វិទ្យាល័យ ព្រែកលៀប
PREK LEAP HIGH SCHOOL

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

Continuity of Functions

សម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ និងសង្គម

ថ្នាក់ទី 12

រួមមាន

- ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច
- លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់
- ភាពជាប់លើចន្លោះ
- ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់
- អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់
- ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

2027

អារម្ភកថា

សួស្តីប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីរាប់អាន!

នេះជាសៀវភៅ **ភាពជាប់នៃអនុគមន៍** ថ្នាក់ទី១២ ដែលរៀបរាប់អំពីមេរៀនសង្ខេបស្របតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា រួមជាមួយលំហាត់សម្រាប់អនុវត្តន៍នៃមេរៀននីមួយៗតាមលំដាប់លំដោយ។

គោលបំណងចម្បងនៃការចងក្រងសៀវភៅនេះ គឺដើម្បីជំនួយដល់ការរៀនរបស់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងការបង្រៀនរបស់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូផងដែរ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងក្លាយជាឯកសារដ៏ល្អជាទីគាប់ចិត្តសម្រាប់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូប។ តែទោះបីជាយើងខ្ញុំព្យាយាមសរសេរផ្ចិតផ្ចង់យ៉ាងណាក្តី ក៏នៅមានចំណុចខ្វះខាតកើតមានឡើងផងដែរ ។ អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំសូមអភ័យទោស និងរង់ចាំនូវការរិះគន់ កែលម្អក្នុងន័យស្ថាបនាពីសំណាក់ សិស្សានុសិស្ស លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ក៏ដូចជាប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយពេញចិត្ត។

ជាចុងក្រោយខ្ញុំសូមគោរពជូនពរ លោកអ្នកមានគុណរួមជាមួយសិស្សានុសិស្ស ទាំងអស់ជួបតែសំណាងល្អ សុខភាពល្អ និងរកទទួលទានមានបានជោគជ័យគ្រប់ភារៈកិច្ចការងារ។

ថ្ងៃ ចន្ទ ទី២៤ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០២៦

សេង ធារ៉ុន

រៀបរៀង និងនាយអត្ថបទដោយ

លោកគ្រូ សេង ធារ៉ុន

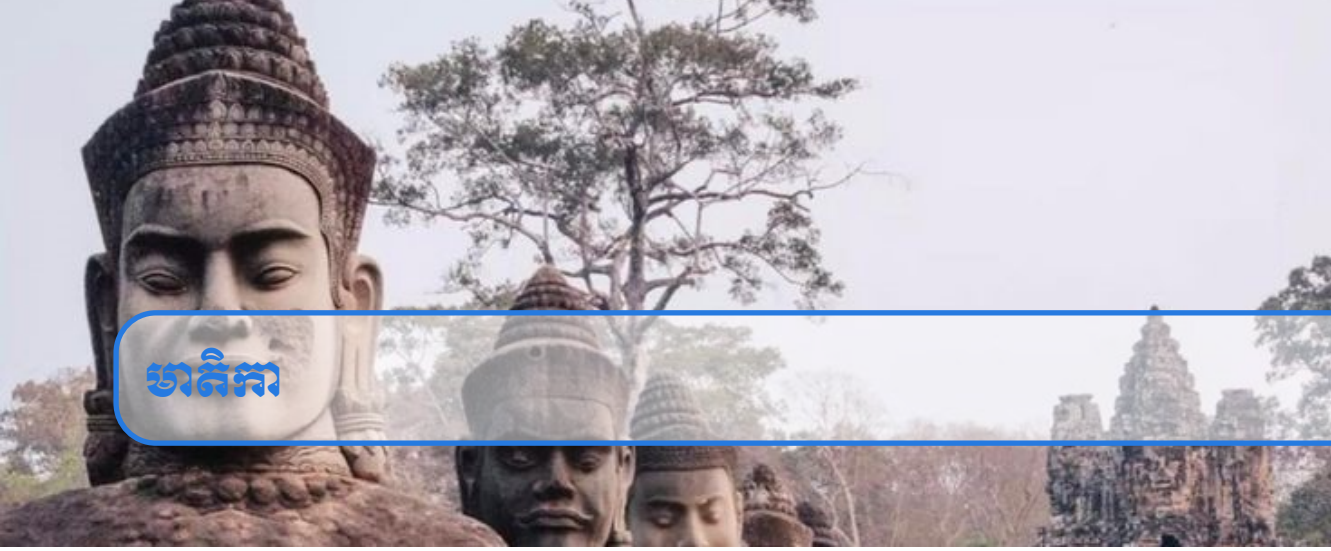
រចនាក្រុមដោយ

លោកគ្រូ សេង ធារ៉ុន

គណកម្មការត្រួតពិនិត្យ



NGSPL Teams



មាតិកា

១	ភាពជាប់នៃអនុគមន៍	៧
១.១	ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច	៧
១.២	លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់	៩
១.៣	ភាពជាប់លើចន្លោះ	១១
១.៤	ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់	១៣
១.៥	អនុវត្តន៍ : អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់	១៥
១.៥.១	ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល	១៧



ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១.១ ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} x^2+7 & \text{បើ } x \geq 7 \\ x+7 & \text{បើ } x < 7 \end{cases}$ ។

គេបាន $f(0) = 0^2 + 7 = 7$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+7) = 0^2+7 = 7$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+7) = 0+7 = 7$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 7 = f(0)$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 7 = f(0)$ ។ គេថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

ចាំទូទៅ

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម ៖

i. f កំណត់ចំពោះ $x = c$

ii. f មានលីមីតកាលណា $x \to c$

iii. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ ។

សម្គាល់ បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ចំណុច $x = c$ គេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = c$ ។

លំហាត់គំរូ 1

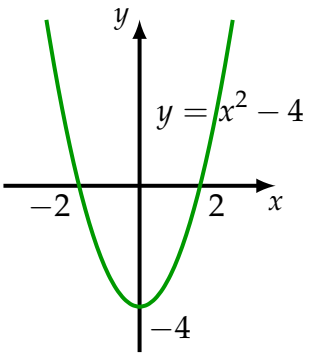
a. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^2 - 4$ ។ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ឬទេ ?

b. អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{បើ } x < 0 \\ 1 & \text{បើ } x > 0 \end{cases}$ ។ តើ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

c. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{បើ } x \neq 2 \\ 4 & \text{បើ } x = 2 \end{cases}$ ។ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ។

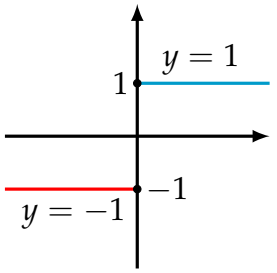
ដំណោះស្រាយ

a កំណត់ភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=2$



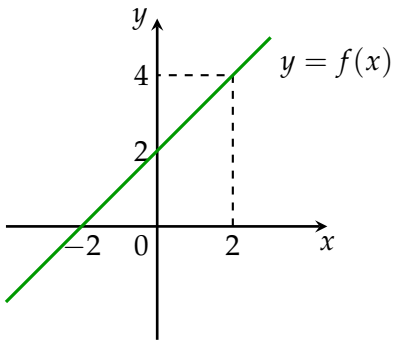
ត្រង់ $x=2$ នាំឱ្យ $f(2)=2^2-4=0$
ហើយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$
គេបាន $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

b កំណត់ភាពជាប់នៃ g ត្រង់ $x=0$



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ លីមីតឆ្វេង
មិនស្មើលីមីតស្តាំ អនុគមន៍ f គ្មានលីមីតត្រង់ $x=0$
ទេ ។ ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាច់ត្រង់ $x=0$ ។

c បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$



f កំណត់ត្រង់ $x=2$ ហើយ $f(2)=4$ ។

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4=f(2)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 2 ។

ប្រតិបត្តិ

a សង់ក្រាបនៃ $f(x)=\begin{cases}3+x & \text{បើ } x\le 1\\ 3-x & \text{បើ } x>1\end{cases}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f នៅត្រង់ $x=1$ ។

b សង់ក្រាបនៃ $g(x)=\begin{cases}\sin x & \text{បើ } x\ge 0\\ \frac{1}{2}x^2+x & \text{បើ } x<0\end{cases}$ ។ តើ g ជាប់នៅត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a f មិនជាប់ត្រង់ $x = 1$

b g ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

១.២ លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

ផ្អែកតាមលក្ខណៈនៃលីមីតនិងនិយមន័យភាពជាប់ គេបានលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់ដូចខាងក្រោម ៖

ជាទូទៅ

បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x = c$ នោះគេបាន ៖

i $f(x) + g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

ii $f(x) - g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

iii $f(x) \cdot g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

iv $kf(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ (ដែល k ជាចំនួនថេរ)

v $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាប់ត្រង់ $x = c$ ដែល $g(c) \neq 0$ ។

សម្គាល់

ដោយប្រើលក្ខណៈនៃលីមីតនិងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់គេបាន

- អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។
- អនុគមន៍ពហុធា P ដែលមានដឺក្រេ n : $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$
  ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ជាចំនួនថេរនិង $a_0 \neq 0$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

  តាមទ្រឹស្តីបទនៃលីមីតពហុធាបង្ហាញថា បើ c ជាចំនួនពិត ។ គេបាន

  $$\lim_{x\to c} P(x) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \cdots + a_n = P(c)$$

  ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to c} P(x) = P(c)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ពហុធាជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។
- អនុគមន៍សនិទាន $R(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$; $q(x) \neq 0$ ។

  ដោយ p និង q ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់ត្រង់ c

  ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to c} P(x) = P(c)$ និង $\lim\limits_{x\to c} q(x) = q(c)$

  គេបាន $\lim\limits_{x\to c} R(x) = \dfrac{p(c)}{q(c)}$ ។ ដូច្នេះ អនុគមន៍សនិទានជាប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $q(x) \neq 0$ ។

- អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់ ។
- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $y=\sin x,\ y=\cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។
- អនុគមន៍ $y=\tan x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង $x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ ។
- អនុគមន៍ $y=\cot x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 រកតម្លៃនៃ x ដែលនាំឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍ជាប់ ៖

a $f(x)=x^{14}+20x^4$

b $g(x)=(7x^2+8)(3-x)$

c $h(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$ ។

ដំណោះស្រាយ

a ដោយ x^{14} និង $20x^4$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x នោះតាមលក្ខណៈ ៖ 1

គេបាន $f(x)=x^{14}+20x^4$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

b ដោយ $(7x^2+8)$ និង $(3-x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់គ្រប់តម្លៃ x នោះ

តាមលក្ខណៈ ៖ 3 គេបាន $g(x)=(7x^2+8)(3-x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

c គេបាន $h(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}=\dfrac{x+3}{(x-5)(x+2)}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន ។

តាមលក្ខណៈ ៖ 5 ដោយ $y=x+3$ និង $y=(x-5)(x+2)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

ហើយ $(x-5)(x+2)=0$ សមមូល $x=5$ ឬ $x=-2$

អនុគមន៍ h ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លើកលែងតែ $x=5$ និង $x=-2$ ។

លំហាត់គំរូ 3 រកតម្លៃ a ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}3x-a & \text{បើ } x\leq 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{បើ } x>1\end{cases}$

ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=1$ នោះ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(3x-a)=3(1)-a=3-a$

ជួច្នេះ ៖

$$3-a=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1^+}(x-2)=1-2=-1$$

$3-a=-1$ នាំឱ្យ $a=4$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ x នៃដែនកំណត់របស់វា ។
   a. $f(x) = x^4\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$
   b. $g(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+3}$
2. កំណត់តម្លៃ a ដែលនាំឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

$$f(x) = \begin{cases} -x+a & \text{បើ } x<0 \\ x^2-1 & \text{បើ } x\geq 0 \end{cases}$$

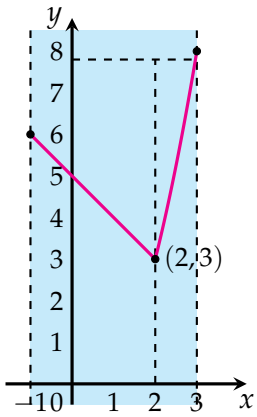
១.៣ ភាពជាប់លើចន្លោះ

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2}{x+5}$ ។ អនុគមន៍ f កំណត់កាលណា $x\neq -5$ ។

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D=(-\infty,-5)\cup(-5,+\infty)$ ។ f ជាអនុគមន៍សនិទាន f ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\in(-\infty,-5)$ និងគ្រប់ $x\in(-5,+\infty)$ ។ គេថាអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-\infty,-5)$ និងជាប់លើចន្លោះបើក $(-5,+\infty)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases} 5-x & \text{បើ } -1\leq x\leq 2 \\ x^2-1 & \text{បើ } 2<x\leq 3 \end{cases}$

គេមាន $5-x$ និង x^2-1 ជាអនុគមន៍ពហុធា ។
តាមលក្ខណៈខាងលើ $y=5-x$ ជាប់គ្រប់ $x\in(-1,2)$
ហើយ $y=x^2-1$ ជាប់គ្រប់ $x\in(2,3)$ ។



$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}(5-x) = 3 \quad \text{និង}$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-1) = 3$$

លីមីតទាំងពីរស្មើគ្នា ហើយ $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 3$ ។
ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

គេថា g ជាប់លើចន្លោះបើក $(-1,3)$ ហើយមាន

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (5-x) = g(-1) = 6$ និង

$\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2-1) = g(3) = 8$ គេថា g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[-1,3]$ ៖

ដាទូទៅ

i អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។

ii អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ ។
(អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a ខាងស្តាំ ជាប់ត្រង់ b ខាងឆ្វេង)

លំហាត់គំរូ 1 សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ លើចន្លោះ $(-2,3)$ និង $[-2,3]$ ។

ដំណោះស្រាយ គេបានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន នាំឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លើកលែង $x=3$ ។

ដូចនេះ គេថាអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-2,3)$ ប៉ុន្តែមិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[-2,3]$ ទេ ព្រោះអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=3$ ។

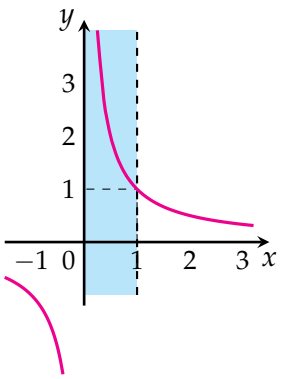
លំហាត់គំរូ 2 សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងបីខាងក្រោម រួចបញ្ជាក់ភាពជាប់លើចន្លោះដែលឱ្យ ៖

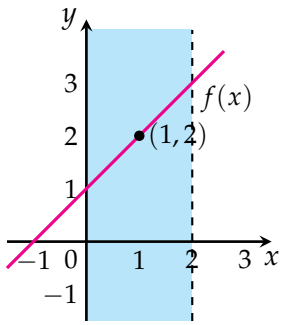
a $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(0,1)$

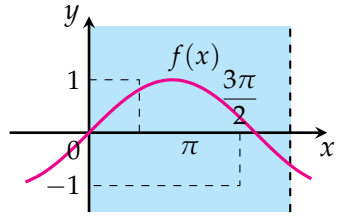
b $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $(0,2)$

c $f(x) = \sin x$, $[0,2\pi]$

ដំណោះស្រាយ







a ដោយ f ជាអនុគមន៍សនិទាន មានភាគបែងខុសពី 0 ក្នុងចន្លោះបើក $(0,1)$
ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(0,1)$ ៖

b ដោយ f មិនកំណត់ត្រង់ $x=1$ នោះអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x=1$ ៖
ដូចនេះ អនុគមន៍មិនជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0,2)$ ៖

c ដោយអនុគមន៍ $y=\sin x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតនោះ តាមលក្ខណៈនៃ
ភាពជាប់គេថាអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(0,2\pi)$ ៖

ប្រតិបត្តិ

គេ មាន អនុគមន៍ f កំណត់ ដោយ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$ ។ តើ f ជា អនុគមន៍ ជាប់ លើ ចន្លោះ $(-3,2)$, $(-3,2]$ ឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(-3,2)$ និង $(-3,2]$ ៖
អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$ មានន័យកាលណា $\dfrac{2-x}{3+x}\geq 0$ និង $3+x\neq 0$
នាំឱ្យដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=(-3,2]$ ៖

- ភាពជាប់លើចន្លោះបើក $(-3,2)$ ៖
  ចំពោះគ្រប់ $x\in(-3,2)$ គេបាន $\dfrac{2-x}{3+x}>0$ ។ ដោយអនុគមន៍សនិទាន $g(x)=\dfrac{2-x}{3+x}$ ជាប់ និងមានតម្លៃវិជ្ជមានលើចន្លោះ $(-3,2)$ នាំឱ្យអនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x)=\sqrt{g(x)}$ ជាប់លើចន្លោះបើក $(-3,2)$ ៖
- ភាពជាប់លើចន្លោះ $(-3,2]$ ៖
  អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-3,2)$ ហើយត្រង់ $x=2$ គេបាន $f(2)=\sqrt{\dfrac{2-2}{3+2}}=0$
  និងមានលីមីតខាងឆ្វេង

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{2-x}{3+x}}=0=f(2)$$

  នាំឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ ខាងឆ្វេង ៖

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(-3,2)$ និង $(-3,2]$ ៖

១.៤ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ឧទាហរណ៍ : គេមាន $h(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ។
តាង $f(x)=\cos x$ និង $g(x)=x+\dfrac{\pi}{3}$ ។ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $g(0)=\dfrac{\pi}{3}$ ។ ដូចនេះ $h=f\circ g$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ជាទូទៅ

បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ c និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f\circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ c ។

លំហាត់គំរូ 1 សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $h(x)=\left|\dfrac{x\sin x}{x^2+2}\right|$ ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ តាង $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+2}$ ជាអនុគមន៍សនិទានជាប់ត្រង់ $x=0$ ហើយនិង $g(x)=|x|$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $h=(f\circ g)(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមាន $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}$ ។ តើអនុគមន៍ f ជាប់នៅលើចន្លោះណាខ្លះ ?

ដំណោះស្រាយ តាង $g(x)=\sqrt{x}$ មានន័យថាចំពោះ $x\geq 0$ និង $h(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$
ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ ។ បើ $g(x)=\sqrt{x}$
ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ នោះនាំឱ្យ $f(x)$ ជាប់ចំពោះ $x\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to -4^-}\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}=0=f(-4)$
នាំឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់នៅលើចន្លោះ $x\in(-\infty,-4]\cup(4,+\infty)$ ។

ប្រតិបត្តិ

ប្រតិបត្តិ កំណត់តម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់ ៖

a. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

b. $g(x)=|x^2-1|$

c. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x-2}}$

ចម្លើយ

a. $-1\leq x\leq 1$

b. $x\in\mathbb{R}$

c. $x\in(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a. កំណត់តម្លៃ x ឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ជាប់
តាង $u(x)=1-x^2$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ហើយអនុគមន៍ឫសការេជាប់កាលណា

$u(x) \geq 0$

គេបាន $1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$

ដូចនេះ តម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ជាប់គឺ $-1 \leq x \leq 1$ (ឬ $x \in [-1, 1]$)៖

b កំណត់តម្លៃ x ឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = |x^2 - 1|$ ជាប់

តាង $h(x) = x^2 - 1$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ហើយអនុគមន៍តម្លៃដាច់ខាត $u(t) = |t|$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍បណ្តាក់ $g(x) = (u \circ h)(x) = |x^2 - 1|$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ តម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ជាប់គឺ $x \in \mathbb{R}$៖

c កំណត់តម្លៃ x ឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x-2}}$ ជាប់

អនុគមន៍ f ជាប់កាលណា $\dfrac{2x}{x-2} \geq 0$ និង $x - 2 \neq 0$

សិក្សាសញ្ញានៃកន្សោម $\dfrac{2x}{x-2}$ ៖

- $2x = 0 \iff x = 0$
- $x - 2 = 0 \iff x = 2$

គេបាន $\dfrac{2x}{x-2} \geq 0$ កាលណា $x \leq 0$ ឬ $x > 2$

ដូចនេះ តម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ជាប់គឺ $x \in (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ ៖

១.៥ អនុវត្តន៍ : អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ៖ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ឬទេ ?

គេសង្កេតឃើញថា $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

ប៉ុន្តែ f មិនកំណត់ត្រង់ $x = 1$ ទេ នាំឱ្យអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x = 1$ ទេ ៖

ដូច្នេះ បើគេយក g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{បើ } x \neq 1 \\ 2 & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$

គេថា g ជាបន្តាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ 1 ៖

ឧទាហរណ៍ 2 : គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ ៖ តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់ត្រង់ 0 ឬទេ ?

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$ ៖ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D = \mathbb{R} - \{0\}$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{2}{4} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \dfrac{2}{4} \times 1 \times$

$1 = \frac{1}{2}$ បើគេយក g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$ នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ៖ គេថា g ជាបន្តាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ ០ ។

ដាទូទៅ

បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ នោះអនុគមន៍បន្តាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = a$ កំណត់ដោយ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq a \\ \ell & \text{បើ } x = a \end{cases}$$

ប្រតិបត្តិ

a. កំណត់អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់នៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = 2$ ដែល $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

b. កំណត់អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់នៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = 0$ ដែល $f(x) = \frac{e^{3x}-1}{x}$ ៖

ចម្លើយប្រតិបត្តិ

a. $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq 2 \\ 0 & \text{បើ } x = 2 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq 0 \\ 3 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$

a. កំណត់អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 2$

គណនាលីមីតត្រង់ $x = 2$ ៖

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0$$

នាំឱ្យ $\ell = 0$ ៖

ដូចនេះ អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 2$ គឺ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq 2 \\ 0 & \text{បើ } x = 2 \end{cases}$$

b កំណត់អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$

គណនាលីមីតត្រង់ $x=0$ ៖

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3(1) = 3$$

នាំឱ្យ $\ell = 3$ ៖

ដូចនេះ អនុគមន៍បន្តាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ គឺ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq 0 \\ 3 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

១.៥.១ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ឧទាហរណ៍ 1 : បូជាមានកម្ពស់ 1.30 m នៅពេលខួបកំណើតគម្រប់អាយុ 13 ឆ្នាំ និងមានកម្ពស់ 1.50 m នៅពេលខួបកំណើតគម្រប់អាយុ 14 ឆ្នាំ ៖

ដូច្នេះ ត្រូវមានរយៈពេល t មួយ $13 < t < 14$ ដែលកម្ពស់ស្មើ h ហើយ $1.30\text{ m} < h < 1.50\text{ m}$ ៖

ឧទាហរណ៍ 2 : គេមាន $f(x) = x^2 - 2$ ៖ លើចន្លោះ $[0,2]$ f ជាប់និងកើន ៖

គេបាន $f(0) = -2$ និង $f(2) = 2$ ៖

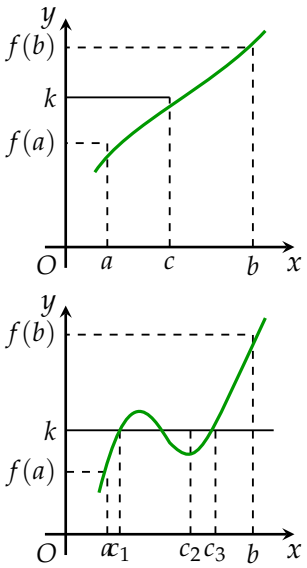
យក k, $f(0) \leq k \leq f(2)$ សមីការ $x^2 - 2 = k$ សរសេរជា $x^2 = k+2$ ៖ ដោយ $-2 \leq k \leq 2$ នោះ $k+2 \geq 0$ ៖ ដូច្នេះ លើចន្លោះ $[0,2]$ គេបាន $x = \sqrt{k+2}$ ៖ គ្រប់ k ដែល $f(0) \leq k \leq f(2)$ សមីការ $x^2 - 2 = k$ មានឫស $x = c$ មួយដែល $0 \leq c \leq 2$ ៖

ជាទូទៅ

បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ (a,b) ដែល $f(c) = k$ ៖

ពិបាក : បើអនុគមន៍ f ជាប់ ហើយកើនដាច់ខាត ឬចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ (a,b)

សម្រាយបញ្ជាក់ :



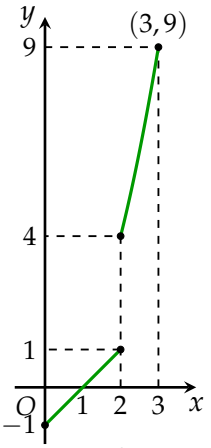
អនុគមន៍ f ជាប់និងកើនដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ៖ f កើនដាច់ខាតមានន័យថា បើ x និង x' ជាពីរចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ដែល $x < x'$ នោះ $f(x) < f(x')$ ៖ ឱ្យចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$, $f(a) < k < f(b)$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់តាមទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាមានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c) = k$ ៖ ឧបមាថាមានចំនួនមួយទៀត c' ខុសពី c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c') = k$ នោះ $f(c) = f(c')$ ជាករណីផ្ទុយពីសមតិកម្មដែលថា f កើនដាច់ខាត ៖ ដូច្នេះមានចំនួន c មួយគត់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c) = k$ គឺសមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ ៖

គេឃើញថាចំពោះតម្លៃ k អាចមានតម្លៃ c ច្រើនជាងមួយ ៖ ទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួន c មួយ ប៉ុន្តែមិនមែនតែមួយគត់ទេ ៖ បង្ហាញថាមានតម្លៃ c បី c_1, c_2, c_3 ៖

លំហាត់គំរូ 1 គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{បើ } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{បើ } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

តើគ្រប់ $-1 \leq k \leq 9$ មាន c ដែល $f(c) = k$ ឬទេ ?



ដំណោះស្រាយ តាមក្រាបនៃអនុគមន៍បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ 2 ដែលស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[0,3]$ ៖
គេបាន $f(0) = -1$ និង $f(3) = 9$
បើ k ជាចំនួនណាមួយនៅចន្លោះ 1 និង 4 នោះគ្មានតម្លៃ c ដែល $f(c) = k$ ព្រោះគ្មានតម្លៃអនុគមន៍ចន្លោះ 1 និង 4 ៖

សម្គាល់ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលអាចប្រើបានចំពោះ $k = 0$ ជាពិសេសបើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$, $f(a)$ និង $f(b)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នានោះ $f(a) \cdot f(b) < 0$ មានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c) = 0$

លំហាត់គំរូ 2 ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ចូរបង្ហាញថាចំពោះអនុគមន៍ពហុធា $f(x) = x^3 + 2x - 1$ មានចំនួនពិត c នៅក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ដែល $f(c) = 0$ ៖

ដំណោះស្រាយ ដោយ $f(0)=0^2+2(0)-1=-1$ និង $f(1)=1^2+2(1)-1=2$
គេបាន $f(0)\cdot f(1)=(-1)(2)=-2<0$ ៖
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលដោយ $f(0)\cdot f(1)<0$ មានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចនៅក្នុងចន្លោះបិទ $[0,1]$ ដែល $f(c)=0$ ៖

លំហាត់គំរូ 3 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=4+3x-x^2$ ដែល $2\leq x\leq 5$ ៖ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលរកតម្លៃ c បើ $k=1$ ៖

ដំណោះស្រាយ គេបាន $f(2)=6\,,f(5)=-6$ ៖ ដើម្បីរក c គេមាន $f(c)=k=1$ ៖

$$4+3c-c^2=1 \iff c^2-3c-3=0 \implies c=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\,,\ c\in[2,5]$$

នោះ $c=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ ៖

ប្រតិបត្តិ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថាសមីការ $x^5-3x-1=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅក្នុងចន្លោះ $(1,2)$ ៖

ដំណោះស្រាយ

តាងអនុគមន៍ $f(x)=x^5-3x-1$ ៖

- ដោយ f ជាអនុគមន៍ពហុធា នាំឱ្យ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[1,2]$ ៖
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងចន្លោះ ៖

$$f(1)=1^5-3(1)-1=1-3-1=-3<0$$

$$f(2)=2^5-3(2)-1=32-6-1=25>0$$

គេបាន $f(1)\cdot f(2)=(-3)(25)=-75<0$ ៖

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ដោយ $f(1)\cdot f(2)<0$ នាំឱ្យមានចំនួនពិត $c\in(1,2)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c)=0 \iff c^5-3c-1=0$ ៖
ដូចនេះ សមីការ $x^5-3x-1=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅក្នុងចន្លោះ $(1,2)$ ៖

ក្រមួលលំហាត់បន្ថែម

1 បញ្ជាក់ថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែលឱ្យឬទេ ?

a $f(x)=5x^2-6x+1\,,\ x=2$

b $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}\,,\ x=1$

c $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $x=4$

d $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x=-2$

e $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{បើ } x\leq 2 \\ 2 & \text{បើ } x>2 \end{cases}$, $x=2$

f $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x<-1 \\ x^2-3 & \text{បើ } x\geq -1 \end{cases}$, $x=-1$ ។

2 រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់ ។

a $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

c $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

d $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

e $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x\leq 2 \\ 3-x & \text{បើ } x>2 \end{cases}$

f $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x\leq 2 \\ 3-x & \text{បើ } x>2 \end{cases}$

g $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{បើ } x\leq -1 \\ 2 & \text{បើ } -1<x<1 \\ -x+3 & \text{បើ } x>1 \end{cases}$ ។

3 សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ ។

a $f(x)=\dfrac{x-4}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

b $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[0,1]$

c $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x<3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\geq 3 \end{cases}$ លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0,3]$ ។

4 រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

a $f(x)=\begin{cases} Ax-3 & \text{បើ } x\le 3 \\ 3-x+2x^2 & \text{បើ } x>3 \end{cases}$

b $f(x)=\begin{cases} 1-3x & \text{បើ } x<4 \\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x\ge 4 \end{cases}$ ។

5 រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1 \\ B & \text{បើ } x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1 \end{cases}$$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

6 ក្នុងបណ្តាអនុគមន៍ខាងក្រោម តើ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ a ឬទេ ?

a $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $a=3$

b $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$, $a=2$

c $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $a=1$

d $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}$, $a=4$ ។

7 ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ ៖

a $f(x)=x^2+x-1$, $[0,5]$, $f(c)=11$

b $f(x)=x^2-6x+8$, $[0,3]$, $f(c)=0$

c $f(x)=x^3-x^2+x-2$, $[0,3]$, $f(c)=4$

d $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$, $f(c)=6$ ។

8 គេឱ្យអនុគមន៍និងចន្លោះបិទដូចខាងក្រោម ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k ៖

a $f(x)=2+x-x^2$, $[0,3]$, $k=1$

b $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $[-4.5,3]$, $k=3$ ។

9 **a** ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

b ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(x^n-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0,1)$ ។

10 គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ដែល

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \sqrt{2} & \text{បើ } x=0\end{cases}$$ តើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

11 កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ $\mathbb{R}$

a $f(x)=\begin{cases}-2x+a & \text{បើ } x\leq 1\\ \log_3 x & \text{បើ } x>1\end{cases}$

b $f(x)=\begin{cases}a & \text{បើ } x\leq 0\\ x\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } x>0\end{cases}$ ។

12 ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការខាងក្រោមមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះដែលឱ្យ

a $\sin x=x-1,\quad (0,\pi)$

b $20\log_{10}x-x=0,\quad (1,10)$ ។

13 គេឱ្យសមីការដឺក្រេទី 2 $ax^2+bx+c=0,\quad (a\neq 0)$ មានលេខមេគុណ a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a+3b+6c=0$ ។ បង្ហាញថា សមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ។

14 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ បើ $x\neq 0,\quad f(x)=\frac{|x|+2x^2}{x}$ បើ $x=0,\quad f(0)=1$

a តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

b សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ចម្លើយកម្រងលំហាត់បន្ថែម

1 បញ្ជាក់ថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែលឱ្យឬទេ ?

a $f(x)=5x^2-6x+1,\ x=2$

- $f(2)=5(2)^2-6(2)+1=20-12+1=9$
- $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-6x+1)=5(2)^2-6(2)+1=9$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=9$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

b $f(x)=\frac{x+2}{x-1},\ x=1$

- $f(1)=\frac{1+2}{1-1}=\frac{3}{0}$ (មិនកំណត់)

ដោយ $f(1)$ មិនកំណត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាច់ត្រង់ $x=1$ ។

c $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $x=4$

- $f(4)=\dfrac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ (មិនកំណត់)

ដោយ $f(4)$ មិនកំណត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាច់ត្រង់ $x=4$ ។

d $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x=-2$

- $f(-2)=\dfrac{|-2+2|}{-2+2}=\dfrac{0}{0}$ (មិនកំណត់)

ដោយ $f(-2)$ មិនកំណត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាច់ត្រង់ $x=-2$ ។

e $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{បើ } x\leq 2 \\ 2 & \text{បើ } x>2 \end{cases}$, $x=2$

- $f(2)=2+1=3$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2)=2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ នាំឱ្យគ្មាន $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាច់ត្រង់ $x=2$ ។

f $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x<-1 \\ x^2-3 & \text{បើ } x\geq -1 \end{cases}$, $x=-1$

- $f(-1)=(-1)^2-3=1-3=-2$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-1)=-1-1=-2$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-3)=(-1)^2-3=-2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-2\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2=f(-1)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=-1$ ។

2 រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់ ។

a $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$

អនុគមន៍សនិទានជាប់គ្រប់តម្លៃ x ណាដែលភាគបែងខុសពី 0 ។

ឱ្យ $2x-6=0 \iff 2x=6 \iff x=3$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\neq 3$ (ឬ $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$) ។

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

ឱ្យ $x^2+4x-5=0 \iff (x+5)(x-1)=0 \iff x=-5$ ឬ $x=1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \neq -5$ និង $x \neq 1$ (ឬ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5,1\}$)។

c $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

ឱ្យ $x^2-x-2=0 \iff (x-2)(x+1)=0 \iff x=2$ ឬ $x=-1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \neq -1$ និង $x \neq 2$ (ឬ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$)។

d $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

ឱ្យ $x^2-3x-18=0 \iff (x-6)(x+3)=0 \iff x=6$ ឬ $x=-3$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \neq -3$ និង $x \neq 6$ (ឬ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,6\}$)។

e $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x \leq 2 \\ 3-x & \text{បើ } x>2 \end{cases}$

- ចំពោះ $x<2$ និង $x>2$៖ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់គ្រប់ $x \neq 2$។
- ពិនិត្យភាពជាប់ត្រង់ $x=2$៖
  - $f(2)=\dfrac{2}{2}+1=2$
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=2$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3-x)=3-2=1$

  ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ នាំឱ្យគ្មាន $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ គឺ $f(x)$ ជាច់ត្រង់ $x=2$។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \neq 2$ (ឬ $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$)។

f $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x \leq 2 \\ 3-x & \text{បើ } x>2 \end{cases}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \neq 2$ (ឬ $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$)។

g $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{បើ } x \leq -1 \\ 2 & \text{បើ } -1<x<1 \\ -x+3 & \text{បើ } x>1 \end{cases}$

- ចំពោះ $x<-1$, $-1<x<1$, និង $x>1$៖ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះទាំងនេះ។
- ពិនិត្យភាពជាប់ត្រង់ $x=-1$៖ $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2 \implies \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=2$ (ជាប់ត្រង់ $x=-1$)។
- ពិនិត្យភាពជាប់ត្រង់ $x=1$៖ $f(1)$ មិនកំណត់ នាំឱ្យអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x=1$។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \neq 1$ (ឬ $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)។

3 សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ ។

a $f(x)=\dfrac{x-4}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

- លើចន្លោះ $(0,1)$៖ អនុគមន៍ $f(x)$ មានកំណត់កាលណា $4+x\neq 0 \iff x\neq -4$។
  ដោយគ្រប់តម្លៃ $x\in(0,1)$ សុទ្ធតែខុសពី -4 នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សនិទានដែលមានកំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $(0,1)$។
- លើចន្លោះ $[-4,1]$៖ ត្រង់ $x=-4\in[-4,1]$ នាំឱ្យ $f(-4)=\dfrac{-4-4}{4+(-4)}=\dfrac{-8}{0}$ (មិនកំណត់)។
  ដោយ $f(-4)$ មិនកំណត់ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មិនជាប់ (ដាច់) លើចន្លោះ $[-4,1]$។

b $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[0,1]$

- លើចន្លោះ $(0,1)$៖ អនុគមន៍ $f(x)$ មានកំណត់កាលណា $x\neq 0$។
  ដោយគ្រប់តម្លៃ $x\in(0,1)$ គឺ $x\neq 0$ នាំឱ្យ $f(x)$ មានកំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $(0,1)$។
- លើចន្លោះ $[0,1]$៖ ត្រង់ $x=0\in[0,1]$ នាំឱ្យ $f(0)=0\left(1+\dfrac{1}{0}\right)$ (មិនកំណត់ ដោយសារមានប្រមាណវិធីចែកនឹង 0)។
  ដោយ $f(0)$ មិនកំណត់ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មិនជាប់ លើចន្លោះ $[0,1]$។

c $f(x)=\begin{cases}x(x-1) & \text{បើ } x<3\\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\geq 3\end{cases}$ លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0,3]$

- លើចន្លោះ $(0,3)$៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,3)$ គឺ $x<3$ នាំឱ្យ $f(x)=x(x-1)=x^2-x$ ជាអនុគមន៍ពហុធា។
  ដូចនេះ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $(0,3)$។
- លើចន្លោះ $[0,3]$៖ ត្រង់ $x=3\in[0,3]$ នាំឱ្យ $f(3)=\dfrac{3^2-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ (មិនកំណត់)។
  ដោយ $f(3)$ មិនកំណត់ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មិនជាប់ លើចន្លោះ $[0,3]$។

4 រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

a $f(x)=\begin{cases}Ax-3 & \text{បើ } x\leq 3\\ 3-x+2x^2 & \text{បើ } x>3\end{cases}$

- ចំពោះ $x<3$ និង $x>3$៖ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\neq 3$។
- ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែវាជាប់ត្រង់ $x=3$៖
  - $f(3)=A(3)-3=3A-3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(Ax-3)=3A-3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3-x+2x^2)=3-3+2(3)^2=18$
- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=3 \iff \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=f(3)$

$$\implies 3A-3=18 \iff 3A=21 \iff A=7$$

ដូចនេះ $A=7$។

b $f(x)=\begin{cases}1-3x & \text{បើ } x<4\\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x\geq 4\end{cases}$

- ចំពោះ $x<4$ និង $x>4$៖ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\neq 4$។
- ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែវាជាប់ត្រង់ $x=4$៖
  - $f(4)=A(4)^2+2(4)-3=16A+5$
  - $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(1-3x)=1-3(4)=-11$
  - $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(Ax^2+2x-3)=16A+5$
- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=4 \iff \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$

$$\Longrightarrow 16A+5=-11 \iff 16A=-16 \iff A=-1$$

ដូចនេះ $A=-1$។

5 រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1\\ B & \text{បើ } x=1\\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1\end{cases} \quad \text{ជាប់គ្រប់តម្លៃ } x \text{ ។}$$

ចំពោះ $x<1$ និង $x>1$ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,1)$ និង $(1,+\infty)$ ជានិច្ច។
ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែវាជាប់ត្រង់ $x=1$ ដែរ។
លក្ខខណ្ឌភាពជាប់ត្រង់ $x=1$ គឺ៖

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

- $f(1)=B$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(Ax^2+5x-9)=A(1)^2+5(1)-9=A-4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)(A-2x)=(3-1)(A-2(1))=2(A-2)=2A-4$

តាមលក្ខខណ្ឌភាពជាប់ គេបាន៖

$$A-4=2A-4=B$$

- តាម $A-4=2A-4 \Longrightarrow 2A-A=-4+4 \Longrightarrow A=0$

- ជំនួស $A=0$ នាំឱ្យ $B=A-4=0-4=-4$

ដូចនេះ $A=0$ និង $B=-4$។

6 ក្នុងបណ្តាអនុគមន៍ខាងក្រោម តើ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ a ឬទេ ?

a $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $a=3$

- $f(3)=\dfrac{3^2-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ (មិនកំណត់)
- $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$

ដោយ $\lim\limits_{x\to3} f(x)=6$ (មានតម្លៃកំណត់) នាំឱ្យ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $a=3$។

អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់គឺ $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq3 \\ 6 & \text{បើ } x=3 \end{cases}$

b $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$, $a=2$

- $f(2)=\dfrac{2^2+3(2)-10}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ (មិនកំណត់)
- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+5)=7$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=7$ (មានតម្លៃកំណត់) នាំឱ្យ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $a=2$។

អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់គឺ $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq2 \\ 7 & \text{បើ } x=2 \end{cases}$

c $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $a=1$

- $f(1)=\dfrac{1^3-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ (មិនកំណត់)
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$ (មានតម្លៃកំណត់) នាំឱ្យ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $a=1$។

អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់គឺ $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq1 \\ 3 & \text{បើ } x=1 \end{cases}$

d $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}$, $a=4$

- ភាគបែងត្រង់ $x=4$ គឺ $4^2-3(4)+4=16-12+4=8\neq0$
- នាំឱ្យ $f(4)=\dfrac{4^2-16}{8}=\dfrac{0}{8}=0$ (មានកំណត់)
- $\lim\limits_{x\to4} f(x)=f(4)=0$

ដោយ $f(4)$ មានកំណត់ និង $\lim\limits_{x\to4} f(x)=f(4)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $a=4$ រួចជាស្រេច (មិនចាំបាច់ធ្វើបន្លាយតាមភាពជាប់ទេ)។

7 ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ ៖

a $f(x)=x^2+x-1,\quad [0,5],\quad f(c)=11$

- អនុគមន៍ $f(x)=x^2+x-1$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបទ $[0,5]$ ។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាងនៃចន្លោះ៖

$$f(0)=0^2+0-1=-1$$
$$f(5)=5^2+5-1=25+5-1=29$$

- ដោយ $f(0)=-1<11<29=f(5)$ គឺ $f(0)<11<f(5)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c\in(0,5)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c)=11$ ។
(រកតម្លៃ c៖ $c^2+c-1=11 \iff c^2+c-12=0 \iff (c+4)(c-3)=0 \implies c=3\in(0,5)$)

b $f(x)=x^2-6x+8,\quad [0,3],\quad f(c)=0$

- អនុគមន៍ $f(x)=x^2-6x+8$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបទ $[0,3]$ ។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាងនៃចន្លោះ៖

$$f(0)=0^2-6(0)+8=8$$
$$f(3)=3^2-6(3)+8=9-18+8=-1$$

- ដោយ $f(3)=-1<0<8=f(0)$ គឺ $f(3)<0<f(0)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c\in(0,3)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c)=0$ ។
(រកតម្លៃ c៖ $c^2-6c+8=0 \iff (c-2)(c-4)=0 \implies c=2\in(0,3)$)

c $f(x)=x^3-x^2+x-2,\quad [0,3],\quad f(c)=4$

- អនុគមន៍ $f(x)=x^3-x^2+x-2$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបទ $[0,3]$ ។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាងនៃចន្លោះ៖

$$f(0)=0^3-0^2+0-2=-2$$
$$f(3)=3^3-3^2+3-2=27-9+3-2=19$$

- ដោយ $f(0)=-2<4<19=f(3)$ គឺ $f(0)<4<f(3)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c\in(0,3)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c)=4$ ។
(រកតម្លៃ c៖ $c^3-c^2+c-2=4 \iff c^3-c^2+c-6=0 \iff (c-2)(c^2+c+3)=0 \implies c=2\in(0,3)$)

d $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$, $f(c)=6$

- អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ មានភាគបែងខុសពី 0 ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[\dfrac{5}{2},4\right]$ (ព្រោះ $x=1\notin\left[\dfrac{5}{2},4\right]$) ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបទ $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាងនៃចន្លោះ៖

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-1}=\frac{\frac{25}{4}+\frac{10}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{35}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{35}{6}\approx 5.83$$
$$f(4)=\frac{4^2+4}{4-1}=\frac{16+4}{3}=\frac{20}{3}\approx 6.67$$

- ដោយ $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{35}{6}<6<\dfrac{20}{3}=f(4)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c\in\left(\dfrac{5}{2},4\right)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c)=6$។

(រកតម្លៃ c៖ $\dfrac{c^2+c}{c-1}=6\iff c^2+c=6c-6\iff c^2-5c+6=0\iff (c-2)(c-3)=0\implies c=3\in\left(\dfrac{5}{2},4\right)$)

8 គេឱ្យអនុគមន៍និងចន្លោះបិទដូចខាងក្រោម។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k ៖

a $f(x)=2+x-x^2$, $[0,3]$, $k=1$

- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបទ $[0,3]$។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖ $f(0)=2$ និង $f(3)=-4$។
- ដោយ $f(3)=-4<1<2=f(0)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមាន $c\in(0,3)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c)=1$។
- រកតម្លៃ c៖

$$f(c)=1\iff 2+c-c^2=1\iff c^2-c-1=0\implies c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

- ដោយ $c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\in[0,3]$ និង $c=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\notin[0,3]$។

ដូចនេះ $c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$។

b $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $[-4.5,3]$, $k=3$

- អនុគមន៍ $f(x)$ មានកំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[-5,5]$ នាំឱ្យវាជាប់លើចន្លោះបទ $[-4.5,3]$។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖ $f(-4.5)=\sqrt{4.75}\approx 2.18$ និង $f(3)=4$។
- ដោយ $f(-4.5)\approx 2.18<3<4=f(3)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមាន $c\in$

$(-4.5, 3)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f(c) = 3$។

- រកតម្លៃ c៖

$$f(c) = 3 \iff \sqrt{25 - c^2} = 3 \iff 25 - c^2 = 9 \iff c^2 = 16 \implies c = \pm 4$$

- ដោយ $c = -4 \in [-4.5, 3]$ និង $c = 4 \notin [-4.5, 3]$។

ដូចនេះ $c = -4$។

9 **a** ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$៖

តាងអនុគមន៍ $g(x) = x \tan x - \cos x$

- អនុគមន៍ $g(x)$ ជាផលគុណ និងផលដកនៃអនុគមន៍ជាប់ ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបិទ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (ព្រោះ $\cos x \neq 0$ លើចន្លោះនេះ)។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖

$$g(0) = 0 \cdot \tan 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(1) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} > 0 \quad (\text{ព្រោះ } \pi > 2\sqrt{2})$$

- ដោយ $g(0) < 0 < g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ យ៉ាងហោចណាស់មួយដែល $g(c) = 0$។

ដូចនេះ សមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ។

b ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, 1)$៖

តាងអនុគមន៍ $f(x) = (x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1$ $(n \in \mathbb{N})$

- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាបន្សំនៃអនុគមន៍ពហុធា និងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបិទ $[0, 1]$ ។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖

$$f(0) = (0^n - 1)\cos 0 + \sqrt{2}\sin 0 - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$$

$$f(1) = (1^n - 1)\cos 1 + \sqrt{2}\sin 1 - 1 = \sqrt{2}\sin 1 - 1 > 0 \quad (\text{ព្រោះ } \sin 1 \approx 0.8415 =$$

- ដោយ $f(0) < 0 < f(1)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c \in (0, 1)$ យ៉ាងហោចណាស់មួយដែល $f(c) = 0$។

ដូចនេះ សមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, 1)$ ។

10 គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ដែល

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \sqrt{2} & \text{បើ } x=0\end{cases}$$ តើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

ដើម្បីពិនិត្យថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ យើងត្រូវគណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ $x=0$ ព្រមទាំងលីមីតខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំត្រង់ $x=0$៖

i តម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ $x=0$៖

$$f(0)=\sqrt{2}$$

ii សម្រួលកន្សោមអនុគមន៍ចំពោះ $x\neq 0$៖
តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ គេបាន៖

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}|\sin x|$$

ដូចនេះ ចំពោះ $x\neq 0$ គេបាន៖

$$f(x)=\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}$$

iii គណនាលីមីតខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ $(x\to 0^+)$៖
ចំពោះ $x>0$ ក្នុងចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ គេបាន $\sin x>0 \implies |\sin x|=\sin x$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(\sin x+\sqrt{2})=0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

iv គណនាលីមីតខាងឆ្វេងត្រង់ $x=0$ $(x\to 0^-)$៖
ចំពោះ $x<0$ ក្នុងចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ គេបាន $\sin x<0 \implies |\sin x|=-\sin x$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\sin x+\frac{-\sqrt{2}\sin x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^-}(\sin x-\sqrt{2})=0-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

v ប្រៀបធៀបលីមីតទាំងពីរ៖
ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{2}$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\sqrt{2}$
នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (គ្មាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$)។

សន្និដ្ឋាន៖ អនុគមន៍ $f(x)$ មិនជាប់ (ដាច់) ត្រង់ $x=0$ ទេ។

11 កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ $\mathbb{R}$

a $f(x)=\begin{cases}-2x+a & \text{បើ } x\le 1\\ \log_3 x & \text{បើ } x>1\end{cases}$

- ចំពោះ $x<1$ និង $x>1$ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,1)$ និង $(1,+\infty)$។
- ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែវាជាប់ត្រង់ $x=1$៖

$$f(1)=-2(1)+a=a-2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=a-2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\log_3(1)=0$$

- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=1 \iff \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$$\implies a-2=0 \iff a=2$$

ដូចនេះ $a=2$។

b $f(x)=\begin{cases}a & \text{បើ } x\le 0\\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x>0\end{cases}$

- ចំពោះ $x<0$ និង $x>0$ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និង $(0,+\infty)$។
- ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែវាជាប់ត្រង់ $x=0$៖

$$f(0)=a$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=a$$

- គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}$៖

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \implies -x\le x\sin\frac{1}{x}\le x \quad (x>0)$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ តាមទ្រឹស្តីបទអម គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0$។

- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0 \iff \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \implies a=0$

ដូចនេះ $a=0$។

12 ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការខាងក្រោមមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះដែលឱ្យ

a ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $\sin x = x - 1$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, \pi)$៖
តាងអនុគមន៍ $f(x) = \sin x - x + 1$

- អនុគមន៍ $f(x)$ ជាផលបូកនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបិទ $[0, \pi]$ ។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖

$$f(0) = \sin 0 - 0 + 1 = 1 > 0$$
$$f(\pi) = \sin \pi - \pi + 1 = 1 - \pi < 0 \quad (\text{ព្រោះ } \pi \approx 3.14)$$

- ដោយ $f(\pi) < 0 < f(0)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c \in (0, \pi)$ យ៉ាងហោចណាស់មួយដែល $f(c) = 0 \iff \sin c = c - 1$ ។

ដូចនេះ សមីការ $\sin x = x - 1$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, \pi)$ ។

b ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $20 \log_{10} x - x = 0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(1, 10)$៖
តាងអនុគមន៍ $g(x) = 20 \log_{10} x - x$

- អនុគមន៍ $g(x)$ ជាផលដកនៃអនុគមន៍ឡូការីត និងអនុគមន៍ពហុធា ដូច្នេះវាជាប់លើចន្លោះបិទ $[1, 10]$ ។
- គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖

$$g(1) = 20 \log_{10}(1) - 1 = 20(0) - 1 = -1 < 0$$
$$g(10) = 20 \log_{10}(10) - 10 = 20(1) - 10 = 10 > 0$$

- ដោយ $g(1) < 0 < g(10)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមានចំនួន $c \in (1, 10)$ យ៉ាងហោចណាស់មួយដែល $g(c) = 0 \iff 20 \log_{10} c - c = 0$ ។

ដូចនេះ សមីការ $20 \log_{10} x - x = 0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(1, 10)$ ។

13 គេឱ្យសមីការដឺក្រេទី 2 $ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$ មានលេខមេគុណ a, b, c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a + 3b + 6c = 0$ ។ បង្ហាញថា សមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ លើចន្លោះ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា នាំឱ្យវាជាប់លើចន្លោះបិទ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ ។

តាមសមតិកម្ម គេមាន $2a + 3b + 6c = 0 \implies c = -\frac{2a + 3b}{6}$ ។

(i) គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រង់ចុងសងខាង៖

$$\begin{aligned} f(0) &= c = -\frac{2a+3b}{6} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) &= a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(\frac{2}{3}\right) + c \\ &= \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b - \frac{2a+3b}{6} \\ &= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right)a + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)b \\ &= \frac{1}{9}a + \frac{1}{6}b = \frac{2a+3b}{18} \end{aligned}$$

(ii) គណនាផលគុណ $f(0)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$៖

$$f(0)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2a+3b}{6}\right)\left(\frac{2a+3b}{18}\right) = -\frac{(2a+3b)^2}{108} \leq 0$$

(iii) សន្និដ្ឋានតាមករណី៖

- បើ $2a+3b \neq 0 \implies f(0)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឱ្យមាន $x_0 \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ ដែល $f(x_0) = 0$។
- បើ $2a+3b = 0 \implies f(0) = 0$ និង $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ នាំឱ្យ $x = 0$ និង $x = \frac{2}{3}$ ជាឫសនៃសមីការ។

ដូចនេះ សមីការ $ax^2+bx+c=0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$។

14 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ បើ $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|+2x^2}{x}$ បើ $x = 0$, $f(0) = 1$

(a) សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x = 0$៖

សម្រួលកន្សោមអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $x \neq 0$៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2x^2}{x} = 2x+1 & \text{បើ } x > 0 \\ \frac{-x+2x^2}{x} = 2x-1 & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$$

គណនាតម្លៃអនុគមន៍ និងលីមីតត្រង់ $x = 0$៖

- $f(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1) = -1$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ នាំឱ្យគ្មាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មិនជាប់ (ដាច់) ត្រង់ $x = 0$ ទេ ។

b សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ៖

