end{cases}$$

- គុណសមីការ (2) នឹង 2 ៖ $a+8b=-2 \quad (3)$
- ដកសមីការ (3) នឹង (1) ៖ $(a+8b)-(a+2b)=-2-(-1)$
  $\Longrightarrow 6b=-1 \Longrightarrow b=-\frac{1}{6}$
- ជំនួស $b=-\frac{1}{6}$ ចូលក្នុង (1) ៖
  $a+2\left(-\frac{1}{6}\right)=-1 \Longrightarrow a-\frac{1}{3}=-1 \Longrightarrow a=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

ដូចនេះ តម្លៃចំនួនពិតគឺ $\boxed{a=-\frac{2}{3}}$ និង $\boxed{b=-\frac{1}{6}}$

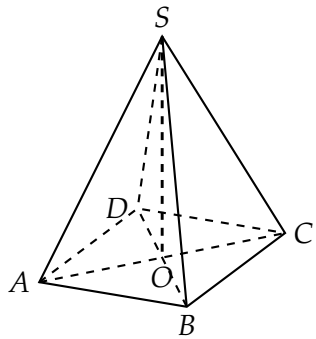
20 អនុគមន៍ g មួយកំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែលកំណត់ដោយ $g(x)=ax+1+b\ln x$ មានក្រាប (H) ហើយបន្ទាត់ (D) មួយមានសមីការ $y=x-1$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ (D) ប៉ះនឹងក្រាប (H) ត្រង់ចំណុច $A(1,0)$

- ដោយសារចំណុច $A(1,0)$ ស្ថិតនៅលើក្រាប (H) នោះគេបាន $g(1)=0$ ៖
- $a(1)+1+b\ln(1)=0 \Longrightarrow a+1+0=0 \Longrightarrow a=-1$
- គណនាដេរីវេទី១ ៖ $g'(x)=a+\frac{b}{x}$
- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ $(D):y=x-1$ គឺ $m=1$
- ដោយសារបន្ទាត់ (D) ប៉ះក្រាប (H) ត្រង់ $x=1$ នោះគេបាន $g'(1)=m=1$ ៖
  $a+\frac{b}{1}=1 \Longrightarrow a+b=1$
- ជំនួស $a=-1$ ចូលក្នុងសមីការខាងលើ ៖ $-1+b=1 \Longrightarrow b=2$

ដូចនេះ តម្លៃចំនួនពិតគឺ $\boxed{a=-1}$ និង $\boxed{b=2}$

21

ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយត $SABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាខាង S_ℓ ។ គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាត ដើម្បីឱ្យមាឌពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយតមានតម្លៃអតិបរមា ។



- តាង x ជាប្រវែងជ្រុងនៃបាតការេ $ABCD$ $(x>0)$ និង $h=SO$ ជាកម្ពស់ពីរ៉ាមីត $(h>0)$ ។
- កម្ពស់នៃមុខខាង (អាប៉ូតែម) គឺ $a=\sqrt{h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}$ ។
- ផ្ទៃក្រឡាខាង ៖ $S_\ell=4\times\left(\frac{1}{2}x\cdot a\right)=2x\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}=x\sqrt{4h^2+x^2}$
  $\Longrightarrow S_\ell^2=x^2(4h^2+x^2)=4x^2h^2+x^4 \Longrightarrow 4x^2h^2=S_\ell^2-x^4$

$\Longrightarrow h^2 = \dfrac{S_\ell^2 - x^4}{4x^2} \Longrightarrow h = \dfrac{\sqrt{S_\ell^2 - x^4}}{2x}$ (ដែល $0 < x < \sqrt{S_\ell}$)

មាឌនៃពីរ៉ាមីត ៖ $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{បាត}} \cdot h = \dfrac{1}{3} x^2 \left(\dfrac{\sqrt{S_\ell^2 - x^4}}{2x} \right) = \dfrac{1}{6} x \sqrt{S_\ell^2 - x^4} = \dfrac{1}{6} \sqrt{S_\ell^2 x^2 - x^6}$

- ដើម្បីឱ្យ V មានតម្លៃអតិបរមា លុះត្រាតែអនុគមន៍ $f(x) = S_\ell^2 x^2 - x^6$ មានតម្លៃអតិបរមាលើចន្លោះ $(0, \sqrt{S_\ell})$ ។
- គណនាដេរីវេ ៖ $f'(x) = 2S_\ell^2 x - 6x^5 = 2x(S_\ell^2 - 3x^4)$
- ឱ្យ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x(S_\ell^2 - 3x^4) = 0 \Longrightarrow 3x^4 = S_\ell^2$
  $\Longrightarrow x^2 = \dfrac{S_\ell}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \dfrac{\sqrt{S_\ell}}{\sqrt[4]{3}}$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ៖

x	0		$\dfrac{\sqrt{S_\ell}}{\sqrt[4]{3}}$		$\sqrt{S_\ell}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{2S_\ell^3}{3\sqrt{3}}$	↘	0

- តាមតារាងអថេរភាព $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x^2 = \dfrac{S_\ell}{\sqrt{3}}$
- ជំនួស $x^2 = \dfrac{S_\ell}{\sqrt{3}}$ និង $x^4 = \dfrac{S_\ell^2}{3}$ ចូលក្នុង h^2 ៖
- $h^2 = \dfrac{S_\ell^2 - \frac{S_\ell^2}{3}}{4\left(\frac{S_\ell}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{\frac{2}{3}S_\ell^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}S_\ell} = \dfrac{2\sqrt{3}}{12} S_\ell = \dfrac{\sqrt{3}}{6} S_\ell$
- គណនាផលធៀប $\dfrac{h}{x}$ (ឬ $\dfrac{SO}{AB}$) ៖
- $\left(\dfrac{h}{x}\right)^2 = \dfrac{h^2}{x^2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}S_\ell}{\frac{1}{\sqrt{3}}S_\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
  $\Longrightarrow \dfrac{SO}{AB} = \dfrac{h}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ ៖ ផលធៀបរវាងកម្ពស់ SO និងជ្រុងបាតនៃពីរ៉ាមីតដើម្បីឱ្យមាឌអតិបរមាគឺ $\boxed{\dfrac{SO}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

22 ផលបូកបរិមាត្រកាវេមួយនិងរង្វង់មួយមានប្រវែង ℓ ។ គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់និងជ្រុងកាវេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាកាវេ និងរង្វង់មានតម្លៃអប្បបរមា

តាង x ជាប្រវែងជ្រុងនៃថាសកាវេ ($x > 0$)

តាង r ជាប្រវែងកាំនៃថាសរង្វង់ ($r > 0$)

- ផលបូកបរិមាត្រ ៖ $4x + 2\pi r = \ell \Longrightarrow 2\pi r = \ell - 4x \Longrightarrow r = \dfrac{\ell - 4x}{2\pi}$ (ដែល

$0 < x < \dfrac{\ell}{4}$)

- ផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេ និងរង្វង់ ៖
- $S(x) = x^2 + \pi r^2 = x^2 + \pi\left(\dfrac{\ell - 4x}{2\pi}\right)^2 = x^2 + \dfrac{(\ell - 4x)^2}{4\pi}$
- គណនាដេរីវេ ៖
- $S'(x) = 2x + \dfrac{2(\ell - 4x)(-4)}{4\pi} = 2x - \dfrac{2(\ell - 4x)}{\pi} = \dfrac{2\pi x - 2\ell + 8x}{\pi} = \dfrac{2[(\pi + 4)x - \ell]}{\pi}$
- ឱ្យ $S'(x) = 0 \implies 2[(\pi + 4)x - \ell] = 0 \implies x = \dfrac{\ell}{\pi + 4}$

តារាងអថេរភាពនៃ $S(x)$ ៖

x	0		$\dfrac{\ell}{\pi + 4}$		$\dfrac{\ell}{4}$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$\dfrac{\ell^2}{4\pi}$	$\searrow$	$\dfrac{\ell^2}{4(\pi + 4)}$	$\nearrow$	$\dfrac{\ell^2}{16}$

- តាមតារាងអថេរភាព ផលបូកផ្ទៃក្រឡាមានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = \dfrac{\ell}{\pi + 4}$
- ជំនួស $x = \dfrac{\ell}{\pi + 4}$ ដើម្បីរកតម្លៃកាំ r ៖
- $r = \dfrac{\ell - 4\left(\frac{\ell}{\pi+4}\right)}{2\pi} = \dfrac{\frac{\ell(\pi+4) - 4\ell}{\pi+4}}{2\pi} = \dfrac{\pi\ell}{2\pi(\pi + 4)} = \dfrac{\ell}{2(\pi + 4)}$
- គណនាផលធៀបរវាងកាំរង្វង់ និងជ្រុងការេ ($\dfrac{r}{x}$) ៖
- $\dfrac{r}{x} = \dfrac{\frac{\ell}{2(\pi+4)}}{\frac{\ell}{\pi+4}} = \dfrac{\ell}{2(\pi + 4)} \times \dfrac{\pi + 4}{\ell} = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ៖ ផលធៀបរវាងកាំរង្វង់និងជ្រុងការេដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាអប្បបរមាគឺ $\boxed{\dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{2}}$ (ឬ $x = 2r$)

23 ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើនិងបាតក្រោមជាការេ ហើយមានមាឌ $250\ \text{cm}^3$ ។ សម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើគម្របលើ និងបាតក្រោមតម្លៃ $2000\ ៛/\text{cm}^2$ ហើយសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងតម្លៃ $1000\ ៛/\text{cm}^2$ ។ កំណត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារៈមានតម្លៃអប្បបរមា រួចគណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ

តាង x ជាប្រវែងជ្រុងនៃបាតការេ និងគម្របលើ ($x > 0$, គិតជា cm)

តាង h ជាកម្ពស់នៃប្រអប់ ($h > 0$, គិតជា cm)

- មាឌនៃប្រអប់ ៖ $V = x^2 h = 250 \implies h = \dfrac{250}{x^2}$
- ផ្ទៃក្រឡាបាតក្រោម និងគម្របលើ ៖ $S_1 = 2x^2$
- ផ្ទៃក្រឡាខាងទាំង 4 ៖ $S_2 = 4xh = 4x\left(\dfrac{250}{x^2}\right) = \dfrac{1000}{x}$
- មុខងារប្រាក់ចំណាយសរុប (គិតជា រៀល) ៖

- $C(x) = 2000 \cdot S_1 + 1000 \cdot S_2 = 2000(2x^2) + 1000\left(\frac{1000}{x}\right) = 4000x^2 + \frac{10^6}{x}$ (ដែល $x > 0$)
- គណនាដេរីវេ ៖
- $C'(x) = 8000x - \frac{10^6}{x^2} = \frac{8000x^3 - 10^6}{x^2}$
- ឱ្យ $C'(x) = 0 \implies 8000x^3 - 10^6 = 0 \implies 8x^3 = 1000 \implies x^3 = 125 \implies x = 5$ cm

តារាងអថេរភាពនៃ $C(x)$ ៖

x	0		5		$+\infty$
$C'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$C(x)$	‖	↘	300000	↗	$+\infty$

- តាមតារាងអថេរភាព ប្រាក់ចំណាយមានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 5$ cm
- គណនាកម្ពស់ប្រអប់ ៖ $h = \frac{250}{5^2} = \frac{250}{25} = 10$ cm
- គណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា ៖ $C(5) = 4000(5)^2 + \frac{10^6}{5} = 100000 + 200000 = 300000$ រ

ដូចនេះ ៖

- រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់គឺ $\boxed{\text{ជ្រុងបាត } x = 5 \text{ cm}}$ និង $\boxed{\text{កម្ពស់ } h = 10 \text{ cm}}$
- ប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារៈអប្បបរមាគឺ $\boxed{C_{\min} = 300000 \text{ រ}}$ ។

24 ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យ ដែលរយៈពេល t នាទី ក្រោយមក ទូកនោះមានចម្ងាយពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t) = t^3 + 60t$ គិតជាម៉ែត្រ ។

a រកល្បឿននៃទូកពេលចាប់ផ្តើម

- ល្បឿននៃទូកខណៈពេល t ជាដេរីវេទី១ នៃចម្ងាយធៀបនឹងពេលវេលា ៖
- $v(t) = S'(t) = (t^3 + 60t)' = 3t^2 + 60 \quad (\text{m/mn})$
- ខណៈពេលចាប់ផ្តើមចេញដំណើរ ត្រូវគ្នានឹង $t = 0$ នាទី
- ជំនួស $t = 0$ ចូលក្នុង $v(t)$ ៖ $v(0) = 3(0)^2 + 60 = 60$ m/mn

ដូចនេះ ល្បឿននៃទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើមគឺ $\boxed{v(0) = 60 \text{ m/mn}}$

b កំណត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3$ mn ៖

- ជំនួស $t = 3$ នាទី ចូលក្នុងអនុគមន៍ល្បឿន $v(t)$ ៖
- $v(3) = 3(3)^2 + 60 = 3(9) + 60 = 27 + 60 = 87$ m/mn

ដូចនេះ ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3$ mn គឺ $\boxed{v(3) = 87 \text{ m/mn}}$

25 រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \frac{100t}{t + 15}$ m/s ។ កំណត់សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេល ៖

ⓐ ខណៈ $t = 5\,\text{s}$ ៖

$a(5) = \dfrac{1500}{(5+15)^2} = \dfrac{1500}{20^2} = \dfrac{1500}{400} = \dfrac{15}{4} = 3.75\,\text{m/s}^2$

ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 5\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(5) = 3.75\,\text{m/s}^2}$ (ឬ $\dfrac{15}{4}\,\text{m/s}^2$)

ⓑ ខណៈ $t = 10\,\text{s}$ ៖

$a(10) = \dfrac{1500}{(10+15)^2} = \dfrac{1500}{25^2} = \dfrac{1500}{625} = \dfrac{12}{5} = 2.4\,\text{m/s}^2$

ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 10\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(10) = 2.4\,\text{m/s}^2}$ (ឬ $\dfrac{12}{5}\,\text{m/s}^2$)

ⓒ ខណៈ $t = 20\,\text{s}$ ៖

$a(20) = \dfrac{1500}{(20+15)^2} = \dfrac{1500}{35^2} = \dfrac{1500}{1225} = \dfrac{60}{49}\,\text{m/s}^2 \approx 1.22\,\text{m/s}^2$

ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 20\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(20) = \dfrac{60}{49}\,\text{m/s}^2}$

26 រថយន្តមួយផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែល t វិនាទី តាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{22t}{0.44t + 3.3}$ ម៉ែត្រក្នុងមួយវិនាទី។ កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណៈពេល ៖

- សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេល t ជាដេរីវេទី១ នៃល្បឿនធៀបនឹងពេលវេលា ៖
- សម្រួលអនុគមន៍ល្បឿន ៖ $V(t) = \dfrac{2200t}{44t + 330} = \dfrac{100t}{2t + 15}\quad (\text{m/s})$
- $a(t) = V'(t) = \left(\dfrac{100t}{2t+15}\right)' = \dfrac{100(2t+15) - 100t(2)}{(2t+15)^2} = \dfrac{1500}{(2t+15)^2}\quad (\text{m/s}^2)$

ⓐ ខណៈ $t = 5$ វិនាទី ៖

$a(5) = \dfrac{1500}{(2(5)+15)^2} = \dfrac{1500}{25^2} = \dfrac{1500}{625} = \dfrac{12}{5} = 2.4\,\text{m/s}^2$ ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 5\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(5) = 2.4\,\text{m/s}^2}$ (ឬ $\dfrac{12}{5}\,\text{m/s}^2$)

ⓑ ខណៈ $t = 10$ វិនាទី ៖

$a(10) = \dfrac{1500}{(2(10)+15)^2} = \dfrac{1500}{35^2} = \dfrac{1500}{1225} = \dfrac{60}{49}\,\text{m/s}^2 \approx 1.22\,\text{m/s}^2$

ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 10\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(10) = \dfrac{60}{49}\,\text{m/s}^2}$

ⓒ ខណៈ $t = 20$ វិនាទី ៖

$a(20) = \dfrac{1500}{(2(20)+15)^2} = \dfrac{1500}{55^2} = \dfrac{1500}{3025} = \dfrac{60}{121}\,\text{m/s}^2 \approx 0.50\,\text{m/s}^2$

ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 20\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(20) = \dfrac{60}{121}\,\text{m/s}^2}$

ⓓ ខណៈ $t = 30$ វិនាទី ៖

$a(30) = \dfrac{1500}{(2(30)+15)^2} = \dfrac{1500}{75^2} = \dfrac{1500}{5625} = \dfrac{4}{15}\,\text{m/s}^2 \approx 0.27\,\text{m/s}^2$ ដូចនេះ សំទុះត្រង់ $t = 30\,\text{s}$ គឺ $\boxed{a(30) = \dfrac{4}{15}\,\text{m/s}^2}$

27 គេសង់ជម្រកមួយរាងកោនបរិវត្តន៍ ដែលមានមាឌ V ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់នៃកោន និងកាំបាតដើម្បីឱ្យជម្រកនោះមានផ្ទៃក្រឡាខាងអប្បបរមា

តាង r ជាកាំនៃបាតកោន $r > 0$

តាង h ជាកម្ពស់នៃកោន ($h > 0$)

- មាឌនៃកោន ៖ $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \implies h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$
- ផ្ទៃក្រឡាខាងនៃកោន ៖ $S_\ell = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$
- $\implies S_\ell^2 = \pi^2 r^2(r^2+h^2) = \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2$
- ជំនួស $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$ ចូល ៖
- $S_\ell^2 = \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2\left(\dfrac{9V^2}{\pi^2 r^4}\right) = \pi^2 r^4 + \dfrac{9V^2}{r^2}$
- ដើម្បីឱ្យ S_ℓ មានតម្លៃអប្បបរមា លុះត្រាតែអនុគមន៍ $f(r) = \pi^2 r^4 + \dfrac{9V^2}{r^2}$ មានតម្លៃអប្បបរមា លើ $(0,+\infty)$
- គណនាដេរីវេ ៖ $f'(r) = 4\pi^2 r^3 - \dfrac{18V^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2 r^6 - 18V^2}{r^3}$
- ឱ្យ $f'(r) = 0 \implies 4\pi^2 r^6 - 18V^2 = 0 \implies 2\pi^2 r^6 = 9V^2 \implies r = \sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(r)$ ៖

r	0		$\sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$		$+\infty$
$f'(r)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(r)$	‖	$\searrow$	$S_{\min}^2$	$\nearrow$	$+\infty$

- តាមតារាងអថេរភាព $f(r)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ចំណុចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $2\pi^2 r^6 = 9V^2$
- ជំនួស $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ ចូលក្នុងសមីការនេះ ៖
- $2\pi^2 r^6 = 9\left(\dfrac{1}{3}\pi r^2 h\right)^2 = 9\left(\dfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2\right) = \pi^2 r^4 h^2$
- សម្រួលអង្គទាំងពីរនឹង $\pi^2 r^4$ (ដោយសារ $r > 0$) ៖
- $2r^2 = h^2 \implies h = \sqrt{2}r \implies \dfrac{h}{r} = \sqrt{2}$

ដូចនេះ ៖ ផលធៀបរវាងកម្ពស់ និងកាំបាតនៃកោនដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាខាងអប្បបរមាគឺ $\boxed{\dfrac{h}{r} = \sqrt{2}}$ ។

28 ត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រស្មើនឹង $2p$ និងជ្រុងមួយមានរង្វាស់ $\dfrac{3p}{4}$ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណធំបំផុត រួចអនុវត្តជាលេខកាលណា $P = 40$ m

តាង a, b, c ជាប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ

- បរិមាត្រត្រីកោណ $P = a+b+c = 2p \implies p$ ជាកន្លះបរិមាត្រ
- តាមបម្រាប់ ជ្រុងមួយមានរង្វាស់ $a = \dfrac{3p}{4}$
- គេបាន $b+c = 2p - a = 2p - \dfrac{3p}{4} = \dfrac{5p}{4} \implies c = \dfrac{5p}{4} - b$

- តាមរូបមន្តហេរ៉ុង (Heron's Formula) ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណគឺ ៖
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- ដោយសារ $p - a = p - \dfrac{3p}{4} = \dfrac{p}{4}$

  $\implies S = \sqrt{p\left(\dfrac{p}{4}\right)(p-b)(p-c)} = \dfrac{p}{2}\sqrt{(p-b)(p-c)}$
- ដើម្បីឱ្យ S មានតម្លៃធំបំផុត (អតិបរមា) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $f(b) = (p-b)(p-c)$ មានតម្លៃអតិបរមា
- ជំនួស $c = \dfrac{5p}{4} - b$ ចូល ៖
- $f(b) = (p-b)\left(p - \left(\dfrac{5p}{4} - b\right)\right) = (p-b)\left(b - \dfrac{p}{4}\right) = -b^2 + \dfrac{5p}{4}b - \dfrac{p^2}{4}$
- ដែលដែនកំណត់នៃ b គឺ $\dfrac{p}{4} < b < p$ (តាមវិសមភាពត្រីកោណ)
- គណនាដេរីវេ ៖ $f'(b) = -2b + \dfrac{5p}{4}$
- ឱ្យ $f'(b) = 0 \implies -2b + \dfrac{5p}{4} = 0 \implies b = \dfrac{5p}{8}$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(b)$ ៖

b	$\frac{p}{4}$		$\frac{5p}{8}$		p
$f'(b)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(b)$		↗	$\frac{9p^2}{64}$	↘	

- តាមតារាងអថេរភាព $f(b)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $b = \dfrac{5p}{8}$
- គណនាជ្រុង c ៖ $c = \dfrac{5p}{4} - \dfrac{5p}{8} = \dfrac{5p}{8}$
- ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតគឺ $\boxed{b = c = \dfrac{5p}{8}}$

29 អនុវត្តជាលេខ ៖

- ករណី $p = 40$ m ៖
- $a = \dfrac{3(40)}{4} = 30$ m
- $\boxed{b = c = \dfrac{5(40)}{8} = 25 \text{ m}}$
- ករណីបរិមាត្រសរុប $2p = 40$ m $\implies p = 20$ m ៖
- $a = \dfrac{3(20)}{4} = 15$ m
- $\boxed{b = c = \dfrac{5(20)}{8} = 12.5 \text{ m}}$

30 គេចាក់ទឹកចូលក្នុងស៊ីឡាំងមួយដែលមានកាំបាត 10 cm ដោយអត្រា 360 cm^3/s ហើយលិចចេញវិញដោយ

អត្រា $40\ \text{cm}^3/\text{s}$ ។ តើកម្រិតទឹកប្រែប្រួលដោយអត្រាប៉ុន្មាន ?

តាង V ជាមាឌទឹកក្នុងស៊ីឡាំងខណៈពេល t (គិតជា cm^3)

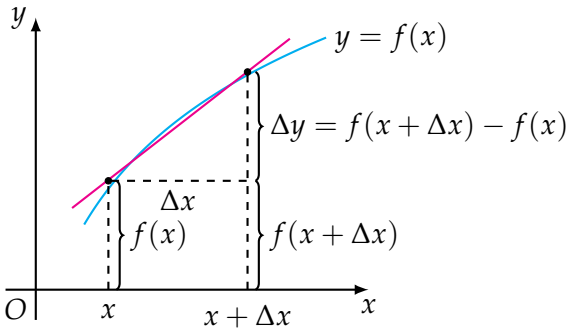
- តាង h ជាកម្ពស់ (កម្រិត) ទឹកក្នុងស៊ីឡាំងខណៈពេល t (គិតជា cm)
- កាំបាតស៊ីឡាំង $r = 10\ \text{cm}$ (មានតម្លៃថេរ)
- អត្រាប្រែប្រួលសរុបនៃមាឌទឹក ៖
- $\dfrac{dV}{dt} =$ អត្រាចាក់ចូល $-$ អត្រាលិចចេញ $= 360 - 40 = 320\ \text{cm}^3/\text{s}$
- រូបមន្តមាឌទឹកក្នុងស៊ីឡាំង ៖
- $V = \pi r^2 h = \pi(10)^2 h = 100\pi h$
- ធ្វើដេរីវេធៀបនឹងពេលវេលា t លើអង្គទាំងពីរ ៖
- $\dfrac{dV}{dt} = 100\pi \dfrac{dh}{dt} \implies \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{100\pi}\dfrac{dV}{dt}$
- ជំនួស $\dfrac{dV}{dt} = 320\ \text{cm}^3/\text{s}$ ចូល ៖
- $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{320}{100\pi} = \dfrac{16}{5\pi}\ \text{cm/s} \approx 1.02\ \text{cm/s}$

ដូចនេះ ៖ អត្រាប្រែប្រួលនៃកម្រិតទឹកគឺ $\boxed{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{16}{5\pi}\ \text{cm/s}}$ (ឬប្រហែល $1.02\ \text{cm/s}$) ។

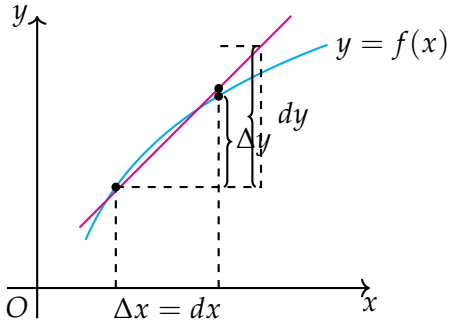
អនុវត្តន៍ផ្សេងទៀតនៃដេរីវេ

៣.១ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ឧទាហរណ៍ ៖ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$
បើតម្លៃ x ប្រែប្រួលពី x ទៅ $x + \Delta x$ នោះតម្លៃត្រូវគ្នានៃ y ក៏ប្រែប្រួលដែរ គឺប្រែប្រួលពី $f(x)$ ទៅ $f(x + \Delta x)$ ហើយ បម្រែបម្រួលនៃ អនុគមន៍ y កំណត់ តាង ដោយ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ។



ផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ជាផលធៀបកំណើននៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងកំណើននៃអថេរ x
ផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ដែលកាត់ក្រាបតាងអនុគមន៍តាមពីរចំណុច ។
កាលណា Δx ខិតជិត ០ បន្ទាត់នេះខិតទៅរកបន្ទាត់ប៉ះក្រាប តាង អនុគមន៍ ។ ចំណែក មេគុណប្រាប់ទិស នៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍ជាដេរីវេទី ១ គឺ $\frac{dy}{dx}$ ។
ដូចនេះគេបាន $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ឬ $dy = f'(x)dx$ ។
និមិត្តសញ្ញា dy និង dx ហៅថា **ឌីផេរ៉ង់ស្យែល** ។



សម្គាល់

កាលណា $\Delta x \to 0$ នោះ $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ដោយ $dx = \Delta x$
គេបាន $dy \approx \Delta y$ ដោយ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $f(x + \Delta x) = \Delta y + f(x)$

រូបមន្ត

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេ នោះឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy កំណត់
តាងដោយ $dy = f'(x)dx$ ។

លំហាត់គំរូ ១ គេមានអនុគមន៍ $y = x^2$ ។ រក dy នៅត្រង់ $x = 1$ និង $dx = 0.01$ រួចប្រៀបធៀប dy និង Δy នៅត្រង់ $x = 1$ និង $\Delta x = 0.01$ ។

ដំណោះស្រាយ ដោយ $y = f(x) = x^2$

គេបាន $f'(x) = 2x$ និង $dy = f'(x)dx$ ដោយ $x = 1$ និង $dx = 0.01$

$$dy = f'(1) \times (0.01) = 2 \times (0.01) = 0.02 \quad ។$$

ដោយ $x = 1$ និង $\Delta x = 0.01$

គេបាន $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1^2 = 0.0201$

$$\Delta y - dy = 0.0201 - 0.02 = 0.0001 \quad ។$$

ដូចនេះ $\Delta y \approx dy$ ។

លំហាត់គំរូ ២ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{15}$ ។

ដំណោះស្រាយ តាង $f(x) = \sqrt{x}, x = 16$ និង $\Delta x = -1$ នោះ $15 = 16 + \Delta x$ ។

ដោយ $f(x) = \sqrt{x}$ គេបាន $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{16}}(-1) = -0.125 \quad ។$$

ដូចនេះ $\sqrt{15} \approx \sqrt{16} + dy = 4 - 0.125 = 3.875$ ។

លំហាត់គំរូ ៣ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\sin 31^\circ$ ។ **ដំណោះស្រាយ** តាង $f(x) = \sin x$, $x = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ និង $\Delta x = 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ នោះ $31^\circ = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}$ ។ ដោយ $f(x) = \sin x$, គេបាន $f'(x) = \cos x$

$$dy = f'(x)dx = \cos x dx = \left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$$

ដូចនេះ $\sin 31^\circ = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{6} + dy = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{360} \approx 0.515$ ។

ប្រតិបត្តិ

ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ

(a) $5(3.02)^3 - 3(3.02)^2$ (b) $\sqrt{3.02}$ (c) $\sin 46^\circ$

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a 110.34 b 1.755 c 0.719

៣.២ វិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ទ្រឹស្តីបទ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់និងជាប់ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។ បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់ $x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b \in I$ ដែល $a < b$ គេបាន $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : គេឱ្យអនុគមន៍ $g : x \mapsto f(x) - mx$ មានដេរីវេលើ I និង $g'(x) = f'(x) - m$ គេបាន $g'(x) \geq 0$ គ្រប់ $x \in I$ មានន័យថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I និងកើនលើ $[a, b]$ គេបាន $g(b) - g(a) \geq 0$ ឬ $[f(b) - mb] - [f(a) - ma] \geq 0$ ឬ $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ (1) ។ ដូចគ្នាដែរ គេឱ្យអនុគមន៍ $h : x \mapsto f(x) - Mx$ មានដេរីវេលើ I និង $h'(x) = f'(x) - M$ ។

គេបាន $h'(x) \leq 0$ គ្រប់ $x \in I$ មានន័យថា $h(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I និងលើ $[a, b]$ គេបាន $h(b) - h(a) \leq 0$ ឬ $[f(b) - Mb] - [f(a) - Ma] \leq 0$ ឬ $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ (2) ។

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន បើ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ I ដែលគ្រប់ $x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ នោះគេបាន $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1, +\infty)$ ដែល $f(x) = \sqrt{1+x}$ ។

a កំណត់តម្លៃអប្បនៃអនុគមន៍ដេរីវេ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ។

b បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ គេបាន $1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x$ ។

ដំណោះស្រាយ

a កំណត់តម្លៃអប្បនៃអនុគមន៍ដេរីវេ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

គេមាន $f(x) = \sqrt{1+x}$ គេបាន $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, f'(0) \geq f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{2}\right)$

ដោយ $f'(0) = \frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ គេបាន $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ។ ខ. គេមាន $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

អនុវត្តន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់

គេបាន $\frac{1}{\sqrt{6}}(x-0) \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}(x-0)$ ដោយ $f(0) = 1$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\sqrt{6}}x \le f(x) \le 1+\frac{1}{2}x$ ។

ប្រតិបត្តិ

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=\sin x$ ។

ⓐ កំណត់តម្លៃអប្បរិនៃអនុគមន៍ដេរីវេ $f'(x)$ ចំពោះ $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

ⓑ បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}x \le \sin x \le x$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2} \le f'(x) \le 1$

ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{2}x \le \sin x \le x$

ទ្រឹស្តីបទ គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$ ។ បើមានចំនួនពិត M ដែល $|f'(x)| \le M$ ចំពោះ $x \in [a,b]$ នោះគេបានវិសមភាព $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ គេមានអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ I ហើយចំពោះគ្រប់ $x \in I$

គេបាន $-M \le f'(x) \le M$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ចំពោះ $a<b$ គេបាន $-M(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a) \quad (1)$

ចំពោះ $a>b$ គេបាន $-M(a-b) \le f(a)-f(b) \le M(a-b) \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $|f(b)-f(a)| \le M(a-b)$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(t)=\cos t$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x,y \in \mathbb{R}$ គេបាន $|\cos x-\cos y| \le |x-y|$ ។

ដំណោះស្រាយ គេមាន $f(t)=\cos t$ នាំឱ្យ $f'(x)=-\sin t$

គេបានវិសមភាព $|f'(t)| \le 1$ ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $x,y \in \mathbb{R}$ គេបាន $|\cos x-\cos y| \le |x-y|$ ។

ប្រតិបត្តិ

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[1,2]$ ដែល $f(x)=x^3+2x+1$ ។

ដោយអនុវត្តន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ រកតម្លៃអប្បនៃ $f(1.01)$ ។

ចម្លើយ $4.05 \leq f(1.01) \leq 4.0506$ ។

៣.៣ អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

ផ្នែកនេះគេនឹងសិក្សាតម្លៃប្រហែលនៃអនុគមន៍ដែលទាក់ទងក្នុងសេដ្ឋកិច្ច និងពាណិជ្ជកម្ម ៖

$C(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង

$R(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូលសរុបដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ x គ្រឿង

$P(x)=R(x)-C(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ x គ្រឿង ។

តម្លៃនៃអនុគមន៍ទាំងបីខាងលើអាស្រ័យនឹងតម្លៃ x និងតម្លៃប្រែប្រួល Δx នៃ x ។ បន្ទាប់មកគេនឹងតាមដានពីការគណនាតម្លៃប្រហែលដោយប្រើការវិភាគលើម៉ាឌីន និងដេរីវេនៃអនុគមន៍ទាំងបីខាងលើ ៖

$C'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាល

$R'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូលម៉ាឌីណាល

$P'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញម៉ាឌីណាល ។

៣.៤ ប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាល

ឧទាហរណ៍ : បើប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង តាងដោយ $C(x)$ នោះប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ $x+1$ គ្រឿងតាងដោយ $C(x+1)$ ។

ឧបមាថា $C(x)=350+8x-0.2x^2$ គិតជាពាន់រៀល

គេបាន $C(10)=350+8\times 10-0.2\times 10^2=410$ ពាន់រៀលជាប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 10 គ្រឿង

$C(11)=350+8\times 11-0.2\times 11^2=413.8$ ពាន់រៀលជាប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 11 គ្រឿង

$C(11)-C(10)=413.8$ ពាន់រៀល -410 ពាន់រៀល $=3.8$ ពាន់រៀលជាប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 1 គ្រឿងគឺគ្រឿងទី 11 ។

វិធីម្យ៉ាងទៀត គេអាចធ្វើការប៉ាន់ស្មានប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 1 គ្រឿងគឺគ្រឿងទី 11 តាមវិធីដូចខាងក្រោម ៖

គេមាន $C(x) = 350 + 8x - 0.2x^2$ គិតជាពាន់រៀល

គេបាន $C'(x) = 8 - 0.4x$

$C'(10) = 8 - 0.4 \times 10 = 4$ ពាន់រៀល ។

គេសង្កេតឃើញថា $C'(10) = 4$ មានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 គឺ $C(11) - C(10) = 3.8$ ។

គេសរសេរ $C'(10) \approx C(11) - C(10)$ ។

គេថា $C'(10)$ ជាប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលសម្រាប់ការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 ។

ដានូទៅ

$C'(x)$ ជាប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈឯកតាទី $x+1$ ។ មានន័យថាប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលជាអត្រាប្រែប្រួលប្រាក់ចំណាយសរុបកាលណាកត្តាផលិតកម្មប្រែប្រួលមួយឯកតា ។

គេសរសេរ $C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$ ។

លំហាត់គំរូ ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយប្រភេទ បានផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលតម្លៃចំណាយសរុបកំណត់ដោយអនុគមន៍ $C(x) = 500 + 3x$ (ពាន់រៀល) ។

ⓐ គណនា $C(101) - C(100)$ (ប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 101)

ⓑ គណនា $C'(100)$ (ប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 101) ។

ដំណោះស្រាយ

ⓐ គេមាន $C(x) = 500 + 3x$ ពាន់រៀល

គេបាន $C(101) = 500 + 3 \times 101 = 500 + 303 = 803$ ពាន់រៀល

$C(100) = 500 + 3 \times 100 = 500 + 300 = 800$ ពាន់រៀល

$C(101) - C(100) = 803 - 800 = 3$ ពាន់រៀល ។

ដូចនេះ បើបរិមាណសម្ភារៈដែលបានផលិតមានការកើនពី 100 ទៅ 101 គ្រឿង នោះប្រាក់ចំណាយសរុបកើនឡើងចំនួន 3 ពាន់រៀល ។ មានន័យថាប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 101 គឺ 3 ពាន់រៀល

ⓑ ប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 101

គេមាន $C(x) = 500 + 3x$ ពាន់រៀល

គេបាន $C'(x) = 3$

$C'(100) = 3$ ពាន់រៀល ។

អនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយសរុប ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង 3 មានន័យថា

កាលណាបរិមាណផលិតផលដែលបានកើនឡើង 1 គ្រឿងនោះប្រាក់ចំណាយសរុបកើនឡើង 3 ពាន់រៀល

ប្រតិបត្តិ

សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុង 1 ថ្ងៃ សម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងតាមអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយសរុប $C(x) = 300 + 24x - 0.4x^2 + 0.1x^3$ គិតជាពាន់រៀល

ⓐ កំណត់ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 2 គ្រឿងនិង 5 គ្រឿង ។
ⓑ គណនា $C'(2)$ និង $C'(5)$ ។
ⓒ តើ $C'(2)$ និង $C'(5)$ មានន័យដូចម្តេច ?

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ⓐ $C(2) = 347.2$, $C(5) = 422.5$ គិតជាពាន់រៀល ។
ⓑ $C'(2) = 23.6$, $C'(5) = 27.5$ គិតជាពាន់រៀល ។
ⓒ $C'(2) = 23.6$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលសម្រាប់ការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 3 ។
$C'(5) = 27.5$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណាយម៉ាឌីណាលសម្រាប់ការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 6 ។

៣.៥ ប្រាក់ចំណូលម៉ាឌីណាល

៣.៦ ប្រាក់ចំណូលសរុប

ឧទាហរណ៍ : ម្ចាស់កសិដ្ឋានមួយ បានលក់មាន់ចំនួន 1750 ក្បាលក្នុងមួយថ្ងៃ ដោយមាន់មួយ 8500 ៛។ ក្នុងមួយថ្ងៃម្ចាស់កសិដ្ឋានទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់មាន់

$$R = 1750 \times 8500 = 14\,875\,000 \text{ ៛}$$

បើថ្លៃមាន់មួយតាងដោយ $p(x)$ និងចំនួនមាន់លក់បានក្នុងមួយថ្ងៃតាងដោយ x នោះប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x) = p(x) \times x$ ។

ជាទូទៅ

ប្រាក់ចំណូលសរុប = តម្លៃលក់ចេញ 1 ឯកតា × បរិមាណលក់បាន

$$R(x) = p(x) \times x \quad \text{។}$$

លំហាត់គំរូ ក្រុមហ៊ុនលក់សម្ភារៈអេឡិចត្រូនិចមួយ បានលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿងតម្លៃ $p(x) = 100 - 0.5x$ ពាន់រៀល ដែល x ជាបរិមាណសម្ភារៈលក់បានក្នុង 1 ខែ ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប ។

ⓑ គណនាប្រាក់ចំណូលសរុប បើក្នុង 1 ខែក្រុមហ៊ុនលក់បានសម្ភារៈចំនួន 123 គ្រឿង ។

ដំណោះស្រាយ

ⓐ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប

គេមាន $p(x) = 100 - 0.5x$ ពាន់រៀល

x ជាបរិមាណសម្ភារៈលក់បានក្នុង 1 ខែ

គេបាន $R(x) = p(x) \times x = (100 - 0.5x)x = 100x - 0.5x^2$ ពាន់រៀល ។

ⓑ គណនា $R(123)$

គេបាន $R(123) = 100 \times 123 - 0.5 \times 123^2 = 4735.5$ ពាន់រៀល ។

ដូចនេះ បើក្រុមហ៊ុនលក់សម្ភារៈបាន 123 គ្រឿងក្នុង 1 ខែ នោះក្រុមហ៊ុនទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបចំនួន 4 735 500 ៛ ។

ប្រតិបត្តិ

រោងចក្រផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយ បានលក់សម្ភារៈទៅឱ្យអតិថិជនក្នុងតម្លៃ $p(x) = 117 - \frac{x}{4}$ ពាន់រៀលក្នុង 1 គ្រឿងដែល x ជាចំនួនសម្ភារៈដែលបានផលិត និងលក់ក្នុងមួយសប្តាហ៍ ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុបប្រចាំសប្តាហ៍ ។

ⓑ គណនាប្រាក់ចំណូលសរុប បើក្នុងមួយសប្តាហ៍លក់បានសម្ភារៈ 16 គ្រឿង ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ⓐ $R(x) = 117x - 0.25x^2$ ពាន់រៀល

ⓑ $R(16) = 1808$ ពាន់រៀល ។

៣.៦.១ ប្រាក់ចំណូលម៉ាជីណាល

ឧទាហរណ៍ : សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយ បានទទួលបានប្រាក់ចំណូលពីការលក់ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x) = 94x - 0.2x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។ គេបាន $R(50) = 94 \times 50 - 0.2 \times 50^2 = 4200$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណូលសរុបបានពីការ
លក់សម្ភារៈ 50 គ្រឿង
$R(51) = 94 \times 51 - 0.2 \times 51^2 = 4273.8$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណូលសរុបបានពីការលក់

សម្ភារៈ 51 គ្រឿង

$R(51) - R(50) = 4273.8 - 4200 = 73.8$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណូលសរុបបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 51 ។

គេអាចធ្វើការប៉ាន់ស្មានពីប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 51 តាមវិធីម្យ៉ាងទៀតដូចខាងក្រោម ៖

គេមាន $R(x) = 94x - 0.2x^2$ ពាន់រៀល

គេបាន $R'(x) = 94 - 0.4x$ ពាន់រៀល

$R'(50) = 94 - 20 = 74$ ពាន់រៀល

គេសង្កេតឃើញថា $R'(50) = 74$ មានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណូលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 51 គឺ $R(51) - R(50)$ ។

គេសរសេរ $R'(50) \approx R(51) - R(50)$ ។

គេថា $R'(50)$ ជាប្រាក់ចំណូលម៉ាជីណាលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 51 ។

ជាទូទៅ

$R'(x)$ ជាប្រាក់ចំណូលម៉ាជីណាលដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈឯកតាទី $x+1$ ។ មានន័យថាប្រាក់ចំណូលម៉ាជីណាលជាអត្រាប្រែប្រួលប្រាក់ចំណូលសរុបកាលណាបរិមាណផលិតផលដែលបានលក់ប្រែប្រួលមួយឯកតា ។

គេសរសេរ $R'(x) \approx R(x+1) - R(x)$ ។

លំហាត់គំរូ អ្នកគ្រប់គ្រងរោងចក្រផលិតសម្ភារៈអគ្គិសនីតូចមួយបានឱ្យដឹងថា គាត់លក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿងក្នុងតម្លៃ $p(x) = 46 - 0.25x$ ពាន់រៀល ដែលអាស្រ័យនឹងបរិមាណតម្រូវការសម្ភារៈ x គ្រឿងរបស់អតិថិជន ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប ។

ⓑ គណនាប្រាក់ចំណូលសរុបដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ 31 និង 41 គ្រឿង ។

ⓒ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 31 និងទី 41 គ្រឿង ។

ដំណោះស្រាយ

ⓐ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប

គេមាន $p(x) = 46 - 0.25x$ ពាន់រៀល

x ជាបរិមាណសម្ភារៈដែលបានលក់

គេបាន $R(x) = p(x) \times x = (46 - 0.25x)x = 46x - 0.25x^2$ ពាន់រៀល ។

ⓑ ប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ 31 គ្រឿងនិង 41 គ្រឿង

គេមាន $R(x) = 46x - 0.25x^2$ ពាន់រៀល

គេបាន $R(31) = 46 \times 31 - 0.25 \times 31^2 = 1185.75$ ពាន់រៀល

$R(41) = 46 \times 41 - 0.25 \times 41^2 = 1465.75$ ពាន់រៀល

ដូច្នេះ ប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ 31 គ្រឿងគឺ 1 185 750 ៛ និងប្រាក់ចំណូលពីការលក់សម្ភារៈ 41 គ្រឿងគឺ 1 465 750 ៛ ។

ⓒ តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 31 និង 41

គេមាន $R(x) = 46x - 0.25x^2$ ពាន់រៀល

គេបាន $R'(x) = 46 - 0.5x$ ពាន់រៀល ។

- សម្ភារៈគ្រឿងទី 31
  គេបាន $R'(30) = 46 - 0.5 \times 30 = 31$ ពាន់រៀល
  ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 31 គឺ 31 000 ៛ ។
- សម្ភារៈគ្រឿងទី 41
  គេបាន $R'(40) = 46 - 0.5 \times 40 = 26$ ពាន់រៀល
  ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 41 គឺ 26 000 ៛ ។

ប្រតិបត្តិ

អ្នកគ្រប់គ្រងរោងចក្រផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានឱ្យដឹងថាថ្លៃ p នៃការលក់ចេញសម្ភារៈ 1 គ្រឿង អាស្រ័យនឹងបរិមាណតម្រូវការសម្ភារៈ x គ្រឿងរបស់សាខាចែកចាយនីមួយៗ $p(x) = 140 - 0.5x$ ពាន់រៀល ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប ។

ⓑ គណនាតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 31 ទី 36 និងទី 41 ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ⓐ $R(x) = 140x - 0.5x^2$ ពាន់រៀល

ⓑ $R'(30) = 110$, $R'(35) = 105$, $R'(40) = 100$ ពាន់រៀល ។

៣.៧ ប្រាក់ចំណេញម៉ាដីណាល

៣.៧.១ ប្រាក់ចំណេញសរុប

ឧទាហរណ៍ : ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយប្រភេទ បានចំណាយថវិកាសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុប $C(x) = 10\,800 + 34x$ ពាន់រៀល ហើយក្រុមហ៊ុនលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលឱ្យតាមអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x) = 94x - 0.03x^2$ ពាន់រៀល ។ ដោយ ប្រាក់ចំណេញសរុប = ប្រាក់ចំណូលសរុប − ប្រាក់ចំណាយសរុប

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (94x - 0.03x^2) - (10\,800 + 34x) \\ &= -0.03x^2 + 60x - 10\,800 \text{ ពាន់រៀល ។} \end{aligned}$$

ដានូទៅ

ប្រាក់ចំណេញសរុប = ប្រាក់ចំណូលសរុប − ប្រាក់ចំណាយសរុប

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

លំហាត់គំរូ សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈក្មេងលេងមួយ បានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុប $C(x) = 0.002x^2 + 0.72x + 260$ ពាន់រៀល ហើយសហគ្រាសបានលក់ចេញវិញសម្ភារៈមួយគ្រឿងតម្លៃ $p(x) = 3 - 0.001x$ ពាន់រៀល ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប

ⓑ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប

ⓒ គណនា $P(300)$ និង $P(375)$

ដំណោះស្រាយ

ⓐ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប

$$\begin{aligned} &\text{គេមាន } p(x) = 3 - 0.001x \text{ ពាន់រៀល} \\ &\quad x \text{ ជាបរិមាណសម្ភារៈដែលលក់បាន} \\ &\text{គេបាន } R(x) = p(x) \times x = (3 - 0.001x)x = 3x - 0.001x^2 \text{ ពាន់រៀល ។} \end{aligned}$$

ⓑ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } C(x) &= 0.002x^2 + 0.72x + 260 \text{ ពាន់រៀល} \\
R(x) &= 3x - 0.001x^2 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ដោយ } P(x) &= R(x) - C(x) \\
\text{គេបាន } P(x) &= (3x - 0.001x^2) - (0.002x^2 + 0.72x + 260) \\
&= -0.003x^2 + 2.28x - 260 \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

ⓒ គេបាន $P(300) = -0.003 \times 300^2 + 2.28 \times 300 - 260 = 154$ ពាន់រៀល

$P(375) = -0.003 \times 375^2 + 2.28 \times 375 - 260 = 173.125$ ពាន់រៀល ។

៣.៧.២ ប្រាក់ចំណេញម៉ាដ៏ណាល

ឧទាហរណ៍ : ក្រុមហ៊ុនលក់សម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយ បានទទួលប្រាក់ចំណេញពីការលក់សម្ភារៈ x គ្រឿងដែលតាងឱ្យតាមអនុគមន៍ $P(x) = -0.2x^2 + 24x - 180$ ពាន់រៀល ។

គេបាន $P(40) = -0.2 \times 40^2 + 24 \times 40 - 180 = 460$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ 40 គ្រឿង ។

$P(41) = -0.2 \times 41^2 + 24 \times 41 - 180 = 467.8$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ 41 គ្រឿង ។
$P(41) - P(40) = 467.8 - 460 = 7.8$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿងគឺគ្រឿងទី 41 ។
គេអាចធ្វើការប៉ាន់ស្មានពីប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 41 តាមវិធីម្យ៉ាងទៀតដូចខាងក្រោម

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } P(x) &= -0.2x^2 + 24x - 180 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{គេបាន } P'(x) &= -0.4x + 24 \\
P'(40) &= -0.4 \times 40 + 24 = 8 \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

គេសង្កេតឃើញថា $P'(40) = 8$ មានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 41 គឺ $P(41) - P(40) = 7.8$ ។

គេសរសេរ $P'(40) \approx P(41) - P(40)$ ។

គេថា $P'(40)$ ជាប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណាល ដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 41 ។

ដានទូទៅ

$P'(x)$ ជាប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណាល ដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណេញ ដែលបានពីការលក់សម្ភារៈឯកតាទី $x+1$ គឺ $P(x+1)-P(x)$ ។ មានន័យថា ប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណាលអត្រាប្រែប្រួលប្រាក់ចំណេញសរុប កាលណា បរិមាណផលិតផលដែលបានលក់ប្រែប្រួលមួយឯកតា ។

គេកំណត់សរសេរ $P'(x) \approx P(x+1)-P(x)$ ។

លំហាត់គំរូ រោងចក្រផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយបានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x)=2070+25x+0.1x^2$ ពាន់រៀល ហើយរោងចក្រលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x)=100x-0.1x^2$ ពាន់រៀល ។

ⓐ កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប

ⓑ ប្រៀបធៀប $P(61)-P(60)$ និង $P'(60)$ ។

ⓒ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 81 ។

ដំណោះស្រាយ

ⓐ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } C(x) &= 2070+25x+0.1x^2 \text{ ពាន់រៀល}\\
R(x) &= 100x-0.1x^2 \text{ ពាន់រៀល}\\
\text{ដោយ } P(x) &= R(x)-C(x)\\
&= (100x-0.1x^2)-(2070+25x+0.1x^2)\\
&= -0.2x^2+75x-2070 \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

ⓑ ប្រៀបធៀប $P(61)-P(60)$ និង $P'(60)$

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } P(x) &= -0.2x^2+75x-2070 \text{ ពាន់រៀល}\\
\text{គេបាន } P'(x) &= -0.4x+75 \text{ ពាន់រៀល}\\
P'(60) &= -0.4\times 60+75=51\\
P(61) &= -0.2\times 61^2+75\times 61-2070=1760.8 \text{ ពាន់រៀល}\\
P(60) &= -0.2\times 60+75\times 60-2070=1710 \text{ ពាន់រៀល}\\
P(61)-P(60) &= 1760.8-1710=50.8 \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $P(61)-P(60)=50.8$ ពាន់រៀល $<P'(60)=51$ ពាន់រៀល ។

ⓒ តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 81

គេមាន $P'(x) = -0.4x + 75$ ពាន់រៀល

គេបាន $P'(80) = -0.4(80) + 75 = 43$ ពាន់រៀល

ដូច្នេះ ប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 81 មានតម្លៃប្រហែល 43 ពាន់រៀល ។

ប្រតិបត្តិ

រោងចក្រផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 400 + 30x - 0.2x^2$ ពាន់រៀល ហើយរោងចក្របានលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 54x - 0.4x^2$ ពាន់រៀល ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប ។

ⓑ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី 21 និងគ្រឿងទី 41

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ⓐ $P(x) = 0.1x^2 + 70x - 400$ ពាន់រៀល

ⓑ $P'(20) = 74$ ពាន់រៀល និង $P'(40) = 78$ ពាន់រៀល ។

៣.៧.៣ ប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាល

ឧទាហរណ៍ : ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយ បានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.02x^2 + 100x + 2000$ ពាន់រៀល ។

គេបាន $\bar{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 0.02x + 100 + \dfrac{2000}{x}$ ពាន់រៀល ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 1 គ្រឿងៗ ។ បើ $C(x)$ តាងប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង នោះ

$\bar{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 1 គ្រឿងៗ ។

$\bar{C}'(x)$ ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាលដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណាយមធ្យមកាលណាកត្តាផលិតកម្មកើនមួយឯកតា ។

លំហាត់គំរូ ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងមួយសប្តាហ៍របស់ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.125x^2 + 20x + 1000$ គិតជាពាន់រៀល ដែល x ជាបរិមាណសម្ភារៈផលិតបាន ។

ⓐ គណនា $C(100)$, $C(120)$ និង $C(150)$ ។

ⓑ កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម ។

ⓒ គណនាប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាលកាលណា $x = 100$, $x = 120$ និង $x = 150$ ។

ដំណោះស្រាយ

ⓐ គណនា $C(100)$, $C(120)$ និង $C(150)$

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } C(x) &= 0.125x^2 + 20x + 1000 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{គេបាន } C(100) &= 0.125 \times 100^2 + 20 \times 100 + 1000 = 4250 \text{ ពាន់រៀល} \\
C(120) &= 0.125 \times 120^2 + 20 \times 120 + 1000 = 5200 \text{ ពាន់រៀល} \\
C(150) &= 0.125 \times 150^2 + 20 \times 150 + 1000 = 6812.5 \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

ⓑ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } C(x) &= 0.125x^2 + 20x + 1000 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{គេបាន } \bar{C}(x) &= 0.125x + 20 + \frac{1000}{x} \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

ⓒ ប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាល

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } \bar{C}(x) &= 0.125x + 20 + \frac{1000}{x} \text{ ពាន់រៀលគេបាន } \bar{C}'(x) = 0.125 - \frac{1000}{x^2} \text{ ពាន់រៀល} \\
\bar{C}'(100) &= 0.125 - \frac{1000}{100^2} = 0.025 \text{ ពាន់រៀល} \\
\bar{C}'(120) &= 0.125 - \frac{1000}{120^2} = 0.055 \text{ ពាន់រៀល} \\
\bar{C}'(150) &= 0.125 - \frac{1000}{150^2} = 0.08 \text{ ពាន់រៀល ។}
\end{aligned}$$

ប្រតិបត្តិ

ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងរបស់ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយជាអនុគមន៍ $C(x) = 300 + 24x - 0.4x^2 + 0.1x^3$ គិតជាពាន់រៀល ។

ⓐ គណនា $C'(13)$ និង $C'(15)$

ⓑ គណនា $\bar{C}'(13)$ និង $\bar{C}'(15)$ ។

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

ⓐ $C'(13) = 64.3$ ពាន់រៀល, $C'(15) = 79.5$ ពាន់រៀល

ⓑ $\bar{C}'(13) = 0.42$ ពាន់រៀល, $\bar{C}'(15) = 1.27$ ពាន់រៀល ។

ក្រម្ងចលំហាត់បន្ថែម

1 រក $dy, \Delta y, dy - \Delta y$ និង $\dfrac{dy}{\Delta y}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

(a) $y = x^2 - 3x + 4$ ចំពោះ $x = 3, \Delta x = 0.2$

(b) $y = \sqrt{12 - 5x}$ ចំពោះ $x = 2, \Delta x = 0.07$

2 ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃចំនួនខាងក្រោម ៖

(a) $\sqrt{37}$

(b) $\sqrt{65}$

(c) $\sqrt[3]{26}$

(d) $\sqrt[3]{126}$

(e) $\sqrt{50.4}$

(f) $\sqrt{79.5}$

(g) $\sqrt[3]{62.3}$

(h) $\sqrt[3]{218.3}$

3 ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារប្រើប្រាស់មួយបានទទួលប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 20x - \dfrac{x^2}{30}$ គិតជាម៉ឺនរៀល ដែល $0 \le x \le 600$ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកើនឡើងប្រាក់ចំណូល បើសម្ភារដែលបានលក់ប្រែប្រួលពី 150 គ្រឿងទៅ 160 គ្រឿង ។

4 រោងចក្រផលិតសម្ភារប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 930 + 15x + 0.2x^2$ ពាន់រៀល ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកើនឡើងប្រាក់ចំណាយ បើសម្ភារដែលបានផលិតកើនពី 60 គ្រឿងទៅ 62 គ្រឿង ។

5 សហគ្រាសផលិតសម្ភារ៖ អេឡិចត្រូនិកមួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុង 1 ខែ សម្រាប់ផលិតសម្ភារ៖ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.1x^2 + 4x + 200$ គិតជាពាន់រៀល ហើយសហគ្រាសបានទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 54x - 0.3x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

(a) សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$ ។

(b) ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកើនឡើងប្រាក់ចំណេញ បើបរិមាណសម្ភារ៖ដែលបានលក់កើនពី 40 គ្រឿងទៅ 44 គ្រឿង ។

6 តាមការសង្កេតរបស់អ្នកស្ថិតិបានឱ្យដឹងថា ចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅក្នុងទីក្រុងមួយរយ៖ពេល t ឆ្នាំទៅមុខទៀតមានការកើនឡើង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $P(t) = 10(40 + 2t)^2 - 1600t$ នាក់ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងនោះ បើ t ប្រែប្រួលពី 6 ទៅ 6.25 ឆ្នាំ ។

7 បាល់ឡុងមួយមានរាងជាស្វ៊ែរ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាល់ឡុង បើពេលត្រូវកម្តៅថ្ងៃបាល់ឡុងរីកមាឌ ដែលកាំរបស់វាប្រែប្រួលពី 2 m ទៅ 2.15 m ។

8 គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $(-2, \infty)$ ដែល $f(x) = \sqrt{x+2}$ ។

(a) រកតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1, 2]$ ។

(b) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [-1, 2]$ គេបាន $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ ។

9 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ដែល $f(x) = \tan x$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ គេបាន $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

10 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុង 1 ថ្ងៃសម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 2400 + 28x + 0.02x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

- **a** កំណត់ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 10 គ្រឿង 20 គ្រឿង និង 30 គ្រឿង ។
- **b** ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 គ្រឿងទី 21 និងគ្រឿងទី 31 ។

11 រោងពុម្ពបោះពុម្ពទស្សនាវដ្តីមួយ បានចំណាយសរុបក្នុង 1 ខែសម្រាប់បោះពុម្ពទស្សនាវដ្តី x ច្បាប់ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.0001x^2 + x + 465$ គិតជាពាន់រៀល ហើយរោងពុម្ពបានលក់ចេញវិញទស្សនាវដ្តី 1 ច្បាប់ថ្លៃ $P = D(x) = 4 - 0.0002x$ ពាន់រៀល ។

- **a** សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x)$ ។
- **b** សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប $P(x)$ ។
- **c** គណនាប្រាក់ចំណេញសរុបបើក្នុង 1 ខែរោងពុម្ពលក់អស់ 3000 ច្បាប់ 3500 ច្បាប់ និង 4000 ច្បាប់ ។
- **d** ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 3001 ច្បាប់ទី 3501 និងច្បាប់ទី 4001 ។

12 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 480 + 26x - 0.1x^2$ ពាន់រៀល ។

- **a** កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម $\overline{C}(x)$
- **b** គណនាប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាល កាលណា $x = 30, x = 50$ និង $x = 70$ ។

13 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយ បានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 1080 + 42x + 0.3x^2$ ពាន់រៀល ។ កំណត់បរិមាណសម្ភារៈដែលសហគ្រាសត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយមធ្យមមានកម្រិតអប្បបរមា បើ $0 \leq x \leq 90$ ។

14 ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = x^2 + 20x + 1050$ ពាន់រៀល ហើយក្រុមហ៊ុនលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 140x - 0.5x^2$ ពាន់រៀល ។ កំណត់កម្រិតបរិមាណសម្ភារៈដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវផលិតនិងលក់ដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា បើ $0 \leq x \leq 70$ ។

ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

1 រក $dy, \Delta y, dy - \Delta y$ និង $\frac{dy}{\Delta y}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ⓐ ចំពោះ $y = x^2 - 3x + 4$ ជាមួយ $x = 3$ និង $\Delta x = 0.2$

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } y &= f(x) = x^2 - 3x + 4 \\
\text{គេបាន } f'(x) &= 2x - 3 \implies f'(3) = 2(3) - 3 = 3 \\
dy &= f'(3)\Delta x = 3 \times 0.2 = 0.6 \\
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(3.2) - f(3) \\
&= [(3.2)^2 - 3(3.2) + 4] - [3^2 - 3(3) + 4] \\
&= 4.64 - 4 = 0.64 \\
dy - \Delta y &= 0.6 - 0.64 = -0.04 \\
\frac{dy}{\Delta y} &= \frac{0.6}{0.64} = 0.9375
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $dy = 0.6, \Delta y = 0.64, dy - \Delta y = -0.04$ និង $\frac{dy}{\Delta y} = 0.9375$ ។

ⓑ ចំពោះ $y = \sqrt{12 - 5x}$ ជាមួយ $x = 2$ និង $\Delta x = 0.07$

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } y &= f(x) = \sqrt{12 - 5x} \\
\text{គេបាន } f'(x) &= \frac{-5}{2\sqrt{12 - 5x}} \implies f'(2) = \frac{-5}{2\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{4} \approx -1.7678 \\
dy &= f'(2)\Delta x = -1.7678 \times 0.07 \approx -0.1237 \\
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.07) - f(2) \\
&= \sqrt{12 - 5(2.07)} - \sqrt{12 - 5(2)} \\
&= \sqrt{1.65} - \sqrt{2} \approx 1.2845 - 1.4142 = -0.1297 \\
dy - \Delta y &\approx -0.1237 - (-0.1297) = 0.0060 \\
\frac{dy}{\Delta y} &\approx \frac{-0.123744}{-0.129690} \approx 0.9541
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $dy \approx -0.1237, \Delta y \approx -0.1297, dy - \Delta y \approx 0.0060$ និង $\frac{dy}{\Delta y} \approx 0.9541$ ។

2 ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃចំនួនខាងក្រោម ៖

ⓐ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{37}$

$$\text{តាង } f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
\text{ជ្រើសរើស } x &= 36 \text{ និង } \Delta x = 1 \\
f(36) &= \sqrt{36} = 6 \\
f'(36) &= \frac{1}{2\sqrt{36}} = \frac{1}{12} \\
\sqrt{37} = f(36+1) &\approx f(36) + f'(36)\Delta x \\
&\approx 6 + \frac{1}{12}(1) = 6 + 0.0833 = 6.0833
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\sqrt{37} \approx 6.0833$ ។

ⓑ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{65}$

$$\begin{aligned}
\text{តាង } f(x) = \sqrt{x} &\implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\text{ជ្រើសរើស } x &= 64 \text{ និង } \Delta x = 1 \\
f(64) &= \sqrt{64} = 8 \\
f'(64) &= \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} \\
\sqrt{65} = f(64+1) &\approx f(64) + f'(64)\Delta x \\
&\approx 8 + \frac{1}{16}(1) = 8 + 0.0625 = 8.0625
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\sqrt{65} \approx 8.0625$ ។

ⓒ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{26}$

$$\begin{aligned}
\text{តាង } f(x) = \sqrt[3]{x} &\implies f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
\text{ជ្រើសរើស } x &= 27 \text{ និង } \Delta x = -1 \\
f(27) &= \sqrt[3]{27} = 3 \\
f'(27) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} \\
\sqrt[3]{26} = f(27-1) &\approx f(27) + f'(27)\Delta x \\
&\approx 3 + \frac{1}{27}(-1) = 3 - 0.0370 = 2.9630
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\sqrt[3]{26} \approx 2.9630$ ។

ⓓ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{126}$

$$\text{តាង } f(x) = \sqrt[3]{x} \implies f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{ជ្រើសរើស } x = 125 \text{ និង } \Delta x = 1$$

$$f(125) = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$f'(125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75}$$

$$\sqrt[3]{126} = f(125+1) \approx f(125) + f'(125)\Delta x$$

$$\approx 5 + \frac{1}{75}(1) = 5 + 0.0133 = 5.0133$$

ដូចេ្នះ $\sqrt[3]{126} \approx 5.0133$ ។

ⓔ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{50.4}$

$$\text{តាង } f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ជ្រើសរើស } x = 49 \text{ និង } \Delta x = 1.4$$

$$f(49) = \sqrt{49} = 7$$

$$f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14}$$

$$\sqrt{50.4} = f(49+1.4) \approx f(49) + f'(49)\Delta x$$

$$\approx 7 + \frac{1}{14}(1.4) = 7 + 0.1 = 7.1$$

ដូចេ្នះ $\sqrt{50.4} \approx 7.1$ ។

ⓕ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{79.5}$

$$\text{តាង } f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ជ្រើសរើស } x = 81 \text{ និង } \Delta x = -1.5$$

$$f(81) = \sqrt{81} = 9$$

$$f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$$

$$\sqrt{79.5} = f(81-1.5) \approx f(81) + f'(81)\Delta x$$

$$\approx 9 + \frac{1}{18}(-1.5) = 9 - 0.0833 = 8.9167$$

ដូចេ្នះ $\sqrt{79.5} \approx 8.9167$ ។

ⓖ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{62.3}$

$$\text{តាង } f(x)=\sqrt[3]{x} \implies f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{ជ្រើសរើស } x=64 \text{ និង } \Delta x=-1.7$$

$$f(64)=\sqrt[3]{64}=4$$

$$f'(64)=\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{48}$$

$$\sqrt[3]{62.3}=f(64-1.7)\approx f(64)+f'(64)\Delta x$$

$$\approx 4+\frac{1}{48}(-1.7)=4-0.0354=3.9646$$

ដូច្នេះ $\sqrt[3]{62.3}\approx 3.9646$ ។

ⓗ រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt[3]{218.3}$

$$\text{តាង } f(x)=\sqrt[3]{x} \implies f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{ជ្រើសរើស } x=216 \text{ និង } \Delta x=2.3$$

$$f(216)=\sqrt[3]{216}=6$$

$$f'(216)=\frac{1}{3\sqrt[3]{216^2}}=\frac{1}{108}$$

$$\sqrt[3]{218.3}=f(216+2.3)\approx f(216)+f'(216)\Delta x$$

$$\approx 6+\frac{1}{108}(2.3)=6+0.0213=6.0213$$

ដូច្នេះ $\sqrt[3]{218.3}\approx 6.0213$ ។

3 ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារប្រើប្រាស់មួយបានទទួលប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x)=20x-\frac{x^2}{30}$ គិតជាម៉ឺនរៀល ដែល $0\le x\le 600$ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកើនឡើងប្រាក់ចំណូល បើសម្ភារដែលបានលក់ប្រែប្រួលពី 150 គ្រឿងទៅ 160 គ្រឿង ។

$$\text{គេមាន } R(x)=20x-\frac{x^2}{30} \text{ ម៉ឺនរៀល}$$

$$\text{គេបាន } R'(x)=20-\frac{2x}{30}=20-\frac{x}{15}$$

ដោយសម្ភារដែលបានលក់ប្រែប្រួលពី 150 ទៅ 160 គ្រឿង គេបាន ៖

$$x=150$$

$$\Delta x = 160 - 150 = 10$$

តាមរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖ $\Delta R \approx dR = R'(x)\Delta x$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow dR &= R'(150) \cdot \Delta x \\ &= \left(20 - \frac{150}{15}\right) \times 10 \\ &= (20 - 10) \times 10 = 10 \times 10 = 100 \text{ ម៉ឺនរៀល} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃការកើនឡើងប្រាក់ចំណូលគឺ 100 ម៉ឺនរៀល (ស្មើនឹង 1 000 000 រៀល) ។

4 រោងចក្រផលិតសម្ភារប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 930 + 15x + 0.2x^2$ ពាន់រៀល ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកើនឡើងប្រាក់ចំណាយ បើសម្ភារដែលបានផលិតកើនពី 60 គ្រឿងទៅ 62 គ្រឿង ។

គេមាន $C(x) = 930 + 15x + 0.2x^2$ ពាន់រៀល

គេបាន $C'(x) = 15 + 0.4x$

ដោយចំនួនសម្ភារកើនពី 60 ទៅ 62 គ្រឿង គេបាន ៖

$$x = 60$$

$$\Delta x = 62 - 60 = 2$$

តាមរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖ $\Delta C \approx dC = C'(x)\Delta x$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow dC &= C'(60) \cdot \Delta x \\ &= (15 + 0.4 \times 60) \times 2 \\ &= (15 + 24) \times 2 = 39 \times 2 = 78 \text{ ពាន់រៀល} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃការកើនឡើងប្រាក់ចំណាយគឺ 78 ពាន់រៀល (ស្មើនឹង 78 000 រៀល) ។

5 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុង 1 ខែ សម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.1x^2 + 4x + 200$ គិតជាពាន់រៀល ហើយសហគ្រាសបានទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 54x - 0.3x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត ៖ } P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (54x - 0.3x^2) - (0.1x^2 + 4x + 200) \\ &= 54x - 0.3x^2 - 0.1x^2 - 4x - 200 \\ &= -0.4x^2 + 50x - 200 \text{ ពាន់រៀល} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញគឺ $P(x) = -0.4x^2 + 50x - 200$ ពាន់រៀល ។

b ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកើនឡើងប្រាក់ចំណេញ បើបរិមាណសម្ភារៈដែលបានលក់កើនពី 40 គ្រឿង ទៅ 44 គ្រឿង

$$\text{គេមាន } P(x) = -0.4x^2 + 50x - 200 \text{ ពាន់រៀល}$$
$$\text{គេបាន } P'(x) = -0.8x + 50$$

ដោយបរិមាណសម្ភារៈកើនពី 40 ទៅ 44 គ្រឿង គេបាន ៖

$$x = 40$$
$$\Delta x = 44 - 40 = 4$$

តាមរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖ $\Delta P \approx dP = P'(x)\Delta x$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow dP &= P'(40) \cdot \Delta x \\ &= (-0.8 \times 40 + 50) \times 4 \\ &= (-32 + 50) \times 4 = 18 \times 4 = 72 \text{ ពាន់រៀល} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃការកើនឡើងប្រាក់ចំណេញគឺ 72 ពាន់រៀល (ស្មើនឹង 72 000 រៀល) ។

6 តាមការសង្កេតរបស់អ្នកស្ថិតិបានឱ្យដឹងថា ចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅក្នុងទីក្រុងមួយរយៈពេល t ឆ្នាំទៅមុខទៀត មានការកើនឡើង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $P(t) = 10(40 + 2t)^2 - 1600t$ នាក់ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីប៉ាន់ស្មានកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងនោះ បើ t ប្រែប្រួលពី 6 ទៅ 6.25 ឆ្នាំ ។

$$\text{គេមាន } P(t) = 10(40 + 2t)^2 - 1600t \text{ នាក់}$$
$$\begin{aligned} \text{គេបាន } P'(t) &= 10 \cdot 2(40 + 2t)(2) - 1600 \\ &= 40(40 + 2t) - 1600 \\ &= 1600 + 80t - 1600 = 80t \end{aligned}$$

ដោយ t ប្រែប្រួលពី 6 ទៅ 6.25 ឆ្នាំ គេបាន ៖

$$t = 6$$
$$\Delta t = 6.25 - 6 = 0.25$$

តាមរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖ $\Delta P \approx dP = P'(t)\Delta t$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow dP &= P'(6) \cdot \Delta t \\ &= 80(6) \times 0.25 \\ &= 480 \times 0.25 = 120 \text{ នាក់} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ កំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងនោះមានតម្លៃប្រហែល 120 នាក់ ។

7 បាល់ឡុងមួយមានរាងជាស្វ៊ែរ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាល់ឡុង បើពេលត្រូវកម្តៅថ្ងៃបាល់ឡុងរីកមាឌ ដែលកាំរបស់វាប្រែប្រួលពី 2 m ទៅ 2.15 m ។

$$\text{រូបមន្តមាឌស្វ៊ែរ ៖ } V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\text{គេបាន } V'(r) = 4\pi r^2$$

ដោយកាំរបស់វាប្រែប្រួលពី 2 m ទៅ 2.15 m គេបាន ៖

$$r = 2\,\text{m}$$
$$\Delta r = 2.15 - 2 = 0.15\,\text{m}$$

តាមរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖ $\Delta V \approx dV = V'(r)\Delta r$

$$\implies dV = 4\pi(2)^2 \times 0.15$$
$$= 16\pi \times 0.15 = 2.4\pi\,\text{m}^3 \approx 7.54\,\text{m}^3$$

ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាល់ឡុងគឺ $2.4\pi\,\text{m}^3$ (ឬប្រហែល $7.54\,\text{m}^3$) ។

8 គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $(-2,\infty)$ ដែល $f(x) = \sqrt{x+2}$ ។

a រកតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,2]$

$$\text{គេមាន } f(x) = \sqrt{x+2}$$
$$\text{គេបាន } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

ដោយសារ $x+2$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $[-1,2]$ នាំឱ្យ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $[-1,2]$ ។

ដូច្នេះ គេបាន ៖

$$\text{តម្លៃអតិបរមានៃ } f'(x) \text{ គឺកើតមានត្រង់ } x = -1 \implies f'(-1) = \frac{1}{2\sqrt{-1+2}} = \frac{1}{2}$$
$$\text{តម្លៃអប្បបរមានៃ } f'(x) \text{ គឺកើតមានត្រង់ } x = 2 \implies f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,2]$ តម្លៃអប្បបរមានៃ $f'(x)$ គឺ $\dfrac{1}{4}$ និងតម្លៃអតិបរមានៃ $f'(x)$ គឺ $\dfrac{1}{2}$ (ពោលគឺ $\dfrac{1}{4} \le f'(x) \le \dfrac{1}{2}$) ។

(b) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,2]$ គេបាន $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

ចំពោះ $x=-1$ គេបាន ៖ $\frac{1}{4}(-1)+\frac{5}{4}=1, \quad \sqrt{-1+2}=1, \quad \frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{2}=1$

$$\implies 1 \le 1 \le 1 \text{ (ពិត)}$$

ចំពោះ $x \in (-1,2]$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម លើចន្លោះ $[-1,x]$ មាន $c \in (-1,x)$ ដែល ៖

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(c)$$
$$\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = f'(c)$$

ដោយ $c \in (-1,x) \subset [-1,2]$ តាមលទ្ធផលចំណុច (a) គេបាន $\frac{1}{4} \le f'(c) \le \frac{1}{2}$ ៖

$$\frac{1}{4} \le \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} \le \frac{1}{2}$$
ដោយ $x+1>0 \implies \frac{1}{4}(x+1) \le \sqrt{x+2}-1 \le \frac{1}{2}(x+1)$
$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+1 \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+1$$
$$\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,2]$ គេបាន $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

9 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ដែល $f(x)=\tan x$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$ គេបាន $\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

គេមាន $f(x)=\tan x$ កំណត់លើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

ចំពោះ $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$ អនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើ (a,b) ។
ដោយសារ $\cos x$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត និងវិជ្ជមានលើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ នាំឱ្យ $\cos^2 x$ ចុះដាច់ខាត
ដូច្នេះ $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $[a,b]$ ។

នាំឱ្យចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ គេបាន ៖

$$f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$$
$$\frac{1}{\cos^2 a} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម លើចន្លោះ $[a,b]$ មាន $c \in (a,b)$ ដែល ៖

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$
$$\frac{\tan b - \tan a}{b-a} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

ដោយ $c \in (a,b)$ នាំឱ្យ $\frac{1}{\cos^2 a} \leq f'(c) \leq \frac{1}{\cos^2 b}$ ៖

$$\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{\tan b - \tan a}{b-a} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$
$$\text{ដោយ } b-a>0 \implies \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ គេបាន $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

10 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុង 1 ថ្ងៃសម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 2400 + 28x + 0.02x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

ⓐ កំណត់ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 10 គ្រឿង 20 គ្រឿង និង 30 គ្រឿង

$$\text{គេមាន } C(x) = 2400 + 28x + 0.02x^2 \text{ ពាន់រៀល}$$
$$\text{ចំពោះ } x=10 \implies C(10) = 2400 + 28(10) + 0.02(10)^2$$
$$= 2400 + 280 + 2 = 2682 \text{ ពាន់រៀល}$$
$$\text{ចំពោះ } x=20 \implies C(20) = 2400 + 28(20) + 0.02(20)^2$$
$$= 2400 + 560 + 8 = 2968 \text{ ពាន់រៀល}$$
$$\text{ចំពោះ } x=30 \implies C(30) = 2400 + 28(30) + 0.02(30)^2$$
$$= 2400 + 840 + 18 = 3258 \text{ ពាន់រៀល}$$

ដូច្នេះ ប្រាក់ចំណាយសរុបគឺ ៖

- ផលិត 10 គ្រឿង អស់ប្រាក់ 2682 ពាន់រៀល (ឬ 2 682 000 រៀល)
- ផលិត 20 គ្រឿង អស់ប្រាក់ 2968 ពាន់រៀល (ឬ 2 968 000 រៀល)
- ផលិត 30 គ្រឿង អស់ប្រាក់ 3258 ពាន់រៀល (ឬ 3 258 000 រៀល)

ⓑ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 គ្រឿងទី 21 និងគ្រឿងទី 31

$$\begin{aligned}
&\text{គេមាន } C'(x) = 28 + 0.04x \text{ ពាន់រៀល} \\
&\text{គ្រឿងទី } 11 \implies C'(10) = 28 + 0.04(10) = 28 + 0.4 = 28.4 \text{ ពាន់រៀល} \\
&\text{គ្រឿងទី } 21 \implies C'(20) = 28 + 0.04(20) = 28 + 0.8 = 28.8 \text{ ពាន់រៀល} \\
&\text{គ្រឿងទី } 31 \implies C'(30) = 28 + 0.04(30) = 28 + 1.2 = 29.2 \text{ ពាន់រៀល}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយគឺ ៖

- ការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 មានតម្លៃប្រហែល 28.4 ពាន់រៀល (ស្មើនឹង 28 400 រៀល)
- ការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 21 មានតម្លៃប្រហែល 28.8 ពាន់រៀល (ស្មើនឹង 28 800 រៀល)
- ការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 31 មានតម្លៃប្រហែល 29.2 ពាន់រៀល (ស្មើនឹង 29 200 រៀល)

11 រោងពុម្ពបោះពុម្ពទស្សនាវដ្តីមួយ បានចំណាយសរុបក្នុង 1 ខែសម្រាប់បោះពុម្ពទស្សនាវដ្តី x ច្បាប់ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.0001x^2 + x + 465$ គិតជាពាន់រៀល ហើយរោងពុម្ពបានលក់ចេញវិញទស្សនាវដ្តី 1 ច្បាប់ថ្លៃ $P = D(x) = 4 - 0.0002x$ ពាន់រៀល ។

ⓐ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x)$

$$\begin{aligned}
\text{តាមរូបមន្ត ៖ } R(x) &= x \cdot D(x) \\
&= x(4 - 0.0002x) \\
&= 4x - 0.0002x^2 \text{ ពាន់រៀល}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុបគឺ $R(x) = 4x - 0.0002x^2$ ពាន់រៀល ។

ⓑ សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប $P(x)$

$$\begin{aligned}
\text{តាមរូបមន្ត ៖ } P(x) &= R(x) - C(x) \\
&= (4x - 0.0002x^2) - (0.0001x^2 + x + 465) \\
&= 4x - 0.0002x^2 - 0.0001x^2 - x - 465 \\
&= -0.0003x^2 + 3x - 465 \text{ ពាន់រៀល}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុបគឺ $P(x) = -0.0003x^2 + 3x - 465$ ពាន់រៀល ។

◈ គណនាប្រាក់ចំណេញសរុបបើក្នុង 1 ខែរោងពុម្ពលក់អស់ 3000 ច្បាប់ 3500 ច្បាប់ និង 4000 ច្បាប់

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } P(x) &= -0.0003x^2 + 3x - 465 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ចំពោះ } x = 3000 \implies P(3000) &= -0.0003(3000)^2 + 3(3000) - 465 \\
&= -2700 + 9000 - 465 = 5835 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ចំពោះ } x = 3500 \implies P(3500) &= -0.0003(3500)^2 + 3(3500) - 465 \\
&= -3675 + 10500 - 465 = 6360 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ចំពោះ } x = 4000 \implies P(4000) &= -0.0003(4000)^2 + 3(4000) - 465 \\
&= -4800 + 12000 - 465 = 6735 \text{ ពាន់រៀល}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ប្រាក់ចំណេញសរុបគឺ ៖

- លក់ 3000 ច្បាប់ ទទួលបានប្រាក់ចំណេញ 5835 ពាន់រៀល (ឬ 5 835 000 រៀល)
- លក់ 3500 ច្បាប់ ទទួលបានប្រាក់ចំណេញ 6360 ពាន់រៀល (ឬ 6 360 000 រៀល)
- លក់ 4000 ច្បាប់ ទទួលបានប្រាក់ចំណេញ 6735 ពាន់រៀល (ឬ 6 735 000 រៀល)

◈ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 3001 ច្បាប់ទី 3501 និងច្បាប់ទី 4001

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } P'(x) &= -0.0006x + 3 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ច្បាប់ទី } 3001 \implies P'(3000) &= -0.0006(3000) + 3 = -1.8 + 3 = 1.2 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ច្បាប់ទី } 3501 \implies P'(3500) &= -0.0006(3500) + 3 = -2.1 + 3 = 0.9 \text{ ពាន់រៀល} \\
\text{ច្បាប់ទី } 4001 \implies P'(4000) &= -0.0006(4000) + 3 = -2.4 + 3 = 0.6 \text{ ពាន់រៀល}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញគឺ ៖

- ការលក់ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 3001 ទទួលបានប្រាក់ចំណេញប្រហែល 1.2 ពាន់រៀល (1 200 រៀល)
- ការលក់ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 3501 ទទួលបានប្រាក់ចំណេញប្រហែល 0.9 ពាន់រៀល (900 រៀល)
- ការលក់ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 4001 ទទួលបានប្រាក់ចំណេញប្រហែល 0.6 ពាន់រៀល (600 រៀល)

12 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈ ប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 480 + 26x - 0.1x^2$ ពាន់រៀល ។

ⓐ កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម $\overline{C}(x)$

$$\begin{aligned}\text{តាមរូបមន្ត ៖ } \overline{C}(x) &= \frac{C(x)}{x}\\ &= \frac{480+26x-0.1x^2}{x}\\ &= \frac{480}{x}+26-0.1x \text{ ពាន់រៀល}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យមគឺ $\overline{C}(x)=\frac{480}{x}+26-0.1x$ ពាន់រៀល ។

ⓑ គណនាប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាល កាលណា $x=30, x=50$ និង $x=70$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \overline{C}(x) &= \frac{480}{x}+26-0.1x \text{ ពាន់រៀល}\\ \text{គេបាន } \overline{C}'(x) &= -\frac{480}{x^2}-0.1\\ \text{ចំពោះ } x=30 \implies \overline{C}'(30) &= -\frac{480}{30^2}-0.1=-\frac{480}{900}-0.1\\ &= -\frac{8}{15}-0.1\approx -0.5333-0.1=-0.6333 \text{ ពាន់រៀល}\\ \text{ចំពោះ } x=50 \implies \overline{C}'(50) &= -\frac{480}{50^2}-0.1=-\frac{480}{2500}-0.1\\ &= -0.192-0.1=-0.292 \text{ ពាន់រៀល}\\ \text{ចំពោះ } x=70 \implies \overline{C}'(70) &= -\frac{480}{70^2}-0.1=-\frac{480}{4900}-0.1\\ &= -\frac{24}{245}-0.1\approx -0.0980-0.1=-0.1980 \text{ ពាន់រៀល}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ប្រាក់ចំណាយមធ្យមម៉ាជីណាលគឺ ៖

- កាលណា $x=30$ គឺ $\overline{C}'(30)\approx -0.6333$ ពាន់រៀល (ថយចុះប្រហែល 633.3 រៀល/គ្រឿង)
- កាលណា $x=50$ គឺ $\overline{C}'(50)=-0.292$ ពាន់រៀល (ថយចុះ 292 រៀល/គ្រឿង)
- កាលណា $x=70$ គឺ $\overline{C}'(70)\approx -0.1980$ ពាន់រៀល (ថយចុះប្រហែល 198 រៀល/គ្រឿង)

13 សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិកមួយ បានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x)=1080+42x+0.3x^2$ ពាន់រៀល ។ កំណត់បរិមាណសម្ភារៈដែលសហគ្រាសត្រូវផលិត

ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយមធ្យមមានកម្រិតអប្បបរមា បើ $0 \leq x \leq 90$ ។

$$\text{អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម ៖ } \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1080 + 42x + 0.3x^2}{x}$$
$$= \frac{1080}{x} + 42 + 0.3x \quad (x > 0)$$
$$\text{គេបាន ដេរីវេនៃប្រាក់ចំណាយមធ្យម ៖ } \overline{C}'(x) = -\frac{1080}{x^2} + 0.3$$
$$\text{ឱ្យ } \overline{C}'(x) = 0 \implies -\frac{1080}{x^2} + 0.3 = 0$$
$$\frac{1080}{x^2} = 0.3$$
$$x^2 = \frac{1080}{0.3} = 3600$$
$$x = \sqrt{3600} = 60 \quad (\text{ព្រោះ } 0 \leq x \leq 90)$$

ពិនិត្យដេរីវេទីពីរ ៖

$$\overline{C}''(x) = \frac{2160}{x^3}$$
$$\overline{C}''(60) = \frac{2160}{60^3} > 0$$

ដោយសារ $\overline{C}''(60) > 0$ នោះអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម $\overline{C}(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 60$ គ្រឿង ។

ដូច្នេះ សហគ្រាសត្រូវផលិតសម្ភារៈចំនួន 60 គ្រឿង ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយមធ្យមមានកម្រិតអប្បបរមា (ដែលប្រាក់ចំណាយមធ្យមអប្បបរមានោះគឺ $\overline{C}(60) = 78$ ពាន់រៀល/គ្រឿង) ។

14 ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = x^2 + 20x + 1050$ ពាន់រៀល ហើយក្រុមហ៊ុនលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 140x - 0.5x^2$ ពាន់រៀល ។ កំណត់កម្រិតបរិមាណសម្ភារៈដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវផលិតនិងលក់ដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា បើ $0 \leq x \leq 70$ ។

$$\text{អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ ៖ } P(x) = R(x) - C(x)$$
$$= (140x - 0.5x^2) - (x^2 + 20x + 1050)$$
$$= 140x - 0.5x^2 - x^2 - 20x - 1050$$
$$= -1.5x^2 + 120x - 1050 \text{ ពាន់រៀល}$$

គេបាន ៖ $P'(x) = -3x + 120$

ឱ្យ $P'(x) = 0 \implies -3x + 120 = 0$

$3x = 120 \implies x = 40 \quad (\text{ព្រោះ } 0 \leq x \leq 70) P''(x) \quad = -3 < 0$

ដោយសារ $P''(40) = -3 < 0$ នោះអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 40$