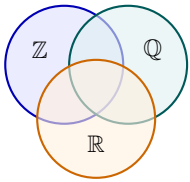
ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

តក្កវិទ្យា សំណុំ និង ទ្រឹស្តីចំនួន

(Logic, Set Theory, and Number Theory)

សៀវភៅជំនួយស្មារតី ស្រាវជ្រាវ និងប្រមូលផ្តុំលំហាត់
សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់វិទ្យាល័យ និងត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ



រៀបរៀង និងចងក្រងដោយ ៖ និស្សិត ឡាត់ គីមហ៊ឹត

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកអាន និងសិស្សានុសិស្សទាំងអស់ជាទីមេត្រី! សៀវភៅដែលប្រិយមិត្ត កំពុង កាន់នៅនឹង ដៃ នេះ គឺជា ស្នាដៃ ស្រាវជ្រាវ ដែល ត្រូវ បាន រៀបរៀង និង ចងក្រងឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់បំផុត ដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីសិក្សាគណិតវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ក៏ដូចជាការត្រៀមខ្លួនសម្រាប់ការប្រឡងសិស្សពូកែ និងអាហារូបករណ៍នានា ។

ខ្លឹមសារ មេរៀន នៅក្នុង សៀវភៅ នេះ ត្រូវ បាន តម្រៀប តាមលំដាប់ លំដោយ យ៉ាង ច្បាស់លាស់ ចាប់ពី គ្រឹះនៃតក្កវិទ្យា និងវិធីសាស្ត្រសម្រាយបញ្ជាក់ សំណុំ ប្រព័ន្ធចំនួន ទ្រឹស្តីចំនួន (នព្វន្ត) ទំនាក់ទំនង និងអនុគមន៍ វិសមភាពគ្រឹះ រហូតដល់ពហុធា និង ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton ។ គ្រប់ចំណុចនីមួយៗសុទ្ធតែមាននិយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ គន្លឹះសំខាន់ៗ ឧទាហរណ៍គំរូ ព្រមទាំងលំហាត់អនុវត្តន៍ និងដំណោះស្រាយលម្អិតក្បោះក្បាយ ងាយស្រួលយល់ ។

យើងខ្ញុំ សង្ឃឹម យ៉ាង មុតមាំ ថា សៀវភៅ មួយ ក្បាល នេះ នឹង ក្លាយជា ឯកសារ ជំនួយស្មារតីដ៏មានសារៈប្រយោជន៍ សម្រាប់ជួយដល់អ្នក សិក្សា គ្រប់រូប ក្នុង ការសិក្សា ស្រាវជ្រាវ ដោយខ្លួនឯង ពង្រឹង សមត្ថភាព គិត បែប តក្កវិទ្យា និង ពង្រីក ចំណេះដឹង គណិតវិទ្យាឱ្យកាន់តែស៊ីជម្រៅថែមទៀត ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ១១ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០២៦

អ្នកអ្បៅអ្បង

ឡាត់ គីមហ៊ីត

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំសូមសម្តែងនូវសេចក្តីគោរពដឹងគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតចំពោះ លោកឪពុក ឡាក់ ឡាត់ និង អ្នកម្តាយ ជាង សុខឡា ដែលបានផ្តល់កំណើត ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា និង ជំរុញលើកទឹកចិត្តគ្រប់បែបយ៉ាងក្នុងការសិក្សារៀនសូត្រហូតទទួលបានជោគជ័យ ។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងស្មោះស្ម័គ្រចំពោះ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងសាស្ត្រាចារ្យ គណិតវិទ្យាគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀន ផ្តល់ដំបូន្មានល្អៗ និងចែករំលែក ចំណេះដឹងដ៏មានតម្លៃមិនអាចកាត់ថ្លៃបាន ។

ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសូមអរគុណដល់មិត្តភក្តិ និងអ្នកសិក្សាទាំងអស់ដែលបានគាំទ្រ និងផ្តល់មតិកែលម្អដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះកាន់តែមានភាពសុក្រឹត ។ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលរាល់ ការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្រិយមិត្តអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដោយក្តីសោមនស្សរីករាយ ។ ដោយក្តីគោរពស្រលាញ់ពីខ្ញុំ ឡាត់ គីមហ៊ីត!!!

មាតិកា

អារម្ភកថា iii

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ v

១ តក្កវិទ្យា ១
- ១.១ សំណើ (Propositions) . . . ១
  - ១.១.១ តម្លៃភាពពិត . . . ១
- ១.២ ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា . . . ២
  - ១.២.១ ឈ្នាប់និង ($\wedge$) . . . ២
  - ១.២.២ ឈ្នាប់ឬ ($\vee$) . . . ៣
  - ១.២.៣ ឈ្នាប់មិន ($^-$) . . . ៣
  - ១.២.៤ ឈ្នាប់នាឲ ($\Rightarrow$) . . . ៥
  - ១.២.៥ ឈ្នាប់សមមូល ($\Leftrightarrow$) . . . ៦
- ១.៣ សមមូលតក្កវិទ្យា . . . ៧
  - ១.៣.១ អនុវត្តន៍តក្កវិទ្យា . . . ១៧

២ វិធីសាស្ត្រសម្រាយបញ្ជាក់ ២៥
- ២.១ សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទាល់ (Direct Proof) . . . ២៥
- ២.២ សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម (Proof by Contrapositive) . . . ២៧
- ២.៣ សម្រាយបញ្ជាក់តាមការផ្ទុយ (Proof by Contradiction) . . . ២៨
- ២.៤ សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ (Proof by Biconditional) . . . ៣១
- ២.៥ សម្រាយបញ្ជាក់តាមបំណែងចែកករណី (Proof by Cases) . . . ៣២
  - ២.៥.១ កំហុសដែលតែងកើតមាន . . . ៣៣
- ២.៦ វិសមភាពត្រីកោណ និងតម្លៃដាច់ខាត . . . ៣៤
  - ២.៦.១ ការអនុវត្ត៖ ប្រៀបធៀបវិធីពីរ . . . ៣៥
- ២.៧ សម្រាយ បញ្ជាក់ តាម វិចារ កំណើន គណិតវិទ្យា (Mathematical Induction) . . . ៣៦

២.៧.១ វិចារកំណើនខ្លាំង (Strong Induction) ៣៨
២.៧.២ កំហុសដែលតែងកើតមាន ៣៨
២.៨ សម្រាយបញ្ជាក់ដោយរកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ (Disproof by Counterexample) ៣៩

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៤១

ដំណោះស្រាយលំហាត់ ៤៨

៣ សំណុំ (Set) ៧៥
៣.១ សញ្ញាណនៃសំណុំ (Concept of Sets) ៧៥
៣.១.១ របៀបសរសេរសំណុំ (Representations of Sets) ៧៦
៣.១.២ ប្រភេទនៃសំណុំ (Types of Sets) ៧៦
៣.២ ប្រមាណវិធីលើសំណុំ (Set Operations) ៧៩
៣.២.១ ប្រសព្វនៃសំណុំ (Intersection of Sets) ៧៩
៣.២.២ ប្រជុំនៃសំណុំ (Union of Sets) ៨៣
៣.២.៣ ផលដកនៃសំណុំ (Difference of Sets) ៨៦
៣.២.៤ សំណុំបំពេញ (Complement of a Set) ៨៩
៣.២.៥ ផលដកឆ្លុះនៃសំណុំ (Symmetric Difference of Sets) . . ៩២
៣.២.៦ ច្បាប់ពិជគណិតនៃសំណុំ (Laws of Set Algebra) ៩៤
៣.២.៧ រូបមន្តកាឌីណាល់នៃបីសំណុំ (Cardinality of Three Sets) ៩៦

ផ្នែកលំហាត់អនុវត្តន៍ ៩៨

ផ្នែកដំណោះស្រាយ ១០២

៤ ប្រព័ន្ធចំនួន (Number Systems) ១១៧
៤.១ សំណុំចំនួនពិត និងចំណែកថ្នាក់ ១១៧
៤.១.១ ចំណែកថ្នាក់នៃចំនួនពិត (Classification of Real Numbers) ១១៧
៤.១.២ បន្ទាត់ចំនួន និងតម្លៃដាច់ខាត (Number Line and Absolute Value) ១១៩
៤.២ កន្សោមរ៉ាឌីកាល់ (Radical Expressions) ១២០

៤.២.១ ការគណនាកន្សោមដែលមានរ៉ាឌីកាល់ ១២០
៤.២.២ ការបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង (Rationalizing the Denominator) ១២១
៤.២.៣ ការសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់ ១២២
៤.៣ ប្រព័ន្ធរបាប់ (Number Bases) ១២៤
៤.៣.១ និយមន័យ និងទម្រង់ពន្លាតនៃប្រព័ន្ធរបាប់គោល b ១២៤
៤.៣.២ ការបំប្លែងរហ័សរវាងគោល ២ គោល ៨ និងគោល ១៦ . . . ១២៦

លំហាត់អនុវត្តន៍ ១២៨

ដំណោះស្រាយ ១៣២

៥ ទ្រឹស្តីចំនួន ឬ នព្វន្ត (Number Theory) ១៤៧
៥.១ ចំនួនគត់គូ ចំនួនគត់សេស និងភាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$ ១៤៧
៥.១.១ ចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស ១៤៧
៥.១.២ ភាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$ និងលក្ខណៈគ្រឹះ ១៤៨
៥.១.៣ វិធីចែកបែបអឺគ្លីត (Euclidean Division) ១៤៩
៥.២ ចំនួនបឋម និងតួចែករួមធំបំផុត (PGCD / GCD) ១៥០
៥.២.១ ចំនួនបឋម និងការបំបែកជាកត្តាបឋម ១៥០
៥.២.២ តួចែករួមធំបំផុត (PGCD / GCD) និងអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត . . . ១៥២
៥.២.៣ សមភាព Bézout និងទ្រឹស្តីបទ Gauss ១៥៣
៥.៣ ពហុគុណរួមតូចបំផុត (PPCM / LCM) និងភាពសមមូល ១៥៤
៥.៣.១ ពហុគុណរួម តូចបំផុត (PPCM / LCM) និង ទំនាក់ទំនងជាមួយ PGCD ១៥៤
៥.៣.២ ភាពសមមូល (Modular Arithmetic / Congruence) . . . ១៥៦
៥.៤ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises) ១៥៧
៥.៥ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions) ១៥៩
៥.៦ ទ្រឹស្តីបទ Euler ចំនួន Mersenne និងចំនួន Perfect ១៦៥
៥.៦.១ អនុគមន៍ Euler និងទ្រឹស្តីបទ Euler (Euler's Theorem) . ១៦៥
៥.៦.២ ចំនួន Mersenne និងចំនួន Perfect ១៦៦
៥.៦.៣ សមីការ Diophantine លីនេអ៊ែរ $ax + by = c$ ១៦៨

៦ ទំនាក់ទំនង និងអនុគមន៍ (Relations and Functions) ១៧១
- ៦.១ ផលគុណដេកាត និងទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ១៧១
  - ៦.១.១ គូលំដាប់ និងផលគុណដេកាតនៃពីរសំណុំ ១៧១
  - ៦.១.២ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ដែនកំណត់ និងដែនតម្លៃ ១៧២
  - ៦.១.៣ ទំនាក់ទំនងសមមូល និងទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ A . . ១៧៣
- ៦.២ អនុគមន៍ និងប្រភេទនៃអនុគមន៍ ១៧៤
  - ៦.២.១ និយមន័យអនុគមន៍ ប្រភេទអនុគមន៍ និងបណ្តុំអនុគមន៍ . . . ១៧៤
- ៦.៣ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises) ១៧៦
- ៦.៤ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions) ១៧៧

៧ វិសមភាពគ្រឹះ និងការអនុវត្តន៍ (Classical Inequalities) ១៧៩
- ៧.១ វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និងមធ្យមធរណីមាត្រ (AM–GM) ១៧៩
  - ៧.១.១ លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិសមភាពក្នុង $\mathbb{R}$ ១៧៩
  - ៧.១.២ វិសមភាព AM–GM (Arithmetic Mean – Geometric Mean) ១៨០
- ៧.២ វិសមភាព Cauchy–Schwarz និងការអនុវត្តន៍ ១៨២
  - ៧.២.១ វិសមភាព Cauchy–Schwarz និងវិបាក Engel (Titu's Lemma) ១៨២
- ៧.៣ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises) ១៨៣
- ៧.៤ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions) ១៨៤

៨ ពហុធា និងទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton (Polynomials & Binomial Theorem) ១៨៧
- ៨.១ សញ្ញាណគ្រឹះនៃពហុធា និងប្រមាណវិធី ១៨៧
  - ៨.១.១ និយមន័យពហុធា ដឺក្រេ និងឫសនៃពហុធា ១៨៧
- ៨.២ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton (Newton's Binomial Theorem) ១៨៩
  - ៨.២.១ បន្សំ និងត្រីកោណ Pascal ១៨៩
  - ៨.២.២ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton និងសម្រាយបញ្ជាក់ ១៩០
- ៨.៣ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises) ១៩២
- ៨.៤ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions) ១៩៣

៩ លំហាត់ស្រាវជ្រាវ និងវិញ្ញាសាប្រឡងសាកល្បង ១៩៥

៩.១ វិញ្ញាសាប្រឡងសាកល្បងទី ១ (កម្រិតមធ្យម និងត្រៀមអាហារូបករណ៍) ១៩៥

៩.២ វិញ្ញាសាប្រឡងសាកល្បងទី ២ (កម្រិតសិស្សពូកែ និងស្រាវជ្រាវ) . . ១៩៦

៩.៣ ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃវិញ្ញាសាទី ១ . . . . . ១៩៧

៩.៤ ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃវិញ្ញាសាទី ២ . . . . . ២០០

ឯកសារយោង ២០៥

មេរៀនទី ១ តក្កវិទ្យា

១.១ សំណើ (Propositions)

និយមន័យ ១.១ (សំណើ)៖
សំណើ គឺជាល្បះថ្លែងទាំងឡាយណាដែលគេអាចកំណត់តម្លៃពិតបានច្បាស់លាស់ ថា **ពិត (True)** ឬ **មិនពិត (False)** ប៉ុណ្ណោះ តែមិនអាចពិតផង និងមិនពិតផងក្នុងពេលតែមួយបានឡើយ។ គេច្រើនតាងសំណើដោយអក្សរ $p,\ q, r,\ s...$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២៖
ចូរកំណត់ថាតើល្បះថ្លែងខាងក្រោមជាសំណើ ឬមិនមែនជាសំណើ៖

ក) $5 + 3 = 8$
ខ) ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជា។
គ) តើអ្នកសុខសប្បាយទេ?

ចម្លើយ ៖

ក) $5 + 3 = 8$ ជាសំណើ
ខ) ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជា ជាសំណើ
គ) តើអ្នកសុខសប្បាយទេ? មិនមែនជាសំណើ

១.១.១ តម្លៃនៃភាពពិត

- បើសំណើ p ជាសំណើពិតនោះគេថាតម្លៃភាពពិតស្មើ 1 ឬ តាងដោយអក្សរ T(TRUE) ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $ត\cdot(p) = 1$
- បើសំណុំ p ជាសំណើមិនពិតនោះគេថាតម្លៃភាពពិតស្មើ 0 ឬ តាងដោយអក្សរ F(FASLE) ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $ត\cdot(p) = 0$

ឧទាហរណ៍ ១.៣៖
ចូរ ជ្រើសរើស អំណះអំណាង ខាងក្រោម ដែល ជា សំណើ ក្នុងចំណោម អំណះអំណាង

ខាងក្រោម ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើនោះ ៖

ក p : ប្រាសាទអង្គរវត្តស្ថិតក្នុងខេត្តសៀមរាប

ខ q : ព្រះអាទិត្យរះនៅទិសខាងលិច

គ r : បុផាជាសិស្សថ្នាក់ទី 12

ចម្លើយ ៖

ក ជាសំណើពិត ហើយមានតម្លៃភាពពិត ត·$(p) = 1$

ខ ជាសំណើមិនពិត ហើយមានតម្លៃភាពពិត ត·$(q) = 0$

គ មិនមែនជាសំណើ ហើយមិនមានតម្លៃភាពពិត ។

១.២ ឡូជិតក្តវិទ្យា

១.២.១ ឡូជិតនិង $(\wedge)$

ជាទូទៅ ១.៤៖
សំណើ $p \wedge q$ ពិតតែក្នុងករណីសំណើទាំងពីរពិតទាំងពីរ មានន័យថា p ពិត និង q ពិត ឬ អាចនិយាយបានថាសំណើរទាំងពីរពិតព្រមគ្នា ។
តារាងតម្លៃភាពពិតនៃ $p \wedge q$ គឺ ៖

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ឧទាហរណ៍ ១.៥៖
គេមានសំណើពីរ p : 2 តូចជាង 3 និង q : 5 ធំជាង 4 ។ ចូរកំណត់សំណើ $p \wedge q$ និងកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃ $p \wedge q$ ។

ចម្លើយ ៖ សំណើ $p \wedge q$: 2 តូចជាង 3 និង 5 ធំជាង 4 ។

ដោយ p ជាសំណើពិត នោះ ត·$(p) = 1$ និង q ជាសំណើពិត នោះ ត·$(q) = 1$
គេបាន ត·$(p \wedge q) = 1$ ។

១.២.២ ឈ្នាប់ឬ $(\vee)$

ជានុទៅ ១.៦៖
សំណើ $p \vee q$ មិនពិតតែក្នុងករណីសំណើទាំងពីរមិនពិត មានន័យថា p មិនពិត និង q មិនពិត ព្រមគ្នា ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $p \vee q$ អានថា សំណើ p ឬ សំណើ q ។ តារាងតម្លៃភាពពិតនៃ $p \vee q$ ៖

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ឧទាហរណ៍ ១.៧៖
គេមានសំណើ $p : 5$ ចែកដាច់នឹង 3 ហើយសំណើ $q : 2$ ជាចំនួនសនិទាន ។ ចូរកំណត់សំណើ $p \vee q$ និង តម្លៃភាពពិតរបស់វា ។

ចម្លើយ ៖ សំណើ $p \vee q : 5$ ចែកដាច់នឹង 3 ឬ 2 ជាចំនួនសនិទាន ។
ដោយ p ជាសំណើមិនពិតនោះ ត·$(p) = 0$ ហើយ q ជាសំណើពិតនោះ ត·$(q) = 1$
នាំអោយតម្លៃភាពពិតនៃ $p \vee q$ គឺ ត·$(p \vee q) = 1$ ។

១.២.៣ ឈ្នាប់មិន $(^-)$

ជានុទៅ ១.៨៖
ឈ្នាប់មិនជាឈ្នាប់ដែលធ្វើអោយច្រាសនៃសំណើដើម ។ បើយើងមានសំណើមួយ $p : 2$ ជាចំនួនបឋម នោះនៅពេលដែលយើងបំពាក់សំណើ p ដោយឈ្នាប់មិនវានឹងមានន័យច្រាសវិញគឺ តាងដោយ $\bar{p} : 2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

សម្គាល់ ១.៩៖
គេច្រើនកំណត់សរសេរឈ្នាប់មិនដោយ $\bar{p}$ ឬ $\neg p$ អានថាមិន $\neg p$។

ចំណាំ ១.១០៖
ចំពោះឈ្មោះមិនត្រួតគ្នាពីរដង គឺមានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹងសំណុំដើម ដូចជា $\neg\neg p = p$ ។

តាងរាងតម្លៃភាបពិតនៃឈ្មោះមិន គឺ៖

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
T	F	T
F	T	F

ខ្ទាបារណ៍ ១.១១៖
គេមានសំណើពីរដូចខាងក្រោម

- p : 3 ជាតួចែកនៃ 33
- q : 22 ជាពហុគុណនៃ 5 ។ ចូរកំណត់សំណើ $\bar{p}$, $\bar{q}$ និង កំណត់ ត.$(\bar{p})$ និង ត.$(\bar{q})$ ។

ចម្លើយ ៖ កំណត់សំណើ $\bar{p}$ $\bar{q}$ និង កំណត់ ត.$(\bar{p})$, ត.$(\bar{q})$

- $\bar{p}$: 3 មិនមែនជាតួចែកនៃ 33 និង ត.$(\bar{p}) = 0$
- $\bar{q}$: 22 មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 និង ត.$(\bar{q}) = 1$

លក្ខណៈ De Morgan

ជាទូទៅ ១.១២៖
គេមានសំណើពីរ p និង q នោះតាមលក្ខន៖ ដឺម៉ជេន (De Morgan)

១ $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$

២ $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.១៣៖
តាមតារាងតម្លៃភាពពិត

■

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

១.២.៨ ឈ្នាប់នាឲ $(\Rightarrow)$

ជាទូទៅ ១.១៨៖
សំណើ $p \Rightarrow q$ មិនពិតតែក្នុងករណី p និង q មិនពិត ក្រៅពីនេះវាជាសមណើពិត ។
សំណើ $p \Rightarrow q$ និង $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតតែមួយ៖

សម្រាយបញ្ជាក់សមមូលភាព៖ $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា កន្សោមទាំងពីរនេះមានតម្លៃភាពពិតតែមួយ យើងពិនិត្យលើតារាងតម្លៃពិតខាងក្រោម៖

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ចំណាំ ១.១៩៖
$p \Rightarrow q$ អានថា p នាំអោយ q ។

តារាងតម្លៃភាពពិតនៃ $p \Rightarrow q$ ៖

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ឧទាហរណ៍ ១.១៦៖
គេមានសំណើពីរ p : ស្មើទៅសាលារៀន និង q : នោះស្មើទៅបណ្ណាល័យ ។ ចូរសរសេរសំណើ "បើស្មើមិនទៅបណ្ណាល័យនោះនាងទៅសាលារៀន " ដោយប្រើឈ្នាប់តក្កវិទ្យា ។

ចម្លើយ ៖ សំណើ ៖ បើស្មើមិនទៅបណ្ណាល័យនោះនាងទៅសាលារៀន គឺ $\bar{q} \Rightarrow p$ ។

១.២.៥ ឈ្នាប់សមមូល ($\Leftrightarrow$)

ជាទូទៅ ១.១៧៖
សំណើ $p \Leftrightarrow q$ ពិតតែក្នុងករណី p និង q មានតម្លៃដូចគ្នា ពោលគឺ បើ p ពិត នោះ q ពិត ហើយបើ p មិនពិតនោះ q ក៏មិនពិតដែរ ទើបនាំអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិត។

ចំណាំ ១.១៨៖
$p \Leftrightarrow q$ អានថា p សមមូល q ហើយ $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ។

តារាងតម្លៃភាពពិតនៃ $p \Leftrightarrow q$ គឺ ៖

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ឧទាហរណ៍ ១.១៩៖
គេមានសំណើពីរ p : សុខាចុះឈ្មោះរៀនគណិតវិទ្យា និង q : នោះសុខារៀនរូបវិទ្យា ។ ចូរ

សរសេរសំណើរ "សុខាមិនរៀនជំនាញរូបវិទ្យា លុះត្រាតែគាត់ចុះឈ្មោះរៀនគណិតវិទ្យា" ដោយប្រើឈ្នាប់តក្កវិទ្យា ។

ចម្លើយ ៖ សំណើ ៖ សុខា មិន រៀន ជំនាញ រូបវិទ្យា លុះត្រាតែ គាត់ ចុះឈ្មោះ រៀន គណិតវិទ្យា គឺ $\bar{q} \Leftrightarrow p$ ។

១.៣ សមមូលតក្កវិទ្យា

ជាទូទៅ ១.២០៖
សំណើ $P(p,q,r,\cdots)$ និង $Q(p,q,r,\cdots)$ សមមូលតក្កវិទ្យា កាលណាសំណើទាំងពីរមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។ គេកំណត់សរសេរ $P = Q$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២១៖
បង្ហាញថា សំណើ $\overrightarrow{p \wedge q}$ និង $\bar{p} \vee \bar{q}$ សមមូលតក្កវិទ្យា ។

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$p \wedge q$	$\overrightarrow{p \wedge q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

ចម្លើយ ៖ តារាងតម្លៃភាពពិតខាងលើ គេបាន ត.$(\overrightarrow{p \wedge q})$ = ត.$(\bar{p} \vee \bar{q})$ នោះសំណើ $\overrightarrow{p \wedge q}$ និង $\bar{p} \vee \bar{q}$ សមមូលតក្កវិទ្យា គេកំណត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ ។

លក្ខណៈតក្កវិទ្យា (Logical Equivalence Laws)

១. ច្បាប់ដេតស្វ័យគុណ (Idempotent Laws)

ក $p \vee p \equiv p$ ខ $p \wedge p \equiv p$

២. ច្បាប់ផ្តុំ (Associative Laws)

ក $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ខ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

៣. ច្បាប់ផ្លាស់ប្តូរ (Commutative Laws)

ក $p \vee q \equiv q \vee p$ ខ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

៤. ច្បាប់បំបែក (Distributive Laws)

ក $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ខ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

៥. ច្បាប់ឯកលក្ខណា: (Identity & Domination Laws)

ក $p \vee F \equiv p$
ខ $p \vee T \equiv T$
គ $p \wedge F \equiv F$
ឃ $p \wedge T \equiv p$

៦. ច្បាប់បំពេញ (Complement Laws)

ក $p \vee \bar{p} \equiv T$
ខ $p \wedge \bar{p} \equiv F$
គ $\bar{T} \equiv F$
ឃ $\bar{F} \equiv T$

៧. ច្បាប់បដិសេធពីរដង (Double Negation Law)

$$\bar{\bar{p}} \equiv p$$

៨. ច្បាប់ដឺម៉ក (De Morgan's Laws)

ក $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

ខ $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

៩. ច្បាប់ស្រូប (Absorption Laws)

ក $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ខ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

១០. ច្បាប់លក្ខខណ្ឌ និងច្រាសផ្ទុយ (Implication & Contrapositive)

$$p \implies q \equiv \bar{p} \vee q \equiv \bar{q} \implies \bar{p}$$

១១. ច្បាប់លក្ខខណ្ឌទ្វិទិស (Biconditional Law)

$$p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

១២. ច្បាប់ឆ្លង (Transitive Laws)

ក $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$

ខ $[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \iff (p \iff r)$

សម្រាយបញ្ជាក់

១. ច្បាប់ដេតស្វ័យគុណ (Idempotent Laws)

ក $p \vee p \equiv p$

p	$p \vee p$
1	1
0	0

ខ $p \wedge p \equiv p$

p	$p \wedge p$
1	1
0	0

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២២៖
សម្រាយបញ្ជាក់ច្បាប់ផ្តុំ

២. ច្បាប់ផ្តុំ (Associative Laws)

ក $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

ខ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៣៖

៣. ច្បាប់ផ្លាស់ប្តូរ (Commutative Laws)

ក $p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

ខ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៨៖

៨. ច្បាប់បំបែក (Distributive Laws)

ក $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ខ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៨៖

៩. ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ: (Identity & Domination Laws)

ក $p \vee F \equiv p$

p	F	$p \vee F$
1	0	1
0	0	0

ខ $p \vee T \equiv T$

p	T	$p \vee T$
1	1	1
0	1	1

គ $p \wedge F \equiv F$

p	F	$p \wedge F$
1	0	0
0	0	0

ឃ $p \wedge T \equiv p$

p	T	$p \wedge T$
1	1	1
0	1	0

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៦៖

៦. ច្បាប់បំពេញ (Complement Laws)

ក $p \vee \bar{p} \equiv T$

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
1	0	1
0	1	1

ខ $p \wedge \bar{p} \equiv F$

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$
1	0	0
0	1	0

គ $\bar{T} \equiv F$

T	$\bar{T}$
1	0

ឃ $\bar{F} \equiv T$

F	$\bar{F}$
0	1

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៧៖

៧. ច្បាប់បដិសេធពីរដង

$$\bar{\bar{p}} \equiv p$$

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$
1	0	1
0	1	0

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៨៖

៨. ច្បាប់ដឺម៉ក (De Morgan's Laws)

ក $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

ខ $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.២៩៖

៩. ច្បាប់ស្រូប (Absorption Laws)

ក $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

ខ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.៣០៖

១០. ច្បាប់លក្ខខណ្ឌ និងច្រាសផ្ទុយ (Implication & Contrapositive)

$$p \implies q \equiv \bar{p} \vee q \equiv \bar{q} \implies \bar{p}$$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \implies q$	$\bar{p} \vee q$	$\bar{q} \implies \bar{p}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.៣១៖

១១. ច្បាប់លក្ខខណ្ឌទ្វិទិស (Biconditional Law)

$$p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

p	q	$p \iff q$	$p \implies q$	$q \implies p$	$(p \implies q) \wedge (q \implies p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ១.៣២៖

១២. ច្បាប់ឆ្លង (Transitive Laws)

ក $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$

p	q	r	$p \implies q$	$q \implies r$	$(p \implies q) \wedge (q \implies r)$	$p \implies r$	$[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

ខ $[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \iff (p \iff r)$

p	q	r	$p \iff q$	$q \iff r$	$(p \iff q) \wedge (q \iff r)$	$p \iff r$	$[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \iff (p \iff r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

■

១.៣.១ អនុវត្តន៍តក្កវិទ្យា

ឧទាហរណ៍ ១.៣៣៖
គេតាងសំណើ ៖

- P: "ខ្ញុំឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ"
- Q: "ខ្ញុំប្រឡងជាប់"
- R: "ខ្ញុំទទួលបានអាហារូបករណ៍"

ចូរប្រើប្រាស់សញ្ញាភ្ជាប់តក្កវិទ្យាដើម្បីសរសេរប្រយោគនីមួយៗជាកន្សោមតក្កវិទ្យា៖

ក "ខ្ញុំឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ ហើយខ្ញុំប្រឡងជាប់" ។

ខ "ប្រសិនបើខ្ញុំប្រឡងជាប់ នោះខ្ញុំនឹងទទួលបានអាហារូបករណ៍" ។

គ "ខ្ញុំមិនឧស្សាហ៍រៀនសូត្រទេ ប៉ុន្តែខ្ញុំប្រឡងជាប់" ។

ឃ "ខ្ញុំទទួលបានអាហារូបករណ៍ លុះត្រាតែខ្ញុំប្រឡងជាប់ និងឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ"។

ចម្លើយ ៖

ក "ខ្ញុំឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ ហើយខ្ញុំប្រឡងជាប់"

- មានប្រយោគ P និងប្រយោគ Q ភ្ជាប់គ្នាដោយពាក្យ "ហើយ" (AND)។
- $P \wedge Q$

ខ "ប្រសិនបើខ្ញុំប្រឡងជាប់ នោះខ្ញុំនឹងទទួលបានអាហារូបករណ៍"

- ទម្រង់ "ប្រសិនបើ Q នោះ R" (Conditional)
- $Q \implies R$

គ "ខ្ញុំមិនឧស្សាហ៍រៀនសូត្រទេ ប៉ុន្តែខ្ញុំប្រឡងជាប់"

- "មិនឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ" គឺ $\neg P$ ហើយពាក្យ "ប៉ុន្តែ" ស្មើនឹងសញ្ញា "និង" ($\wedge$) រួចភ្ជាប់ជាមួយ "ប្រឡងជាប់" (Q)។
- $\overline{P} \wedge Q$

ឃ "ខ្ញុំទទួលបានអាហារូបករណ៍ លុះត្រាតែខ្ញុំប្រឡងជាប់ និងឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ "

- "លុះត្រាតែ" គឺជា សញ្ញា សមមូល/ទ្វេភាគី ($\iff$) ចំណែកឯខាងស្តាំគឺ "ប្រឡងជាប់ និងឧស្សាហ៍រៀនសូត្រ" គឺ $(Q \wedge P)$។

- $R \iff (Q \wedge P)$

ឧទាហរណ៍ ១.៣៨៖
នៅក្នុងយន្តហោះមួយគ្រឿងដែលធ្វើដំណើរពីទីក្រុងប៉ារីសទៅទីក្រុងតូក្យូ មានអ្នកដំណើរ 6 នាក់ ដែលមានឈ្មោះ A, B, C, D, E និង F ។ ក្នុងចំណោមអ្នកដំណើរទាំងនេះមានម្នាក់ជាជនជាតិជប៉ុន ម្នាក់ជាជនជាតិចិន ម្នាក់ជាជនជាតិខ្មែរ ម្នាក់ជាជនជាតិបារាំង ម្នាក់ជាជនជាតិអាឡឺម៉ង់ និង ម្នាក់ទៀតជាជនជាតិឥណ្ឌា ។ គេដឹងថា ៖

- A និង ជប៉ុនជាគ្រូពេទ្យ
- អាឡឺម៉ង់ចាស់ជាង A
- E និង ចិនជាសាស្ត្រាចារ្យ
- ឥណ្ឌាចាស់ជាង C
- C និង ខ្មែរជាវិស្វករ
- B និង F ឡើងយន្តហោះនៅទីក្រុងរ៉ូម ហើយខ្មែរឡើងយន្តហោះនៅទីក្រុងប៉ារីស
- B និង ជប៉ុនចុះនៅទីក្រុងតូក្យូ ហើយ C និងអាឡឺម៉ង់ចុះនៅហុងកុង

តើគេអាចរកសញ្ជាតិ និងមុខរបររបស់អ្នកដំណើរទាំងនេះបានដែរឬទេ ?

ចម្លើយ ៖ តាមបម្រាប់ និងការវិភាគតក្កវិទ្យា គេអាចរកសញ្ជាតិ និងមុខរបររបស់អ្នកដំណើរទាំងនោះបានដូចខាងក្រោម ៖

1. A ជាជនជាតិ ឥណ្ឌា និងមានមុខរបរជា គ្រូពេទ្យ
2. B ជាជនជាតិ ចិន និងមានមុខរបរជា សាស្ត្រាចារ្យ
3. C ជាជនជាតិ បារាំង និងមានមុខរបរជា វិស្វករ
4. D ជាជនជាតិ ខ្មែរ និងមានមុខរបរជា វិស្វករ
5. E ជាជនជាតិ អាឡឺម៉ង់ និងមានមុខរបរជា សាស្ត្រាចារ្យ
6. F ជាជនជាតិ ជប៉ុន និងមានមុខរបរជា គ្រូពេទ្យ

តារាងតក្កវិទ្យានៃសញ្ជាតិ (តាង 1 ជាសញ្ជាតិពិត និង 0 មិនមែនសញ្ជាតិ) ៖

ជនជាតិ	ជប៉ុន	ចិន	ខ្មែរ	បារាំង	អាឡឺម៉ង់	ឥណ្ឌា
A	0	0	0	0	0	1
B	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0
D	0	0	1	0	0	0
E	0	0	0	0	1	0
F	1	0	0	0	0	0

តារាងតក្កវិទ្យានៃមុខរបរ ៖

ជនជាតិ	គ្រូពេទ្យ	សាស្ត្រាចារ្យ	វិស្វករ
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1
D	0	0	1
E	0	1	0
F	1	0	0

ដូចនេះ

- A ជាជនជាតិឥណ្ឌា មុខរបរជាគ្រូពេទ្យ
- B ជាជនជាតិចិន មុខរបរជាសាស្ត្រាចារ្យ
- C ជាជនជាតិបារាំង មុខរបរជាវិស្វករ
- D ជាជនជាតិខ្មែរ មុខរបរជាវិស្វករ
- E ជាជនជាតិអាឡឺម៉ង់ មុខរបរជាសាស្ត្រាចារ្យ
- F ជាជនជាតិជប៉ុន មុខរបរជាគ្រូពេទ្យ ។

លំហាត់ ១.៣៥៖
ក្នុងសន្និសីទអន្តរជាតិមួយ មានអ្នកចូលរួមចំនួន 4 នាក់ ឈ្មោះ A, B, C និង D ដែលមកពី 4 ប្រទេសខុសៗគ្នា (កម្ពុជា, ជប៉ុន, បារាំង, និង អាមេរិក) ហើយមានមុខរបរខុសៗគ្នា (គ្រូបង្រៀន, វិស្វករ, គ្រូពេទ្យ, និង អ្នកប្រវត្តិសាស្ត្រ)។ គេដឹងថា ៖

ក A និង ជនជាតិអាមេរិក ជាមិត្តភក្តិនឹងគ្នា ហើយមិនមែនជាគ្រូបង្រៀនទេ។

ខ B និង ជនជាតិជប៉ុន ចូលចិត្តធ្វើដំណើរជាមួយគ្នា ឯវិស្វករមិនដែលជួប B ទេ។

គ ជនជាតិខ្មែរ ចាស់ជាង C ហើយ C មិនមែនជាអ្នកប្រវត្តិសាស្ត្រទេ។

(ឃ) D ជាគ្រូពេទ្យ ហើយ D មិនមែនជាជនជាតិជប៉ុន ឬ អាមេរិកទេ។

ចូរកំណត់សញ្ជាតិ និងមុខរបរបស់អ្នកចូលរួមទាំង 4 នាក់។

ចម្លើយ ៖ តាមការវិភាគតក្កវិទ្យា និងលក្ខខណ្ឌបម្រាប់ ៖

- តាម (d) ៖ D ជា គ្រូពេទ្យ ហើយ D មិនមែនជាជប៉ុន ឬអាមេរិកទេ។
- តាម (a) ៖ A មិនមែនជាអាមេរិក នាំឱ្យ អាមេរិក អាចជា B ឬ C។ តែតាម (b) B មិនមែនជាជប៉ុន ហើយ B មិនមែនជាវិស្វករទេ។
- តាម (c) ៖ ខ្មែរចាស់ជាង $C \implies C$ មិនមែនជាខ្មែរទេ។ C មិនមែនជាអ្នកប្រវត្តិសាស្ត្រ។
- ដោយ D ជាគ្រូពេទ្យ មិនមែនជប៉ុន ឬអាមេរិក ហើយ C មិនមែនជាខ្មែរ នោះ D ត្រូវតែជា ខ្មែរ (ព្រោះ D មិនមែនជប៉ុន/អាមេរិក/បារាំង តាមការផ្ទៀងផ្ទាត់)។
- នាំឱ្យ C ជា ជប៉ុន (មុខរបរ វិស្វករ)។
- B ជា អាមេរិក (មុខរបរ អ្នកប្រវត្តិសាស្ត្រ)។
- A ជា បារាំង (មុខរបរ គ្រូបង្រៀន)។

តារាងសញ្ជាតិ និងមុខរបរ ៖

មនុស្ស	សញ្ជាតិ	មុខរបរ
A	បារាំង	គ្រូបង្រៀន
B	អាមេរិក	អ្នកប្រវត្តិសាស្ត្រ
C	ជប៉ុន	វិស្វករ
D	ខ្មែរ	គ្រូពេទ្យ

លំហាត់ ១.៣៦៖
បង្ហាញថា សំណើ $[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$ ជាតូតូឡូជី (Tautology) ដោយប្រើតារាងតម្លៃពិត (តាង 1 ជាពិត និង 0 ជាមិនពិត)។

យើងសង់តារាងតម្លៃពិតនៃសំណើដូចខាងក្រោម ៖

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$(p \implies q) \wedge \neg q$	$[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

តាមតារាងតម្លៃពិត គេឃើញថាតម្លៃពិតនៃសំណើ (ជួរឈរចុងក្រោយ) មានតម្លៃស្មើ 1 គ្រប់ករណី។

ដូចនេះ សំណើ $[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$ គឺជា តូតូឡូជី (Tautology)។

លំហាត់ ១.៣៧៖
គេឱ្យបណ្តាសមតិកម្មខាងក្រោម ៖

1. ប្រសិនបើ សុខ ខិតខំរៀន (p) នោះ សុខ នឹងប្រឡងជាប់ (q)។
2. ប្រសិនបើ សុខ ប្រឡងជាប់ (q) នោះ ឪពុករបស់គេនឹងទិញម៉ូតូឱ្យ (r)។
3. សុខ មិនបានទទួលម៉ូតូពីឪពុកទេ ($\neg r$)។

តើយើងអាចសន្និដ្ឋានបានដែរឬទេថា «សុខ ខិតខំរៀន»? ចូរបកស្រាយតាមតក្កវិទ្យា។

ចម្លើយ ៖ តាងសំណើ ៖

- p ៖ សុខ ខិតខំរៀន
- q ៖ សុខ ប្រឡងជាប់
- r ៖ ឪពុកទិញម៉ូតូឱ្យ

តាមបម្រាប់ គេបានសមតិកម្ម ៖

$$(p \implies q) \wedge (q \implies r) \wedge \neg r$$

តាមច្បាប់ឆ្លង (Transitive Law) ៖ $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$។

ដោយសារ $p \implies r$ ពិត ហើយគេដឹងថា $\neg r$ ពិត (ឪពុកមិនបានទិញម៉ូតូឱ្យ) តាមវិធាន Modus Tollens គេទាញបាន ៖

$$(p \implies r) \wedge \neg r \implies \neg p$$

ដូចនេះ យើងសន្និដ្ឋានបានថា សុខ មិនបានខិតខំរៀនទេ ($\neg p$)។

លំហាត់ ១.៣៨៖
ដោយមិនប្រើតារាងតម្លៃពិត ចូរបង្ហាញថា សំណើ $(p \wedge q) \implies (p \vee q)$ ជាតូតូឡូជី ដោយប្រើប្រាស់ច្បាប់សមមូលតក្កវិទ្យា។

ចម្លើយ ៖ តាមច្បាប់សមមូលតក្កវិទ្យា $A \implies B \equiv \neg A \vee B$ គេបាន ៖

$$(p \wedge q) \implies (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

តាមច្បាប់ដឺម៉ក់ង់ (De Morgan's Law) ៖ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$

តាមច្បាប់ដុំ និង ផ្លាស់ប្តូរ (Associative & Commutative Laws) ៖

$$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$$

តាមច្បាប់បំពេញ (Complement Law) ៖ $\neg p \vee p \equiv 1$ និង $\neg q \vee q \equiv 1$

$$\equiv 1 \vee 1 \equiv 1$$

ដោយសារលទ្ធផលចុងក្រោយស្មើ 1 គ្រប់ករណី ដូចនេះសំណើ $(p \wedge q) \implies (p \vee q)$ គឺជា តូតូឡូជី។

ខ្ញុនាហារណ៍ ១.៣៩៖
មនុស្សម្នាក់ៗក្នុងចំណោម 9 នាក់ $A \to I$ បានទិញឆ្នោតនៅក្នុងនោះមានតែម្នាក់គត់ដែលត្រូវឆ្នោត ។ ក្រោយមកយើងសួរពួកគាត់ថាអ្នកណាត្រូវឆ្នោត ។ ពួកគេឆ្លើយថា៖

- A ឆ្លើយថា៖ E ត្រូវឆ្នោត
- B ឆ្លើយថា៖ ខ្ញុំត្រូវឆ្នោត
- C ឆ្លើយថា៖ B ត្រូវឆ្នោត
- D ឆ្លើយថា៖ E មិនត្រូវឆ្នោត
- E ឆ្លើយថា៖ B ឬ H ត្រូវឆ្នោត
- F ឆ្លើយថា៖ E ត្រូវឆ្នោត
- G ឆ្លើយថា៖ B មិនត្រូវឆ្នោត
- H ឆ្លើយថា៖ ខ្ញុំ និង B ត្រូវឆ្នោត
- I ឆ្លើយថា៖ សំដីរបស់ H ពិត

ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងរកឃើញថាមានតែមនុស្សបីនាក់គត់ដែលនិយាយត្រង់ ហើយអ្នកផ្សេងទៀតនិយាយកុហក ។ តើអ្នកណាត្រូវឆ្នោត ក្នុងចំណោម $A \to I$ ។

ចម្លើយ ៖ ដោយសារមានមនុស្សតែម្នាក់គត់ត្រូវឆ្មោត នាំឱ្យសំណើ «H និង B ត្រូវឆ្មោតទាំងពីរ» មិនអាចកើតមានឡើយ (ស្មើ 0 ជាពិជគណិតតក្កវិទ្យា)។ ដូចនេះ H និង I សុទ្ធតែនិយាយកុហក (ស្មើ 0)។

យើងសង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសម្តីរបស់អ្នកទាំង 9 នាក់ តាមករណីអ្នកត្រូវឆ្មោត (តាង 1 ជានិយាយត្រង់ និង 0 ជានិយាយកុហក) ៖

អ្នកត្រូវឆ្មោត	A	B	C	D	E	F	G	H	I	ចំនួនអ្នកនិយាយត្រង់ (1)
A	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
B	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4
C	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
D	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
E	1	0	0	0	0	1	1	0	0	3
F	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
G	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
H	0	0	0	1	1	0	1	0	0	3
I	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ករណីដែលធ្វើឱ្យមានមនុស្ស 3 នាក់និយាយត្រង់ពិតប្រាកដ គឺករណីអ្នកត្រូវឆ្មោតជា E (មនុស្ស 3 នាក់ដែលនិយាយត្រង់គឺ A, F, G)។

ដូចនេះ មនុស្សដែលត្រូវឆ្មោត គឺ E។

ឧទាហរណ៍ ១.៤០៖
មានមនុស្ស 5 នាក់ A, B, C, D, E ដែលម្នាក់ៗមានពាក់មួកពណ៌ស ឬក្រហម តែពួកគេមិនបានដឹងថាខ្លួនឯងថាពាក់មួកពណ៌អ្វីនោះទេ ។ គេដឹងថាអ្នកពាក់មួកពណ៌ខ្មៅតែងតែនិយាយស្មោះត្រង់ រីឯអ្នកពាក់មួកពណ៌សតែងតែនិយាយកុហក ។តើម្នាក់ៗពាក់មួកពណ៌អ្វី ទើបពួកគេអះអាងថា៖

- A និយាយថា ខ្ញុំឃើញមួកខ្មៅ 3 និង ស 1
- B និយាយថា ខ្ញុំឃើញមួកស 4
- C និយាយថា ខ្ញុំឃើញមួកខ្មៅ 1 និងស 3
- D និយាយថា ខ្ញុំឃើញមួកខ្មៅ 4 ។

ចម្លើយ ៖ ដើម្បីរកពណ៌មួករបស់មនុស្សម្នាក់ៗ យើងត្រូវវិភាគលើលក្ខខណ្ឌនៃការពិត និងការកុហក៖

- អ្នកពាក់មួក ខ្មៅ $\implies$ និយាយស្មោះត្រង់ (អ្វីដែលខ្លួនឃើញត្រូវតែជាការពិត)។
- អ្នកពាក់មួក ស $\implies$ និយាយកុហក (អ្វីដែលខ្លួនឃើញត្រូវតែផ្ទុយពីការពិត)។

ជំហានទី ១៖ ការវិភាគសេចក្តីអះអាងរបស់ B

- B អះអាងថា៖ "ខ្ញុំឃើញមួកស 4"។
- ប្រសិនបើ B និយាយស្មោះត្រង់ (B ពាក់មួកខ្មៅ) មានន័យថា មនុស្ស 4 នាក់ផ្សេងទៀត (A, C, D, E) សុទ្ធតែពាក់មួកស។
- ក្នុងករណីនេះ ចំនួនមួកសរុបគឺ៖ មួកខ្មៅ 1 (គឺ B) និងមួកស 4 (គឺ A, C, D, E)។

ជំហានទី ២៖ ការផ្ទៀងផ្ទាត់លើបុគ្គលដទៃទៀត ឧបមាថាករណីខាងលើត្រឹមត្រូវ (B ពាក់មួកខ្មៅ រីឯ A, C, D, E ពាក់មួកស)៖

1. បុគ្គល B (ពាក់មួកខ្មៅ - និយាយស្មោះត្រង់)៖ មើលឃើញអ្នកដទៃពាក់មួកសទាំង 4 នាក់ ដូច្នេះការអះអាងថា "ឃើញមួកស 4" គឺ ពិតប្រាកដ (ត្រូវស្របតាមលក្ខខណ្ឌ)។
2. បុគ្គល A (ពាក់មួកស - និយាយកុហក)៖ អះអាងថាឃើញមួកខ្មៅ 3 និងស 1។ ប៉ុន្តែការពិតមានមួកខ្មៅតែ 1 គត់ (B) ដូច្នេះការអះអាងរបស់ A គឺ ខុស (កុហក) ដែលត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌដែល A ពាក់មួកស។
3. បុគ្គល C និង E (ពាក់មួកស - និយាយកុហក)៖ ការអះអាងរបស់ពួកគាត់ក៏ខុសពីការពិតដែរ ដែលត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌពាក់មួកស។
4. បុគ្គល D (ពាក់មួកស - និយាយកុហក)៖ អះអាងថា "ឃើញមួកខ្មៅ 4" ប៉ុន្តែការពិតមានមួកខ្មៅតែ 1 ប៉ុណ្ណោះ ដូច្នេះ D កំពុងនិយាយកុហក ដែលស្របគ្នាទៅនឹងការដែល D ពាក់មួកស។

ដូចនេះ ៖ ផ្អែកលើការវិភាគតក្កវិទ្យានេះ យើងទាញបានថា៖

- បុគ្គល B ពាក់មួកពណ៌ ខ្មៅ (និយាយស្មោះត្រង់)។
- បុគ្គល $A, C, D,$ និង E ម្នាក់ៗពាក់មួកពណ៌ ស (និយាយកុហក)។

មេរៀនទី ២ វិធីសាស្ត្រសម្រាយបញ្ជាក់

២.១ សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទាល់ (Direct Proof)

និយមន័យ ២.១ (សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទាល់)៖
ដើម្បីបញ្ជាក់សំណើនាំឱ្យ $P \implies Q$ តាមវិធីសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទាល់ យើងសន្មតថា P ជាសំណើពិត រួចប្រើប្រាស់និយមន័យ ស្វ័យស័ក្តិ ច្បាប់ ឬទ្រឹស្តីបទដែលមានស្រាប់ ដើម្បីទាញរកឱ្យឃើញថា Q ជាសំណើពិត។

ឧទាហរណ៍ ២.២៖
បង្ហាញថា ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៣៖
សន្មតថា n ជាចំនួនគត់សេស។ តាមនិយមន័យចំនួនគត់សេស មានចំនួនគត់ $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2k + 1$។ លើកអង្គទាំងពីរជាការ៉េ គេបាន៖

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

តាង $m = 2k^2 + 2k$ (ព្រោះ $k \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $m \in \mathbb{Z}$)។ គេបាន $n^2 = 2m + 1$ ដែលជាទម្រង់ចំនួនគត់សេស។

ដូចនេះ ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ។

■

ឧទាហរណ៍ ២.៤៖
បង្ហាញថា ផលបូកនៃពីរចំនួនគត់គូ គឺជាចំនួនគត់គូ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៥៖
តាង a និង b ជាពីរចំនួនគត់គូ។ តាមនិយមន័យ មានចំនួនគត់ $k, l \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = 2k$

និង $b = 2l$។ បូកអង្គ និងអង្គ គេបាន៖

$$a + b = 2k + 2l = 2(k + l)$$

តាង $m = k + l \in \mathbb{Z}$ គេបាន $a + b = 2m$ ដែលជាទម្រង់ចំនួនគត់គូ។
ដូចនេះ ផលបូកនៃពីរចំនួនគត់គូ គឺជាចំនួនគត់គូ។

■

ខ្ញុំនាហារណ៍ ២.៦៖
បង្ហាញថា បើ $|x| > |y|$ នោះ $x^2 > y^2$ ចំពោះ $x, y \in \mathbb{R}$។

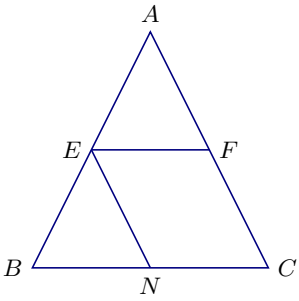
សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៧៖
ដោយ $|x| > |y| \geq 0$ លើកជាការ៉េលើអង្គទាំងពីរ គេបាន $|x|^2 > |y|^2$។ ប៉ុន្តែ $|x|^2 = x^2$ និង $|y|^2 = y^2$។ ដូចនេះ $x^2 > y^2$ ពិតប្រាកដ។

■

ខ្ញុំនាហារណ៍ ២.៨៖
ក្នុង $\triangle ABC$ ដែល $EF \parallel BC$។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៩៖
យើងមាន $EF \parallel BC$។ តាមទ្រឹស្តីបទតាលែស គេបាន៖

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad (1)$$



ម៉្យាងទៀត បើយើងគូស $EN \parallel AC$ នោះចតុកោណ $EFCN$ ជាប្រលេឡូក្រាម នាំឱ្យ $NC = EF$ (ជ្រុងឈមនៃប្រលេឡូក្រាម)។ តាមទ្រឹស្តីបទតាលែស គេបាន $\dfrac{NC}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$។ ដោយ $NC = EF$ នាំឱ្យ៖

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ ពិត។

២.២ សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម (Proof by Contrapositive)

និយមន័យ ២.១០ (សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម)៖

ផ្អែកលើច្បាប់សមមូលតក្កវិទ្យា $P \implies Q \equiv \neg Q \implies \neg P$។ ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $P \implies Q$ ពិត យើងសន្មតថា Q មិនពិត ($\neg Q$) រួចទាញរកឱ្យឃើញថា P ក៏មិនពិត ($\neg P$)។

ឧទាហរណ៍ ២.១១៖
ចំពោះចំនួនគត់ $n \in \mathbb{Z}$ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.១២៖
យើងនឹងបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម៖

- សមតិកម្ម P៖ «n^2 ជាចំនួនគត់សេស»
- សន្និដ្ឋាន Q៖ «n ជាចំនួនគត់សេស»

សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម $\neg Q \implies \neg P$ គឺ៖ «ប្រសិនបើ n មិនមែនជាចំនួនគត់សេស (n ជាចំនួនគត់គូ) នោះ n^2 ក៏មិនមែនជាចំនួនគត់សេសដែរ (n^2 ជាចំនួនគត់គូ)»។

សន្មតថា n ជាចំនួនគត់គូ នោះមាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2k$។ គេបាន៖

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

តាង $m = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $n^2 = 2m$ (ជាចំនួនគត់គូ)។ ដោយសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្មពិត នោះសំណើដើមក៏ពិតដែរ។

ដូចនេះ ប្រសិនបើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ។

ឧទាហរណ៍ ២.១៣៖
ឱ្យ $x, y \in \mathbb{R}$។ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x + y \geq 2$ នោះ $x \geq 1$ ឬ $y \geq 1$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.១៤៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម គឺ៖ «ប្រសិនបើ $x < 1$ និង $y < 1$ នោះ $x+y < 2$» (តាមច្បាប់ De Morgan លើសំណើបដិសេធ)។ សន្មតថា $x < 1$ និង $y < 1$។ បូកវិសមភាពទាំងពីរអង្គនឹងអង្គ គេបាន៖

$$x + y < 1 + 1 \implies x + y < 2$$

សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្មត្រូវបានបញ្ជាក់ថាពិត។

ដូចនេះ ប្រសិនបើ $x + y \geq 2$ នោះ $x \geq 1$ ឬ $y \geq 1$។

■

២.៣ សម្រាយបញ្ជាក់តាមការផ្ទុយ (Proof by Contradiction)

និយមន័យ ២.១៥ (សម្រាយបញ្ជាក់តាមការផ្ទុយ)៖
ដើម្បីបង្ហាញថា សំណើ P ពិត យើងសន្មតផ្ទុយមកវិញថា P មិនពិត ($\neg P$)។ បន្ទាប់មកយើងប្រើប្រាស់ប្រមាណវិធីតក្កវិទ្យាដើម្បីទាញរកចំណុចផ្ទុយពីការពិត ឬផ្ទុយពីសមតិកម្មដែលមានស្រាប់ (Contradiction) ដែលនាំឱ្យការសន្មតដើមមិនអាចកើតមាន គឺ P ត្រូវតែពិត។

ឧទាហរណ៍ ២.១៦៖
បង្ហាញថា $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.១៧៖
សន្មតផ្ទុយថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន។ នោះមានចំនួនគត់ $a, b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$) ដែល $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ហើយ $\gcd(a, b) = 1$ (ប្រភាគសម្រួលមិនបាន)។ លើកជាការ៉េ គេបាន៖

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 2b^2$$

នាំឱ្យ a^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ a ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ ($a = 2k, k \in \mathbb{Z}$)។ ជំនួស $a = 2k$ ចូលសមភាពដើម៖

$$(2k)^2 = 2b^2 \implies 4k^2 = 2b^2 \implies b^2 = 2k^2$$

នាំឱ្យ b^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ b ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ។ ដោយ a និង b សុទ្ធតែជាចំនួនគត់គូ នាំឱ្យ $\gcd(a, b) \geq 2$ ដែលផ្ទុយពីការសន្មតថា $\gcd(a, b) = 1$។

ដូចនេះ $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានឡើយ។

■

ឧទាហរណ៍ ២.១៨៖
បង្ហាញថា ចំនួនបឋមមានចំនួនច្រើនរាប់មិនអស់។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.១៩៖
សន្មតផ្ទុយថា ចំនួនបឋមមានចំនួនកំណត់ គឺ $p_1, p_2, \ldots, p_n$។ ពិនិត្យចំនួនគត់ $N = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_n) + 1$។ ដោយ $N > 1$ នោះ N ត្រូវតែមានកត្តាបឋមមួយយ៉ាងតិច តាងដោយ p_k (ដែល $1 \leq k \leq n$)។ ដោយ p_k ចែកដាច់ N និង p_k ចែកដាច់ $(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n)$ នាំឱ្យ p_k ត្រូវតែចែកដាច់ផលដក៖

$$N - (p_1 \cdot p_2 \cdots p_n) = 1 \implies p_k \mid 1$$

ដែលនេះមិនអាចកើតឡើងបានទេ ព្រោះ $p_k \geq 2$ (ផ្ទុយពីការពិត)។

ដូចនេះ ចំនួនបឋមមានចំនួនច្រើនរាប់មិនអស់។

■

ឧទាហរណ៍ ២.២០៖
បង្ហាញថា $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.២១៖
សន្មតផ្ទុយថា $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនសនិទាន។ នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, n ដែល $\sqrt[4]{2} = \dfrac{m}{n}$ និង $\gcd(m, n) = 1$។ លើកស្វ័យគុណ 4 លើអង្គសងខាង គេបាន $m^4 = 2n^4$។ ដោយ m^4 ជាចំនួនគត់គូ នោះ m ជាចំនួនគត់គូ។ តាង $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)។ គេបាន $(2k)^4 =$

$2n^4 \implies n^4 = 8k^4$។ ដូច្នេះ n^4 ជាចំនួនគូ នោះ n ជាចំនួនគូ។ ដូចនេះ m, n សុទ្ធតែជាចំនួនគូ ដែលផ្ទុយនឹង $\gcd(m, n) = 1$។

ដូច្នេះ $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

■

ឧទាហរណ៍ ២.២២៖
បង្ហាញថា $\sqrt{3}$ និង $\sqrt[4]{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.២៣៖

- បង្ហាញថា $\sqrt{3}$ អសនិទាន៖ សន្មតផ្ទុយថា $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$ ដែល $m, n \in \mathbb{Z}^+$ និង $\gcd(m, n) = 1$។ លើកជាការ៉េ គេបាន $m^2 = 3n^2 \implies 3 \mid m^2 \implies 3 \mid m$ (ព្រោះ 3 ជាចំនួនបឋម)។ តាង $m = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) គេបាន $9k^2 = 3n^2 \implies n^2 = 3k^2 \implies 3 \mid n^2 \implies 3 \mid n$។ ដូចនេះ 3 ចែកដាច់ទាំង m និង n ដែលផ្ទុយនឹង $\gcd(m, n) = 1$។ ដូច្នេះ $\sqrt{3}$ អសនិទាន។
- បង្ហាញថា $\sqrt[4]{3}$ អសនិទាន៖ ធ្វើតាមលំនាំដូចគ្នា ដោយលើកស្វ័យគុណ 4 គេបាន $m^4 = 3n^4 \implies 3 \mid m$។ ជំនួស $m = 3k$ គេបាន $81k^4 = 3n^4 \implies n^4 = 27k^4 \implies 3 \mid n$ ដែលផ្ទុយនឹង $\gcd(m, n) = 1$។ ដូច្នេះ $\sqrt[4]{3}$ អសនិទាន។

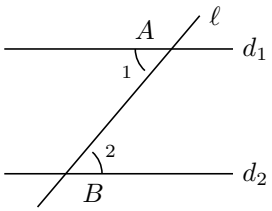
■

ចំណាំ ២.២៤៖
វិធីនេះប្រើបានសម្រាប់ $\sqrt[k]{p}$ ណាមួយ ដែល p ជាចំនួនបឋម ព្រោះ $p \mid m^k \implies p \mid m$។

ឧទាហរណ៍ ២.២៥៖
បង្ហាញថា បើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរ នៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.២៦៖

ឱ្យបន្ទាត់ d_1 និង d_2 ត្រូវកាត់ដោយបន្ទាត់ ℓ ត្រង់ចំណុច A និង B។ សមតិកម្មៈ $\angle 1 = \angle 2$ ជាមុំឆ្លាស់ក្នុង។ សន្មតផ្ទុយថា d_1 និង d_2 មិនស្របគ្នា នោះវាកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច M ហើយបង្កើតបានជាត្រីកោណ ABM។ ក្នុងត្រីកោណនេះ មុំក្រៅ $\angle 1$ ធំជាងមុំក្នុងឆ្ងាយ $\angle 2$ ($\angle 1 > \angle 2$) ដែលផ្ទុយនឹងសមតិកម្ម $\angle 1 = \angle 2$។
ដូច្នេះ $d_1 \parallel d_2$ ពិត។



■

២.៤ សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ (Proof by Biconditional)

និយមន័យ ២.២៧ (សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ)ៈ
ដើម្បីបង្ហាញថា $P \Leftrightarrow Q$ (ឬ «P លុះត្រាតែ Q») យើងត្រូវបង្ហាញទាំងពីរទិសៈ

១ ($\Rightarrow$) សន្មតថា P ពិត ហើយបង្ហាញថា Q ពិត។

២ ($\Leftarrow$) សន្មតថា Q ពិត ហើយបង្ហាញថា P ពិត។

ឧទាហរណ៍ ២.២៨ៈ
បង្ហាញថា ចំនួនគត់ n ជាចំនួនគត់គូ លុះត្រាតែ n^2 ជាចំនួនគត់គូ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.២៩ៈ
- ទិសទី ១ ($\Rightarrow$)ៈ សន្មតថា n គូ។ នោះមាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2k$។ គេបាន $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ជាចំនួនគត់គូ។
- ទិសទី ២ ($\Leftarrow$)ៈ សន្មតថា n^2 គូ។ យើងបង្ហាញតាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្មៈ បើ n សេស នោះ $n = 2k+1$ ហើយ $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ ជាចំនួនគត់សេស ដែលផ្ទុយនឹងសមតិកម្ម។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែជាចំនួនគត់គូ។

ដូចនេះ n គូ $\Leftrightarrow n^2$ គូ។

■

២.៥ សម្រាយ បញ្ជាក់ តាម បំណែងចែក ករណី (Proof by Cases)

និយមន័យ ២.៣០ (សម្រាយបញ្ជាក់តាមបំណែងចែកករណី)៖
ដើម្បីបង្ហាញថាសំណើ $P(x)$ ពិតចំពោះគ្រប់ x ក្នុងសំណុំ S យើងបែងចែក S ជាសំណុំរងតូចៗ $S_1, S_2, \ldots, S_k$ ដែល $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ (ករណីទាំងអស់ត្រូវគ្របដណ្តប់ពេញ S)។ បន្ទាប់មកបង្ហាញថា $P(x)$ ពិតក្នុងករណីនីមួយៗ។

ចំណាំ ២.៣១៖
លក្ខខណ្ឌសំខាន់ ៖

១ ករណីទាំងអស់ត្រូវគ្របដណ្តប់គ្រប់លទ្ធភាព (មិនខ្វះករណី)។

២ ករណីមិនចាំបាច់ដាច់ពីគ្នាទាំងស្រុងទេ ប៉ុន្តែបើដាច់ពីគ្នា នោះងាយត្រួតពិនិត្យជាង។

៣ ក្នុងករណីនីមួយៗ ត្រូវបង្ហាញឱ្យពេញលេញ។

ឧទាហរណ៍ ២.៣២៖
បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{Z}$ ចំនួន $n^2 + n$ ជាចំនួនគត់គូ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៣៣៖
ចំនួនគត់ n ជាគូ ឬសេស (ពីរករណីគ្របដណ្តប់ទាំងអស់)៖

- ករណី ១ (n គូ)៖ មាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2k$។ គេបាន៖

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k) \quad \text{(ជាចំនួនគត់គូ)}$$

- ករណី ២ (n សេស)៖ មាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2k + 1$។ គេបាន៖

$$n^2+n = (2k+1)^2+(2k+1) = 4k^2+6k+2 = 2(2k^2+3k+1) \quad \text{(ជាចំនួនគត់គូ)}$$

គ្រប់ករណីទាំងអស់នាំឱ្យ $n^2 + n$ ជាចំនួនគត់គូ។

■

ឧទាហរណ៍ ២.៣៤៖

បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ចំនួន $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៣៥៖
គេមាន $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$។ សំណល់ពេលចែក n នឹង 3 មានតែ $0, 1, 2$៖

- ករណី $n = 3k$៖ កត្តា n ចែកដាច់នឹង 3។
- ករណី $n = 3k+1$៖ កត្តា $n-1 = 3k$ ចែកដាច់នឹង 3។
- ករណី $n = 3k+2$៖ កត្តា $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 3។

គ្រប់ករណី ផលគុណ $n(n-1)(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 3។

■

ឧទាហរណ៍ ២.៣៦៖
ដោះស្រាយសមីការ $|x-1| = 2x+1$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៣៧៖
- ករណី ១ ($x \geq 1$)៖ $|x-1| = x-1$។ សមីការក្លាយជា $x - 1 = 2x + 1 \implies x = -2$។ ប៉ុន្តែ $-2 < 1$ មិនស្ថិតក្នុងលក្ខខណ្ឌ $x \geq 1$ ដូច្នេះមិនយក។
- ករណី ២ ($x < 1$)៖ $|x-1| = 1-x$។ សមីការក្លាយជា $1 - x = 2x + 1 \implies x = 0$។ ដោយ $0 < 1$ ត្រឹមត្រូវតាមលក្ខខណ្ឌ។

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ $x = 0$។

■

ចំណាំ ២.៣៨៖
ក្នុងសមីការ ឬ វិសមភាពតម្លៃដាច់ខាត ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនីមួយៗជាមួយលក្ខខណ្ឌនៃករណីនោះ ព្រោះអាចទទួលបានចម្លើយក្លែងក្លាយ ដូចក្នុងករណី ១ ខាងលើ។

២.៥.១ កំហុសដែលតែងកើតមាន

- ខ្វះករណី៖ ឧ. ពិនិត្យតែ n គូ ដោយភ្លេចករណី n សេស។
- ភ្លេចផ្ទៀងផ្ទាត់៖ យកចម្លើយដែលមិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌករណី។
- បែងចែកមិនសមហេតុផល៖ ករណីមិនគ្របដណ្តប់សំណុំពេញ។

២.៦ វិសមភាពត្រីកោណ និងតម្លៃដាច់ខាត

និយមន័យ ២.៣៩ (តម្លៃដាច់ខាត)៖
ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$ គេកំណត់

$$|x| = \begin{cases} x & \text{បើ } x \geq 0 \\ -x & \text{បើ } x < 0. \end{cases}$$

ភាពខុសគ្នា $|a-b|$ ជាចម្ងាយរវាងចំនួន a និង b លើអ័ក្សចំនួន។

ទ្រឹស្តីបទ ២.៤០ (វិសមភាពត្រីកោណ)៖
ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}$ គេបាន

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

សមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $ab \geq 0$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៤១៖
ដោយ $-|a| \leq a \leq |a|$ និង $-|b| \leq b \leq |b|$។ បូកវិសមភាពទាំងពីរអង្គនឹងអង្គ៖

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

នេះសមមូលនឹង $|a+b| \leq |a|+|b|$។ ចំពោះសមភាព៖ លើកជាការ៉េ $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$ និង $(|a|+|b|)^2 = a^2+2|ab|+b^2$។ ដូច្នេះសមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $ab = |ab|$ ឬ $ab \geq 0$។

■

ចំណាំ ២.៤២៖
ឈ្មោះ «ត្រីកោណ» មកពីទិដ្ឋភាពធរណីមាត្រ៖ ក្នុងត្រីកោណ ជ្រុងមួយតូចជាង ឬស្មើផលបូកជ្រុងពីរផ្សេង ($AC \leq AB + BC$)។ វិសមភាពលើចំនួនពិតគឺជាករណីពិសេសលើអ័ក្សចំនួន ដែលចំណុចទាំងបីនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.៤៣ (វិសមភាពត្រីកោណាបញ្ច្រាស់)៖

ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}$ គេបាន $||a| - |b|| \leq |a - b|$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៨៤៖
តាមវិសមភាពត្រីកោណ $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$ នោះ $|a| - |b| \leq |a-b|$។
ដូចគ្នា $|b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$។ ផ្គូបវិសមភាពទាំងពីរបាន $||a| - |b|| \leq |a-b|$។

■

២.៦.១ ការអនុវត្ត៖ ប្រៀបធៀបវិធីពីរ

ឧទាហរណ៍ ២.៨៥៖
បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេបាន $|x-2| + |x+3| \geq 5$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៨៦ (វិធីទី ១ ៖ ប្រើវិសមភាពត្រីកោណ)៖
គេបាន $|x-2| + |x+3| = |2-x| + |x+3| \geq |(2-x)+(x+3)| = |5| = 5$។
សមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $(2-x)(x+3) \geq 0 \iff -3 \leq x \leq 2$។

■

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៨៧ (វិធីទី ២ ៖ បំណែងចែកករណី)៖
ចំណុចប្តូរសញ្ញាគឺ $x = -3$ និង $x = 2$។ យើងចែកចំនួនពិតជា ៣ ករណី៖

- ករណី $x < -3$៖ $|x-2| + |x+3| = (2-x) + (-x-3) = -2x - 1 > 5$។
- ករណី $-3 \leq x \leq 2$៖ $|x-2| + |x+3| = (2-x) + (x+3) = 5$។
- ករណី $x > 2$៖ $|x-2| + |x+3| = (x-2) + (x+3) = 2x + 1 > 5$។

គ្រប់ករណីទាំងអស់នាំឱ្យ $|x-2| + |x+3| \geq 5$។

■

ចំណាំ ២.៨៨៖
វិធីទី ១ ខ្លី ហើយប្រាប់ផងថាសមភាពកើតឡើងនៅពេលណា។ វិធីទី ២ វែងជាង ប៉ុន្តែបង្ហាញតម្លៃពិតនៃកន្សោមលើគ្រប់ចន្លោះ ដែលមានប្រយោជន៍ពេលដោះស្រាយសមីការនិងវិសមភាពតម្លៃដាច់ខាត។ ក្នុងន័យធរណីមាត្រ $|x-2| + |x+3|$ ជាផលបូកចម្ងាយពី x ទៅ 2 និងទៅ -3 ដែលមិនតូចជាងចម្ងាយរវាង 2 និង -3 គឺ 5។

២.៧ សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា (Mathematical Induction)

ទ្រឹស្តីបទ ២.៤៩ (វិចារកំណើនគណិតវិទ្យា)៖
ឱ្យ $P(n)$ ជាសំណើដែលពាក់ព័ន្ធនឹងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq n_0$។ បើ

១ ជំហានមូលដ្ឋាន៖ $P(n_0)$ ពិត ហើយ

២ ជំហានកំណើន៖ ចំពោះគ្រប់ $k \geq n_0$ បើ $P(k)$ ពិត (ហៅថា សមតិកម្មកំណើន) នោះ $P(k+1)$ ពិត

នោះ $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \geq n_0$។

ចំណាំ ២.៥០៖
គំនិតដូចជាដូមីណូ៖ ជំហានមូលដ្ឋានផ្តួលដូមីណូទីមួយ ជំហានកំណើនជានាថាដូមីណូមួយដួលនាំឱ្យដូមីណូបន្ទាប់ដួល។ ត្រូវការទាំងពីរ បើខ្វះមួយ សម្រាយមិនពេញលេញ។

ឧទាហរណ៍ ២.៥១៖
បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេបាន $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៥២៖
តាង $P(n)$៖ $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$។

- មូលដ្ឋាន ($n = 1$)៖ អង្គឆ្វេង $= 1$ អង្គស្តាំ $= \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$។ ដូចនេះ $P(1)$ ពិត។
- កំណើន៖ សន្មតថា $P(k)$ ពិត គឺ $1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$។ គេបាន៖

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

  នេះគឺ $P(k+1)$ ពិត។

តាមវិចារកំណើន $P(n)$ ពិតគ្រប់ $n \geq 1$។

■

ឧទាហរណ៍ ២.៥៣៖
បង្ហាញថា $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៥៤៖ • មូលដ្ឋាន ($n=1$)៖ $1=1^2$ ពិត។

• កំណើន៖ សន្មតថា $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$។ គេបាន៖

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

ដូចនេះ $P(k+1)$ ពិត។

តាមវិចារកំណើន សំណើពិតគ្រប់ $n\geq 1$។

■

ឧទាហរណ៍ ២.៥៥៖
បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ចំនួន 4^n-1 ចែកដាច់នឹង 3។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៥៦៖ • មូលដ្ឋាន ($n=0$)៖ $4^0-1=0$ ចែកដាច់នឹង 3។

• កំណើន៖ សន្មតថា $3\mid 4^k-1$ ឬ $4^k-1=3m$ ($m\in\mathbb{Z}$)។ គេបាន៖

$$4^{k+1}-1=4\cdot 4^k-1=4(4^k-1)+3=4\cdot 3m+3=3(4m+1)$$

ដូចនេះ $3\mid 4^{k+1}-1$។

តាមវិចារកំណើន សំណើពិតគ្រប់ $n\geq 0$។

■

ឧទាហរណ៍ ២.៥៧៖
បង្ហាញថា $n^2<2^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 5$។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៥៨៖ • មូលដ្ឋាន ($n=5$)៖ $5^2=25<32=2^5$ ពិត។

• កំណើន៖ សន្មតថា $k\geq 5$ និង $k^2<2^k$។ គេបាន $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2$។ ត្រូវបង្ហាញ $2k^2\geq (k+1)^2$ ឬ $k^2-2k-1\geq 0$។ ដោយ $k\geq 5$ គេមាន៖

$$k^2-2k-1=k(k-2)-1\geq 5\cdot 3-1=14>0$$

ដូចនេះ $2^{k+1} > 2k^2 \geq (k+1)^2$។
តាមវិចារកំណើន សំណើពិតគ្រប់ $n \geq 5$។

■

ចំណាំ ២.៥៩៖
ជំហានមូលដ្ឋានមិនចាំបាច់ចាប់ពី $n = 1$ ទេ ត្រូវចាប់ពីតម្លៃតូចបំផុត n_0 ដែលសំណើពិត។ ឧទាហរណ៍ទី ៤ មិនពិតចំពោះ $n = 3, 4$ ($9 > 8$, $16 = 16$)។

២.៧.១ វិចារកំណើនខ្លាំង (Strong Induction)

ទ្រឹស្តីបទ ២.៦០ (វិចារកំណើនខ្លាំង)៖
បើ $P(n_0)$ ពិត ហើយចំពោះគ្រប់ $k \geq n_0$ ការសន្មតថា $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(k)$ ពិតទាំងអស់ នាំឱ្យ $P(k+1)$ ពិត នោះ $P(n)$ ពិតគ្រប់ $n \geq n_0$។

ឧទាហរណ៍ ២.៦១៖
បង្ហាញថា ចំនួនគត់ $n \geq 2$ គ្រប់ចំនួនអាចសរសេរជាផលគុណនៃចំនួនបឋម។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៦២៖
- មូលដ្ឋាន ($n = 2$)៖ 2 ជាចំនួនបឋម។
- កំណើន៖ សន្មតថា ចំនួនគត់ m គ្រប់ចំនួនដែល $2 \leq m \leq k$ សរសេរជាផលគុណចំនួនបឋមបាន។ ពិនិត្យ $k+1$៖
  - បើ $k+1$ ជាចំនួនបឋម នោះបានហើយ។
  - បើមិនមែន នោះ $k+1 = ab$ ដែល $2 \leq a, b \leq k$។ តាមសមតិកម្ម a និង b សរសេរជាផលគុណចំនួនបឋមបាន ដូចនេះ $k+1 = ab$ ក៏ដូច្នោះដែរ។

តាមវិចារកំណើនខ្លាំង សំណើពិតគ្រប់ $n \geq 2$។

■

២.៧.២ កំហុសដែលតែងកើតមាន

- ភ្លេចជំហានមូលដ្ឋាន៖ សន្មតថា $P(n)$៖ «$n^2 + n + 1$ ជាចំនួនគូ»។ ជំហានកំណើនពិត ព្រោះ $(k+1)^2 + (k+1) + 1 = (k^2 + k + 1) + 2(k+1)$ ប៉ុន្តែ $P(1)$ មិនពិត (3 សេស) ដូច្នេះសំណើមិនពិតសោះ។

- ប្រើមូលដ្ឋានមិនត្រូវ៖ ជ្រើស n_0 ដែលតូចពេក ឬធំពេក។
- សរសេរជំហានកំណើនមិនប្រើសមតិកម្ម $P(k)$៖ ត្រូវតែប្រើ $P(k)$ ក្នុងការទាញ $P(k+1)$។
- សន្មត $P(k+1)$ ពិតជាមុន៖ ត្រូវចាប់ពី $P(k)$ ទៅ $P(k+1)$ មិនមែនបញ្ច្រាស់។

២.៨ សម្រាយបញ្ជាក់ដោយរកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ (Disproof by Counterexample)

និយមន័យ ២.៦៣ (ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ)៖

ដើម្បីបង្ហាញថា សំណើទូទៅ $\forall x \in S, P(x)$ មិនពិត យើងគ្រាន់តែរកធាតុ $c \in S$ យ៉ាងតិចមួយដែលធ្វើឱ្យ $P(c)$ មិនពិត។ ធាតុ c នោះហៅថា ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ (Counterexample)។

ឧទាហរណ៍ ២.៦៤៖
បង្ហាញថា សំណើ «ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, y \in \mathbb{R}$ គេបាន $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$» គឺជាសំណើមិនពិត។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៦៥៖
ជ្រើសរើស $x = 3$ និង $y = 4$៖

- អង្គឆ្វេង៖ $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- អង្គស្តាំ៖ $3+4 = 7$

ដោយ $5 \neq 7$ នាំឱ្យ $(x,y) = (3,4)$ ជាឧទាហរណ៍ផ្ទុយ។ ដូចនេះ សំណើខាងលើមិនពិតឡើយ។

■

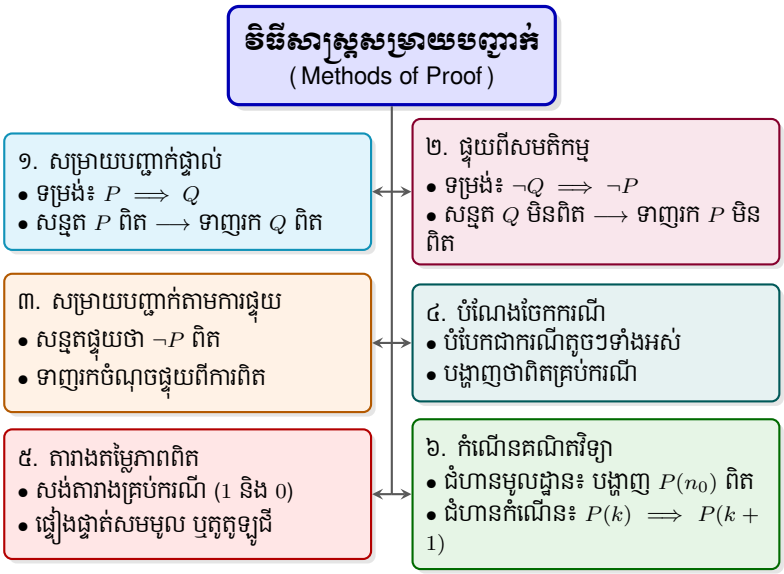
ឧទាហរណ៍ ២.៦៦៖
បង្ហាញថា សំណើ «ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \in \mathbb{N}$ កន្សោម n^2+n+41 តែងតែជាចំនួនបឋម» គឺជាសំណើមិនពិត។

សម្រាយបញ្ជាក់ ២.៦៧៖
ចំពោះ $n = 1, 2, \ldots, 39$ កន្សោមនេះផ្តល់ចំនួនបឋមមែន ប៉ុន្តែបើយើងសាកល្បងជ្រើសរើស $n = 40$ គេបាន៖

$$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 41^2$$

ដែលចែកដាច់នឹង 41 (មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ)។ ដូចនេះ $n = 40$ ជាឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ហើយសំណើខាងលើមិនពិតឡើយ។

■



លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ២.៦៨៖
គេមានសំណើពីរ p : ចំនួនសិស្សមធ្យមសិក្សាកំពុងកើនឡើង និង q : សិស្សភាគច្រើនចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យា ។ សរសេរឃ្លាចំពោះសំណើនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក $p \wedge q$ ខ $p \vee q$ គ $\bar{q}$ ឃ $\bar{p} \wedge q$

លំហាត់ ២.៦៩៖
សរសេរសំណើបដិសេធនៃសំណើដូចខាងក្រោម ៖

១ ម៉ាស៊ីនផ្ញើសារដោប់រវល់ និង ម៉ាស៊ីនថតចម្លងខូច ។

២ បាល់ទី 1 ពណ៌ស ឬ បាល់ទី 2 ពណ៌ក្រហម ។

៣ អាវយឺតមានស្នាមប្រឡាក់ និងមិនមែនលក់នៅហាងសុរិយោ ។

លំហាត់ ២.៧០៖
កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃតារាងខាងក្រោម ៖

១ ផែនដីមានទំហំមិនធំជាងព្រះចន្ទទេ ។

២ $3+4=7$ និងខែមករាមានចំនួន 32ថ្ងៃ ។

៣ $3+4=7$ ឬ ខែមករាមានចំនួន 32 ថ្ងៃ ។

៤ និស្សិតមហាវិទ្យាល័យខ្លះផឹកកាហ្វេ និង និស្សិតមហាវិទ្យាល័យទាំងអស់មានទូរស័ព្ទដៃ ។

លំហាត់ ២.៧១៖
សង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗខាងក្រោមតាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

១ $\bar{p} \vee \bar{q}$ **២** $\overline{\bar{p} \vee q}$ **៣** $p \vee (q \vee \bar{p})$

លំហាត់ ២.៧២៖
កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោមតាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

- ករណីទី ១ ៖ p ពិត q មិនពិត និង r ពិត
- ករណីទី ២ ៖ p មិនពិត q មិនពិត និង r ពិត

ក $\overline{p} \vee (q \wedge r)$
ខ $(\overline{p} \wedge r) \wedge q$
គ $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee \overline{r}$
ឃ $(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee \overline{r}$
ង $(p \wedge \overline{q}) \vee r$

លំហាត់ ២.៧៣៖
ដោយប្រើតារាងភាពពិត ចូរបញ្ជាក់កូសំណើដែលសមមូលគ្នា ៖

ក $p \vee \overline{q}$ និង $\overline{p} \wedge q$ ខ $\overline{p} \wedge q$ និង $\overline{p \vee \overline{q}}$ គ $q \wedge (\overline{p} \vee q)$ និង $\overline{\overline{p} \vee q}$

លំហាត់ ២.៧៤៖
គេមានសំណើ p : គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស និង q : គ្រាប់ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5 ។ ដោយប្រើលក្ខណៈរបស់ $DeMorgan$ ចំពោះសំណើខាងក្រោម និងសរសេរសំណើដែលបានទាំងនោះឲ្យទៅជាឃ្លាប្រយោគ។

ក $\overline{p \wedge q}$
ខ $\overline{p \vee \overline{q}}$
គ $\overline{\overline{p} \vee q}$
ឃ $\overline{p \wedge \overline{q}}$
ង $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$

លំហាត់ ២.៧៥៖
ចូរបង្ហាញលក្ខណៈខាងក្រោម៖

ក $p \vee (p \wedge q) = p$
ខ $\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) = \overline{p}$
គ $p \wedge (p \vee q) = p$
ឃ $(p \vee q) \wedge \overline{p} = \overline{p} \wedge q$

លំហាត់ ២.៧៦៖
កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម៖

ក បើ $10 + 5 = 15$ នោះ $56 \div 7 = 8$
ខ បើ 2 ជាចំនួនគត់គូ និង 6 ជាចំនួនគត់សេស នោះ 15 គឺជាចំនួនគត់សេស ។
គ (ត្រីកោណមួយមានជ្រុង 4 ឬ ការេមួយមានជ្រុង 3) និងចតុកោណមានជ្រុង 4 ។

លំហាត់ ២.៧៧៖
សង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម ៖

ក $(p \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$
ខ $p \Longrightarrow (p \Longrightarrow p)$
គ $(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$
ឃ $(p \vee q) \Longrightarrow (p \wedge q)$
ង $(p \Longrightarrow q) \vee (p \Longrightarrow \overline{q})$
ច $[p \vee (q \wedge r)] \Longrightarrow [(p \wedge r) \vee q]$

លំហាត់ ២.៧៨៖
ចូរសរសេរសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើខាងក្រោម៖

ក បើខ្ញុំសិក្សាគណិតវិទ្យានោះខ្ញុំនឹងប្រលងជាប់អាហារូបករណ៍ ។
ខ បើ x ជាចំនួនគត់រឹុឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ x^2 ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។
គ បើផែនដីរំលែជុំព្រះអាទិត្យ នោះព្រះចន្ទនឹងរំលែជុំវិញផែនដី ។

លំហាត់ ២.៧៩៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ហាក់ផ្ទាល់៖

ក ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $5n+3$ ជាចំនួនគត់គូ។
ខ ប្រសិនបើ $a \mid b$ និង $b \mid c$ នោះ $a \mid c$ (ចំពោះ $a, b, c \in \mathbb{Z}$)។

លំហាត់ ២.៨០៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ហាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម៖

ក ឱ្យ $x \in \mathbb{R}$។ ប្រសិនបើ $x^2 + 2x - 3 < 0$ នោះ $-3 < x < 1$។
ខ ឱ្យ $a, b \in \mathbb{Z}$។ ប្រសិនបើ ab ជា ចំនួនគត់សេស នោះ a និង b សុទ្ធតែ ជាចំនួនគត់សេស។
គ គេមាន x និង y ជាចំនួនគត់រឹុឡាទីបវិជ្ជមាន និង xy ជាចំនួនគត់សេស នោះ x និង y ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ ។
ឃ គេមាន $x(x-2) < 0$ នោះ $0 < x < 2$ ។
ង ឧបមា $n \in \mathbb{Z}$ បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ។
ច ឧបមា $n \in \mathbb{Z}$ បើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេស ។

ឆ ឧបមា $a,b,c \in \mathbb{Z}$ បើ $a \nmid bc$ នោះ $a \nmid b$ ។

ជ ឧបមា $x \in \mathbb{R}$ បើ $x^2+5x<0$ នោះ $x<0$ ។

ឈ ឧបមា $x \in \mathbb{R}$ បើ $x^3-x \geq 0$ នោះ $x>-1$ ។

ញ ឧបមា $a,b \in \mathbb{Z}$ បើ ab និង $a+b$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ a និង b ជាចំនួនគត់គូ ។

ដ ឧបមា $x \in \mathbb{R}$ បើ $x^5-4x^4+3x^3-x^2+3x-4 \geq 0$ នោះ $x \geq 0$ ។

ឋ ឧបមា $n \in \mathbb{Z}$ បើ $n^2 \nmid 3$ នោះ $n \nmid 3$ ។

ឌ ឧបមា $x,y \in \mathbb{Z}$ បើ $x^2(y+3)$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ x ជាចំនួនគត់គូ ឬ y ជាចំនួនគត់សេស ។

ឍ ឧបមា $a \in \mathbb{Z}$ បើ $a^2 \nmid 4$ នោះ a គឺជាចំនួនគត់សេស ។

លំហាត់ ២.៨១៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ជាក់តាមការផ្ទុយពីការពិត៖

ក បង្ហាញថា $\log_2 3$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ ។

ខ ឱ្យ $a,b \in \mathbb{R}$។ ប្រសិនបើ a ជាចំនួនសនិទាន និង b ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $a+b$ ជាចំនួនអសនិទាន។

គ បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ឃ បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p ។

ង បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ច បើ $a,b \in \mathbb{Z}$ នោះ $a^2-4b-3 \neq 0$ ។

ឆ បើ $b \in \mathbb{Z}$ និង $b \nmid k,\ \forall k \in \mathbb{N}$ នោះ $b=0$ ។

លំហាត់ ២.៨២៖
រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងខាងក្រោម ៖

ក ផលគុណនៃចំនួនអសនិទានពីរខុសគ្នាជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ បើ $x \geq \sqrt{7}$ នោះ $x \geq 3$ ។

គ $f(n)=n^2+n+1$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបផង និងជាពហុគុណនៃ 3 ផងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន n ។

ឃ $f(n) = (n+1)(n+2)(n+3)$ ចែកដាច់នឹង 12 ចំពោះគ្រប់ n ។

លំហាត់ ២.៨៣៖
ស្រាយបញ្ជាក់សំណើខាងក្រោម ៖

ក ឧបមាថា $a, b, c \in \mathbb{Z}$ បើ $a \mid b$ និង $c \mid d$ នោះ $ac \mid bd$ ។
ខ ឧបមាថា $a, b, c \in \mathbb{Z}$ បើ $a^2 \mid b$ និង $b^3 \mid c$ នោះ $a^6 \mid c$ ។
គ ឧបមា $x, y \in \mathbb{R}$ បើ $x^2 + 5y = y^2 + 5x$ នោះ $x = y$ ឬ $x + y = 5$។
ឃ បើ $n \in \mathbb{Z}$ នោះ $n^2 + 3n + 4$ ជាចំនួនគត់គូ ។
ង បើ $x \in \mathbb{R}$ និង $0 < x < 4$ នោះ $\dfrac{4}{x(4-x)} \geq 1$ ។

លំហាត់ ២.៨៤៖

លំហាត់ ២.៨៥៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើនគណិតវិទ្យា៖

ក $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ គ្រប់ $n \geq 1$។
ខ $2^n > n^2$ គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 5$។
គ ចំពោះ $h > 0$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 2$ បង្ហាញថា $(1+h)^n > 1 + nh$ ។
ឃ បង្ហាញថា $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ ។
ង ស្រាយបញ្ជាក់ថាវិសមភាព $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdots + \dfrac{1}{n}\right)(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \geq n^2$ ។
ច ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។
ឆ បង្ហាញថា $n < 2^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។
ជ ស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$ ។

លំហាត់ ២.៨៦៖
តើសំណើខាងក្រោមនេះណាខ្លះជាសំណើពិត ណាខ្លះជាសំណើមិនពិត ? បើវាជាសំណើ

ពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ ហើយបើជាសំណើមិនពិតចូរកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ។

ក) បើ α ជាចំនួនអសនិទាន និង β ជាសំនួនអសនិទាន នោះ $\alpha+\beta$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ខ) បើ M ជា ចំនួនអសនិទាន និង N ជា ចំនួន សនិទាន នោះ $M+N$ ជាចំនួនអសនិទាន។

គ) បើ A^2 ជាចំនួនអសនិទាន នោះ A ជាចំនួនអសនិទាន។

ដំណោះស្រាយលំហាត់

លំហាត់ ២.៨៧៖
គេមានសំណើពីរ p : ចំនួនសិស្សមធ្យមសិក្សាកំពុងកើនឡើង និង q : សិស្សភាគច្រើនចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យា ។ សរសេរឃ្លាចំពោះសំណើនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក $p \wedge q$ ខ $p \vee q$ គ $\bar{q}$ ឃ $\bar{p} \wedge q$

ចម្លើយ ៖ សរសេរជាឃ្លាចំពោះសំណើនីមួយៗ ៖

ក $p \wedge q$ ៖ ចំនួនសិស្សមធ្យមសិក្សាកំពុងកើនឡើង និង សិស្សភាគច្រើនចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យា។

ខ $p \vee q$ ៖ ចំនួនសិស្សមធ្យមសិក្សាកំពុងកើនឡើង ឬ សិស្សភាគច្រើនចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យា។

គ $\bar{q}$ ៖ សិស្សភាគច្រើនមិនចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យាទេ។

ឃ $\bar{p} \wedge q$ ៖ ចំនួនសិស្សមធ្យមសិក្សាមិនកំពុងកើនឡើងទេ និង សិស្សភាគច្រើនចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យា។

លំហាត់ ២.៨៨៖
សរសេរសំណើបដិសេធនៃសំណើដូចខាងក្រោម ៖

១ ម៉ាស៊ីនផ្ញើសារដាប់រវៃ់ និង ម៉ាស៊ីនថតចម្លងខូច ។

២ បាល់ទី 1 ពណ៌ស ឬ បាល់ទី 2 ពណ៌ក្រហម ។

៣ អាវយឺតមានស្នាមប្រឡាក់ និងមិនមែនលក់នៅហាងសុរិយា ។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណើបដិសេធនៃសំណើនីមួយៗ ៖

១ ម៉ាស៊ីនផ្ញើសារមិនដាប់រវៃ់ទេ (ឬទំនេរ) ឬ ម៉ាស៊ីនថតចម្លងមិនខូចទេ។

២ បាល់ទី 1 មិនមែនពណ៌សទេ និង បាល់ទី 2 មិនមែនពណ៌ក្រហមទេ។

៣ អាវយឺតគ្មានស្នាមប្រឡាក់ទេ ឬ លក់នៅហាងសុរិយា។

លំហាត់ ២.៨៩៖
កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃតារាងខាងក្រោម ៖

១ ផែនដីមានទំហំមិនធំជាងព្រះចន្ទទេ ។

២ $3+4=7$ និងខែមករាមានចំនួន 32ថ្ងៃ ។

៣ $3+4=7$ ឬ ខែមករាមានចំនួន 32 ថ្ងៃ ។

៤ និស្សិតមហាវិទ្យាល័យខ្លះផឹកកាហ្វេ និង និស្សិតមហាវិទ្យាល័យទាំងអស់មានទូរស័ព្ទដៃ ។

ចម្លើយ ៖

១ តាង p ៖ «ផែនដីមានទំហំមិនធំជាងព្រះចន្ទទេ»
ដោយសារផែនដីមានទំហំធំជាងព្រះចន្ទ នាំឱ្យសំណើ p មានតម្លៃភាពពិត មិនពិត $(P(p)=0)$ ។

២ តាង q ៖ «$3+4=7$» $(P(q)=1)$
និង r ៖ «ខែមករាមានចំនួន 32 ថ្ងៃ» $(P(r)=0)$
នាំឱ្យសំណើ $q\wedge r$ ៖ «$3+4=7$ និង ខែមករាមានចំនួន 32 ថ្ងៃ» មានតម្លៃភាពពិត មិនពិត $(P(q\wedge r)=0)$ ។

៣ តាង q ៖ «$3+4=7$» $(P(q)=1)$
និង r ៖ «ខែមករាមានចំនួន 32 ថ្ងៃ» $(P(r)=0)$
នាំឱ្យសំណើ $q\vee r$ ៖ «$3+4=7$ ឬ ខែមករាមានចំនួន 32 ថ្ងៃ» មានតម្លៃភាពពិត ពិត $(P(q\vee r)=1)$ ។

៤ តាង s ៖ «និស្សិតមហាវិទ្យាល័យខ្លះផឹកកាហ្វេ» $(P(s)=1)$
និង t ៖ «និស្សិតមហាវិទ្យាល័យទាំងអស់មានទូរស័ព្ទដៃ» $(P(t)=0)$
នាំឱ្យសំណើ $s\wedge t$ ៖ «និស្សិតមហាវិទ្យាល័យខ្លះផឹកកាហ្វេ និង និស្សិតមហាវិទ្យាល័យទាំងអស់មានទូរស័ព្ទដៃ» មានតម្លៃភាពពិត មិនពិត $(P(s\wedge t)=0)$ ។

លំហាត់ ២.៩០៖
សង់ តារាងតម្លៃ ភាព ពិត នៃ សំណើ នី មួយ ៗ ខាងក្រោម តាម ករណី នី មួយ ៗ ខាងក្រោម ៖

១ $\overline{p}\vee\overline{q}$ **២** $\overline{\overline{p}\vee q}$ **៣** $p\vee(q\vee\overline{p})$

ចម្លើយ ៖ យើងសង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗដូចខាងក្រោម (តាង 1 ជាពិត និង 0 ជាមិនពិត) ៖

1. សង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $\bar{p} \vee \bar{q}$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

2. សង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $\overline{\bar{p} \vee q}$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$\overline{\bar{p} \vee q}$
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

3. សង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \vee \bar{p})$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$q \vee \bar{p}$	$p \vee (q \vee \bar{p})$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

លំហាត់ ២.៩១៖
កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោមតាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

- ករណីទី ១ ៖ p ពិត q មិនពិត និង r ពិត
- ករណីទី ២ ៖ p មិនពិត q មិនពិត និង r ពិត

ក) $\bar{p} \vee (q \wedge r)$
ខ) $(\bar{p} \wedge r) \wedge q$
គ) $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \bar{r}$
ឃ) $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee \bar{r}$
ង) $(p \wedge \bar{q}) \vee r$

ចម្លើយ ៖ កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗ ៖ ករណីទី ១ ៖ p ពិត, q មិនពិត, r ពិត

(ត.$(p)=1$, ត.$(q)=0$, ត.$(r)=1 \implies$ ត.$(\bar{p})=0,$ ត.$(\bar{q})=1,$ ត.$(\bar{r})=0$)

ក សំណើ $\bar{p}\vee(q\wedge r)$ ៖
គេបាន ត.$(q\wedge r)=0\wedge 1=0$
នាំឱ្យ ត.$(\bar{p}\vee(q\wedge r))=0\vee 0=0$ ។

ខ សំណើ $(\bar{p}\wedge r)\wedge q$ ៖
គេបាន ត.$(\bar{p}\wedge r)=0\wedge 1=0$
នាំឱ្យ ត.$((\bar{p}\wedge r)\wedge q)=0\wedge 0=0$ ។

គ សំណើ $(\bar{p}\wedge\bar{q})\vee\bar{r}$ ៖
គេបាន ត.$(\bar{p}\wedge\bar{q})=0\wedge 1=0$
នាំឱ្យ ត.$((\bar{p}\wedge\bar{q})\vee\bar{r})=0\vee 0=0$ ។

ឃ សំណើ $(\bar{p}\vee\bar{q})\vee\bar{r}$ ៖
គេបាន ត.$(\bar{p}\vee\bar{q})=0\vee 1=1$
នាំឱ្យ ត.$((\bar{p}\vee\bar{q})\vee\bar{r})=1\vee 0=1$ ។

ង សំណើ $(p\wedge\bar{q})\vee r$ ៖
គេបាន ត.$(p\wedge\bar{q})=1\wedge 1=1$
នាំឱ្យ ត.$((p\wedge\bar{q})\vee r)=1\vee 1=1$ ។

ករណីទី ២ ៖ p មិនពិត, q មិនពិត, r ពិត

(ត.$(p)=0$, ត.$(q)=0$, ត.$(r)=1 \implies$ ត.$(\bar{p})=1,$ ត.$(\bar{q})=1,$ ត.$(\bar{r})=0$)

ក សំណើ $\bar{p}\vee(q\wedge r)$ ៖
គេបាន ត.$(q\wedge r)=0\wedge 1=0$
នាំឱ្យ ត.$(\bar{p}\vee(q\wedge r))=1\vee 0=1$ ។

ខ សំណើ $(\bar{p}\wedge r)\wedge q$ ៖
គេបាន ត.$(\bar{p}\wedge r)=1\wedge 1=1$
នាំឱ្យ ត.$((\bar{p}\wedge r)\wedge q)=1\wedge 0=0$ ។

គ សំណើ $(\bar{p}\wedge\bar{q})\vee\bar{r}$ ៖
គេបាន ត.$(\bar{p}\wedge\bar{q})=1\wedge 1=1$
នាំឱ្យ ត.$((\bar{p}\wedge\bar{q})\vee\bar{r})=1\vee 0=1$ ។

ឃ សំណើ $(\bar{p}\vee\bar{q})\vee\bar{r}$ ៖
គេបាន ត.$(\bar{p}\vee\bar{q})=1\vee 1=1$

នាំឱ្យ ត.$((\bar{p} \vee \bar{q}) \vee \bar{r}) = 1 \vee 0 = 1$ ។

ង) សំណើ $(p \wedge \bar{q}) \vee r$ ៖
គេបាន ត.$(p \wedge \bar{q}) = 0 \wedge 1 = 0$
នាំឱ្យ ត.$((p \wedge \bar{q}) \vee r) = 0 \vee 1 = 1$ (ឬដោយសារ r ពិត នាំឱ្យសំណើ ឬ ($\vee$) ពិត)។

លំហាត់ ២.៩២៖
ដោយប្រើតារាងភាពពិត ចូរបញ្ជាក់ថាសំណើដែលសមមូលគ្នា ៖

ក) $p \vee \bar{q}$ និង $\bar{p} \wedge q$
ខ) $\bar{p} \wedge q$ និង $\overline{p \vee \bar{q}}$
គ) $q \wedge (\bar{p} \vee q)$ និង $\overline{\bar{p} \vee q}$

ចម្លើយ ៖ យើងសង់តារាងតម្លៃភាពពិតដើម្បីប្រៀបធៀបគូសំណើនីមួយៗ (តាង 1 ជាពិត និង 0 ជាមិនពិត) ៖

ក) ពិនិត្យសំណើ $p \vee \bar{q}$ និង $\bar{p} \wedge q$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge q$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៥ ($p \vee \bar{q}$) និងទី ៦ ($\bar{p} \wedge q$) មានតម្លៃខុសគ្នា ។
ដូចនេះ សំណើ $p \vee \bar{q}$ និង $\bar{p} \wedge q$ មិនសមមូលគ្នាទេ ($p \vee \bar{q} \not\equiv \bar{p} \wedge q$)។

ខ) ពិនិត្យសំណើ $\bar{p} \wedge q$ និង $\overline{p \vee \bar{q}}$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge q$	$\overline{p \vee \bar{q}}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៦ ($\bar{p} \wedge q$) និងទី ៧ ($\overline{p \vee \bar{q}}$) មានតម្លៃស្មើគ្នាគ្រប់ករណី $(0, 0, 1, 0)$ ។
ដូចនេះ សំណើ $\bar{p} \wedge q$ និង $\overline{p \vee \bar{q}}$ សមមូលគ្នានឹងគ្នា ($\bar{p} \wedge q \equiv \overline{p \vee \bar{q}}$)។

(គ) ពិនិត្យសំណើ $q \wedge (\bar{p} \vee q)$ និង $\overline{\bar{p} \vee q}$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$q \wedge (\bar{p} \vee q)$	$\overline{\bar{p} \vee q}$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៥ ($q \wedge (\bar{p} \vee q)$) និងទី ៦ ($\overline{\bar{p} \vee q}$) មានតម្លៃខុសគ្នា ។
ដូចនេះ សំណើ $q \wedge (\bar{p} \vee q)$ និង $\overline{\bar{p} \vee q}$ មិនសមមូលគ្នាទេ ($q \wedge (\bar{p} \vee q) \not\equiv \overline{\bar{p} \vee q}$)។

លំហាត់ ២.៩៣៖
គេមានសំណើ p : គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស និង q : គ្រាប់ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5 ។ ដោយប្រើលក្ខណៈរបស់ $DeMorgan$ ចំពោះសំណើខាងក្រោម និងសរសេរសំណើដែលបានទាំងនោះឲ្យទៅជាឃ្លាប្រយោគ។

(ក) $\overline{p \wedge q}$
(ខ) $\overline{p \vee \bar{q}}$
(គ) $\overline{\bar{p} \vee q}$
(ឃ) $\overline{p \wedge \bar{q}}$
(ង) $\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$

ចម្លើយ ៖ តាមបម្រាប់សំណើ ៖

- p : គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស $\implies$ $\bar{p}$: គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ (ឬមិនចេញលេខសេស)
- q : គ្រាប់ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5 $\implies$ $\bar{q}$: គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 5

អនុវត្តលក្ខណៈរបស់ De Morgan និងសរសេរជាឃ្លាប្រយោគ ៖

(ក) សំណើ $\overline{p \wedge q}$ ៖
តាមច្បាប់ De Morgan ៖ $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$
ឃ្លាប្រយោគ ៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ ឬ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 5 ។

(ខ) សំណើ $\overline{p \vee \bar{q}}$ ៖
តាមច្បាប់ De Morgan ៖ $\overline{p \vee \bar{q}} \equiv \bar{p} \wedge \bar{\bar{q}} \equiv \bar{p} \wedge q$
ឃ្លាប្រយោគ ៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ និង គ្រាប់ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5 ។

គ) សំណើ $\overline{\overline{p} \vee q}$ ៖
តាមច្បាប់ De Morgan ៖ $\overline{\overline{p} \vee q} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} \equiv p \wedge \overline{q}$
ឃ្លាប្រយោគ ៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស និង គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 5 ។

ឃ) សំណើ $\overline{p \wedge \overline{q}}$ ៖
តាមច្បាប់ De Morgan ៖ $\overline{p \wedge \overline{q}} \equiv \overline{p} \vee \overline{\overline{q}} \equiv \overline{p} \vee q$
ឃ្លាប្រយោគ ៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ ឬ គ្រាប់ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5 ។

ង) សំណើ $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$ ៖
តាមច្បាប់ De Morgan ៖ $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}} \equiv p \wedge q$
ឃ្លាប្រយោគ ៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស និង គ្រាប់ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5 ។

លំហាត់ ២.៩៨៖
ចូរបង្ហាញលក្ខណៈខាងក្រោម៖

ក) $p \vee (p \wedge q) = p$
ខ) $\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) = \overline{p}$
គ) $p \wedge (p \vee q) = p$
ឃ) $(p \vee q) \wedge \overline{p} = \overline{p} \wedge q$

ចម្លើយ ៖ យើងសង់តារាងតម្លៃភាពពិតដើម្បីបង្ហាញលក្ខណៈនៃសមមូលតក្កវិទ្យានីមួយៗ (តាង 1 ជាពិត និង 0 ជាមិនពិត) ៖

ក) បង្ហាញថា $p \vee (p \wedge q) = p$ ៖

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៤ មានតម្លៃពិតស្មើជួរឈរទី ១ គ្រប់ករណី $(1, 1, 0, 0)$។
ដូចនេះ $p \vee (p \wedge q) = p$ ពិត។

ខ) បង្ហាញថា $\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) = \overline{p}$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge q$	$(\overline{p \vee q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៧ មានតម្លៃពិតស្មើជួរឈរទី ៣ ($\bar{p}$) គ្រប់ករណី $(0, 0, 1, 1)$។
ដូចនេះ $\overline{(p \vee q)} \vee (\bar{p} \wedge q) = \bar{p}$ ពិត។

គ បង្ហាញថា $p \wedge (p \vee q) = p$ ៖

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៤ មានតម្លៃពិតស្មើជួរឈរទី ១ គ្រប់ករណី $(1, 1, 0, 0)$។
ដូចនេះ $p \wedge (p \vee q) = p$ ពិត។

ឃ បង្ហាញថា $(p \vee q) \wedge \bar{p} = \bar{p} \wedge q$ ៖

p	q	$\bar{p}$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \bar{p}$	$\bar{p} \wedge q$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត ជួរឈរទី ៥ និង ទី ៦ មានតម្លៃពិតស្មើគ្នា គ្រប់ករណី $(0, 0, 1, 0)$។ [0.3cm]
ដូចនេះ $(p \vee q) \wedge \bar{p} = \bar{p} \wedge q$ ពិត។

លំហាត់ ២.៥៤៖
កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម៖

ក បើ $10+5=15$ នោះ $56\div 7=8$

ខ បើ 2 ជាចំនួនគត់គូ និង 6 ជាចំនួនគត់សេស នោះ 15 គឺជាចំនួនគត់សេស ។

គ (ត្រីកោណមួយមានជ្រុង 4 ឬ ការេមួយមានជ្រុង 3) និងចតុកោណមានជ្រុង 4 ។

ចម្លើយ ៖ យើងសង់តារាងតម្លៃភាពពិត និងកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗដូចខាងក្រោម (តាង 1 ជាពិត និង 0 ជាមិនពិត) ៖

ក សំណើ ៖ «បើ $10+5=15$ នោះ $56\div 7=8$»
តាងសំណើ ៖

- $p: 10+5=15$ នាំឱ្យ ត.$(p)=1$
- $q: 56\div 7=8$ នាំឱ្យ ត.$(q)=1$

តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើលក្ខខណ្ឌ $p \implies q$ ៖

p	q	$p \implies q$
1	1	1

ដូចនេះ តម្លៃភាពពិតនៃសំណើគឺ ត.$(p \implies q)=1$ (សំណើពិត)។

ខ សំណើ ៖ «បើ 2 ជាចំនួនគត់គូ និង 6 ជាចំនួនគត់សេស នោះ 15 គឺជាចំនួនគត់សេស»
តាងសំណើ ៖

- $p: 2$ ជាចំនួនគត់គូ នាំឱ្យ ត.$(p)=1$
- $q: 6$ ជាចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ ត.$(q)=0$
- $r: 15$ គឺជាចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ ត.$(r)=1$

តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $(p\wedge q) \implies r$ ៖

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q) \implies r$
1	0	1	0	1

ដូចនេះ តម្លៃភាពពិតនៃសំណើគឺ ត.$((p\wedge q) \implies r)=1$ (សំណើពិត)។

គ សំណើ ៖ «(ត្រីកោណមួយមានជ្រុង 4 ឬ ការេមួយមានជ្រុង 3) និង ចតុកោណមានជ្រុង 4»

តាងសំណើ ៖

- p : ត្រីកោណមួយមានជ្រុង 4 នាំឱ្យ ត.$(p) = 0$
- q : ការេមួយមានជ្រុង 3 នាំឱ្យ ត.$(q) = 0$
- r : ចតុកោណមានជ្រុង 4 នាំឱ្យ ត.$(r) = 1$

តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $(p \vee q) \wedge r$ ៖

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	1	0	0

ដូចនេះ តម្លៃភាពពិតនៃសំណើគឺ ត.$((p \vee q) \wedge r) = 0$ (សំណើមិនពិត)។

លំហាត់ ២.៩៦៖
សង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម ៖

ក $(p \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$
ខ $p \Longrightarrow (p \Longrightarrow p)$
គ $(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$
ឃ $(p \vee q) \Longrightarrow (p \wedge q)$
ង $(p \Longrightarrow q) \vee (p \Longrightarrow \overline{q})$
ច $[p \vee (q \wedge r)] \Longrightarrow [(p \wedge r) \vee q]$

ចម្លើយ ៖ យើងសង់តារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗដូចខាងក្រោម (តាង 1 ជាពិត និង 0 ជាមិនពិត) ៖

ក សំណើ $(p \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$ ៖

p	$p \Longrightarrow p$	$(p \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$
1	1	1
0	1	0

ខ សំណើ $p \Longrightarrow (p \Longrightarrow p)$ ៖

p	$p \Longrightarrow p$	$p \Longrightarrow (p \Longrightarrow p)$
1	1	1
0	1	1

គ សំណើ $(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$ ៖

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

ឃ) សំណើ $(p \vee q) \implies (p \wedge q)$ ៖

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \implies (p \wedge q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

ង) សំណើ $(p \implies q) \vee (p \implies \bar{q})$ ៖

p	q	$\bar{q}$	$p \implies q$	$p \implies \bar{q}$	$(p \implies q) \vee (p \implies \bar{q})$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

ច) សំណើ $[p \vee (q \wedge r)] \implies [(p \wedge r) \vee q]$ ៖

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \vee q$	$[p \vee (q \wedge r)] \implies [(p \wedge r) \vee q]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

លំហាត់ ២.៩៧៖
ចូរសរសេរសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើខាងក្រោម៖

(ក) បើខ្ញុំសិក្សាគណិតវិទ្យានោះខ្ញុំនឹងប្រលងជាប់អាហារូបករណ៍ ។

(ខ) បើ x ជាចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ x^2 ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

(គ) បើផែនដីវិលជុំព្រះអាទិត្យ នោះព្រះចន្ទនឹងវិលជុំវិញផែនដី ។

ចម្លើយ ៖ តាមច្បាប់តក្កវិទ្យា សំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើលក្ខខណ្ឌ $p \implies q$ គឺសំណើ $\bar{q} \implies \bar{p}$ (បើមិន q នោះមិន p)។

យើងសរសេរសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

(ក) សំណើដើម ៖ «បើខ្ញុំសិក្សាគណិតវិទ្យា នោះខ្ញុំនឹងប្រឡងជាប់អាហារូបករណ៍»
សំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៖ បើខ្ញុំមិនប្រឡងជាប់អាហារូបករណ៍ទេ នោះខ្ញុំមិនបានសិក្សាគណិតវិទ្យាឡើយ ។

(ខ) សំណើដើម ៖ «បើ x ជាចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ x^2 ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន»
សំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៖ បើ x^2 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះ x មិនមែនជាចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីបវិជ្ជមានទេ ។

(គ) សំណើដើម ៖ «បើផែនដីវិលជុំវិញព្រះអាទិត្យ នោះព្រះចន្ទនឹងវិលជុំវិញផែនដី»
សំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៖ បើព្រះចន្ទមិនវិលជុំវិញផែនដីទេ នោះផែនដីក៏មិនវិលជុំវិញព្រះអាទិត្យដែរ ។

លំហាត់ ២.៩៨៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ហាក់ផ្ទាល់៖

(ក) ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $5n+3$ ជាចំនួនគត់គូ។

(ខ) ប្រសិនបើ $a \mid b$ និង $b \mid c$ នោះ $a \mid c$ (ចំពោះ $a, b, c \in \mathbb{Z}$)។

សម្រាយបញ្ហាក់ ២.៩(ក) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $5n+3$ ជាចំនួនគត់គូ ៖

សន្មតថា n ជាចំនួនគត់សេស ។
តាមនិយមន័យ មានចំនួនគត់ $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $n = 2k+1$ ។
ជំនួស $n = 2k+1$ ចូលក្នុងកន្សោម $5n+3$ គេបាន ៖

$$5n+3 = 5(2k+1)+3 = 10k+5+3 = 10k+8 = 2(5k+4)$$

តាង $m = 5k+4$ (ដោយ $k \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $m \in \mathbb{Z}$) គេបាន ៖

$$5n+3 = 2m \quad \text{(ជាទម្រង់ចំនួនគត់គូ)}$$

ដូចនេះ ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $5n+3$ ជាចំនួនគត់គូ។

ខ) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $a \mid b$ និង $b \mid c$ នោះ $a \mid c$ ៖
សន្មតថា $a \mid b$ និង $b \mid c$ ។
តាមនិយមន័យភាពចែកដាច់ មានចំនួនគត់ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល ៖

$$b = ak_1 \quad \text{និង} \quad c = bk_2$$

ជំនួស $b = ak_1$ ចូលក្នុងសមភាព $c = bk_2$ គេបាន ៖

$$c = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$$

តាង $m = k_1k_2$ (ដោយ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $m \in \mathbb{Z}$) គេបាន ៖

$$c = am \implies a \mid c$$

ដូចនេះ ប្រសិនបើ $a \mid b$ និង $b \mid c$ នោះ $a \mid c$,ចំពោះ $a, b, c \in \mathbb{Z}$។

■

លំហាត់ ២.១០០៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម៖

ក) ឱ្យ $x \in \mathbb{R}$។ ប្រសិនបើ $x^2+2x-3 < 0$ នោះ $-3 < x < 1$។

ខ) ឱ្យ $a, b \in \mathbb{Z}$។ ប្រសិនបើ ab ជា ចំនួនគត់សេស នោះ a និង b សុទ្ធតែ ជាចំនួនគត់សេស។

គ) គេមាន x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង xy ជាចំនួនគត់សេស នោះ x និង

y ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ ។

ឃ គេមាន $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$ ។

ង ឧបមា $n\in\mathbb{Z}$ បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ។

ច ឧបមា $n\in\mathbb{Z}$ បើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេស ។

ឆ ឧបមា $a,b,c\in\mathbb{Z}$ បើ $a\nmid bc$ នោះ $a\nmid b$ ។

ជ ឧបមា $x\in\mathbb{R}$ បើ $x^2+5x<0$ នោះ $x<0$ ។

ឈ ឧបមា $x\in\mathbb{R}$ បើ $x^3-x\geq 0$ នោះ $x>-1$ ។

ញ ឧបមា $a,b\in\mathbb{Z}$ បើ ab និង $a+b$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ a និង b ជាចំនួនគត់គូ ។

ដ ឧបមា $x\in\mathbb{R}$ បើ $x^5-4x^4+3x^3-x^2+3x-4\geq 0$ នោះ $x\geq 0$ ។

ប ឧបមា $n\in\mathbb{Z}$ បើ $n^2\nmid 3$ នោះ $n\nmid 3$ ។

ឋ ឧបមា $x,y\in\mathbb{Z}$ បើ $x^2(y+3)$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ x ជាចំនួនគត់គូ ឬ y ជាចំនួនគត់សេស ។

ឍ ឧបមា $a\in\mathbb{Z}$ បើ $a^2\nmid 4$ នោះ a គឺជាចំនួនគត់សេស ។

ចម្លើយ ៖ សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម (Proof by Contrapositive) ៖

(គោលការណ៍ ៖ ដើម្បីបង្ហាញសំណើ $P\implies Q$ ថាពិត យើងត្រូវបង្ហាញសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម $\bar{Q}\implies\bar{P}$ ថាពិត)

ក បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x^2+2x-3<0$ នោះ $-3<x<1$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $x\leq -3$ ឬ $x\geq 1$ នោះ $x^2+2x-3\geq 0$»[cite: 2]។

- ករណី $x\geq 1\implies x-1\geq 0$ និង $x+3>0\implies (x-1)(x+3)\geq 0\implies x^2+2x-3\geq 0$។
- ករណី $x\leq -3\implies x+3\leq 0$ និង $x-1<0\implies (x-1)(x+3)\geq 0\implies x^2+2x-3\geq 0$។

ដោយសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្មពិត ដូចនេះសំណើដើមក៏ពិតដែរ។

ខ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ ab ជាចំនួនគត់សេស នោះ a និង b ជាចំនួនគត់សេស ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ a ជាចំនួនគត់គូ ឬ b ជាចំនួនគត់គូ នោះ ab

ជាចំនួនគត់គូ»។
សន្មតថា a ជាចំនួនគត់គូ នោះមាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = 2k$[cite: 2]។
គេបាន $ab = (2k)b = 2(kb)$ (ជាចំនួនគត់គូ)[cite: 2] (ករណី b ជាចំនួនគត់គូ ស្រាយដូចគ្នា)។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

(គ) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ xy ជាចំនួនគត់សេស នោះ x និង y ក៏ជាចំនួនគត់សេស ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ x ជាចំនួនគត់គូ ឬ y ជាចំនួនគត់គូ នោះ xy ជាចំនួនគត់គូ»។
បើសន្មត x ជាចំនួនគត់គូ ($x = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$) នោះ $xy = (2k)y = 2(ky)$ ជាចំនួនគត់គូ។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

(ឃ) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x(x-2) < 0$ នោះ $0 < x < 2$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $x \leq 0$ ឬ $x \geq 2$ នោះ $x(x-2) \geq 0$»។

- ករណី $x \leq 0 \implies x - 2 < 0 \implies x(x-2) \geq 0$។
- ករណី $x \geq 2 \implies x - 2 \geq 0 \implies x(x-2) \geq 0$។

ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

(ង) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ៖
សំណើ ផ្ទុយពី សម តិ កម្ម ៖ «ប្រសិនបើ n ជា ចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ជាចំនួនគត់សេស»
សន្មត n ជាចំនួនគត់សេស $\implies n = 2k + 1$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$។
គេបាន $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ (ជាចំនួនគត់សេស)។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

(ច) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេស ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ n^2 ជាចំនួនគត់គូ»។
សន្មត n ជាចំនួនគត់គូ $\implies n = 2k$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$។
គេបាន $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ (ជាចំនួនគត់គូ)។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

(ឆ) បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $a \nmid bc$ នោះ $a \nmid b$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $a \mid b$ នោះ $a \mid bc$»[cite: 3]។

សន្មត $a \mid b \implies b = ak$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$[cite: 3]។
គុណនឹង c លើអង្គទាំងពីរ គេបាន $bc = (ak)c = a(kc) \implies a \mid bc$[cite: 3]។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ជ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x^2 + 5x < 0$ នោះ $x < 0$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $x \geq 0$ នោះ $x^2 + 5x \geq 0$»។
សន្មត $x \geq 0 \implies x^2 \geq 0$ និង $5x \geq 0$។
បូកអង្គ និងអង្គ គេបាន $x^2 + 5x \geq 0$។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ឈ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x^3 - x \geq 0$ នោះ $x \geq -1$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $x < -1$ នោះ $x^3 - x < 0$»។
សន្មត $x < -1 \implies x + 1 < 0$ និង $x - 1 < -2 < 0$។
គេបាន $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$
ដោយ $x < 0, (x - 1) < 0$ នាំឱ្យ $x(x - 1) > 0$។
ដោយគុណនឹង $(x + 1) < 0$ គេបាន $x(x - 1)(x + 1) < 0 \implies x^3 - x < 0$។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ញ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ ab និង $a + b$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ a និង b ជាចំនួនគត់គូ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ a ជាចំនួនគត់សេស ឬ b ជាចំនួនគត់សេស នោះ ab មិនមែនជាចំនួនគត់គូ ឬ $a + b$ មិនមែនជាចំនួនគត់គូ»។

- បើ a, b សេសទាំងពីរ $\implies ab$ ជាចំនួនសេស (មិនមែនគូ)[cite: 3]។
- បើមួយសេស មួយគូ (ឧ. a សេស, b គូ) $\implies a + b$ ជាចំនួនសេស (មិនមែនគូ)។

ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ដ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 4 \geq 0$ នោះ $x \geq 0$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $x < 0$ នោះ $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 4 < 0$»។
សន្មត $x < 0 \implies x^5 < 0, -4x^4 < 0, 3x^3 < 0, -x^2 < 0, 3x < 0$ និង $-4 < 0$។
ផលបូកនៃចំនួនអវិជ្ជមានទាំងអស់ គឺជាចំនួនអវិជ្ជមាន នាំឱ្យ $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 4 < 0$។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ប បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $3 \nmid n^2$ នោះ $3 \nmid n$ ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ $3 \mid n$ នោះ $3 \mid n^2$»។
សន្មត $3 \mid n \implies n = 3k$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$។
គេបាន $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2) \implies 3 \mid n^2$ (ពិត)។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ឌ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $x^2(y+3)$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ x ជាចំនួនគត់គូ ឬ y ជាចំនួនគត់សេស ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ x ជាចំនួនគត់សេស និង y ជាចំនួនគត់គូ នោះ $x^2(y+3)$ ជាចំនួនគត់សេស»។
សន្មត x ជាចំនួនគត់សេស $\implies x^2$ ជាចំនួនគត់សេស។
សន្មត y ជាចំនួនគត់គូ $\implies y+3$ ជាចំនួនគត់សេស។
ផលគុណនៃពីរចំនួនគត់សេស $x^2(y+3)$ គឺជាចំនួនគត់សេស។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

ណ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $a^2 \nmid 4$ នោះ a គឺជាចំនួនគត់សេស ៖
សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ a ជាចំនួនគត់គូ នោះ $a^2 \mid 4$ (ឬ $4 \mid a^2$)»។
សន្មត a ជាចំនួនគត់គូ $\implies a = 2k$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$។
គេបាន $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 4(k^2) \implies 4 \mid a^2$ (ពិត)។
ដូចនេះ សំណើដើមពិតប្រាកដ។

លំហាត់ ២.១០១៖
ចូរបង្ហាញសំណើខាងក្រោមដោយប្រើ សម្រាយបញ្ហាក់តាមការផ្ទុយពីការពិត៖

ក បង្ហាញថា $\log_2 3$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ ។

ខ ឱ្យ $a, b \in \mathbb{R}$។ ប្រសិនបើ a ជាចំនួនសនិទាន និង b ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $a+b$ ជាចំនួនអសនិទាន។

គ បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ឃ បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p ។

ង បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ច បើ $a, b \in \mathbb{Z}$ នោះ $a^2 - 4b - 3 \neq 0$ ។

ឆ បើ $b \in \mathbb{Z}$ និង $b \nmid k,\ \forall k \in \mathbb{N}$ នោះ $b = 0$ ។

ចម្លើយ ៖ សម្រាយបញ្ហាក់តាមការផ្ទុយពីការពិត (Proof by Contradiction) ៖
(គោលការណ៍ ៖ ដើម្បីបង្ហាញសំណើ P ថាពិត យើងសន្មតផ្ទុយថា $\neg P$ ពិត រួចទាញរកចំណុចផ្ទុយពីការពិត)

ក បង្ហាញថា $\log_2 3$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ ៖
សន្មតផ្ទុយថា $\log_2 3$ ជាចំនួនសនិទាន ។
នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ដែល $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ (ដែល $m, n > 0$) ។
តាមនិយមន័យឡូការីត គេបាន ៖

$$2^{\frac{m}{n}} = 3 \implies \left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n = 3^n \implies 2^m = 3^n$$

ដោយ $m \geq 1$ នាំឱ្យ 2^m ជាចំនួនគត់គូ ឯ 3^n ជាចំនួនគត់សេស (ចំពោះ $n \geq 1$) ។
ជំនួបសមភាព $2^m = 3^n$ (ចំនួនគូ = ចំនួនសេស) គឺជាការ ផ្ទុយពីការពិត !
ដូចនេះ ការសន្មតមិនត្រឹមត្រូវទេ នាំឱ្យ $\log_2 3$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានឡើយ ។

ខ បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $a \in \mathbb{Q}$ និង $b \notin \mathbb{Q}$ នោះ $a+b \notin \mathbb{Q}$ ៖
សន្មតផ្ទុយថា $a+b$ ជាចំនួនសនិទាន (តាង $r = a+b \in \mathbb{Q}$) ។
គេទាញបាន $b = r - a$ ។
ដោយសារ $r \in \mathbb{Q}$ និង $a \in \mathbb{Q}$ នោះផលដកនៃពីរចំនួនសនិទាន $r-a$ ត្រូវតែជាចំនួនសនិទាន នាំឱ្យ $b \in \mathbb{Q}$ ។

ការទាញបាន $b \in \mathbb{Q}$ នេះ គឺជាការ ផ្ទុយពីសមតិកម្ម ដែលថា b ជាចំនួនអសនិទាន $(b \notin \mathbb{Q})$!
ដូចនេះ $a+b$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

គ បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ៖
សន្មតផ្ទុយថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនសនិទាន ។
នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ដែល $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ ហើយ $\gcd(m,n) = 1$ (ប្រភាគសម្រួលមិនបាន) ។
លើកជាការ៉េ គេបាន $5 = \frac{m^2}{n^2} \implies m^2 = 5n^2$ ។
នាំឱ្យ m^2 ជាពហុគុណនៃ $5 \implies m$ ជាពហុគុណនៃ 5 (តាង $m = 5k, k \in \mathbb{Z}^+$) ។
ជំនួស $m = 5k$ ចូលសមភាពដើម ៖ $(5k)^2 = 5n^2 \implies 25k^2 = 5n^2 \implies n^2 = 5k^2$ ។
នាំឱ្យ n^2 ជាពហុគុណនៃ $5 \implies n$ ជាពហុគុណនៃ 5 ដែរ ។
ដោយ m និង n សុទ្ធតែជាពហុគុណនៃ 5 នាំឱ្យ $\gcd(m,n) \geq 5$ ដែល ផ្ទុយពីការសន្មត ថា $\gcd(m,n) = 1$!
ដូចនេះ $\sqrt{5}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

ឃ បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p ៖
សន្មតផ្ទុយថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនសនិទាន (ចំពោះ p ជាចំនួនបឋម) ។
នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ដែល $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ ហើយ $\gcd(m,n) = 1$ ។
លើកជាការ៉េ គេបាន $p = \frac{m^2}{n^2} \implies m^2 = pn^2$ ។
ដោយ p ជាចំនួនបឋម នាំឱ្យ $p \mid m^2 \implies p \mid m$ (តាង $m = pk, k \in \mathbb{Z}^+$) ។
ជំនួស $m = pk$ ចូលសមភាពដើម ៖ $(pk)^2 = pn^2 \implies p^2k^2 = pn^2 \implies n^2 = pk^2$ ។
នាំឱ្យ $p \mid n^2 \implies p \mid n$ ដែរ ។
ដោយ $p \mid m$ និង $p \mid n$ នាំឱ្យ m និង n មានតួចែករួម $p \geq 2$ ដែល ផ្ទុយពីការសន្មត ថា $\gcd(m,n) = 1$!
ដូចនេះ $\sqrt{p}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p ។

ង បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ៖
សន្មតផ្ទុយថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន (តាង $r = 1+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) ។
គេទាញបាន $\sqrt{2} = r - 1$ ។
ដោយសារ $r \in \mathbb{Q}$ និង $1 \in \mathbb{Q}$ នាំឱ្យផលដក $r-1$ ជាចំនួនសនិទាន នាំឱ្យ $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទានដែរ ។

ការទាញបាន $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ គឺជាការ ផ្ទុយពីទ្រឹស្តីបទគណិតវិទ្យា ដែលបានស្រាយបញ្ជាក់រួចថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន !
ដូចនេះ $1+\sqrt{2}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

(ច) បង្ហាញថា បើ $a, b \in \mathbb{Z}$ នោះ $a^2 - 4b - 3 \neq 0$ ៖
សន្មតផ្ទុយថា មានចំនួនគត់ $a, b \in \mathbb{Z}$ ដែល $a^2 - 4b - 3 = 0$ ។
គេទាញបាន ៖

$$a^2 = 4b + 3 = 4b + 2 + 1 = 2(2b+1) + 1$$

នាំឱ្យ a^2 ជាចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ a ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ (តាង $a = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$) ។
ជំនួស $a = 2k+1$ ចូលសមភាពដើម ៖

$$(2k+1)^2 - 4b - 3 = 0 \implies 4k^2 + 4k + 1 - 4b - 3 = 0$$

$$4k^2 + 4k - 4b - 2 = 0 \implies 4(k^2 + k - b) = 2 \implies 2(k^2 + k - b) = 1$$

ដោយ $k, b \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $2(k^2 + k - b)$ ជាចំនួនគត់គូ ឯ 1 ជាចំនួនគត់សេស (ចំនួនគូ = ចំនួនសេស) គឺជាការ ផ្ទុយពីការពិត !
ដូចនេះ $a^2 - 4b - 3 \neq 0$ ពិតគ្រប់ $a, b \in \mathbb{Z}$ ។

(ឆ) បង្ហាញថា បើ $b \in \mathbb{Z}$ និង $b \nmid k,\ \forall k \in \mathbb{N}$ នោះ $b = 0$ ៖
សន្មតផ្ទុយថា $b \neq 0$ (ដោយ $b \in \mathbb{Z}$) ។
បើ $b \neq 0$ នោះតម្លៃដាច់ខាត $|b|$ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ ($|b| \in \mathbb{N}$) ។
ជ្រើសរើស $k = |b| \in \mathbb{N}$ គេបាន b ចែកដាច់ k ព្រោះ $k = |b| = \pm b \implies b \mid k$ (ព្រោះ $k = b \cdot 1$ ឬ $k = b \cdot (-1)$) ។
ការទាញបាន $b \mid k$ ចំពោះ $k = |b| \in \mathbb{N}$ គឺជាការ ផ្ទុយពីសមតិកម្ម ដែលថា $b \nmid k, \forall k \in \mathbb{N}$!
ដូចនេះ ការសន្មត $b \neq 0$ មិនត្រឹមត្រូវទេ នាំឱ្យ $b = 0$ ពិតប្រាកដ ។

លំហាត់ ២.១០២៖
រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងខាងក្រោម ៖

ក ផលគុណនៃចំនួនអសនិទានពីរខុសគ្នាជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ បើ $x \geq \sqrt{7}$ នោះ $x \geq 3$ ។

គ $f(n) = n^2+n+1$ ជាចំនួនគត់ប្រឹទ្ធទីបផង និងជាពហុគុណនៃ 3 ផងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ប្រឹទ្ធទីបអវិជ្ជមាន n ។

ឃ $f(n) = (n+1)(n+2)(n+3)$ ចែកដាច់នឹង 12 ចំពោះគ្រប់ n ។

ចម្លើយ ៖ រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងនីមួយៗ ៖

ក អំណះអំណាង ៖ «ផលគុណនៃចំនួនអសនិទានពីរខុសគ្នាជាចំនួនអសនិទាន»
ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ៖
ឧបមាជ្រើសរើសចំនួនអសនិទានពីរខុសគ្នាគឺ $\sqrt{2}$ និង $\sqrt{8}$ ។
ផលគុណ ៖ $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ដែលជាចំនួនសនិទាន ។
ដូចនេះ អំណះអំណាងខាងលើមិនពិតទេ ។

ខ អំណះអំណាង ៖ «បើ $x \geq \sqrt{7}$ នោះ $x \geq 3$»
ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ៖
ឧបមាជ្រើសរើស $x = \sqrt{8}$
គេបាន $x = \sqrt{8} > \sqrt{7}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់សមតិកម្ម)
ប៉ុន្តែ $x = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 \implies x < 3$ (ផ្ទុយពីសេចក្តីសន្និដ្ឋាន) ។
ដូចនេះ អំណះអំណាងខាងលើមិនពិតទេ ។

គ អំណះអំណាង ៖ «$f(n) = n^2+n+1$ ជាចំនួនគត់ប្រឹទ្ធទីបផង និងជាពហុគុណនៃ 3 ផងចំពោះគ្រប់ $n \leq 0$»
ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ៖
ឧបមាជ្រើសរើសចំនួនគត់ប្រឹទ្ធទីបអវិជ្ជមាន $n = -6$ (ឬ $n = 0$) ៖
គេបាន $f(-6) = (-6)^2 + (-6) + 1 = 36 - 6 + 1 = 31$
ដោយសារ 31 មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ទេ(ព្រោះ $31 = 3 \times 10 + 1$)។
ដូចនេះ អំណះអំណាងខាងលើមិនពិតទេ។

(ឃ) អំណះអំណាង ៖ «$f(n) = (n+1)(n+2)(n+3)$ ចែកដាច់នឹង 12 ចំពោះគ្រប់ n»
ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ៖
ឧបមាជ្រើសរើស $n = 0$ ៖
គេបាន $f(0) = (0+1)(0+2)(0+3) = 1 \times 2 \times 3 = 6$
ដោយសារ 6 មិនចែកដាច់នឹង 12 ទេ(ឬមិនមែនជាពហុគុណនៃ 12)។
ដូចនេះ អំណះអំណាងខាងលើមិនពិតទេ។

លំហាត់ ២.១០៣៖
ស្រាយបញ្ជាក់សំណើខាងក្រោម ៖

(ក) ឧបមាថា $a, b, c \in \mathbb{Z}$ បើ $a \mid b$ និង $c \mid d$ នោះ $ac \mid bd$ ។

(ខ) ឧបមាថា $a, b, c \in \mathbb{Z}$ បើ $a^2 \mid b$ និង $b^3 \mid c$ នោះ $a^6 \mid c$ ។

(គ) ឧបមា $x, y \in \mathbb{R}$ បើ $x^2 + 5y = y^2 + 5x$ នោះ $x = y$ ឬ $x + y = 5$។

(ឃ) បើ $n \in \mathbb{Z}$ នោះ $n^2 + 3n + 4$ ជាចំនួនគត់គូ ។

(ង) បើ $x \in \mathbb{R}$ និង $0 < x < 4$ នោះ $\dfrac{4}{x(4-x)} \geq 1$ ។

ចម្លើយ ៖ ស្រាយបញ្ជាក់សំណើនីមួយៗតាមវិធីសាស្ត្រសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទាល់ (Direct Proof) ៖

(ក) បង្ហាញថា បើ $a \mid b$ និង $c \mid d$ នោះ $ac \mid bd$ ៖
សន្មតថា $a \mid b$ និង $c \mid d$ (ចំពោះ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$) ។
តាមនិយមន័យភាពចែកដាច់ មានចំនួនគត់ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល ៖

$$b = ak_1 \quad \text{និង} \quad d = ck_2$$

គុណសមភាពទាំងពីរចូលគ្នា គេបាន ៖

$$bd = (ak_1)(ck_2) = (ac)(k_1k_2)$$

តាង $k'' = k_1k_2 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $bd = ac \cdot k'' \implies ac \mid bd$ ។
ដូចនេះ បើ $a \mid b$ និង $c \mid d$ នោះ $ac \mid bd$ ពិតប្រាកដ ។

(ខ) បង្ហាញថា បើ $a^2 \mid b$ និង $b^3 \mid c$ នោះ $a^6 \mid c$ ៖
សន្មតថា $a^2 \mid b$ និង $b^3 \mid c$ (ចំពោះ $a, b, c \in \mathbb{Z}$) ។

តាមនិយមន័យភាពចែកដាច់ មានចំនួនគត់ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល ៖

$$b = k_1 a^2 \quad \text{និង} \quad c = k_2 b^3$$

ជំនួស $b = k_1 a^2$ ចូលក្នុងសមភាព $c = k_2 b^3$ គេបាន ៖

$$c = k_2 (k_1 a^2)^3 = k_2 (k_1^3 a^6) = (k_2 k_1^3) a^6$$

តាង $k'' = k_2 k_1^3 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $c = k'' a^6 \implies a^6 \mid c$ ។
ដូចនេះ បើ $a^2 \mid b$ និង $b^3 \mid c$ នោះ $a^6 \mid c$ ពិតប្រាកដ ។

គ បង្ហាញថា បើ $x^2 + 5y = y^2 + 5x$ នោះ $x = y$ ឬ $x + y = 5$ ៖
តាមសមតិកម្ម $x^2 + 5y = y^2 + 5x$ គេអាចផ្លាស់ប្តូរ និងបំបែកជាកត្តា ៖

$$x^2 - y^2 = 5x - 5y$$

$$(x - y)(x + y) = 5(x - y)$$

$$(x - y)(x + y) - 5(x - y) = 0$$

$$(x - y)(x + y - 5) = 0$$

សមភាពនេះនាំឱ្យមានពីរករណី ៖

- ករណីទី ១ ៖ $x - y = 0 \implies x = y$
- ករណីទី ២ ៖ $x + y - 5 = 0 \implies x + y = 5$

ដូចនេះ $x = y$ ឬ $x + y = 5$ ពិតប្រាកដ ។

ឃ បង្ហាញថា បើ $n \in \mathbb{Z}$ នោះ $n^2 + 3n + 4$ ជាចំនួនគត់គូ ៖
ពិនិត្យករណីនៃចំនួនគត់ $n \in \mathbb{Z}$ ៖

- ករណីទី ១ ៖ ឧបមា n ជាចំនួនគត់គូ
  តាង $n = 2k$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$ ៖

  $$n^2 + 3n + 4 = (2k)^2 + 3(2k) + 4 = 4k^2 + 6k + 4 = 2(2k^2 + 3k + 2)$$

  ដោយ $2k^2 + 3k + 2 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $n^2 + 3n + 4$ ជាចំនួនគត់គូ ។
- ករណីទី ២ ៖ ឧបមា n ជាចំនួនគត់សេស

តាង $n = 2k+1$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$ ៖

$$\begin{aligned} n^2+3n+4 &= (2k+1)^2+3(2k+1)+4 \\ &= 4k^2+4k+1+6k+3+4 \\ &= 4k^2+10k+8 = 2(2k^2+5k+4) \end{aligned}$$

ដោយ $2k^2+5k+4 \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ n^2+3n+4 ជាចំនួនគត់គូ ។
ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ n^2+3n+4 គឺជាចំនួនគត់គូជានិច្ច ។

ង បង្ហាញថា បើ $x \in \mathbb{R}$ និង $0 < x < 4$ នោះ $\dfrac{4}{x(4-x)} \geq 1$ ៖

របៀបទី ១ (ប្រើវិសមភាព Cauchy) ៖
ដោយ $0 < x < 4$ នាំឱ្យ $x > 0$ និង $4-x > 0$ ។
តាមវិសមភាព Cauchy ៖ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ចំពោះ $a, b > 0$ ៖
យក $a = x$ និង $b = 4-x$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} x+(4-x) \geq 2\sqrt{x(4-x)} &\implies 4 \geq 2\sqrt{x(4-x)} \\ &\implies 2 \geq \sqrt{x(4-x)} \end{aligned}$$

លើកជាការេលើអង្គទាំងពីរ (ដោយសារអង្គទាំងពីរវិជ្ជមាន) ៖

$$4 \geq x(4-x)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $x(4-x) > 0$ គេបាន ៖

$$\frac{4}{x(4-x)} \geq 1$$

របៀបទី ២ (ប្រើការេនៃមួយទ្វេធា) ៖
ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេមាន $(x-2)^2 \geq 0$

$$x^2-4x+4 \geq 0 \implies 4 \geq 4x-x^2 \implies 4 \geq x(4-x)$$

ដោយ $0 < x < 4 \implies x(4-x) > 0$ នាំឱ្យ ៖

$$\frac{4}{x(4-x)} \geq 1$$

ដូចនេះ បើ $x \in \mathbb{R}$ និង $0 < x < 4$ នោះ $\dfrac{4}{x(4-x)} \geq 1$ ពិត។

លំហាត់ ២.១០៤៖
តើសំណើខាងក្រោមនេះណាខ្លះជាសំណើពិត ណាខ្លះជាសំណើមិនពិត? បើវាជាសំណើពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ ហើយបើជាសំណើមិនពិតចូរលើកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ។

ក បើ α ជាចំនួនអសនិទាន និង β ជាសំនួនអសនិទាន នោះ $\alpha + \beta$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ខ បើ M ជាចំនួនអសនិទាន និង N ជាចំនួនសនិទាន នោះ $M + N$ ជាចំនួនអសនិទាន។

គ បើ A^2 ជាចំនួនអសនិទាន នោះ A ជាចំនួនអសនិទាន។

ចម្លើយ ៖ ពិនិត្យតម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗ ៖

ក សំណើ ៖ «បើ α និង β ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $\alpha + \beta$ ជាចំនួនអសនិទាន»
ចម្លើយ ៖ ជាសំណើមិនពិត។
ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ៖
ឧបមា ជ្រើសរើស $\alpha = \sqrt{3}$ (ជា ចំនួនអសនិទាន) និង $\beta = -\sqrt{3}$ (ជាចំនួនអសនិទាន)។
គេបាន ៖ $\alpha + \beta = \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ ដែល 0 គឺជាចំនួនសនិទាន។
ដូចនេះ សំណើខាងលើមិនពិតទេ។

ខ សំណើ ៖ «បើ M ជាចំនួនអសនិទាន និង N ជាចំនួនសនិទាន នោះ $M + N$ ជាចំនួនអសនិទាន»
ចម្លើយ ៖ ជាសំណើពិត។
សម្រាយបញ្ជាក់ (តាមការផ្ទុយពីការពិត) ៖
ឧបមាផ្ទុយថា $M + N$ ជាចំនួនសនិទាន ៖
គេបាន $M + N = \frac{a}{b}$ ដែល $a, b \in \mathbb{Z}$ និង $b \neq 0$។
ដោយសារ N ជាចំនួនសនិទាន នោះគេបាន $N = \frac{c}{d}$ ដែល $c, d \in \mathbb{Z}$ និង $d \neq 0$។
គេទាញបាន ៖

$$M = (M + N) - N = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

ដោយ $ad-bc \in \mathbb{Z}$ និង $bd \in \mathbb{Z}$ $(bd \neq 0)$ នាំឱ្យ M គឺជាចំនួនសនិទាន។
ការទាញបាន M ជាចំនួនសនិទាន គឺជាការផ្ទុយពីសមតិកម្ម ដែលថា M ជាចំនួនអសនិទាន
ដូចនេះ $M+N$ ត្រូវតែជាចំនួនអសនិទាន ពិតប្រាកដ។

(គ) សំណើ ៖ «បើ A^2 ជាចំនួនអសនិទាន នោះ A ជាចំនួនអសនិទាន»
ចម្លើយ ៖ ជាសំណើពិត។
សម្រាយបញ្ជាក់ (តាមសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម) ៖
យើងស្រាយបញ្ជាក់សំណើផ្ទុយពីសមតិកម្ម ៖ «ប្រសិនបើ A ជាចំនួនសនិទាន នោះ A^2 ជាចំនួនសនិទាន»។
សន្មតថា A ជាចំនួនសនិទាន ៖
គេបាន $A=\frac{c}{d}$ ដែល $c,d \in \mathbb{Z}$ និង $d \neq 0$។
លើកជាការេលើអង្គទាំងពីរ គេបាន ៖

$$A^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{c^2}{d^2}$$

ដោយសារ $c^2 \in \mathbb{Z}$ និង $d^2 \in \mathbb{Z}$ $(d^2 \neq 0)$ នាំឱ្យ A^2 គឺជាចំនួនសនិទាន។
ដោយសំណើផ្ទុយពីសមតិកម្មពិត ដូចនេះសំណើដើម «បើ A^2 ជាចំនួនអសនិទាន នោះ A ជាចំនួនអសនិទាន» ពិតប្រាកដ។

មេរៀនទី ៣ សំណុំ (Set)

៣.១ សញ្ញាណានៃសំណុំ (Concept of Sets)

និយមន័យ ៣.១ (សំណុំ និងធាតុនៃសំណុំ)៖

- សំណុំ (Set) ៖ គឺជាបណ្តុំ ឬប្រមូលផ្តុំនៃវត្ថុ ធាតុ ឬសញ្ញាណទាំងឡាយណាដែលត្រូវបានកំណត់ច្បាស់លាស់ ដោយអាចឱ្យយើងសម្រេចបានថាតើវត្ថុនោះស្ថិតនៅក្នុងសំណុំ ឬមិននៅក្នុងសំណុំ។
- ធាតុ (Element) ៖ វត្ថុ តួលេខ អក្សរ ឬនិមិត្តសញ្ញានីមួយៗដែលនៅក្នុងសំណុំ ហៅថា ធាតុ នៃសំណុំ។

ចំណាំ ៣.២ (ធាតុនៃសំណុំមិនមែនមានតែតួរលេខ ឬនោះចំនួនទេ)៖
ធាតុនៃសំណុំអាចជាចំនួន អក្សរ ឈ្មោះមនុស្ស ឈ្មោះទីក្រុង រូបរាងធរណីមាត្រ ឬសំណុំផ្សេងទៀតក៏បាន។

ក គេតាងសំណុំដោយអក្សរពុម្ពធំ ដូចជា $A, B, C, X, Y, \ldots$

ខ គេតាងធាតុនៃសំណុំដោយអក្សរតូច ឬតួលេខ ឬឈ្មោះវត្ថុ ដូចជា $a, b, c, x, y, \ldots$

គ បើ x ជាធាតុនៃសំណុំ A គេសរសេរ $x \in A$។

ឃ បើ x មិនមែនជាធាតុនៃសំណុំ A ទេ គេសរសេរ $x \notin A$។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៖
ឧទាហរណ៍នៃសំណុំដែលធាតុមិនមែនជាចំនួន

១ សំណុំនៃស្រៈក្នុងអក្សរឡាតាំង ៖
$V = \{a, e, i, o, u\}$
គេបាន $a \in V$ ប៉ុន្តែ $b \notin V$។

២ សំណុំនៃថ្ងៃក្នុងមួយសប្តាហ៍ ៖
$D = \{$ចន្ទ, អង្គារ, ពុធ, ព្រហស្បតិ៍, សុក្រ, សៅរ៍, អាទិត្យ$\}$
គេបាន ចន្ទ $\in D$។

៣ សំណុំនៃរាងធរណីមាត្រប្លង់ ៖

$S = \{$ត្រីកោណ, ការេ, ចតុកោណកែង, រង្វង់$\}$
គេបាន ការេ $\in S$ ប៉ុន្តែ គូប $\notin S$។

៤ សំណុំនៃរាជធានីក្នុងប្រទេសអាស៊ាន ៖

$C = \{$ភ្នំពេញ, បាងកក, វៀងច័ន្ទ, ហូជីមិញ, $\dots\}$
គេបាន ភ្នំពេញ $\in C$។

៣.១.១ របៀបសរសេរសំណុំ (Representations of Sets)

គេមាន ២ វិធីសាស្ត្រក្នុងការសរសេរ ឬកំណត់សំណុំ ៖

១ ការសរសេរសំណុំតាមការរាយធាតុ (Roster / Listing Method) ៖ គឺជាការសរសេរ រៀបរាប់គ្រប់ធាតុទាំងអស់ (ទាំងចំនួន អក្សរ ឬវត្ថុ) នៅក្នុងរង្វង់ក្រចកស្រួច $\{\}$ ហើយ ញែកធាតុនីមួយៗដោយសញ្ញាក្បៀស $(,)$។

- ឧទាហរណ៍ទី ១ (ធាតុជាចំនួន) ៖ $A = \{2, 4, 6, 8\}$
- ឧទាហរណ៍ទី ២ (ធាតុជាអក្សរ) ៖ $B = \{k, h, m, e, r\}$

២ ការសរសេរសំណុំតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ (Set-Builder Notation) ៖ គឺជាការសរសេរ តាងធាតុដោយអថេរ រួចបញ្ជាក់ពីលក្ខណៈសម្គាល់រួមនៃធាតុទាំងនោះ។

- ឧទាហរណ៍ទី ១ ៖ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាចំនួនគត់គូ និង $x \leq 8\}$
- ឧទាហរណ៍ទី ២ ៖ $B = \{x \mid x$ ជាព្យញ្ជនៈនៃពាក្យ «កម្ពុជា»$\}$

៣.១.២ ប្រភេទនៃសំណុំ (Types of Sets)

និយមន័យ ៣.៤៖
សំណុំរាប់អស់ និងសំណុំអានន្ត

- សំណុំមានដែន (Finite Set) ៖ គឺជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុជាចំនួនកំណត់ (អាចរាប់អស់)។
- សំណុំឥតដែន (Infinite Set) ៖ គឺជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុច្រើនរាប់មិនអស់ (ឧទាហរណ៍ ៖ សំណុំចំនួនធម្មជាតិ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៖
សំណុំរាប់អស់ និងសំណុំអនន្ត៖

ក $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាចំនួនគត់គូ និង $x \leq 10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ (ព្រោះ $n(A) = 5$)។

ខ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ ជាសំណុំឥតដែន (ព្រោះធាតុរបស់វាមាន $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ រាប់មិនអស់)។

និយមន័យ ៣.៦៖
សំណុំទទេ និងសំណុំសកល (Empty set and Universal set)

- សំណុំទទេ ៖ គឺជាសំណុំដែលគ្មានធាតុសោះ តាងដោយ $\emptyset$ ឬ $\{\}$ (មានចំនួនធាតុ $n(\emptyset) = 0$)។
- សំណុំសកល ៖ គឺជាសំណុំដែលមានគ្រប់ធាតុទាំងអស់ដែលគេកំពុងសិក្សា តាងដោយ U (ឬ E)។

ឧទាហរណ៍ ៣.៧៖
សំណុំទទេ និងសំណុំសកល៖

ក សំណុំ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\}$ ជាសំណុំទទេ ($A = \emptyset$) ព្រោះគ្មានចំនួនពិតណាដែលលើកជាការេស្មើ -4 ទេ។

ខ ក្នុងការសិក្សាអំពីលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ សំណុំសកលគឺ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$។

និយមន័យ ៣.៨៖
សំណុំស្មើគ្នា ពីរសំណុំ A និង B ហៅថា សំណុំស្មើគ្នា (សរសេរតាង $A = B$) លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុរបស់ A ជាធាតុរបស់ B ហើយគ្រប់ធាតុរបស់ B ក៏ជាធាតុរបស់ A ដែរ(មានធាតុដូចគ្នាទាំងស្រុង)។

$$A = B \iff (\forall x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x \in B \implies x \in A)$$

ឧទាហរណ៍ ៣.៩៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{1, 3, 5\}$ និងសំណុំ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាចំនួនសេសតូចជាង $6\}$។
ដោយសារសំណុំ $B = \{1, 3, 5\}$ នោះគេបាន $A = B$ (សំណុំទាំងពីរស្មើគ្នា)។

និយមន័យ ៣.១០៖
សំណុំរង និង សំណុំរងផ្នែល់៖

- សំណុំរង (Subset) ៖ សំណុំ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B (សរសេរតាង $A \subseteq B$) លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុនៃ A សុទ្ធតែជាធាតុនៃ B៖

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in A \implies x \in B)$$

- សំណុំរងផ្នែល់ (Proper Subset) ៖ សំណុំ A ជាសំណុំរងផ្នែល់នៃ B (សរសេរតាង $A \subset B$) លុះត្រាតែ $A \subseteq B$ និង $A \neq B$ (មានន័យថា B មានធាតុយ៉ាងហោចណាស់មួយដែលមិននៅក្នុង A)។

ឧទាហរណ៍ ៣.១១៖
គេឱ្យសំណុំ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ៖

ក សំណុំ $A = \{1, 3\}$ ជាសំណុំរងផ្នែល់នៃ B ($A \subset B$) ព្រោះគ្រប់ធាតុរបស់ A នៅក្នុង B ហើយ $A \neq B$។

ខ សំណុំទទេ $\emptyset$ និងសំណុំ B ខ្លួនឯង សុទ្ធតែជាសំណុំរងនៃ B (ចំណាំ ៖ $\emptyset \subseteq B$ និង $B \subseteq B$)។

ចំណាំ ៣.១២៖
ប្រសិនបើសំណុំ A មាន n ធាតុ នោះចំនួនសំណុំរងទាំងអស់នៃ A គឺស្មើនឹង 2^n ឯចំនួនសំណុំរងផ្នែល់គឺស្មើនឹង $2^n - 1$។

និយមន័យ ៣.១៣ (សំណុំបំពេញ)៖
សំណុំបំពេញនៃសំណុំ A ធៀបនឹងសំណុំសកល U (សរសេរតាងដោយ $\bar{A}$ ឬ A^c) គឺជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយណាដែលនៅក្នុង U ប៉ុន្តែមិនមែនជាធាតុរបស់ A ទេ៖

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

ឧទាហរណ៍ ៣.១៤៖
គេឱ្យសំណុំសកល $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ និងសំណុំរង $A = \{2, 4, 6, 8\}$។
គេបានសំណុំបំពេញនៃ A គឺ $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (សំណុំនៃចំនួនសេសក្នុង U)។

និយមន័យ ៣.១៥៖
សំណុំដែលមានជាតុជាសំណុំ និងសំណុំស្វ័យគុណ សំណុំដែលជាតុនីមួយៗរបស់វាជាសំណុំ ហៅថា សំណុំនៃសំណុំ ។
សំណុំនៃសំណុំរងទាំងអស់នៃសំណុំ A ហៅថា សំណុំស្វ័យគុណ (Power Set) នៃ A ដោយតាងដោយ $\mathcal{P}(A)$។

ឧទាហរណ៍ ៣.១៦៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{a, b\}$។

ក សំណុំរងទាំងអស់នៃ A មាន ៖ $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ (មាន $2^2 = 4$ សំណុំរង)។

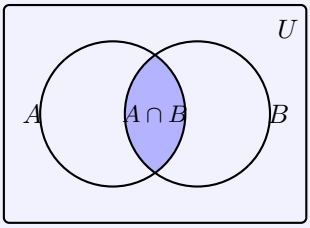
ខ សំណុំស្វ័យគុណនៃ A គឺ ៖ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$។

៣.២ ប្រមាណវិធីលើសំណុំ (Set Operations)

៣.២.១ ប្រសព្វនៃសំណុំ (Intersection of Sets)

និយមន័យ ៣.១៧ (ប្រសព្វនៃសំណុំ)៖
ប្រសព្វនៃពីរសំណុំ A និង B (តាងដោយ $A \cap B$) គឺជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយណាដែលជាធាតុរបស់ A និងជាធាតុរបស់ B ៖

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



ចំនួនធាតុនៃ $A \cap B$ តាងដោយ $n(A \cap B)$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.១៨៖

គេឱ្យសំណុំ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ និង $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $A \cap B$។

ចម្លើយ ៖ ធាតុដែលរួមគ្នារវាងសំណុំ A និង B គឺ $3, 4, 5$។
ដូចនេះ $A \cap B = \{3, 4, 5\}$។

ឧទាហរណ៍ ៣.១៩៖
គេមានពីរសំណុំ $A = \{x | x \in A$ ជាគួចែកវិជ្ជមាននៃ $15\}$ និង $B = \{x | x$ ជារួចែកវិជ្ជមាននៃ $30\}$ ។ កំណត់សំណុំ $A \cap B$ និង $n(A \cap B)$ ។

ចម្លើយ ៖ ដោយ $A = \{x | x \in A$ ជាគួចែកវិជ្ជមាននៃ $15\}$ និង $B = \{x | x$ ជារួចែកវិជ្ជមាននៃ $30\} = \{1, 3, 5, 15\}$ និង $B = \{x \| x$ ជារួចែកវិជ្ជមាននៃ $30\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
គេបាន $A \cap B = \{x | x$ជាគួចែករួមវិជ្ជមាននៃ 15 និង30$\} = \{1, 3, 5, 15\}$
ដូច្នេះ $n(A \cap B) = n(A) = 4$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.២០៖
គេមានពីរសំណុំ $R = \{a, b, c, 2, 4, 6\}$ និង $P = \{1, 3, 5, 7\}$ ។ កំណត់សំណុំ $R \cap P$ និង $n(R \cap P)$ ។

ចម្លើយ ៖ ដោយសំណុំទាំងពីរនេះគ្មានធាតុរួម នោះគេបាន $R \cap P = \emptyset$ និង $n(R \cap P) = 0$ ។ ដូច្នេះគេអាចហៅសំណុំទាំងពីរគឺ R និង P ថាជា សំណុំដាច់គ្នា ។

ជាទូទៅ ៣.២១៖
សំណុំ A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា លុះត្រាតែ $A \cap B = \emptyset$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.២២ (ប្រសព្វរវាងសំណុំដែលមានធាតុជាអក្សរ)៖
គេឱ្យសំណុំ $M = \{k, h, m, e, r\}$ និង $N = \{m, a, t, h, e\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $M \cap N$ និងចំនួនធាតុ $n(M \cap N)$។

ចម្លើយ ៖ ធាតុដែលមានដូចគ្នានៅក្នុងសំណុំ M និង N គឺ m, h, e។
ដូចនេះ $M \cap N = \{m, h, e\}$ និង $n(M \cap N) = 3$។

ឧទាហរណ៍ ៣.២៣ (ប្រសព្វរវាងសំណុំដែលសរសេរតាមលក្ខណៈរួម)៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាពហុគុណនៃ 2 និង $x \leq 12\}$ និង $B = \{x \in \mathbb{N} \mid$

x ជាពហុគុណនៃ 3 និង $x \leq 12\}$។ ចូរកំណត់ $A \cap B$ និង $n(A \cap B)$។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំ A និង B តាមការរាយធាតុ គេបាន ៖
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ និង $B = \{3, 6, 9, 12\}$។
ធាតុរួមគ្នារវាងសំណុំទាំងពីរ (ពហុគុណរួមនៃ 2 និង 3 ដែលតូចជាង ឬស្មើ 12) គឺ 6 និង 12។
ដូចនេះ $A \cap B = \{6, 12\}$ និង $n(A \cap B) = 2$។

ឧទាហរណ៍ ៣.២៤ (ប្រសព្វនៃបីសំណុំ)៖
គេឱ្យសំណុំ $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 3, 5, 6\}$ និង $Z = \{0, 2, 3, 7\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $X \cap Y \cap Z$។

ចម្លើយ ៖ ធាតុដែលស្ថិតនៅក្នុងសំណុំទាំងបី (X, Y និង Z) ព្រមគ្នាគឺ 2 និង 3។
ដូចនេះ $X \cap Y \cap Z = \{2, 3\}$។

ឧទាហរណ៍ ៣.២៥ (ប្រសព្វជាមួយសំណុំទទេ និងសំណុំសកល)៖
គេឱ្យសំណុំសកល $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ និងសំណុំរង $A = \{2, 4\}$។ ចូរកំណត់ $A \cap \emptyset$ និង $A \cap U$។

ចម្លើយ ៖ តាមនិយមន័យប្រសព្វនៃសំណុំ ៖

- ដោយសារសំណុំទទេ $\emptyset$ គ្មានធាតុសោះ នោះ A និង $\emptyset$ គ្មានធាតុរួមគ្នាទេ ៖ $A \cap \emptyset = \emptyset$។
- ដោយសារ $A \subset U$ នោះធាតុរួមរវាង A និង U គឺគ្រប់ធាតុរបស់ A ៖ $A \cap U = \{2, 4\} = A$។

ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍ក្នុងជីវិតរាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ

ឧទាហរណ៍ ៣.២៦ (ការស្វែងរកសិស្សដែលចូលចិត្តកីឡាទាំងពីរប្រភេទ)៖
ក្នុងចំណោមសិស្សមួយក្រុម តាង F ជាសំណុំសិស្សដែលចូលចិត្តលេងកីឡាបាល់ទាត់ និង V ជា សំណុំ សិស្ស ដែល ចូលចិត្ត លេង កីឡាបាល់ទះ ដោយ គេ ដឹង ថា $F = \{$សុខា, ដាវ៉ា, វិសាល, ពិសិដ្ឋ, រតនា$\}$ និង $V = \{$ដាវ៉ា, ពិសិដ្ឋ, បុប្ផា, ធីតា$\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំសិស្សដែលចូលចិត្តលេងកីឡាទាំងពីរប្រភេទ ($F \cap V$) និងចំនួនសិស្សទាំងនោះ ។

ចម្លើយ ៖ សំណុំសិស្សដែលចូលចិត្តលេងកីឡាទាំងពីរប្រភេទ គឺជាប្រសព្វនៃសំណុំ F និង V (ធាតុដែលស្ថិតក្នុងសំណុំទាំងពីរព្រមគ្នា) ៖
ដូចនេះ $F \cap V = \{$ដារ៉ា, ពិសិដ្ឋ$\}$ និងមានចំនួន $n(F \cap V) = 2$ នាក់ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.២៧ (ការផ្គូផ្គងមុខវិជ្ជាប្រឡង)៖

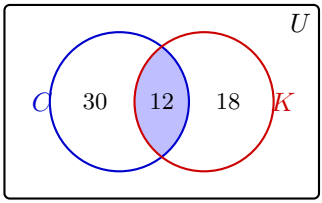
សាកលវិទ្យាល័យមួយតម្រូវឱ្យបេក្ខជនដែលដាក់ពាក្យចូលរៀនផ្នែកវិស្វកម្មព័ត៌មានវិទ្យា ត្រូវមាននិទ្ទេសល្អលើមុខវិជ្ជាទាំងពីរ គឺ **គណិតវិទ្យា** និង **រូបវិទ្យា** ។ តាង $M = \{$កញ្ញា, សុភ័ក្ត្រ, ម៉ារី, ចាន់ធូ$\}$ ជាសំណុំបេក្ខជនមាននិទ្ទេសល្អគណិតវិទ្យា និង $P = \{$សុភ័ក្ត្រ, ចាន់ធូ, នារី, វុទ្ធី$\}$ ជាសំណុំបេក្ខជនមាននិទ្ទេសល្អរូបវិទ្យា ។ ចូរកំណត់សំណុំបេក្ខជនដែលជាប់លក្ខខណ្ឌចូលរៀន ($M \cap P$) ។

ចម្លើយ ៖ បេក្ខជនដែលជាប់លក្ខខណ្ឌ ត្រូវមានឈ្មោះនៅក្នុងសំណុំ M ផង និងសំណុំ P ផង ៖
ដូចនេះ $M \cap P = \{$សុភ័ក្ត្រ, ចាន់ធូ$\}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.២៨ (ការវិភាគទិន្នន័យអតិថិជនក្នុងហាងកាហ្វេ)៖

ហាងកាហ្វេមួយបានធ្វើការស្ទង់មតិលើអតិថិជនចំនួន 60 នាក់ ឃើញថាមានអតិថិជន 42 នាក់ចូលចិត្តញ៉ាំកាហ្វេ (C) និង 30 នាក់ចូលចិត្តញ៉ាំនំខេក (K) ។ ដោយដឹងថាអតិថិជនទាំង 60 នាក់សុទ្ធតែបានទិញយ៉ាងហោចណាស់មួយមុខ តើមានអតិថិជនប៉ុន្មាននាក់ដែលទិញទាំងកាហ្វេ និងនំខេក ($n(C \cap K)$)?

ចម្លើយ ៖ តាង $n(C \cup K) = 60$, $n(C) = 42$ និង $n(K) = 30$ ។
តាមរូបមន្តកាឌីណាល់ $n(C \cup K) = n(C) + n(K) - n(C \cap K)$ គេទាញបាន ៖



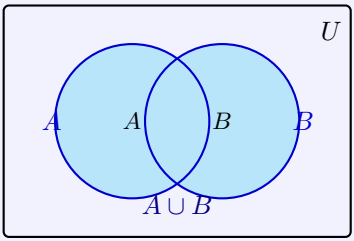
$$n(C \cap K) = n(C) + n(K) - n(C \cup K) = 42 + 30 - 60 = 12 \text{ នាក់}$$

ដូចនេះ មានអតិថិជនចំនួន 12 នាក់ដែលទិញទាំងកាហ្វេ និងនំខេក ។

៣.២.២ ប្រជុំនៃសំណុំ (Union of Sets)

និយមន័យ ៣.២៩ (ប្រជុំនៃសំណុំ)៖
ប្រជុំនៃពីរសំណុំ A និង B (តាងដោយ $A \cup B$) គឺជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយណាដែលជាធាតុរបស់ A ឬជាធាតុរបស់ B (ឬជាធាតុរបស់ទាំងពីរ) ៖

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



ប្រជុំធាតុនៃ $A \cup B$ តាងដោយ $n(A \cup B)$ ។

ចំណាំ ៣.៣០៖
$x \in A$ ឬ $x \in B$ មានន័យថា $x \in A$ តែ $x \notin B$ ឬ $x \in B$ តែ $x \notin A$ ឬ $x \in A \cap B$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣១៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{a, b, c\}$ និង $B = \{c, d, e\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $A \cup B$។

ចម្លើយ ៖ ប្រមូលផ្តុំធាតុទាំងអស់របស់ A និង B (ធាតុដែលស្ទួនសរសេរតែម្តង) ៖
ដូចនេះ $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣២ (ប្រជុំរវាងសំណុំដែលសរសេរតាមការរាយធាតុ និងលក្ខណៈរួម)៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ និង $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាគូចែកវិជ្ជមាននៃ $6\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $A \cup B$ និងចំនួនធាតុ $n(A \cup B)$។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំ B តាមការរាយធាតុ គេបាន $B = \{1, 2, 3, 6\}$។
ប្រមូលផ្តុំធាតុទាំងអស់របស់ A និង B (ធាតុស្ទួន 2 និង 6 សរសេរតែម្តង) ៖

ដូចនេះ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ និង $n(A \cup B) = 6$។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៣ (ប្រជុំរវាងពីរសំណុំដាច់គ្នា)៖
គេឱ្យសំណុំ $M = \{1, 3, 5, 7\}$ (សំណុំចំនួនសេស) និង $N = \{2, 4, 6, 8\}$ (សំណុំចំនួនគូ)។ ចូរកំណត់ $M \cup N$។

ចម្លើយ ៖ ដោយសារសំណុំ M និង N គ្មានធាតុរួមគ្នា ($M \cap N = \emptyset$) នោះប្រជុំនៃសំណុំទាំងពីរគឺជាការយកធាតុទាំងអស់របស់ M មកផ្គុំជាមួយធាតុទាំងអស់របស់ N ៖
ដូចនេះ $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៤ (ប្រជុំករណីសំណុំមួយជាសំណុំរងនៃសំណុំមួយទៀត)៖
គេឱ្យសំណុំ $P = \{1, 2\}$ និង $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$។ ចូរកំណត់ $P \cup Q$។

ចម្លើយ ៖ យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់ធាតុរបស់ P សុទ្ធតែស្ថិតនៅក្នុង Q ($P \subset Q$)។
ដូចនេះ $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5\} = Q$។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៥ (ប្រជុំជាមួយសំណុំទទេ)៖
គេឱ្យសំណុំ $X = \{$ភ្នំពេញ, សៀមរាប, បាត់ដំបង$\}$ និងសំណុំទទេ $\emptyset$។ ចូរកំណត់ $X \cup \emptyset$។

ចម្លើយ ៖ ដោយសារសំណុំទទេ $\emptyset$ គ្មានធាតុសោះ ការប្រជុំរវាងសំណុំ X និង $\emptyset$ គឺស្មើនឹងសំណុំ X ដដែល ៖
ដូចនេះ $X \cup \emptyset = \{$ភ្នំពេញ, សៀមរាប, បាត់ដំបង$\} = X$។

ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍ក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៦ (ការរៀបចំបញ្ជីឈ្មោះសិស្សចូលរួមសិក្ខាសាលា)៖
សាលារៀនមួយរៀបចំសិក្ខាសាលាស្តីពី «បច្ចេកវិទ្យាឌីជីថល» ដោយអញ្ជើញសិស្សផ្នែមពីថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត និងថ្នាក់សង្គម ។ តាង $S = \{$សុខា, បុប្ផា, ដារ៉ា, វិសាល$\}$ ជាសំណុំសិស្សតំណាងថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ និង $L = \{$បុប្ផា, វិសាល, ធីតា, រតនា$\}$ ជាសំណុំសិស្សតំណាងថ្នាក់សង្គម ។ ចូរកំណត់បញ្ជីឈ្មោះសិស្សសរុបដែលត្រូវចូលរួមសិក្ខាសាលានេះ ($S \cup L$) និងចំនួនសិស្សសរុប ។

ចម្លើយ ៖ បញ្ជីឈ្មោះសិស្សសរុប គឺជាប្រជុំនៃសំណុំ S និង L (ឈ្មោះដែលស្ទួនរាប់

តែម្តងគត់ ដើម្បីកុំឱ្យលើសកៅអីអង្គុយ) ៖

ដូចនេះ $S \cup L = \{$សុខា, បុប្ផា, ដារ៉ា, វិសាល, ធីតា, រតនា$\}$ និងមានចំនួនសិស្សសរុប $n(S \cup L) = 6$ នាក់ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៧ (ការរួមបញ្ចូលមុខទំនិញក្នុងហាងពីរសាខា)៖

ក្រុមហ៊ុនមួយមានហាងលក់កេសដ្ឋ: ចំនួនពីរសាខា ។ សាខាទី ១ មានលក់ $A = \{$កាហ្វេ, តែបៃតង, ទឹកក្រូច$\}$ និងសាខាទី ២ មានលក់ $B = \{$កាហ្វេ, ទឹកដោះគោស្រស់, តែក្រូចឆ្មារ ។ ប្រសិនបើក្រុមហ៊ុនបើកសាខាទី ៣ ដោយដាក់លក់គ្រប់មុខកេសដ្ឋ: ទាំងអស់ដែលមាននៅសាខាទី ១ ឬសាខាទី ២ ចូរកំណត់បញ្ជីមុខកេសដ្ឋ:នៅសាខាទី ៣ ($A \cup B$) ។

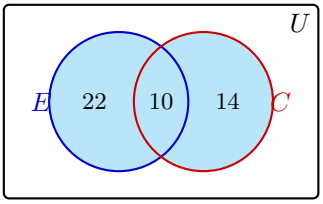
ចម្លើយ ៖ បញ្ជីមុខកេសដ្ឋ:នៅសាខាទី ៣ គឺជាការប្រមូលផ្តុំធាតុទាំងអស់នៃ A និង B ៖

ដូចនេះ $A \cup B = \{$កាហ្វេ, តែបៃតង, ទឹកក្រូច, ទឹកដោះគោស្រស់, តែក្រូចឆ្មារ$\}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៣៨ (ការស្វង់មតិអំពីការសិក្សាតាសាបរទេស)៖

ក្នុងចំណោមសិស្សមួយក្រុម មានសិស្សចំនួន 32 នាក់រៀនភាសាអង់គ្លេស (E), 24 នាក់រៀនភាសាចិន (C) និង 10 នាក់រៀនភាសាទាំងពីរ ($E \cap C$) ។ ចូររកចំនួនសិស្សសរុបដែលរៀនភាសាអង់គ្លេស ឬភាសាចិន ($n(E \cup C)$) ។

ចម្លើយ ៖ តាមរូបមន្តកាឌីណាល់នៃប្រជុំសំណុំ និងដ្យាក្រាមវេនខាងក្រោម ៖



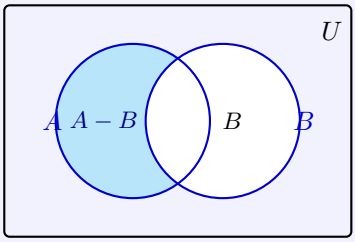
$$n(E \cup C) = n(E) + n(C) - n(E \cap C) = 32 + 24 - 10 = 46 \text{ នាក់}$$

ដូចនេះ មានសិស្សសរុបចំនួន 46 នាក់ដែលរៀនភាសាអង់គ្លេស ឬភាសាចិន ។

៣.២.៣ ផលដកនៃសំណុំ (Difference of Sets)

និយមន័យ ៣.៣៩ (ផលដកនៃសំណុំ)៖
ផលដកនៃសំណុំ A និង B (តាងដោយ $A-B$ ឬ $A \setminus B$) គឺជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយណាដែលជាធាតុរបស់ A ប៉ុន្តែមិនមែនជាធាតុរបស់ B ទេ[cite: 1, 2] ៖

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



ចំនួនធាតុនៃ $A-B$ តាងដោយ $n(A-B)$ ។

ចំណាំ ៣.៤០៖
- $A-B$ អាចសរសេរជា $A \cap \bar{B}$ ផងដែរ ។
- ជាទូទៅ $A-B \neq B-A$ (លើកលែងតែ $A=B$) ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤១ (ផលដករវាងសំណុំដែលមានធាតុរួមខ្លះ)៖
គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2,3,4,5\}$ និង $B=\{3,4,5,6,7\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $A-B$ និង $B-A$ ព្រមទាំងចំនួនធាតុរបស់វា ។

ចម្លើយ ៖ ធាតុរួមរវាង A និង B គឺ $3,4,5$ ៖
- ដកធាតុរួមចេញពី A គេបាន $A-B=\{1,2\}$ និង $n(A-B)=2$ ។
- ដកធាតុរួមចេញពី B គេបាន $B-A=\{6,7\}$ និង $n(B-A)=2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤២ (ផលដករវាងសំណុំដែលសរសេរតាមលក្ខណៈរួម)៖
គេ ឱ្យសំណុំ $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាគួរចែកវិជ្ជមាននៃ $12\}$ និង $B=\{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាចំនួនបឋមតូចជាង $10\}$។ ចូរកំណត់សំណុំ $A-B$ និង $n(A-B)$ ។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំ A និង B តាមការរាយធាតុ គេបាន ៖[cite: 1, 4]
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ និង $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ។
ធាតុរបស់ A ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុង B គឺ $1, 4, 6, 12$ ៖
ដូចនេះ $A - B = \{1, 4, 6, 12\}$ និង $n(A - B) = 4$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៣ (ផលដកវ៉ាងពីរសំណុំដាច់គ្នា)៖
គេឱ្យសំណុំ $M = \{a, b, c\}$ និង $N = \{1, 2, 3\}$។ ចូរកំណត់ $M - N$ និង $N - M$ ។

ចម្លើយ ៖ ដោយសារសំណុំ M និង N ជាសំណុំដាច់គ្នា ($M \cap N = \emptyset$) គ្មានធាតុណារបស់ M ស្ថិតក្នុង N ឡើយ ៖
ដូចនេះ $M - N = \{a, b, c\} = M$ និង $N - M = \{1, 2, 3\} = N$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៤ (ផលដកករណីសំណុំមួយជាសំណុំរងនៃសំណុំមួយទៀត)៖
គេឱ្យសំណុំ $P = \{2, 4\}$ និង $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$។ ចូរកំណត់ $P - Q$ និង $Q - P$ ។

ចម្លើយ ៖ ដោយសារ $P \subset Q$ (គ្រប់ធាតុរបស់ P សុទ្ធតែនៅក្នុង Q)[cite: 1, 4] ៖

- គ្មានធាតុណារបស់ P ដែលមិននៅក្នុង Q ទេ ៖ $P - Q = \emptyset$ ។
- ដកធាតុរបស់ P ចេញពី Q គេបាន ៖ $Q - P = \{1, 3, 5\}$ ។

ជាទូទៅ ៣.៤៥៖
ចំពោះពីរសំណុំ A និង B ណាមួយ គេបាន ៖

- $A - \emptyset = A$ និង $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - A = \emptyset$
- បើ $A \subseteq B$ នោះ $A - B = \emptyset$
- បើ $A \cap B = \emptyset$ នោះ $A - B = A$ និង $B - A = B$
- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

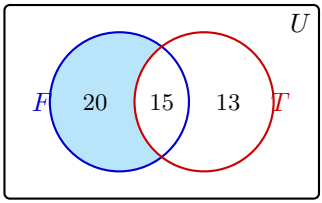
ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍ក្នុងជីវិតរាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៦ (ការស្ទង់មតិអំពីការប្រើប្រាស់បណ្តាញសង្គម)៖
ក្នុងចំណោមសិស្សថ្នាក់ទី ១០ មួយក្រុម តាង F ជាសំណុំសិស្សដែលប្រើប្រាស់កម្មវិធី

Facebook និង T ជាសំណុំសិស្សដែលប្រើប្រាស់កម្មវិធី TikTok ។ គេដឹងថា $n(F) = 35$, $n(T) = 28$ និងមានសិស្សចំនួន 15 នាក់ប្រើប្រាស់កម្មវិធីទាំងពីរ ។ ចូររកចំនួនសិស្សដែល ៖

a. ប្រើប្រាស់តែកម្មវិធី Facebook មួយមុខគត់ ($n(F - T)$) ។
b. ប្រើប្រាស់តែកម្មវិធី TikTok មួយមុខគត់ ($n(T - F)$) ។

ចម្លើយ ៖ តាមរូបមន្តកាឌីណាល់នៃផលដកសំណុំ និងដ្យាក្រាមវេនខាងក្រោម ៖



a. ចំនួនសិស្សប្រើតែ Facebook មួយមុខគត់ (ប្រើ F តែមិនប្រើ T) ៖
$n(F - T) = n(F) - n(F \cap T) = 35 - 15 = 20$ នាក់ ។
b. ចំនួនសិស្សប្រើតែ TikTok មួយមុខគត់ (ប្រើ T តែមិនប្រើ F) ៖
$n(T - F) = n(T) - n(F \cap T) = 28 - 15 = 13$ នាក់ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៧ (ការគ្រប់គ្រងស្តុកទំនិញក្នុងហាង)៖

ហាង លក់ សម្លៀកបំពាក់ មួយ មាន បញ្ជី មុខទំនិញ ក្នុង ស្តុក កាលពីដើម ខែ គឺ $A = \{$អាវយឺត, ខោខូវប៊យ, អាវក្រៅ, ស្បែកជើង, មួក$\}$ ។ នៅចុងខែ មុខទំនិញដែលលក់ដាច់អស់ពីស្តុក គឺ $B = \{$អាវយឺត, ស្បែកជើង, មួក$\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំមុខទំនិញដែលនៅសល់ក្នុងស្តុក ($A - B$) ។

ចម្លើយ ៖ សំណុំមុខទំនិញដែលនៅសល់ក្នុងស្តុក គឺជាធាតុទាំងឡាយណាដែលមាននៅក្នុងស្តុកដើមខែ (A) ប៉ុន្តែមិនស្ថិតក្នុងបញ្ជីទំនិញដែលលក់អស់ (B) ៖
ដូចនេះ $A - B = \{$ខោខូវប៊យ, អាវក្រៅ$\}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៨ (ការជ្រើសរើសបេក្ខជនចូលបម្រើការងារ)៖

ក្រុមហ៊ុន មួយ ត្រូវការ ជ្រើសរើស បុគ្គលិក ដែល ចេះ ភាសាអង់គ្លេស ប៉ុន្តែ មិនទាន់មានបទពិសោធន៍ការងារ (ដើម្បីបណ្តុះបណ្តាលបន្ថែម) ។ តាង $E = \{$សុខា, បុប្ផា, វិសាល, ធីតា, ដារ៉ា$\}$

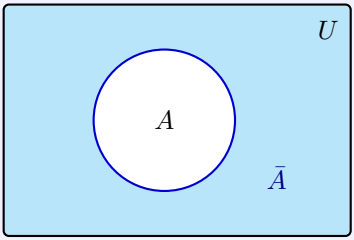
ជាសំណុំបេក្ខជនចេះភាសាអង់គ្លេស និង $W = \{\text{បុប្ផា}, \text{ធីតា}, \text{ពិសិដ្ឋ}\}$ ជាសំណុំបេក្ខជនមានបទពិសោធន៍ការងារ ។ ចូរកំណត់សំណុំបេក្ខជនដែលត្រូវតាមលក្ខខណ្ឌរបស់ក្រុមហ៊ុន ។

ចម្លើយ ៖ បេក្ខជនដែលត្រូវតាមលក្ខខណ្ឌ គឺជាអ្នកដែលស្ថិតក្នុង E តែមិនស្ថិតក្នុង W ដែលតាងដោយ $E - W$ ៖
ដូចនេះ $E - W = \{\text{សុខា}, \text{វិសាល}, \text{ដារ៉ា}\}$ ។

៣.២.៤ សំណុំបំពេញ (Complement of a Set)

និយមន័យ ៣.៤៩ (សំណុំបំពេញ)៖
ឱ្យ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំសកល U ។ សំណុំបំពេញនៃសំណុំ A ធៀបនឹង U (តាងដោយ $\bar{A}$ ឬ A^c ឬ A') គឺជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយណាដែលស្ថិតនៅក្នុង U ប៉ុន្តែមិនមែនជាធាតុរបស់ A ទេ[cite: 1, 2] ៖

$$\bar{A} = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



ចំនួនធាតុនៃ $\bar{A}$ តាងដោយ $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ ។

ចំណាំ ៣.៥០៖
សំណុំ A និងសំណុំបំពេញ $\bar{A}$ តែងតែជា សំណុំដាច់គ្នា ($A \cap \bar{A} = \emptyset$) ហើយប្រជុំរបស់វាស្មើនឹងសំណុំសកល ($A \cup \bar{A} = U$) ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៥១ (សំណុំបំពេញដែលសរសេរតាមការរាយធាតុ)៖
គេ ឱ្យ សំណុំ សកល $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ និង សំណុំ រង $A =$

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$[cite: 1] ។ ចូរកំណត់សំណុំ $\bar{A}$ និង $n(\bar{A})$[cite: 1] ។

ចម្លើយ ៖ ធាតុ ទាំងឡាយ ណា ដែល ស្ថិតនៅ ក្នុង U ប៉ុន្តែ មិន ស្ថិតនៅ ក្នុង A គឺ $1, 3, 5, 7, 9$[cite: 1] ៖
ដូចនេះ $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ និង $n(\bar{A}) = 5$[cite: 1] ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤២ (សំណុំបំពេញដែលសរសេរតាមលក្ខណៈរួម)៖
គេ ឱ្យ សំណុំ សកល $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\}$ និង សំណុំ $B = \{x \in U \mid x$ ជា ចំនួនបឋម$\}$[cite: 1] ។ ចូរកំណត់សំណុំ $\bar{B}$ ។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំ U និង B តាមការរាយធាតុ គេបាន ៖
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ និង $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ ។
ដកធាតុរបស់ B ចេញពី U គេបាន ៖
$\bar{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៣ (សំណុំបំពេញរួមជាមួយប្រមាណវិធីប្រជុំ និងប្រសព្វ)៖
គេ ឱ្យ សំណុំសកល $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c\}$ និង $B = \{b, c, d, e\}$ ។ ចូរ កំណត់សំណុំ ៖

a. $\overline{A \cup B}$
b. $\bar{A} \cap \bar{B}$

ចម្លើយ ៖

a. គេមាន $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ ។
   ដូចនេះ $\overline{A \cup B} = U - (A \cup B) = \{f\}$ ។
b. គេមាន $\bar{A} = \{d, e, f\}$ និង $\bar{B} = \{a, f\}$ ។
   ដូចនេះ $\bar{A} \cap \bar{B} = \{f\}$ ។

(តាមលទ្ធផល (a) និង (b) យើងឃើញថា $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ដែលជាច្បាប់ De Morgan)[cite: 1, 2]

ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍ក្នុងជីវិតរាជរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ

ឧទាហរណ៍ ៣.៥៤ (ការស្វង់មតិអំពីការចាក់វ៉ាក់សាំង ឬការប្រើប្រាស់សេវាកម្ម)៖
ក្នុងភូមិមួយមានគ្រួសារសរុបចំនួន 120 គ្រួសារ (U) ។ ក្នុងនោះមានគ្រួសារចំនួន 85 គ្រួសារប្រើប្រាស់ទឹកស្អាត (W) និង 70 គ្រួសារប្រើប្រាស់អគ្គិសនី (E) ដោយមាន 50 គ្រួសារប្រើប្រាស់ទាំងទឹកស្អាត និងអគ្គិសនី ។ តើមានគ្រួសារប៉ុន្មានដែល មិនប្រើប្រាស់ទាំងទឹកស្អាត និងអគ្គិសនីសោះ ($n(\overline{W \cup E})$) ?

ចម្លើយ ៖ ជាដំបូង យើងរកចំនួនគ្រួសារដែលប្រើប្រាស់យ៉ាងហោចណាស់សេវាកម្មមួយ ($n(W \cup E)$) ៖

$$n(W \cup E) = n(W) + n(E) - n(W \cap E) = 85 + 70 - 50 = 105 \text{ គ្រួសារ}$$

ចំនួនគ្រួសារដែលមិនប្រើប្រាស់ទាំងពីរសោះ គឺជាកាឌីណាល់នៃសំណុំបំពេញ $\overline{W \cup E}$ ៖

$$n(\overline{W \cup E}) = n(U) - n(W \cup E) = 120 - 105 = 15 \text{ គ្រួសារ}$$

ដូចនេះ មានគ្រួសារចំនួន 15 ដែលមិនប្រើប្រាស់ទាំងទឹកស្អាត និងអគ្គិសនីសោះ ។

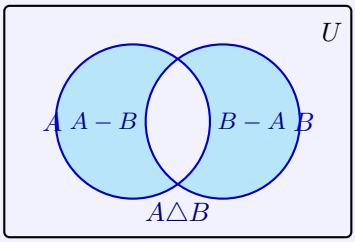
ជាទូទៅ ៣.៥៥៖
ចំពោះសំណុំរង A នៃសំណុំសកល U គេបាន ៖

- $\bar{U} = \emptyset$ និង $\bar{\emptyset} = U$
- $\bar{\bar{A}} = A$ (ច្បាប់បំពេញពីរដង)
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ និង $A \cup \bar{A} = U$
- $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$

៣.២.៤ ផលដកឆ្លុះនៃសំណុំ (Symmetric Difference of Sets)

និយមន័យ ៣.៤៦ (ផលដកឆ្លុះនៃសំណុំ)៖
ផលដកឆ្លុះនៃសំណុំ A និង B (តាងដោយ $A\triangle B$ ឬ $A \oplus B$) គឺជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយណាដែលស្ថិតនៅក្នុង A ឬស្ថិតនៅក្នុង B ប៉ុន្តែមិនស្ថិតនៅក្នុងប្រសព្វនៃ A និង B ទេ ៖

$$A\triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$



ចំនួនធាតុនៃ $A\triangle B$ តាងដោយ $n(A\triangle B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$ ។

ចំណាំ ៣.៤៧៖
ផលដកឆ្លុះមានលក្ខណៈត្រឡប់ (Commutative) គឺ $A\triangle B = B\triangle A$ ជានិច្ច ។ វាត្រូវគ្នានឹងឈ្មោះតក្កវិទ្យា «ឬផ្តាច់មុខ» (Exclusive OR / XOR) ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៨ (ផលដកឆ្លុះរវាងសំណុំដែលសរសេរតាមការរាយធាតុ)៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ និង $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំ $A\triangle B$ និង $n(A\triangle B)$ ។

ចម្លើយ ៖ តាមនិយមន័យ $A\triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ ៖

- គេបាន $A - B = \{1, 2, 3\}$ និង $B - A = \{6, 7, 8\}$ ។
- ដូចនេះ $A\triangle B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ និង $n(A\triangle B) = 6$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣.៤៩ (ផលដកឆ្លុះរវាងសំណុំដែលសរសេរតាមលក្ខណៈរួម)៖
គេឱ្យ សំណុំ $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ $8\}$ និង $N = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ $12\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំ $M \triangle N$ ។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំ M និង N តាមការរាយធាតុ គេបាន ៖
$M = \{1, 2, 4, 8\}$ និង $N = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ។
ធាតុរួមគ្នាគឺ $M \cap N = \{1, 2, 4\}$ ។ ដកធាតុរួមទាំងនេះចេញពីប្រជុំ $M \cup N$ គេបាន ៖
$M \triangle N = \{3, 6, 8, 12\}$ ។

ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍ក្នុងជីវិតារពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ

ឧទាហរណ៍ ៣.៦០ (ការស្ទង់មតិរកអ្នកចូលរួមតែមួយមុខគត់)៖
ក្នុងក្លឹបកីឡាមួយ មានសមាជិកចំនួន 40 នាក់លេងកីឡាវាយសី (B) និង 35 នាក់លេងកីឡាវាយកូនឃ្លីលើតុ (T) ដោយមានសមាជិកចំនួន 15 នាក់លេងកីឡាទាំងពីរប្រភេទ ។ ចូររកចំនួនសមាជិកដែល លេងកីឡាតែមួយប្រភេទគត់ ($n(B \triangle T)$) ។

ចម្លើយ ៖ ចំនួនសមាជិកដែលលេងកីឡាតែមួយប្រភេទគត់ គឺជាអ្នកដែលលេងវាយសីតែមួយមុខ ($B - T$) បូកជាមួយអ្នកដែលលេងវាយកូនឃ្លីលើតុតែមួយមុខ ($T - B$) ៖

- $n(B - T) = n(B) - n(B \cap T) = 40 - 15 = 25$ នាក់
- $n(T - B) = n(T) - n(B \cap T) = 35 - 15 = 20$ នាក់

ដូចនេះ $n(B \triangle T) = 25 + 20 = 45$ នាក់ ។

ជាទូទៅ ៣.៦១៖
ចំពោះសំណុំ A, B និង C ណាមួយ គេបាន ៖

- $A \triangle B = B \triangle A$ (លក្ខណៈត្រឡប់)
- $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (លក្ខណៈផ្តុំ)
- $A \triangle \emptyset = A$ និង $A \triangle A = \emptyset$
- $A \triangle U = \bar{A}$ និង $A \triangle \bar{A} = U$
- $n(A \triangle B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

៣.២.៦ ច្បាប់ពីជគណិតនៃសំណុំ (Laws of Set Algebra)

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៦២ (ច្បាប់គ្រឹះនៃពីជគណិតនៃសំណុំ)៖
ចំពោះសំណុំរង A, B, C ណាមួយនៃសំណុំសកល U គេបានលក្ខណៈសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម ៖

១ ច្បាប់ដេតស្វ័យគុណ (Idempotent Laws) ៖

$$A \cup A = A \quad \text{និង} \quad A \cap A = A$$

២ ច្បាប់ត្រឡប់ (Commutative Laws) ៖

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{និង} \quad A \cap B = B \cap A$$

៣ ច្បាប់ផ្គុំ (Associative Laws) ៖

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{និង} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) [cite: 3]$$

៤ ច្បាប់បំបែក (Distributive Laws) ៖

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) [cite: 2, 3]$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) [cite: 2, 3]$$

៥ ច្បាប់ដឺម៉កង់ (De Morgan's Laws) ៖

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{និង} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} [cite: 1, 2, 3]$$

៦ ច្បាប់ស្រូប (Absorption Laws) ៖

$$A \cup (A \cap B) = A \quad \text{និង} \quad A \cap (A \cup B) = A [cite: 2]$$

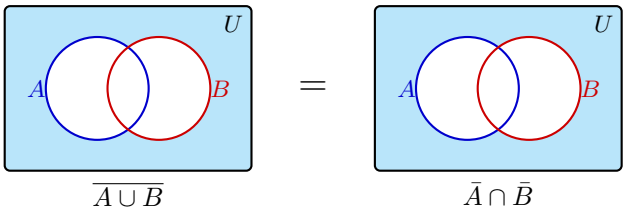
សម្រាយបញ្ជាក់ ៣.៦៣ (សម្រាយបញ្ជាក់ច្បាប់ដឺម៉កង់ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$)៖
វិធីទី ១ ៖ ស្រាយបញ្ជាក់តាមនិយមន័យតក្កវិទ្យា

ចំពោះគ្រប់ធាតុ $x \in U$ គេបាន ៖[cite: 2]

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff x \notin (A \cup B)[cite: 2] \\ &\iff \neg(x \in A \vee x \in B)[cite: 2] \\ &\iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \quad \text{(តាមច្បាប់ De Morgan នៃតក្កវិទ្យា)}[cite: 2] \\ &\iff (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B})[cite: 2] \\ &\iff x \in (\bar{A} \cap \bar{B})[cite: 2] \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ។

វិធីទី ២ ៖ បង្ហាញតាមដ្យាក្រាមវែន (Venn Diagram)



$\overline{A \cup B}$ $\bar{A} \cap \bar{B}$

■

ឧទាហរណ៍ ៣.៦៤ (ការសម្រួលកន្សោមសំណុំដោយប្រើច្បាប់ពិជគណិត)៖
ចូរសម្រួលកន្សោមសំណុំ $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ ។

ចម្លើយ ៖ អនុវត្តច្បាប់បំបែក និងច្បាប់បំពេញ គេបាន ៖

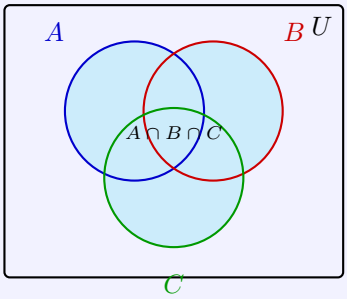
$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) &= A \cup (B \cap \bar{B}) && \text{(ច្បាប់បំបែក)} \\ &= A \cup \emptyset && \text{(ព្រោះ } B \cap \bar{B} = \emptyset\text{)} \\ &= A && \text{(ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$ ។

៣.២.៧ រូបមន្តកាឌីណាល់នៃបីសំណុំ (Cardinality of Three Sets)

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៦៤ (រូបមន្តកាឌីណាល់នៃប្រជុំបីសំណុំ)៖
ចំពោះបីសំណុំមានដែន A, B និង C ណាមួយ គេបាន ៖

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$



ឧទាហរណ៍ ៣.៦៦ (ចំណោទអនុវត្តន៍លើបីសំណុំ)៖
ក្នុងការស្ទង់មតិសិស្សចំនួន 100 នាក់ អំពីការចូលចិត្តអានសៀវភៅ ៣ ប្រភេទ គឺ គណិតវិទ្យា (M), រូបវិទ្យា (P) និង គីមីវិទ្យា (C) គេទទួលបានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម ៖

- $n(M) = 45, n(P) = 40, n(C) = 35$
- $n(M \cap P) = 15, n(P \cap C) = 12, n(M \cap C) = 10$
- មានសិស្សចំនួន 5 នាក់ចូលចិត្តអានទាំងបីមុខ ($n(M \cap P \cap C) = 5$) ។

ចូររកចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តអានយ៉ាងហោចណាស់មួយមុខ ($n(M \cup P \cup C)$) និងចំនួនសិស្សដែលមិនចូលចិត្តអានមុខណាមួយសោះ ។

ចម្លើយ ៖ តាមរូបមន្តកាឌីណាល់នៃបីសំណុំ គេបាន៖

$$\begin{aligned} n(M \cup P \cup C) &= n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(P \cap C) - n(M \cap C) + n(M \cap P \\ &= 45 + 40 + 35 - 15 - 12 - 10 + 5 \\ &= 120 - 37 + 5 = 88 \text{ នាក់} \end{aligned}$$

ចំនួនសិស្សដែលមិនចូលចិត្តអានមុខណាមួយសោះ គឺ ៖

$$n(\overline{M \cup P \cup C}) = n(U) - n(M \cup P \cup C) = 100 - 88 = 12 \text{ នាក់}$$

ដូចនេះ មានសិស្ស 88 នាក់ចូលចិត្តអានយ៉ាងហោចណាស់មួយមុខ និង 12 នាក់មិនចូលចិត្តអានសោះ ។

ផ្នែកលំហាត់អនុទត្តន៍

លំហាត់ ៣.៦៧៖
ចូរសរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមការរាយធាតុ (Roster Method) ៖

ក $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ } 24\}$

ខ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$

គ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$

ឃ $D = \{x \mid x \text{ ជាអក្សរឡាតាំងនៅក្នុងពាក្យ «MATHEMATICS»}\}$

លំហាត់ ៣.៦៨៖
ចូរសរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ (Set-Builder Notation) ៖

ក $M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

ខ $N = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

គ $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

ឃ $Q = \{\text{មករា}, \text{មិថុនា}, \text{កក្កដា}\}$

លំហាត់ ៣.៦៩៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{1, \{2, 3\}, 4, \emptyset\}$ ។ ចូរបញ្ជាក់ថាតើសំណើខាងក្រោម **ពិត** ឬ **មិនពិត** ៖

ក $\{2, 3\} \in A$

ខ $\{2, 3\} \subset A$

គ $\{1, 4\} \subset A$

ឃ $\emptyset \in A$

ង $\emptyset \subset A$

ច $n(A) = 5$

លំហាត់ ៣.៧០៖
គេឱ្យសំណុំ $X = \{1, 2, 3\}$ ។

ក ចូររកចំនួនសំណុំរងទាំងអស់ និងចំនួនសំណុំរងផ្នែលនៃ X ។

ខ ចូរសរសេរសំណុំស្វ័យគុណ $\mathcal{P}(X)$ ។

លំហាត់ ៣.៧១៖
គេ ឱ្យ សំណុំ សកល $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ព្រមទាំង សំណុំរង $A =$

$\{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ និង $C = \{5,6,7,8,9\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោម ៖

ក $A \cap B$
ខ $B \cup C$
គ $A - C$
ឃ $C - B$
ង $\bar{A} \cap \bar{B}$
ច $A \triangle B$
ឆ $(A \cup B) \cap C$
ជ $\overline{B \cap C} - A$

លំហាត់ ៣.៧២៖
គេឱ្យសំណុំសកល $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$ ព្រមទាំងសំណុំរង ៖
$A = \{x \in U \mid x$ ជាពហុគុណនៃ $3\}$
$B = \{x \in U \mid x$ ជាចំនួនសេស$\}$
ចូរកំណត់សំណុំ $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $\bar{B}$ និង $A \triangle B$ ព្រមទាំងរកចំនួនជាតុរបស់សំណុំនីមួយៗ ។

លំហាត់ ៣.៧៣៖
ចូរគូរដ្យាក្រាមវេន (Venn Diagram) រួចផាត់ពណ៌តំណាងឱ្យសំណុំខាងក្រោម ៖

ក $\bar{A} \cap B$
ខ $\overline{A \cap B}$
គ $(A \cup B) - C$
ឃ $A \cap (B \cup C)$

លំហាត់ ៣.៧៤៖
ដោយប្រើច្បាប់ពិជគណិតនៃសំណុំ ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក $A \cup (\bar{A} \cap B)$
ខ $(A - B) \cup (A \cap B)$
គ $\overline{\bar{A} \cup B} \cup (A \cap B)$
ឃ $[A \cap (A \cup B)] \cup [B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})]$

លំហាត់ ៣.៧៥៖
ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពសំណុំខាងក្រោមតាមនិយមន័យតក្កវិទ្យា ៖

ក $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

ខ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

គ $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

លំហាត់ ៣.៧៦៖
គេឱ្យពីរសំណុំមានដែន A និង B ដែលមាន $n(U)=60$, $n(A)=32$, $n(B)=25$ និង $n(A\cap B)=10$ ។ ចូរគណនា ៖

ក $n(A\cup B)$

ខ $n(A-B)$

គ $n(B-A)$

ឃ $n(A\triangle B)$

ង $n(\bar{A}\cap\bar{B})$

ច $n(\bar{A}\cup\bar{B})$

លំហាត់ ៣.៧៧៖
ក្នុងក្រុមហ៊ុនទេសចរណ៍មួយមានមគ្គុទ្ទេសក៍សរុបចំនួន 50 នាក់ ។ ក្នុងនោះមាន 34 នាក់ចេះនិយាយភាសាអង់គ្លេស 22 នាក់ចេះនិយាយភាសាបារាំង និង 6 នាក់មិនចេះទាំងភាសាអង់គ្លេស និងភាសាបារាំង ។ តើមានមគ្គុទ្ទេសក៍ប៉ុន្មាននាក់ដែល ៖

ក ចេះនិយាយភាសាទាំងពីរ ?

ខ ចេះនិយាយតែភាសាអង់គ្លេសមួយមុខគត់ ?

គ ចេះនិយាយតែមួយភាសាគត់ (អង់គ្លេស ឬបារាំង តែមិនចេះទាំងពីរ) ?

លំហាត់ ៣.៧៨៖
ការស្ទង់មតិលើអតិថិជនចំនួន 150 នាក់នៅផ្សារទំនើបមួយ អំពីការទិញផ្លែឈើ ៣ ប្រភេទ គឺ ផ្លែប៉ោម (A), ផ្លែចេក (B) និង ផ្លែក្រូច (O) បានបង្ហាញលទ្ធផលដូចខាងក្រោម ៖

- 70 នាក់ទិញផ្លែប៉ោម, 65 នាក់ទិញផ្លែចេក និង 60 នាក់ទិញផ្លែក្រូច ។
- 25 នាក់ទិញទាំងប៉ោម និងចេក, 20 នាក់ទិញទាំងចេក និងក្រូច, 18 នាក់ទិញទាំងប៉ោម និងក្រូច ។
- 10 នាក់ទិញផ្លែឈើទាំង ៣ ប្រភេទ ។

ចូររកចំនួនអតិថិជនដែល ៖

ក ទិញផ្លែឈើយ៉ាងហោចណាស់មួយប្រភេទ ។

ខ មិនបានទិញផ្លែឈើទាំង ៣ ប្រភេទនេះសោះ ។

គ ទិញតែផ្លែប៉ោមមួយមុខគត់ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៣.៧៩៖
ចូរសរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមការរាយធាតុ (Roster Method) ៖

ក $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ } 24\}$

ខ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$

គ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$

ឃ $D = \{x \mid x \text{ ជាអក្សរឡាតាំងនៅក្នុងពាក្យ «MATHEMATICS»}\}$

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំតាមការរាយធាតុ គេបាន ៖

ក $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ } 24\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

ខ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$
$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

គ ដោះស្រាយសមីការ ៖
$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0$
$\iff x = 2 \text{ ឬ } x = 3$
ដូចនេះ $C = \{2, 3\}$ ។

ឃ $D = \{x \mid x \text{ ជាអក្សរឡាតាំងនៅក្នុងពាក្យ «MATHEMATICS»}\}$
$= \{M, A, T, H, E, I, C, S\}$

លំហាត់ ៣.៨០៖
ចូរសរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ (Set-Builder Notation) ៖

ក $M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

ខ $N = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

គ $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

ឃ $Q = \{\text{មករា}, \text{មិថុនា}, \text{កក្កដា}\}$

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ គេបាន ៖

ក $M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាពហុគុណនៃ 3 និង $x \leq 18\}$

ខ $N = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

$= \{x \mid x = n^2,\ n \in \mathbb{N}$ និង $1 \leq n \leq 6\}$

គ $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ជាចំនួនបឋម និង $x < 20\}$

ឃ $Q =$ {មករា, មិថុនា, កក្កដា}

$= \{x \mid x$ ជាឈ្មោះខែក្នុងប្រតិទិនសុរិយគតិដែលផ្តើមដោយអក្សរ «ម» ឬ «ក»$\}$

លំហាត់ ៣.៨១៖
គេ ឱ្យ សំណុំ $A = \{1, \{2, 3\}, 4, \emptyset\}$ ។ ចូរ បញ្ជាក់ ថា តើ សំណើ ខាងក្រោម **ពិត** ឬ **មិនពិត** ៖

ក $\{2, 3\} \in A$

ខ $\{2, 3\} \subset A$

គ $\{1, 4\} \subset A$

ឃ $\emptyset \in A$

ង $\emptyset \subset A$

ច $n(A) = 5$

ចម្លើយ ៖ ពិនិត្យធាតុនៃសំណុំ $A = \{1, \{2, 3\}, 4, \emptyset\}$ (មានធាតុចំនួន ៤ គឺ 1, $\{2, 3\}$, 4 និង $\emptyset$) ៖

ក ពិត ព្រោះ $\{2, 3\}$ ជាធាតុមួយរបស់សំណុំ A ។

ខ មិនពិត ព្រោះ $2 \notin A$ និង $3 \notin A$ (ត្រូវសរសេរ $\{\{2, 3\}\} \subset A$ ទើបពិត) ។

គ ពិត ព្រោះ $1 \in A$ និង $4 \in A$ ។

ឃ ពិត ព្រោះ $\emptyset$ ត្រូវបានចុះបញ្ជីជាធាតុមួយនៅក្នុង A ។

ង ពិត ព្រោះសំណុំទទេ $\emptyset$ ជាសំណុំរងនៃគ្រប់សំណុំទាំងអស់[cite: 1, 3] ។

ច មិនពិត ព្រោះចំនួនធាតុពិតប្រាកដរបស់ A គឺ $n(A) = 4$[cite: 1] ។

លំហាត់ ៣.៨២៖
គេឱ្យសំណុំ $X = \{1, 2, 3\}$ ។

ក) ចូររកចំនួនសំណុំរងទាំងអស់ និងចំនួនសំណុំរងផ្ទាល់នៃ X ។

ខ) ចូរសរសេរសំណុំស្វ័យគុណ $\mathcal{P}(X)$ ។

ចម្លើយ ៖ គេមានសំណុំ $X = \{1, 2, 3\}$ ដែលមានចំនួនធាតុ $n(X) = 3$ ៖

ក) ចំនួនសំណុំរងទាំងអស់នៃ $X = 2^{n(X)} = 2^3 = 8$ សំណុំរង

ចំនួនសំណុំរងផ្ទាល់នៃ $X = 2^{n(X)} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ សំណុំរងផ្ទាល់

ខ) សំណុំស្វ័យគុណ $\mathcal{P}(X)$ គឺជាសំណុំនៃគ្រប់សំណុំរងទាំងអស់របស់ X ៖

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

លំហាត់ ៣.៨៣៖
គេឱ្យសំណុំសកល $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ព្រមទាំងសំណុំរង $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ និង $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោម ៖

ក) $A \cap B$

ខ) $B \cup C$

គ) $A - C$

ឃ) $C - B$

ង) $\bar{A} \cap \bar{B}$

ច) $A \triangle B$

ឆ) $(A \cup B) \cap C$

ជ) $\overline{B \cap C} - A$

ចម្លើយ ៖ គេមាន $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ព្រមទាំង $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ និង $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ៖

ក) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6, 8\}$
$= \{2, 4\}$

ខ) $B \cup C = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$= \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

គ $A - C = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$= \{1, 2, 3, 4\}$

ឃ $C - B = \{5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4, 6, 8\}$
$= \{5, 7, 9\}$

ង ដោយ $\bar{A} = U - A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ និង $\bar{B} = U - B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ៖
$\bar{A} \cap \bar{B} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$
$= \{7, 9, 10\}$

ច ដោយ $A - B = \{1, 3, 5\}$ និង $B - A = \{6, 8\}$ ៖
$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
$= \{1, 3, 5\} \cup \{6, 8\}$
$= \{1, 3, 5, 6, 8\}$

ឆ ដោយ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ ៖
$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$= \{5, 6, 8\}$

ជ ដោយ $B \cap C = \{6, 8\}$ នាំឱ្យ $\overline{B \cap C} = U - (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$[cite: 1] ៖
$\overline{B \cap C} - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$= \{7, 9, 10\}$

លំហាត់ ៣.៨៨៖
គេឱ្យសំណុំសកល $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$ ព្រមទាំងសំណុំរង ៖
$A = \{x \in U \mid x$ ជាពហុគុណនៃ $3\}$
$B = \{x \in U \mid x$ ជាចំនួនសេស$\}$
ចូរកំណត់សំណុំ $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $\bar{B}$ និង $A \triangle B$ ព្រមទាំងរកចំនួនធាតុរបស់សំណុំនីមួយៗ ។

ចម្លើយ ៖ សរសេរសំណុំ U, A និង B តាមការរាយធាតុ គេបាន ៖
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}[cite: 3]$

ក $A \cap B = \{3,6,9,12,15\} \cap \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$
$= \{3,9,15\}[cite:3]$
ដូចនេះ ចំនួនធាតុគឺ $n(A \cap B) = 3$ ។[cite: 3]

ខ $A \cup B = \{3,6,9,12,15\} \cup \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$
$= \{1,3,5,6,7,9,11,12,13,15\}[cite:3]$
ដូចនេះ ចំនួនធាតុគឺ $n(A \cup B) = 10$ ។[cite: 3]

គ $A - B = \{3,6,9,12,15\} - \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$
$= \{6,12\}[cite:3]$
ដូចនេះ ចំនួនធាតុគឺ $n(A - B) = 2$ ។[cite: 3]

ឃ $\bar{B} = U - B[cite:3]$
$= \{2,4,6,8,10,12,14\}[cite:3]$
ដូចនេះ ចំនួនធាតុគឺ $n(\bar{B}) = 7$ ។[cite: 3]

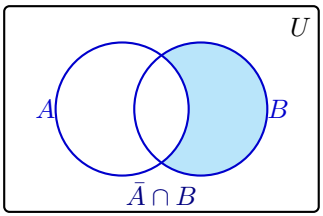
ង $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)[cite:3]$
$= \{1,3,5,6,7,9,11,12,13,15\} - \{3,9,15\}$
$= \{1,5,6,7,11,12,13\}[cite:3]$
ដូចនេះ ចំនួនធាតុគឺ $n(A \triangle B) = 7$ ។[cite: 3]

លំហាត់ ៣.៨៤៖
ចូរគូរដ្យាក្រាមវេន (Venn Diagram) រួចផាត់ពណ៌តំណាងឱ្យសំណុំខាងក្រោម ៖

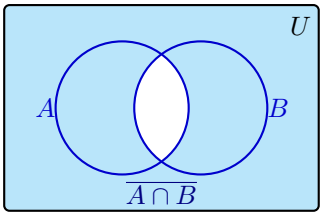
ក $\bar{A} \cap B$
ខ $\overline{A \cap B}$
គ $(A \cup B) - C$
ឃ $A \cap (B \cup C)$

ចម្លើយ ៖ គូរដ្យាក្រាមវេន និងផាត់ពណ៌តំណាងឱ្យសំណុំនីមួយៗ គេបាន ៖

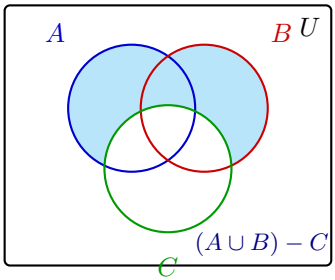
ក $\bar{A} \cap B$ (ផ្នែករបស់ B ដែលមិនប៉ះជាមួយ A ឬ $B - A$) ៖



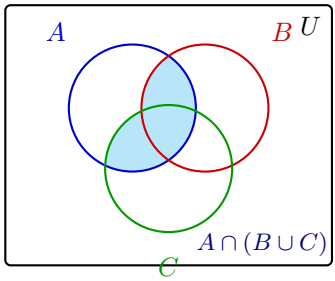
ខ $\overline{A \cap B}$ (ផ្នែកទាំងអស់ក្នុង U លើកលែងតែប្រសព្វ $A \cap B$) ៖



គ $(A \cup B) - C$ (ផ្នែកប្រជុំ $A \cup B$ ដែលដកផ្នែក C ចេញ) ៖



ឃ $A \cap (B \cup C)$ (ផ្នែករបស់ A ដែលប្រសព្វជាមួយ B ឬ C) ៖



លំហាត់ ៣.៨៦៖
ដោយប្រើច្បាប់ពិជគណិតនៃសំណុំ ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក $A \cup (\bar{A} \cap B)$

ខ $(A - B) \cup (A \cap B)$

គ $\overline{\bar{A} \cup B} \cup (A \cap B)$

ឃ $[A \cap (A \cup B)] \cup [B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})]$

ចម្លើយ ៖ សម្រួលកន្សោមដោយប្រើច្បាប់ពិជគណិតនៃសំណុំ គេបាន ៖

ក $A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)$ (ច្បាប់បំបែក)
$= U \cap (A \cup B)$ (ច្បាប់បំពេញ)
$= A \cup B$ (ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ)

ខ $(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ (និយមន័យផលដក)
$= A \cap (\bar{B} \cup B)$ (ច្បាប់បំបែក)
$= A \cap U$ (ច្បាប់បំពេញ)
$= A$ (ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ)

គ $\overline{\bar{A} \cup B} \cup (A \cap B) = (\bar{\bar{A}} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ (ច្បាប់ដឺម៉ក)
$= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ (ច្បាប់បំពេញពីរដង)
$= A \cap (\bar{B} \cup B)$ (ច្បាប់បំបែក)
$= A \cap U$ (ច្បាប់បំពេញ)
$= A$ (ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ)

ឃ $[A \cap (A \cup B)] \cup [B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})] = A \cup [(B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})]$ (ច្បាប់ស្រូប និងច្បាប់បំបែ
$= A \cup [(B \cap \bar{A}) \cup \emptyset]$ (ច្បាប់បំពេញ)
$= A \cup (B \cap \bar{A})$ (ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ)
$= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$ (ច្បាប់បំបែក)
$= (A \cup B) \cap U$ (ច្បាប់បំពេញ)
$= A \cup B$ (ច្បាប់ឯកលក្ខណៈ)

លំហាត់ ៣.៨៧៖
ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពសំណុំខាងក្រោមតាមនិយមន័យតក្កវិទ្យា ៖

ក $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

ខ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

គ $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ចម្លើយ ៖ ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពសំណុំតាមនិយមន័យតក្កវិទ្យា (ចំពោះគ្រប់ធាតុ $x \in U$) គេបាន ៖

ក បង្ហាញថា $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ៖

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \quad \text{(ច្បាប់ De Morgan នៃតក្កវិទ្យា)} \\ &\iff (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}) \\ &\iff x \in (\bar{A} \cup \bar{B}) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ។

ខ បង្ហាញថា $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ ៖

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\ &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\iff x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\ &\iff x \in (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ ។

គ បង្ហាញថា $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ៖

$$\begin{aligned}
x \in A\triangle B &\iff x \in (A-B)\cup(B-A)\\
&\iff (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\\
&\iff \big[(x\in A\wedge x\notin B)\vee x\in B\big]\wedge\big[(x\in A\wedge x\notin B)\vee x\notin A\big]\\
&\iff \big[(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin B\vee x\in B)\big]\\
&\quad\wedge\big[(x\in A\vee x\notin A)\wedge(x\notin B\vee x\notin A)\big]\\
&\iff \big[(x\in A\vee x\in B)\wedge T\big]\wedge\big[T\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\big]\\
&\iff (x\in A\vee x\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\\
&\iff x\in(A\cup B)\wedge x\notin(A\cap B)\\
&\iff x\in(A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$ ។

លំហាត់ ៣.៨៨៖
គេឱ្យពីរសំណុំមានដែន A និង B ដែលមាន $n(U)=60, n(A)=32, n(B)=25$ និង $n(A\cap B)=10$ ។ ចូរគណនា ៖

ក $n(A\cup B)$
ខ $n(A-B)$
គ $n(B-A)$
ឃ $n(A\triangle B)$
ង $n(\bar{A}\cap\bar{B})$
ច $n(\bar{A}\cup\bar{B})$

ចម្លើយ ៖ គេមាន $n(U)=60, n(A)=32, n(B)=25$ និង $n(A\cap B)=10$ ៖

ក $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=32+25-10=47$

ខ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=32-10=22$

គ $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=25-10=15$

ឃ $n(A\triangle B)=n(A-B)+n(B-A)$
$=22+15=37$

ង តាមច្បាប់ដឺម៉ក់ង់ $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$[cite: 1, 2] ៖

$$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B})$$
$$= n(U) - n(A \cup B)$$
$$= 60 - 47 = 13$$

ⓑ តាមច្បាប់ដឺម៉ក $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$[cite: 1, 2] ៖
$$n(\bar{A} \cup \bar{B}) = n(\overline{A \cap B})$$
$$= n(U) - n(A \cap B)[cite : 1]$$
$$= 60 - 10 = 50$$

លំហាត់ ៣.៨៩៖
ក្នុងក្រុមហ៊ុនទេសចរណ៍មួយមានមគ្គុទ្ទេសក៍សរុបចំនួន 50 នាក់ ។ ក្នុងនោះមាន 34 នាក់ចេះនិយាយភាសាអង់គ្លេស 22 នាក់ចេះនិយាយភាសាបារាំង និង 6 នាក់មិនចេះទាំងភាសាអង់គ្លេស និងភាសាបារាំង ។ តើមានមគ្គុទ្ទេសក៍ប៉ុន្មាននាក់ដែល ៖

ⓚ ចេះនិយាយភាសាទាំងពីរ ?

ⓚ ចេះនិយាយតែភាសាអង់គ្លេសមួយមុខគត់ ?

ⓒ ចេះនិយាយតែមួយភាសាគត់ (អង់គ្លេស ឬបារាំង តែមិនចេះទាំងពីរ) ?

ចម្លើយ ៖ តាង U ជាសំណុំមគ្គុទ្ទេសក៍ទេសចរណ៍សរុប E ជាសំណុំអ្នកចេះនិយាយភាសាអង់គ្លេស និង F ជាសំណុំអ្នកចេះនិយាយភាសាបារាំង ។
តាមបម្រាប់ គេបាន ៖
$$n(U) = 50$$
$$n(E) = 34$$
$$n(F) = 22$$
$$n(\overline{E \cup F}) = 6$$

ⓚ រកចំនួនមគ្គុទ្ទេសក៍ដែលចេះនិយាយភាសាទាំងពីរ ($n(E \cap F)$) ៖
ចំនួនអ្នកដែលចេះនិយាយយ៉ាងហោចណាស់មួយភាសា (អង់គ្លេស ឬបារាំង) គឺ ៖
$$n(E \cup F) = n(U) - n(\overline{E \cup F})$$
$$= 50 - 6 = 44 \text{ នាក់}$$
តាមរូបមន្តកាឌីណាល់ $n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$[cite: 2, 5] គេ

ទាញបាន ៖

$n(E \cap F) = n(E) + n(F) - n(E \cup F)$

$= 34 + 22 - 44 = 12$ នាក់

ដូចនេះ មានមគ្គុទ្ទេសក៍ចំនួន 12 នាក់ដែលចេះនិយាយភាសាទាំងពីរ ។

ខ រកចំនួនមគ្គុទ្ទេសក៍ដែលចេះនិយាយតែភាសាអង់គ្លេសមួយមុខគត់ ($n(E - F)$) ៖

$n(E - F) = n(E) - n(E \cap F)[cite : 2]$

$= 34 - 12 = 22$ នាក់

ដូចនេះ មានមគ្គុទ្ទេសក៍ចំនួន 22 នាក់ដែលចេះនិយាយតែភាសាអង់គ្លេសមួយមុខគត់ ។

គ រកចំនួនមគ្គុទ្ទេសក៍ដែលចេះនិយាយតែមួយភាសាគត់ ($n(E \triangle F)$) ៖

ចំនួនអ្នកចេះនិយាយតែភាសាបារាំងមួយមុខគត់ គឺ ៖

$n(F - E) = n(F) - n(E \cap F)[cite : 2]$

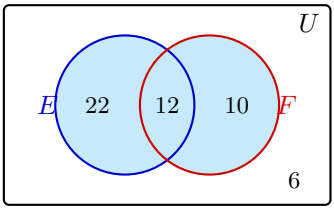
$= 22 - 12 = 10$ នាក់

នាំឱ្យចំនួនអ្នកចេះនិយាយតែមួយភាសាគត់ គឺ ៖

$n(E \triangle F) = n(E - F) + n(F - E)$

$= 22 + 10 = 32$ នាក់

ដូចនេះ មានមគ្គុទ្ទេសក៍ចំនួន 32 នាក់ដែលចេះនិយាយតែមួយភាសាគត់ ។



លំហាត់ ៣.៩០ ៖
ការស្ទង់មតិលើអតិថិជនចំនួន 150 នាក់នៅផ្សារទំនើបមួយ អំពីការទិញផ្លែឈើ ៣ ប្រភេទ គឺ ផ្លែប៉ោម (A), ផ្លែចេក (B) និង ផ្លែក្រូច (O) បានបង្ហាញលទ្ធផលដូចខាងក្រោម ៖

- 70 នាក់ទិញផ្លែប៉ោម, 65 នាក់ទិញផ្លែចេក និង 60 នាក់ទិញផ្លែក្រូច ។
- 25 នាក់ទិញទាំងប៉ោម និងចេក, 20 នាក់ទិញទាំងចេក និងក្រូច, 18 នាក់ទិញទាំងប៉ោម និងក្រូច ។
- 10 នាក់ទិញផ្លែឈើទាំង ៣ ប្រភេទ ។

ចូររកចំនួនអតិថិជនដែល ៖

ក) ទិញផ្លែឈើយ៉ាងហោចណាស់មួយប្រភេទ ។

ខ) មិនបានទិញផ្លែឈើទាំង ៣ ប្រភេទនេះសោះ ។

គ) ទិញតែផ្លែប៉ោមមួយមុខគត់ ។

ចម្លើយ ៖ តាង U ជាសំណុំអតិថិជនសរុប A ជាសំណុំអ្នកទិញផ្លែប៉ោម B ជាសំណុំអ្នកទិញផ្លែចេក និង O ជាសំណុំអ្នកទិញផ្លែក្រូច ។
តាមបម្រាប់ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} n(U) &= 150 \\ n(A) = 70, \quad n(B) &= 65, \quad n(O) = 60 \\ n(A \cap B) = 25, \quad n(B \cap O) &= 20, \quad n(A \cap O) = 18 \\ n(A \cap B \cap O) &= 10 \end{aligned}$$

ក) រកចំនួនអតិថិជនដែលទិញផ្លែឈើយ៉ាងហោចណាស់មួយប្រភេទ ($n(A \cup B \cup O)$) ៖
តាមរូបមន្តកាឌីណាល់នៃបីសំណុំ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup O) &= n(A) + n(B) + n(O) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(B \cap O) - n(A \cap O) + n(A \cap B \cap O) \\ &= 70 + 65 + 60 - 25 - 20 - 18 + 10 \\ &= 195 - 63 + 10 = 142 \text{ នាក់} \end{aligned}$$

ដូចនេះ មានអតិថិជនចំនួន 142 នាក់ដែលទិញផ្លែឈើយ៉ាងហោចណាស់មួយប្រភេទ ។

ខ) រកចំនួនអតិថិជនដែលមិនបានទិញផ្លែឈើទាំង ៣ ប្រភេទនេះសោះ ៖

$n(\overline{A \cup B \cup O}) = n(U) - n(A \cup B \cup O)$[cite: 1]

$= 150 - 142 = 8$ នាក់

ដូចនេះ មានអតិថិជនចំនួន 8 នាក់ដែលមិនបានទិញផ្លែឈើទាំង ៣ ប្រភេទនេះសោះ ។[cite: 1]

គ រកចំនួនអតិថិជនដែលទិញតែផ្លែប៉ោមមួយមុខគត់ ៖[cite: 1]

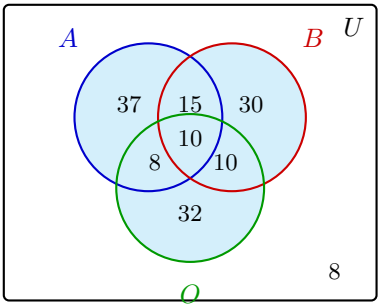
ដកចំនួនអ្នកទិញផ្លែប៉ោមលាយជាមួយផ្លែឈើផ្សេងទៀតចេញពី $n(A)$ គេបាន ៖

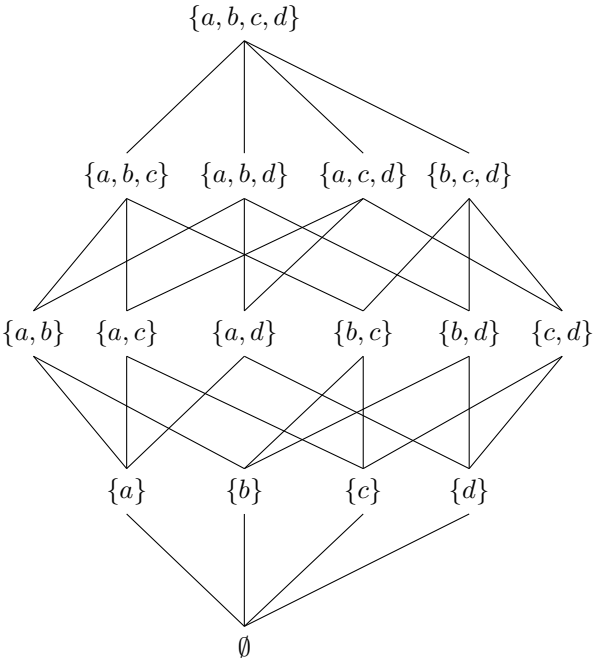
$n(\text{តែប៉ោម}) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap O) + n(A \cap B \cap O)$[cite: 1]

$= 70 - 25 - 18 + 10$

$= 37$ នាក់

ដូចនេះ មានអតិថិជនចំនួន 37 នាក់ដែលទិញតែផ្លែប៉ោមមួយមុខគត់ ។[cite: 1]




$\{a,b,c,d\}$
$\{a,b,c\}$ $\{a,b,d\}$ $\{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$
$\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{a,d\}$ $\{b,c\}$ $\{b,d\}$ $\{c,d\}$
$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$
$\emptyset$

មេរៀនទី ៨ ប្រព័ន្ធចំនួន (Number Systems)

៨.១ សំណុំចំនួនពិត និងចំណែកថ្នាក់

៨.១.១ ចំណែកថ្នាក់នៃចំនួនពិត (Classification of Real Numbers)

និយមន័យ ៨.១ (សំណុំចំនួនសំខាន់ៗក្នុងគណិតវិទ្យា)

១ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ (Natural Numbers) ៖ តាងដោយ $\mathbb{N}$ គឺជាសំណុំចំនួនសម្រាប់រាប់ ៖

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{ឬ } \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\})$$

២ សំណុំចំនួនគត់ប៊ីឡាទីប (Integers) ៖ តាងដោយ $\mathbb{Z}$ គឺជាសំណុំដែលរួមមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន សូន្យ និងចំនួនគត់អវិជ្ជមាន៖

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

៣ សំណុំចំនួនសនិទាន (Rational Numbers) ៖ តាងដោយ $\mathbb{Q}$ គឺជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនដែលអាចសរសេរជាផលធៀប $\frac{a}{b}$ ដែល $a, b \in \mathbb{Z}$ និង $b \neq 0$ ៖

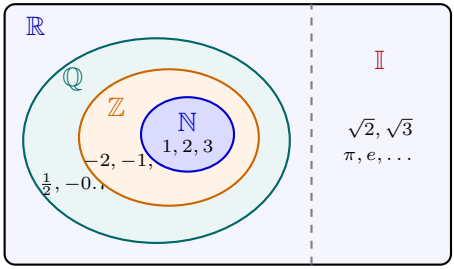
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

(ចំណាំ ៖ ចំនួនសនិទានរួមមានចំនួនគត់ ប្រភាគ ទសភាគមានដែន និងទសភាគអនន្តខួប ដូចជា 0.5, -2.75, $0.333\cdots = \frac{1}{3}$)

៤ សំណុំ ចំនួនអសនិទាន (Irrational Numbers) ៖ តាងដោយ $\mathbb{I}$ (ឬ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) គឺជា សំណុំនៃ ចំនួនទសភាគអនន្តមិនខួប ដែលមិនអាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{a}{b}$ បាន (ឧទាហរណ៍ ៖ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$)[cite: 2, 4] ។

៥ សំណុំ ចំនួនពិត (Real Numbers) ៖ តាងដោយ $\mathbb{R}$ គឺជា ប្រជុំរវាង សំណុំ ចំនួនសនិទាន និងសំណុំចំនួនអសនិទាន៖

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad \text{ដែល} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$



ជាទូទៅ ៤.២៖
ទំនាក់ទំនងសំណុំរងនៃប្រព័ន្ធចំនួនពិត គឺ ៖

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.៣៖
ចូរកំណត់ថាតើចំនួននីមួយៗខាងក្រោមស្ថិតនៅក្នុងសំណុំណាខ្លះ $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R})$ ៖

$$-5, \quad \frac{3}{4}, \quad 0, \quad \sqrt{7}, \quad \sqrt{16}, \quad 2.151515\ldots$$

ចម្លើយ ៖

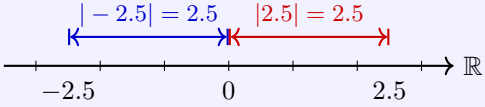
- $-5 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន)
- $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (ចំនួនសនិទាន)[cite: 4]
- $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប)
- $\sqrt{7} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$ (ចំនួនអសនិទាន ព្រោះ 7 មិនមែនជាការេប្រាកដ)
- $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (ចំនួនគត់ធម្មជាតិ)
- $2.151515\cdots = 2 + \frac{15}{99} = \frac{71}{33} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (ទសភាគអនន្តខួប ជាចំនួនសនិទាន)

៤.១.២ បន្ទាត់ចំនួន និង តម្លៃដាច់ខាត (Number Line and Absolute Value)

និយមន័យ ៤.៤ (តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in \mathbb{R}$ តម្លៃដាច់ខាតនៃ x តាងដោយ $|x|$ កំណត់ដោយ ៖

$$|x| = \begin{cases} x & \text{បើ } x \geq 0 \\ -x & \text{បើ } x < 0 \end{cases} [cite: 1]$$

តាមន័យធរណីមាត្រ $|x|$ គឺជាចម្ងាយពីចំណុចគល់ $O(0)$ ទៅចំណុច $M(x)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួន ។



ទ្រឹស្តីបទ ៤.៥ (លក្ខណៈគ្រឹះនៃតម្លៃដាច់ខាត និងវិសមភាពត្រីកោណ)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b \in \mathbb{R}$ គេបាន ៖

១ $|a| \geq 0$ និង $|a| = 0 \iff a = 0$

២ $|-a| = |a|$ និង $-|a| \leq a \leq |a|$

៣ $|a|^2 = a^2$ និង $\sqrt{a^2} = |a|$

៤ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ និង $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

៥ វិសមភាពត្រីកោណ (Triangle Inequality) ៖

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| [cite: 1]$$

ឧទាហរណ៍ ៤.៦ (ការបំប្លាស់សញ្ញាតម្លៃដាច់ខាត និងដោះស្រាយសមីការ) **ក** ចូរសរសេរកន្សោម $A = |\sqrt{5} - 3| + |2 - \sqrt{5}|$ ដោយគ្មានសញ្ញាតម្លៃដាច់ខាត ។

ខ ចូរដោះស្រាយសមីការ $|2x - 3| = 5$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ចម្លើយ ៖

a. ដោយ $\sqrt{5} \approx 2.236$ នោះ $\sqrt{5}-3<0$ និង $2-\sqrt{5}<0$ ៖

$$A=-(\sqrt{5}-3)-(2-\sqrt{5})=-\sqrt{5}+3-2+\sqrt{5}=1$$

b. តាមនិយមន័យ $|X|=a \iff X=a$ ឬ $X=-a$ $(a \geq 0)$ ៖

$$|2x-3|=5 \iff \begin{cases} 2x-3=5 \implies x=4 \\ 2x-3=-5 \implies x=-1 \end{cases}$$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S=\{-1,4\}$ ។

៤.២ កន្សោមរ៉ាឌីកាល់ (Radical Expressions)

៤.២.១ ការគណនាកន្សោមដែលមានរ៉ាឌីកាល់

និយមន័យ ៤.៧ (ឫសការ៉េនៃចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន)៖
គេថាចំនួនពិត x ជាឫសការ៉េនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន ឬសូន្យ a $(a \geq 0)$ កាលណា $x^2=a$ ។

- ចំនួនវិជ្ជមាន $a>0$ មានឫសការ៉េពីរដែលជាចំនួនផ្ទុយគ្នា គឺ $\sqrt{a}$ (ឫសការ៉េវិជ្ជមាន) និង $-\sqrt{a}$ (ឫសការ៉េអវិជ្ជមាន)[cite: 1] ។
- ចំពោះ $a=0$ គេបាន $\sqrt{0}=0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៨ (រូបមន្តប្រមាណវិធីលើឫសការ៉េ)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a \geq 0$ និង $b \geq 0$ គេបាន ៖

១ $(\sqrt{a})^2=a$ និង $\sqrt{a^2}=|a|$

២ $\sqrt{a \cdot b}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

៣ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b>0)$

៤ $\sqrt{a^2 \cdot b}=|a|\sqrt{b}=a\sqrt{b} \quad$ (បើ $a \geq 0$)

៥ ការប្រៀបធៀប ៖ ចំពោះ $a \geq 0, b \geq 0$ គេបាន $a<b \iff \sqrt{a}<\sqrt{b}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៩ (ការគណនា និងសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់)៖
ចូរគណនា និងសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

a. $A = \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{72}$
b. $B = \sqrt{20} - 3\sqrt{\frac{5}{9}} + \sqrt{50}$
c. $C = (\sqrt{3} - 1)^2 + (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$

ចម្លើយ ៖

ក $A = \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{6^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
ខ $B = \sqrt{2^2 \cdot 5} - 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{5^2 \cdot 2} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 5\sqrt{2} = \sqrt{5} + 5\sqrt{2}$
គ $C = \big((\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2\big) + \big(3^2 - (\sqrt{2})^2\big) = (3 - 2\sqrt{3} + 1) + (9 - 2) = 11 - 2\sqrt{3}$

ឧទាហរណ៍ ៤.១០ (ការប្រៀបធៀបចំនួនដែលមានរ៉ាឌីកាល់)៖
ចូរប្រៀបធៀបចំនួនខាងក្រោម ៖

a. $2\sqrt{7}$ និង $3\sqrt{3}$
b. $2 + \sqrt{6}$ និង $2\sqrt{5}$

ចម្លើយ ៖

ក គេមាន $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}$ និង $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{27}$ ។
ដោយ $28 > 27 \implies \sqrt{28} > \sqrt{27}$ ។ ដូចនេះ $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$ ។
ខ លើកចំនួនវិជ្ជមានទាំងពីរជាការេ គេបាន ៖
$(2 + \sqrt{6})^2 = 4 + 4\sqrt{6} + 6 = 10 + 4\sqrt{6}$
$(2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20 = 10 + 10$
ប្រៀបធៀប $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$ និង $10 = \sqrt{100}$ ឃើញថា $\sqrt{96} < \sqrt{100} \implies 10 + 4\sqrt{6} < 20$ ។
ដូចនេះ $2 + \sqrt{6} < 2\sqrt{5}$ ។

៤.២.២ ការបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង (Rationalizing the Denominator)

ជាទូទៅ ៤.១១ (វិធីសាស្ត្របំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង)៖
ដើម្បីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃប្រភាគ គេត្រូវគុណភាគយក និងភាគបែងនឹង កន្សោម

ផ្លាស់ (Conjugate) របស់កាគបែង ៖

- ទម្រង់ $\frac{A}{\sqrt{b}} \longrightarrow$ គុណនឹង $\sqrt{b}$ ៖ $\frac{A\sqrt{b}}{b}$
- ទម្រង់ $\frac{A}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} \longrightarrow$ គុណនឹង $\sqrt{b} \mp \sqrt{c}$ ៖ $\frac{A(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b-c}$

ឧទាហរណ៍ ៤.១២ (ការបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង)៖
ចូរបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

a. $M = \frac{6}{\sqrt{3}}$
b. $N = \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
c. $P = \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ចម្លើយ ៖

ក $M = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

ខ $N = \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

គ ផ្គុំ $(1+\sqrt{2})$ ជាមួយតួ រួចគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ គេបាន៖

$$\begin{aligned} P &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left[(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]\left[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}[cite:1] \\ &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}[cite:1] \\ &= \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

៤.២.៣ ការសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១៣ (រូបមន្តសម្រួលរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់)៖
ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន A និង B ដែល $A^2 - B > 0$ គេអាចបំប្លែងរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់ទៅជា

ផលបូក ឬផលដកនៃរ៉ាឌីកាល់សាមញ្ញតាមរូបមន្ត ៖

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

វិធីរហ័ស ៖ បើកន្សោមមានទម្រង់ $\sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}}$ (ដែល $x > y > 0$) នោះគេបាន ៖

$$\sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

ឧទាហរណ៍ ៨.១៨ (ការសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់)៖
ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម[cite: 1] ៖

a. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
b. $\sqrt{6 - 2\sqrt{8}}$
c. $\sqrt{7 + \sqrt{24}}$

ចម្លើយ ៖

ក $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1) + 2\sqrt{3 \cdot 1}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3} + 1$

ខ $\sqrt{6 - 2\sqrt{8}} = \sqrt{(4+2) - 2\sqrt{4 \cdot 2}} = \sqrt{(\sqrt{4} - \sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2}$

គ $\sqrt{7 + \sqrt{24}} = \sqrt{7 + \sqrt{4 \cdot 6}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(6+1) + 2\sqrt{6 \cdot 1}} = \sqrt{6} + 1$

៤.៣ ប្រព័ន្ធរបាប់ (Number Bases)

៤.៣.១ និយមន័យ និងទម្រង់ពន្លាតនៃប្រព័ន្ធរបាប់គោល b

និយមន័យ ៤.១៤ (ប្រព័ន្ធរបាប់គោល b)៖
ឱ្យ $b \in \mathbb{N}$ និង $b \geq 2$ ជាគោលនៃប្រព័ន្ធរបាប់។ គ្រប់ចំនួននៅក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល b ប្រើប្រាស់និមិត្តសញ្ញា (តួលេខ) ចំនួន b តួ គឺ $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ ហើយអាចសរសេរជាទម្រង់ពន្លាតតាមស្វ័យគុណនៃ b ដូចខាងក្រោម[cite: 1, 2]៖

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \,.\, c_1 c_2 \ldots c_m)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \cdots + c_m b^{-m}$$

ដែល $0 \leq a_i, c_j < b$ និង $a_n \neq 0$ ។

ចំណាំ ៤.១៦ (ប្រព័ន្ធរបាប់សំខាន់ៗទាំង ៥)៖

- ប្រព័ន្ធគោល ១០ (Decimal) ៖ ប្រើតួលេខ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (ប្រើក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ)។
- ប្រព័ន្ធគោល ២ (Binary) ៖ ប្រើតួលេខ $0, 1$ (ប្រើក្នុងប្រព័ន្ធកុំព្យូទ័រ និងអេឡិចត្រូនិក)។
- ប្រព័ន្ធគោល ៥ (Quinary) ៖ ប្រើតួលេខ $0, 1, 2, 3, 4$។
- ប្រព័ន្ធគោល ៨ (Octal) ៖ ប្រើតួលេខ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ។
- ប្រព័ន្ធគោល ១៦ (Hexadecimal) ៖ ប្រើតួលេខ 0 ដល់ 9 និងអក្សរ $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.១៧ (ការសរសេរចំនួនគោល ១០ ជាទម្រង់ពន្លាត)៖
ចូរសរសេរចំនួនគោល ១០ ខាងក្រោមជាទម្រង់ពន្លាត ៖

ក) 56789

ខ) 405.28

ចម្លើយ ៖

ក $56789 = 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

ខ $405.28 = 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១៨ (វិធីសាស្ត្របំប្លែងគោល) ❶ ពីគោល b ទៅគោល ១០ ៖ សរសេរចំនួននោះជាទម្រង់ពន្លាតតាមស្វ័យគុណនៃ b រួចគណនាផលបូក ។

❷ ពីគោល ១០ ទៅគោល b ៖ យកចំនួនគោល ១០ មកចែកបន្តបន្ទាប់នឹង b រហូតដល់ផលចែកស្មើ 0 រួចយកសំណល់ទាំងអស់មកតម្រៀបពីក្រោមឡើងលើ។

ឧទាហរណ៍ ៤.១៩ (ការបំប្លែងពីគោល b ទៅគោល ១០)៖
ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោមទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០ ៖

a. $(110101)_2$
b. $(1234)_5$
c. $(2AF)_{16}$

ចម្លើយ ៖

a. $(110101)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 53_{10}$
b. $(1234)_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0$
$= 125 + 50 + 15 + 4 = 194_{10}$
c. ដោយ $A = 10$ និង $F = 15$ គេបាន៖
$(2AF)_{16} = 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 512 + 160 + 15 = 687_{10}$

ឧទាហរណ៍ ៤.២០ (ការបំប្លែងពីគោល ១០ ទៅគោល b)៖
ចូរបំប្លែងចំនួនគោល ១០ គឺ 154 ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល ២ និងគោល ៥ ៖

ចម្លើយ ៖

ក) បំប្លែង 154 ទៅគោល ២ (ចែកបន្តបន្ទាប់នឹង 2) ៖

$$\begin{aligned} 154 \div 2 = 77 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{0} \\ 77 \div 2 = 38 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{1} \\ 38 \div 2 = 19 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{0} \\ 19 \div 2 = 9 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{1} \\ 9 \div 2 = 4 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{1} \\ 4 \div 2 = 2 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{0} \\ 2 \div 2 = 1 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{0} \\ 1 \div 2 = 0 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{1} \end{aligned}$$

តម្រៀបសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ គេបាន $154_{10} = (10011010)_2$ ។

ខ) បំប្លែង 154 ទៅគោល ៥ (ចែកបន្តបន្ទាប់នឹង 5) ៖

$$\begin{aligned} 154 \div 5 = 30 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{4} \\ 30 \div 5 = 6 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{0} \\ 6 \div 5 = 1 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{1} \\ 1 \div 5 = 0 \quad & \text{សំណល់ } \mathbf{1} \end{aligned}$$

តម្រៀបសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ គេបាន $154_{10} = (1104)_5$។

៤.៣.២ ការបំប្លែងរវាងគោល ២ គោល ៨ និងគោល ១៦

ចំណាំ ៤.២១៖
ដោយសារ $8 = 2^3$ និង $16 = 2^4$ យើងអាចបំប្លែងដោយផ្ទាល់រវាងគោល ២ ជាមួយគោល ៨ និងគោល ១៦ ដោយមិនចាំបាច់ឆ្លងកាត់គោល ១០ ឡើយ៖

- គោល ២ $\longleftrightarrow$ គោល ៨ ៖ ផ្គុំគួលេខគោល ២ ជាក្រុម ៣ ខ្ទង់ ពីស្តាំទៅឆ្វេង ($000_2 = 0_8, \ldots, 111_2 = 7_8$)។
- គោល ២ $\longleftrightarrow$ គោល ១៦ ៖ ផ្គុំគួលេខគោល ២ ជាក្រុម ៤ ខ្ទង់ ពីស្តាំទៅឆ្វេង ($0000_2 = 0_{16}, \ldots, 1111_2 = F_{16}$) ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២២ (ការបំប្លែងរវាងគោល ២ គោល ៨ និងគោល ១៦) ក) ចូរ បំប្លែង $N = (110011111010)_2$ ទៅជាចំនួនគោល ៨ និងគោល ១៦។

ខ) ចូរបំប្លែង $(2AB)_{16}$ ទៅជាចំនួនគោល ២ ។

ចម្លើយ ៖

ក) បំប្លែង $N = (110011111010)_2$ ៖

- ទៅគោល ៨ (ផ្គុំ ៣ ខ្ទង់) ៖ $\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2} \Longrightarrow N = (6372)_8$
- ទៅគោល ១៦ (ផ្គុំ ៤ ខ្ទង់) ៖ $\underbrace{1100}_{12=C}\ \underbrace{1111}_{15=F}\ \underbrace{1010}_{10=A} \Longrightarrow N = (CFA)_{16}$

ខ) បំប្លែង $(2AB)_{16}$ ទៅគោល ២ (ពន្លាត ១ ខ្ទង់ជា ៤ ខ្ទង់គោល ២) ៖

$$2 = 0010_2, \quad A(10) = 1010_2, \quad B(11) = 1011_2$$

ដូចនេះ $(2AB)_{16} = (1010101011)_2$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៤.២៣៖
ចូរបញ្ជាក់ថាតើសំណើខាងក្រោម ពិត ឬ មិនពិត ៖

ក $-7 \in \mathbb{N}$
ខ $0 \in \mathbb{Z}$
គ $\sqrt{25} \in \mathbb{I}$
ឃ $0.272727\cdots \in \mathbb{Q}$
ង $\pi \in \mathbb{R}$
ច $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

លំហាត់ ៤.២៤៖
ចូរសរសេរចំនួនទសភាគអនន្តខួបខាងក្រោមជាទម្រង់ប្រភាគបង្រួម $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ ៖

ក $0.\overline{7}$ ខ $1.\overline{24}$ គ $0.3\overline{6}$

លំហាត់ ៤.២៥៖
ចូរសរសេរកន្សោមខាងក្រោមដោយគ្មានសញ្ញាតម្លៃដាច់ខាត ៖

ក $A = |2 - \sqrt{7}| + |\sqrt{7} - 3|$
ខ $B = |\sqrt{11} - 4| - |3 - \sqrt{11}|$
គ $C = |x - 1| + |x + 2|$ ចំពោះ $-2 \leq x < 1$

លំហាត់ ៤.២៦៖
ចូរដោះស្រាយសមីការ និងវិសមភាពខាងក្រោមក្នុង $\mathbb{R}$ ៖

ក $|3x - 2| = 7$
ខ $|2x + 1| = |x - 4|$
គ $|x - 3| \leq 4$
ឃ $|2x - 5| > 3$

លំហាត់ ៤.២៧៖
ចូរគណនា និងសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

a. $M = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + \sqrt{75}$
b. $N = \sqrt{45} + \sqrt{80} - 2\sqrt{20} - \sqrt{180}$
c. $P = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

លំហាត់ ៤.២៨៖
ចូរប្រៀបធៀបគូចំនួនខាងក្រោម ៖

ក $4\sqrt{3}$ និង $3\sqrt{5}$

ខ $3+\sqrt{5}$ និង $2\sqrt{7}$

លំហាត់ ៤.២៩៖
ចូរបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃប្រភាគខាងក្រោម ៖

ក $A=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

ខ $B=\dfrac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

គ $C=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

ឃ $D=\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

លំហាត់ ៤.៣០៖
ចូរសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់ខាងក្រោម ៖

ក $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

ខ $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$

គ $\sqrt{8+\sqrt{48}}$

ឃ $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

លំហាត់ ៤.៣១៖
ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោមទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០[cite: 2, 5] ៖

ក $(101110)_2$

ខ $(342)_5$

គ $(574)_8$

ឃ $(1FA)_{16}$

លំហាត់ ៤.៣២៖
ចូរបំប្លែងចំនួនគោល ១០ ខាងក្រោម ទៅតាមប្រព័ន្ធគោលដែលបានកំណត់ ៖

ក បំប្លែង 89_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២

ខ បំប្លែង 237_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៥

គ បំប្លែង 495_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៨

ឃ បំប្លែង 715_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១៦

លំហាត់ ៤.៣៣៖
ដោយប្រើវិធីផ្ទុំ ឬពន្លាតខ្ទង់រហ័ស ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោម ៖

ក បំប្លែង $(11010101)_2$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៨

ខ បំប្លែង $(101111001010)_2$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១៦

គ បំប្លែង $(6751)_8$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២

ឃ បំប្លែង $(9BC)_{16}$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២

លំហាត់ ៤.៣៤៖
ចូររកគោល b ($b \in \mathbb{N}, b \geq 2$) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម ៖

ក $(123)_b = 38_{10}$

ខ $(24)_b + (31)_b = (110)_b$

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ៤.៣៥៖
ចូរបញ្ជាក់ថាតើសំណើខាងក្រោម ពិត ឬ មិនពិត ៖

ក $-7 \in \mathbb{N}$
ខ $0 \in \mathbb{Z}$
គ $\sqrt{25} \in \mathbb{I}$
ឃ $0.272727\cdots \in \mathbb{Q}$
ង $\pi \in \mathbb{R}$
ច $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

ចម្លើយ ៖ ពិនិត្យតម្លៃភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗ ៖

ក មិន ពិត — ព្រោះ -7 ជា ចំនួនគត់ អវិជ្ជមាន មិនមែន ជា ចំនួនគត់ ធម្មជាតិ ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) ឡើយ ។

ខ ពិត — ព្រោះ 0 ស្ថិតនៅក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$) ។

គ មិន ពិត — ព្រោះ $\sqrt{25} = 5$ ដែលជា ចំនួន សនិទាន ($5 \in \mathbb{Q}$) មិនមែន ជា ចំនួនអសនិទាន ($\mathbb{I}$) ទេ។

ឃ ពិត — ព្រោះ $0.272727\cdots = 0.\overline{27} = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$ ជាទសភាគអនន្តខួប ដែលអាចសរសេរជាប្រភាគបាន ដូច្នេះវាជាចំនួនសនិទាន ($\mathbb{Q}$)[cite: 1, 2] ។

ង ពិត — ព្រោះ π ជាចំនួនអសនិទាន ហើយគ្រប់ចំនួនអសនិទានសុទ្ធតែជាចំនួនពិត ($\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$) ។

ច ពិត — ព្រោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $m \in \mathbb{Z}$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជាទម្រង់ប្រភាគ $\dfrac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ បានទាំងអស់ ។

លំហាត់ ៤.៣៦៖
ចូរសរសេរចំនួនទសភាគអនន្តខួបខាងក្រោមជាទម្រង់ប្រភាគបង្រួម $\dfrac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) ៖

ក $0.\overline{7}$
ខ $1.\overline{24}$
គ $0.3\overline{6}$

ចម្លើយ ៖ សរសេរចំនួនទសភាគអនន្តខួបនីមួយៗជាទម្រង់ប្រភាគបង្រួម $\dfrac{a}{b}$ ៖

ក ចំពោះ $0.\overline{7}$ ៖

តាង $x = 0.\overline{7} = 0.777\ldots$ (1)
គុណអង្គទាំងពីរនឹង 10 គេបាន ៖ $10x = 7.777\ldots$ (2)
យក (2) − (1) គេបាន ៖

$$10x - x = (7.777\ldots) - (0.777\ldots)$$
$$9x = 7 \implies x = \frac{7}{9}$$

ដូចនេះ $0.\overline{7} = \frac{7}{9}$ ។

ខ ចំពោះ $1.\overline{24}$ ៖
តាង $y = 1.\overline{24} = 1.242424\ldots$ (1)
ដោយខួបមាន 2 ខ្ទង់ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $10^2 = 100$ គេបាន ៖
$100y = 124.242424\ldots$ (2)
យក (2) − (1) គេបាន ៖

$$100y - y = (124.242424\ldots) - (1.242424\ldots)$$
$$99y = 123 \implies y = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$$

ដូចនេះ $1.\overline{24} = \frac{41}{33}$ ។

គ ចំពោះ $0.3\overline{6}$ ៖
តាង $z = 0.3\overline{6} = 0.3666\ldots$
គុណអង្គទាំងពីរនឹង 10 (ដើម្បីរំកិលតួលេខក្រៅខួប) ៖ $10z = 3.666\ldots$ (1)
គុណអង្គទាំងពីរនឹង 100 ៖ $100z = 36.666\ldots$ (2)
យក (2) − (1) គេបាន ៖

$$100z - 10z = (36.666\ldots) - (3.666\ldots)$$
$$90z = 33 \implies z = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$$

ដូចនេះ $0.3\overline{6} = \frac{11}{30}$ ។

លំហាត់ ៤.៣៧៖
ចូរសរសេរកន្សោមខាងក្រោមដោយគ្មានសញ្ញាតម្លៃដាច់ខាត ៖

ក $A = |2 - \sqrt{7}| + |\sqrt{7} - 3|$

ខ $B = |\sqrt{11} - 4| - |3 - \sqrt{11}|$

គ $C = |x - 1| + |x + 2|$ ចំពោះ $-2 \leq x < 1$

ចម្លើយ ៖ កំណត់សញ្ញានៃកន្សោមខាងក្នុងតម្លៃដាច់ខាតនីមួយៗ រួចអនុវត្តនិយមន័យ $|X| = X$ បើ $X \geq 0$ និង $|X| = -X$ បើ $X < 0$ ៖

ក ចំពោះ $A = |2 - \sqrt{7}| + |\sqrt{7} - 3|$ ៖
ដោយ $2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ នោះគេបាន $2 - \sqrt{7} < 0$ និង $\sqrt{7} - 3 < 0$ ៖

$$\begin{aligned} A &= -(2 - \sqrt{7}) + \big(-(\sqrt{7} - 3)\big) \\ &= -2 + \sqrt{7} - \sqrt{7} + 3 = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $A = 1$ ។

ខ ចំពោះ $B = |\sqrt{11} - 4| - |3 - \sqrt{11}|$ ៖
ដោយ $3 = \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$ នោះគេបាន $\sqrt{11} - 4 < 0$ និង $3 - \sqrt{11} < 0$ ៖

$$\begin{aligned} B &= -(\sqrt{11} - 4) - \big(-(3 - \sqrt{11})\big) \\ &= -\sqrt{11} + 4 + 3 - \sqrt{11} = 7 - 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $B = 7 - 2\sqrt{11}$ ។

គ ចំពោះ $C = |x - 1| + |x + 2|$ ដែល $-2 \leq x < 1$ ៖
នៅលើចន្លោះ $-2 \leq x < 1$ គេបាន ៖

- $x < 1 \implies x - 1 < 0 \implies |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$
- $x \geq -2 \implies x + 2 \geq 0 \implies |x + 2| = x + 2$

បូកកន្សោមទាំងពីរបញ្ចូលគ្នា គេបាន ៖

$$C = (-x + 1) + (x + 2) = 3$$

ដូចនេះ $C = 3$ ។

លំហាត់ ៤.៣៨៖
ចូរដោះស្រាយសមីការ និងវិសមភាពខាងក្រោមក្នុង $\mathbb{R}$ ៖

ក $|3x-2|=7$
ខ $|2x+1|=|x-4|$
គ $|x-3|\leq 4$
ឃ $|2x-5|>3$

ចម្លើយ ៖ អនុវត្តនិយមន័យ និងលក្ខណៈនៃតម្លៃដាច់ខាតដើម្បីដោះស្រាយសមីការ និងវិសមភាពនីមួយៗ ៖

ក ដោះស្រាយ $|3x-2|=7$ ៖
តាមទម្រង់ $|X|=a \iff X=a$ ឬ $X=-a$ $(a\geq 0)$ គេបាន ៖

$$|3x-2|=7 \iff \begin{cases} 3x-2=7 \implies 3x=9 \implies x=3 \\ 3x-2=-7 \implies 3x=-5 \implies \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S=\left\{-\dfrac{5}{3},\ 3\right\}$ ។

ខ ដោះស្រាយ $|2x+1|=|x-4|$ ៖
តាមទម្រង់ $|A|=|B| \iff A=B$ ឬ $A=-B$ គេបាន ៖

$$|2x+1|=|x-4| \iff \begin{cases} 2x+1=x-4 \implies x=-5 \\ 2x+1=-(x-4) \implies 2x+1=-x+4 \implies 3x=3 \\ \implies x=1 \end{cases}$$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S=\{-5,\ 1\}$ ។

គ ដោះស្រាយ $|x-3|\leq 4$ ៖
តាមទម្រង់ $|X|\leq a \iff -a\leq X\leq a$ $(a\geq 0)$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} |x-3|\leq 4 &\iff -4\leq x-3\leq 4 \\ &\iff -4+3\leq x\leq 4+3 \\ &\iff -1\leq x\leq 7 \end{aligned}$$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S = [-1,\ 7]$ ។

ឃ ដោះស្រាយ $|2x-5| > 3$ ៖

តាមទម្រង់ $|X| > a \iff X < -a$ ឬ $X > a$ $(a \geq 0)$ គេបាន ៖

$$|2x-5| > 3 \iff \begin{cases} 2x-5 < -3 \implies 2x < 2 \implies x < 1 \\ 2x-5 > 3 \implies 2x > 8 \implies x > 4 \end{cases}$$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S = (-\infty,\ 1) \cup (4,\ +\infty)$ ។

លំហាត់ ៤.៣៩៖

ចូរគណនា និងសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក $M = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + \sqrt{75}$

ខ $N = \sqrt{45} + \sqrt{80} - 2\sqrt{20} - \sqrt{180}$

គ $P = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ គណនា និងសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់នីមួយៗ ៖

ក ចំពោះ $M = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + \sqrt{75}$ ៖

$$\begin{aligned} M &= 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} \\ &= 2(2\sqrt{3}) - 3(3\sqrt{3}) + 5\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $M = 0$ ។

ខ ចំពោះ $N = \sqrt{45} + \sqrt{80} - 2\sqrt{20} - \sqrt{180}$ ៖

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{4^2 \cdot 5} - 2\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{6^2 \cdot 5} \\ &= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 2(2\sqrt{5}) - 6\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -3\sqrt{5} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $N = -3\sqrt{5}$ ។

(គ) ចំពោះ $P=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}$ ៖
អនុវត្តរូបមន្ត $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ និង $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}P&=\left((\sqrt{5})^2-2^2\right)+\left((\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\right)-2\sqrt{6}\\&=(5-4)+(2+2\sqrt{6}+3)-2\sqrt{6}\\&=1+5+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}=6\end{aligned}$$

ដូចនេះ $P=6$ ។

លំហាត់ ៤.៤០៖
ចូរប្រៀបធៀបគូចំនួនខាងក្រោម ៖

(ក) $4\sqrt{3}$ និង $3\sqrt{5}$ (ខ) $3+\sqrt{5}$ និង $2\sqrt{7}$

ចម្លើយ ៖ ដើម្បីប្រៀបធៀបចំនួនវិជ្ជមានពីរដែលមានរ៉ាឌីកាល់ យើងអនុវត្តលក្ខណៈ $0\leq a<b \iff a^2<b^2$ (ឬបញ្ចូលមេគុណទៅក្នុងរ៉ាឌីកាល់)[cite: 1, 2]៖

(ក) ប្រៀបធៀប $4\sqrt{3}$ និង $3\sqrt{5}$ ៖
បញ្ចូលមេគុណខាងមុខទៅក្នុងរ៉ាឌីកាល់ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}4\sqrt{3}&=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}\\3\sqrt{5}&=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}\end{aligned}$$

ដោយសារ $48>45 \implies \sqrt{48}>\sqrt{45}$[cite: 1, 2]។
ដូចនេះ $4\sqrt{3}>3\sqrt{5}$ ។

(ខ) ប្រៀបធៀប $3+\sqrt{5}$ និង $2\sqrt{7}$ ៖
ដោយសារចំនួនទាំងពីរសុទ្ធតែវិជ្ជមាន យើងលើកអង្គទាំងពីរជាការេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{5})^2&=3^2+2(3)\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=9+6\sqrt{5}+5=14+6\sqrt{5}\\(2\sqrt{7})^2&=2^2\cdot 7=4\cdot 7=28=14+14\end{aligned}$$

តទៅ យើងប្រៀបធៀប $6\sqrt{5}$ និង 14 ដោយលើកជាការេម្តងទៀត (ឬបញ្ចូលក្នុង

រ៉ាឌីកាល់) ៖

$$6\sqrt{5} = \sqrt{36 \cdot 5} = \sqrt{180} \quad \text{និង} \quad 14 = \sqrt{14^2} = \sqrt{196}$$

ដោយ $\sqrt{180} < \sqrt{196} \implies 6\sqrt{5} < 14 \implies 14 + 6\sqrt{5} < 28$[cite: 1, 2]។
ដូចនេះ $3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{7}$ ។

លំហាត់ ៤.៤១៖
ចូរបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃប្រភាគខាងក្រោម ៖

ក $A = \dfrac{10}{\sqrt{5}}$

ខ $B = \dfrac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

គ $C = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

ឃ $D = \dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

ចម្លើយ ៖ គុណភាគយក និងភាគបែងនឹងកន្សោមឆ្លាស់របស់ភាគបែង ដើម្បីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង ៖

ក ចំពោះ $A = \dfrac{10}{\sqrt{5}}$ ៖

$$A = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

ដូចនេះ $A = 2\sqrt{5}$ ។

ខ
$$\begin{aligned} B &= \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} \\ &= \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} \\ &= \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = 3(\sqrt{7}+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $B = 3(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ ។

គ ចំពោះ $C = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ៖

គុណភាគយក និងភាគបែងនឹងកន្សោមឆ្លាស់ $(\sqrt{3}+1)$ គេបាន ៖

$$C=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $C=2+\sqrt{3}$ ។

ឃ ចំពោះ $D=\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ៖

ផ្គុំ $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ជាមួយតួ រួចគុណភាគយក និងភាគបែងនឹង $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$ ៖

$$\begin{aligned}D&=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\right]\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\right]}\\&=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}\\&=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2+2\sqrt{6}+3)-5}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

បន្តគុណភាគយក និងភាគបែងនឹង $\sqrt{6}$ ម្តងទៀត ៖

$$D=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{6}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{6}$$

ដូចនេះ $D=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{6}$ ។

លំហាត់ ៤.៤២៖
ចូរសម្រួលកន្សោមរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់ខាងក្រោម ៖

ក $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$
ខ $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$
គ $\sqrt{8+\sqrt{48}}$
ឃ $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

ចម្លើយ ៖ បំប្លែងកន្សោមខាងក្នុងរ៉ាឌីកាល់ទៅជាទម្រង់ការេទ្វេធា $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ រួចអនុវត្តរូបមន្ត $\sqrt{X^2}=|X|$ ៖

ក ចំពោះ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ៖

ដោយ $5=3+2$ និង $6=3\times 2$ គេបាន ៖

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ។

ខ ចំពោះ $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ ៖

ដោយ $9=7+2$ និង $14=7\times 2$ គេបាន ៖

$$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7-2\sqrt{7}\sqrt{2}+2}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$$

(ព្រោះ $\sqrt{7}>\sqrt{2}$)

ដូចនេះ $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ ។

គ ចំពោះ $\sqrt{8+\sqrt{48}}$ ៖

បញ្ចេញតួលេខ 2 មកខាងមុខរ៉ាឌីកាល់ខាងក្នុង ៖ $\sqrt{48}=\sqrt{4\times 12}=2\sqrt{12}$ ។

ដោយ $8=6+2$ និង $12=6\times 2$ គេបាន ៖

$$\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ។

ឃ ចំពោះ $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ ៖

សរសេរ $4\sqrt{7}=2\cdot 2\sqrt{7}=2\sqrt{2^2\cdot 7}=2\sqrt{28}$ ។

ដោយ $11=7+4$ និង $28=7\times 4$ គេបាន ៖

$$\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{11-2\sqrt{28}}=\sqrt{7-2\sqrt{7}\sqrt{4}+4}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{4})^2}=\sqrt{7}-2$$

(ព្រោះ $\sqrt{7}>\sqrt{4}=2$)

ដូចនេះ $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7}-2$ ។

លំហាត់ ៤.៤៣៖
ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោមទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០[cite: 2, 5] ៖

ក $(101110)_2$

ខ $(342)_5$

គ $(574)_8$

ឃ $(1FA)_{16}$

ចម្លើយ ៖ បំប្លែងចំនួននីមួយៗទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១០ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពន្លាតតាមស្វ័យគុណនៃគោលរបស់វា[cite: 1]៖

ក $(101110)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
$= 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0$
$= 46$
ដូចនេះ $(101110)_2 = (46)_{10}$ ។

ខ $(342)_5 = 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$
$= 3(25) + 4(5) + 2(1)$
$= 75 + 20 + 2$
$= 97$
ដូចនេះ $(342)_5 = (97)_{10}$ ។

គ $(574)_8 = 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$
$= 5(64) + 7(8) + 4(1)$
$= 320 + 56 + 4$
$= 380$
ដូចនេះ $(574)_8 = (380)_{10}$ ។

ឃ ដោយក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១៦ តួអក្សរ $F = 15$ និង $A = 10$ គេបាន[cite: 1]៖
$(1FA)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0$
$= 1(256) + 15(16) + 10(1)$
$= 256 + 240 + 10$
$= 506$

ដូចនេះ $(1FA)_{16} = (506)_{10}$[cite: 1] ។

លំហាត់ ៤.៤៤៖
ចូរបំប្លែងចំនួនគោល ១០ ខាងក្រោម ទៅតាមប្រព័ន្ធគោលដែលបានកំណត់ ៖

ក បំប្លែង 89_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២

ខ បំប្លែង 237_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៥

គ បំប្លែង 495_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៨

ឃ បំប្លែង 715_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១៦

ចម្លើយ ៖ បំប្លែងចំនួនគោល ១០ នីមួយៗទៅតាមប្រព័ន្ធគោលដែលបានកំណត់ ដោយអនុវត្តវិធីចែកបន្តបន្ទាប់នឹងគោល រួចសរសេរសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ (ឬសរសេរជាផលបូកស្វ័យគុណនៃគោល) ៖

a. បំប្លែង 89_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២ ៖

$$89 = 2 \times 44 + \mathbf{1}$$
$$44 = 2 \times 22 + \mathbf{0}$$
$$22 = 2 \times 11 + \mathbf{0}$$
$$11 = 2 \times 5 + \mathbf{1}$$
$$5 = 2 \times 2 + \mathbf{1}$$
$$2 = 2 \times 1 + \mathbf{0}$$
$$1 = 2 \times 0 + \mathbf{1}$$

សរសេរសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ គេបាន $89_{10} = (1011001)_2$ ។

b. បំប្លែង 237_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៥ ៖

$$237 = 5 \times 47 + \mathbf{2}$$
$$47 = 5 \times 9 + \mathbf{2}$$
$$9 = 5 \times 1 + \mathbf{4}$$
$$1 = 5 \times 0 + \mathbf{1}$$

សរសេរសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ គេបាន $237_{10} = (1422)_5$ ។

c. បំប្លែង 495_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៨ ៖

$$495 = 8 \times 61 + \mathbf{7}$$
$$61 = 8 \times 7 + \mathbf{5}$$
$$7 = 8 \times 0 + \mathbf{7}$$

សរសេរសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ គេបាន $495_{10} = (757)_8$ ។

d. បំប្លែង 715_{10} ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១៦ ៖

$$715 = 16 \times 44 + \mathbf{11} \quad (11 = B)$$
$$44 = 16 \times 2 + \mathbf{12} \quad (12 = C)$$
$$2 = 16 \times 0 + \mathbf{2}$$

ដោយក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១៦ តួលេខ $11 = B$ និង $12 = C$[cite: 1] ហើយសរសេរសំណល់ពីក្រោមឡើងលើ គេបាន $715_{10} = (2CB)_{16}$ ។

លំហាត់ ៤.៤៨៖
ដោយប្រើវិធីផ្តុំ ឬពន្លាតខ្ទង់រហ័ស ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោម ៖

a. បំប្លែង $(11010101)_2$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៨
b. បំប្លែង $(101111001010)_2$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១៦
c. បំប្លែង $(6751)_8$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២
d. បំប្លែង $(9BC)_{16}$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២

ចម្លើយ ៖ អនុវត្តទំនាក់ទំនង $8 = 2^3$ (ផ្តុំ ឬពន្លាតជាក្រុម 3 ខ្ទង់) និង $16 = 2^4$ (ផ្តុំ ឬពន្លាតជាក្រុម 4 ខ្ទង់) ៖

ក បំប្លែង $(11010101)_2$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ៨ ៖
ផ្តុំតួលេខពីស្តាំទៅឆ្វេងជាក្រុមៗ ដែលមាន 3 ខ្ទង់ (បន្ថែមសូន្យខាងមុខបើខ្វះ) ៖

$$(11010101)_2 = \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}$$
$$= (325)_8$$

ដូចនេះ $(11010101)_2 = (325)_8$ ។

ខ បំប្លែង $(101111001010)_2$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ១៦ ៖
ផ្តុំតួលេខពីស្តាំទៅឆ្វេងជាក្រុមៗ ដែលមាន 4 ខ្ទង់ ៖

$$(101111001010)_2 = \underbrace{1011}_{11=B}\ \underbrace{1100}_{12=C}\ \underbrace{1010}_{10=A}$$
$$= (BCA)_{16}$$

ដូចនេះ $(101111001010)_2 = (BCA)_{16}$ ។

គ បំប្លែង $(6751)_8$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២ ៖
ពន្លាតខ្ទង់នីមួយៗនៃគោល ៨ ទៅជា 3 ខ្ទង់ក្នុងគោល ២ ៖

$$(6751)_8 = \underbrace{6}_{110}\ \underbrace{7}_{111}\ \underbrace{5}_{101}\ \underbrace{1}_{001}$$
$$= (110111101001)_2$$

ដូចនេះ $(6751)_8 = (110111101001)_2$ ។

ឃ បំប្លែង $(9BC)_{16}$ ទៅជាប្រព័ន្ធគោល ២ ៖
ពន្លាតខ្ទង់នីមួយៗនៃគោល ១៦ ($9 = 9, B = 11, C = 12$) ទៅជា 4 ខ្ទង់ក្នុងគោល ២ ៖

$$(9BC)_{16} = \underbrace{9}_{1001}\ \underbrace{B}_{1011}\ \underbrace{C}_{1100}$$
$$= (100110111100)_2$$

ដូចនេះ $(9BC)_{16} = (100110111100)_2$ ។

លំហាត់ ៨.៨៦៖
ចូររកគោល b ($b \in \mathbb{N}, b \geq 2$) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម ៖

ក $(123)_b = 38_{10}$ **ខ** $(24)_b + (31)_b = (110)_b$

ចម្លើយ ៖ សរសេរអង្គនីមួយៗនៃសមីការជាទម្រង់ពន្លាតក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០ ដើម្បីទាញរកតម្លៃ b (ដោយត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ b ត្រូវតែធំជាងតួលេខនីមួយៗក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់នោះ) ៖

ក ដោះស្រាយ $(123)_b = 38_{10}$ ៖
ដោយតួលេខធំបំផុតក្នុង $(123)_b$ គឺ 3 នោះលក្ខខណ្ឌគឺ $b \in \mathbb{N}$ និង $b \geq 4$ ។

$$(123)_b = 38_{10} \iff 1\cdot b^2 + 2\cdot b^1 + 3\cdot b^0 = 38$$
$$\iff b^2 + 2b + 3 - 38 = 0$$
$$\iff b^2 + 2b - 35 = 0$$
$$\iff (b-5)(b+7) = 0$$
$$\iff b = 5 \text{ ឬ } b = -7$$

ដោយលក្ខខណ្ឌ $b \in \mathbb{N}$ និង $b \geq 4$ នោះយើងយក $b = 5$ (ចំណែក $b = -7$ មិនយក) ។
ដូចនេះ គោលដៅលត្រូវរកគឺ $b = 5$ ។

ខ ដោះស្រាយ $(24)_b + (31)_b = (110)_b$ ៖
ដោយតួលេខធំបំផុតក្នុងសមីការគឺ 4 នោះលក្ខខណ្ឌគឺ $b \in \mathbb{N}$ និង $b \geq 5$ ។

$$(24)_b + (31)_b = (110)_b \iff (2\cdot b + 4) + (3\cdot b + 1) = 1\cdot b^2 + 1\cdot b + 0$$
$$\iff 5b + 5 = b^2 + b$$
$$\iff b^2 - 4b - 5 = 0$$
$$\iff (b-5)(b+1) = 0$$
$$\iff b = 5 \text{ ឬ } b = -1$$

ដោយលក្ខខណ្ឌ $b \in \mathbb{N}$ និង $b \geq 5$ នោះយើងយក $b = 5$ (ចំណែក $b = -1$ មិនយក) ។
ដូចនេះ គោលដៅលត្រូវរកគឺ $b = 5$ ។

មេរៀនទី ៥ ទ្រឹស្តីចំនួន ឬ នព្វន្ត (Number Theory)

៥.១ ចំនួនគត់គូ ចំនួនគត់សេស និងតាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$

៥.១.១ ចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស

និយមន័យ ៥.១ (ចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស)៖ 1. ចំនួនគត់គូ (Even Integer) ៖ គឺជាចំនួនគត់ប៊ីឡាទីបដែលចែកដាច់នឹង 2 ហើយអាចសរសេរជាទម្រង់ $2k$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$ ។

2. ចំនួនគត់សេស (Odd Integer) ៖ គឺជាចំនួនគត់ប៊ីឡាទីបដែលចែកនឹង 2 សល់សំណល់ 1 ហើយអាចសរសេរជាទម្រង់ $2k+1$ (ឬ $2k-1$) ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$[cite: 1, 2] ។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.២ (លក្ខណៈនៃចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស)
១ ផលបូក និង ផលដក នៃចំនួនគត់គូពីរ ឬចំនួនគត់សេសពីរ គឺជា ចំនួនគត់គូ ។
២ ផលបូក និងផលដករវាងចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស គឺជា ចំនួនគត់សេស ។
៣ ផលគុណនៃចំនួនគត់សេសពីរ គឺជា ចំនួនគត់សេស ។
៤ ផលគុណ រវាង ចំនួនគត់គូ និង ចំនួនគត់ ណាមួយ គឺជា ចំនួនគត់គូ (ជាពិសេស ផលគុណនៃពីរចំនួនគត់តគ្នា $n(n+1)$ តែងតែជាចំនួនគត់គូ[cite: 2]) ។

ឧទាហរណ៍ ៥.៣៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ប៊ីឡាទីប $n \in \mathbb{Z}$ កន្សោម $A = n^2 + 3n + 4$ តែងតែជាចំនួនគត់គូ[cite: 1] ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៥.៤៖
យើងបែងចែកជា ២ ករណីចំពោះ $n \in \mathbb{Z}$[cite: 1] ៖

- ករណីទី ១ ៖ បើ n ជាចំនួនគត់គូ តាង $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)[cite: 1] ៖
  $A = (2k)^2 + 3(2k) + 4$
  $= 4k^2 + 6k + 4 = 2(2k^2 + 3k + 2)$
  ដោយ $2k^2 + 3k + 2 \in \mathbb{Z}$ នោះ A ជាចំនួនគត់គូ ។
- ករណីទី ២ ៖ បើ n ជាចំនួនគត់សេស តាង $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ៖
  $A = (2k + 1)^2 + 3(2k + 1) + 4$
  $= 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 4$
  $= 4k^2 + 10k + 8 = 2(2k^2 + 5k + 4)$
  ដោយ $2k^2 + 5k + 4 \in \mathbb{Z}$ នោះ A ជាចំនួនគត់គូ ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{Z}$ កន្សោម $n^2 + 3n + 4$ តែងតែជាចំនួនគត់គូ[cite: 1] ។

■

៥.១.២ តាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$ និងលក្ខណៈគ្រឹះ

និយមន័យ ៥.៥ (តាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$)៖

ឱ្យ $a, b \in \mathbb{Z}$ ដែល $b \neq 0$ ។ គេថា b * *ចែកដាច់ * * a (ឬ a ជាពហុគុណនៃ b ឬ b ជាតួចែកនៃ a) កាលណាមានចំនួនគត់ $q \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = bq$[cite: 1, 2] ។
គេកំណត់សរសេរ $b \mid a$ (អានថា b ចែកដាច់ a) ។ បើ b ចែកមិនដាច់ a គេសរសេរ $b \nmid a$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.៦ (លក្ខណៈគ្រឹះនៃតាពចែកដាច់)៖
ចំពោះគ្រប់ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ គេមាន[cite: 1, 2] ៖

១ $a \mid a$ ($a \neq 0$) និង $1 \mid a$ និង $a \mid 0$

២ បើ $b \mid a$ និង $a \mid c$ នោះ $b \mid c$[cite: 1, 2] (លក្ខណៈឆ្លង)

៣ បើ $b \mid a$ និង $a \neq 0$ នោះ $|b| \leq |a|$[cite: 1, 2]

៤ បើ $b \mid a$ និង $a \mid b$ នោះ $|a| = |b|$[cite: 1, 2]

៥ បន្សំលីនេអ៊ែរ ៖ បើ $b \mid a$ និង $b \mid c$ នោះ $b \mid (\alpha a + \beta c)$ ចំពោះគ្រប់ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$[cite: 2] ។ (ជាពិសេស $b \mid (a \pm c)$[cite: 2])

៦ បើ $c \neq 0$ នោះ $b \mid a \iff bc \mid ac$[cite: 1, 2]

ចំណាំ ៥.៧ (លក្ខណៈចែកដាច់នឹងចំនួនពិសេសមួយចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០)៖

- ចែកដាច់នឹង 2 ឬ 5 ៖ លេខខ្ទង់រាយ (ចុងក្រោយ) ចែកដាច់នឹង 2 ឬ 5[cite: 2] ។
- ចែកដាច់នឹង 4 ឬ 25 ៖ ចំនួន 2 ខ្ទង់ចុងក្រោយចែកដាច់នឹង 4 ឬ 25[cite: 2] ។
- ចែកដាច់នឹង 8 ឬ 125 ៖ ចំនួន 3 ខ្ទង់ចុងក្រោយចែកដាច់នឹង 8 ឬ 125 ។
- ចែកដាច់នឹង 3 ឬ 9 ៖ ផលបូកនៃគ្រប់លេខខ្ទង់ទាំងអស់ចែកដាច់នឹង 3 ឬ 9[cite: 2] ។
- ចែកដាច់នឹង 11 ៖ ផលដកវាងផលបូកលេខខ្ទង់សេស និងផលបូកលេខខ្ទង់គូ (រាប់ពីស្តាំទៅឆ្វេង) ចែកដាច់នឹង 11[cite: 2] ។

ឧទាហរណ៍ ៥.៨៖
ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីប $n \in \mathbb{Z}$ ដើម្បីឱ្យ $n+2$ ចែកដាច់ $3n+11$ ។

ចម្លើយ ៖ គេមាន $(n+2) \mid (3n+11)$ ។
ម្យ៉ាងទៀត $(n+2) \mid (n+2) \implies (n+2) \mid 3(n+2)$ ឬ $(n+2) \mid (3n+6)$ ។
តាមលក្ខណៈផលដកនៃភាពចែកដាច់ គេបាន[cite: 2] ៖

$$(n+2) \mid \big[(3n+11)-(3n+6)\big] \implies (n+2) \mid 5$$

ដោយតួចែកក្នុង $\mathbb{Z}$ នៃ 5 គឺ $\{\pm 1, \pm 5\}$ គេទាញបាន ៖

$$n+2 \in \{-5,-1,1,5\} \implies n \in \{-7,-3,-1,3\}$$

ដូចនេះ $n \in \{-7,-3,-1,3\}$ ។

៥.១.៣ វិធីចែកបែបអឺគ្លីត (Euclidean Division)

ទ្រឹស្តីបទ ៥.៩ (ទ្រឹស្តីបទវិធីចែកបែបអឺគ្លីត)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីប $a \in \mathbb{Z}$ និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $b \in \mathbb{N}^*$ មានគូចំនួនគត់រ៉ឹឡា

ទីប (q, r) តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់[cite: 2] ៖

$$a = bq + r \quad \text{ដែល} \quad 0 \leq r < b$$

ដែល a ហៅថា តំណាំងចែក, b ហៅថា តួចែក, q ហៅថា ផលចែក និង r ហៅថា សំណល់[cite: 2] ។

ឧទាហរណ៍ ៥.១០៖
ចូររកផលចែក q និងសំណល់ r ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ a នឹង b ខាងក្រោម[cite: 2] ៖

ក $a = 194$ និង $b = 7$[cite: 2]

ខ $a = -1317$ និង $b = 21$[cite: 2]

ចម្លើយ ៖

ក ដោយ $194 = 7 \times 27 + 5$ $(0 \leq 5 < 7)$ នោះ $q = 27$ និង $r = 5$[cite: 2] ។

ខ ត្រូវប្រយ័ត្នសំណល់ r ត្រូវតែជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $(0 \leq r < 21)$[cite: 2] ៖
ដោយ $-1317 = 21 \times (-63) + 6$ $(0 \leq 6 < 6)$ នោះ $q = -63$ និង $r = 6$ ។

៥.២ ចំនួនបឋម និងតួចែករួមធំបំផុត (PGCD / GCD)

៥.២.១ ចំនួនបឋម និងការបំបែកជាកត្តាបឋម

និយមន័យ ៥.១១ (ចំនួនបឋម និងចំនួនសមាស

១ ចំនួនបឋម (Prime Number) ៖ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p > 1$ ដែលមានតួចែកវិជ្ជមានតែពីរប៉ុណ្ណោះ គឺ 1 និងខ្លួនវាផ្ទាល់[cite: 3] ។

*(ឧទាហរណ៍ ៖ $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$) *

២ ចំនួនសមាស (Composite Number) ៖ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋម (ពោលគឺមានតួចែកវិជ្ជមានលើសពីពីរ)[cite: 3] ។

*(ចំណាំ ៖ ចំនួន 1 មិនមែនជាចំនួនបឋម និងមិនមែនជាចំនួនសមាសឡើយ ហើយ 2 គឺជាចំនួនបឋមគូតែមួយគត់) *

ទ្រឹស្តីបទ ៥.១២ (ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃនព្វន្ត (Fundamental Theorem of Arithmetic))៖
គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃកត្តាបឋមបានតែមួយគត់ (ដោយមិនគិតពីលំដាប់នៃកត្តា)[cite: 2, 3] ៖

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

ដែល $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ ជាចំនួនបឋម និង $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ ។

- ចំនួនតួចែកវិជ្ជមានសរុបនៃ n ៖ $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$[cite: 1]
- វិធីពិនិត្យចំនួនបឋម ៖ ដើម្បីដឹងថា $n > 1$ ជាចំនួនបឋម ឬអត់ គេយក n ទៅចែកនឹងគ្រប់ចំនួនបឋម p ដែល $p \leq \sqrt{n}$ ។ បើគ្មាន p ណាចែកដាច់ n ទេ នោះ n ជាចំនួនបឋម ។

ឧទាហរណ៍ ៥.១ ក ចូរបំបែកចំនួន 360 ជាផលគុណកត្តាបឋម រួចរកចំនួនតួចែកវិជ្ជមានសរុបរបស់វា[cite: 1, 3] ។

ខ ចូរពិនិត្យថាតើ 197 ជាចំនួនបឋម ឬជាចំនួនសមាស ?

ចម្លើយ ៖

a. $360 = 36 \times 10 = (2^2 \times 3^2) \times (2 \times 5)$
$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$
ចំនួនតួចែកវិជ្ជមានសរុបនៃ 360 គឺ[cite: 1] ៖

$$d(360) = (3+1)(2+1)(1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ តួ}$$

b. ដោយ $\sqrt{197} \approx 14.03$ ចំនួនបឋមដែលតូចជាង ឬស្មើ 14 គឺ $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ។ ពិនិត្យឃើញថា 197 ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋមទាំង 6 នេះទេ ។ ដូចនេះ 197 ជាចំនួនបឋម ។

៤.២.២ តួចែករួមធំបំផុត (PGCD / GCD) និងអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត

និយមន័យ ៤.១៨ (តួចែករួមធំបំផុត និងចំនួនបឋមរវាងគ្នា) ① ឱ្យ $a, b \in \mathbb{Z}$ ដែលមិនសូន្យព្រមគ្នា ។ តួចែករួមវិជ្ជមានធំបំផុតនៃ a និង b ហៅថា តួចែករួមធំបំផុត (PGCD / GCD) នៃ a និង b តាងដោយ $\gcd(a, b)$ (ឬ $\text{PGCD}(a, b)$)[cite: 1, 3] ។

② បើ $\gcd(a, b) = 1$ គេថា a និង b ជា ចំនួនបឋមរវាងគ្នា (Coprime / Relatively Prime)[cite: 1, 3] ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១៨ (លក្ខណៈនៃតួចែករួមធំបំផុត និងអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត)៖
ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{N}^*$ និង $k \in \mathbb{N}^*$ គេបាន[cite: 1, 3] ៖

1. $\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$ និង $\gcd(a, 0) = a$ និង $\gcd(a, 1) = 1$
2. $\gcd(ka, kb) = k \cdot \gcd(a, b)$[cite: 3]
3. បើ $d = \gcd(a, b)$ នោះ $a = da'$ និង $b = db'$ ដែល $\gcd(a', b') = 1$[cite: 1] ។
4. អាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត (Euclidean Algorithm) ៖ បើ $a = bq + r$ $(0 \leq r < b)$ នោះ[cite: 1] ៖
$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r)[cite: 1]$$
(សំណល់មិនសូន្យចុងក្រោយគេបង្អស់ក្នុងវិធីចែកបន្តបន្ទាប់ គឺជា $\gcd(a, b)$)

ឧទាហរណ៍ ៤.១ ក ចូររក $\gcd(564, 96)$ តាមអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត[cite: 3] ។

ខ ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $\gcd(n^3 + 2n,\ n^4 + 3n^2 + 1) = 1$[cite: 3] ។

ចម្លើយ ៖

ក អនុវត្តវិធីចែកបន្តបន្ទាប់តាមអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត[cite: 3] ៖
$$564 = 96 \times 5 + 84$$
$$96 = 84 \times 1 + \mathbf{12}$$
$$84 = 12 \times 7 + 0$$
សំណល់មិនសូន្យចុងក្រោយគឺ 12 ។ ដូចនេះ $\gcd(564, 96) = 12$ ។

ខ អនុវត្តអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីតលើពហុធា[cite: 3] ៖

$$n^4+3n^2+1 = n(n^3+2n)+(n^2+1)$$
$$n^3+2n = n(n^2+1)+n$$
$$n^2+1 = n\cdot n+\mathbf{1}$$
$$n = 1\cdot n+0$$

ដូចនេះ $\gcd(n^3+2n,\ n^4+3n^2+1)=1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$[cite: 3] ។

៥.២.៣ សមភាព Bézout និងទ្រឹស្តីបទ Gauss

ទ្រឹស្តីបទ ៥.១៧ (សមភាព និងទ្រឹស្តីបទ Bézout **១** សមភាព Bézout ៖ ចំពោះ គ្រប់ $a,b\in\mathbb{Z}$ មិនសូន្យព្រមគ្នា មានចំនួនគត់ $u,v\in\mathbb{Z}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់[cite: 1, 3] ៖

$$au+bv=\gcd(a,b)[cite:3]$$

២ ទ្រឹស្តីបទ Bézout ៖ ពីរចំនួនគត់ a,b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា $(\gcd(a,b)=1)$ លុះត្រាតែមានចំនួនគត់ $u,v\in\mathbb{Z}$ ដែល[cite: 3] ៖

$$au+bv=1[cite:3]$$

ទ្រឹស្តីបទ ៥.១៨ (ទ្រឹស្តីបទ Gauss និងវិបាក **១** ទ្រឹស្តីបទ Gauss ៖ ឱ្យ $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ។ បើ $a\mid bc$ និង $\gcd(a,b)=1$ នោះ $a\mid c$[cite: 3] ។

២ វិបាក ៖ បើ $a\mid n$, $b\mid n$ និង $\gcd(a,b)=1$ នោះ $ab\mid n$[cite: 3] ។

ឧទាហរណ៍ ៥.១ ក ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ប្រភាគ $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន[cite: 1, 3] ។

ខ ចូររកគូចំនួនគត់ $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $17x+29y=1$[cite: 1] ។

ចម្លើយ ៖

ក គេមាន $[cite:3]$៖

$$(21n+4)(-2)+(14n+3)(3)=-42n-8+42n+9=1[cite:3]$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Bézout គេបាន $\gcd(21n+4,\ 14n+3)=1$[cite: 3] ។

ដូចនេះ $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន[cite: 1, 3] ។

ខ) អនុវត្តអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីតចំពោះ 29 និង 17 ៖

$29 = 17 \times 1 + 12 \implies 12 = 29 - 17 \times 1$

$17 = 12 \times 1 + 5 \implies 5 = 17 - 12 \times 1$

$12 = 5 \times 2 + 2 \implies 2 = 12 - 5 \times 2$

$5 = 2 \times 2 + 1 \implies 1 = 5 - 2 \times 2$

ជំនួសបកក្រោយវិញ គេបាន ៖

$1 = 5 - 2(12 - 5 \times 2) = 5 \times 5 - 2 \times 12$

$= 5(17 - 12) - 2 \times 12 = 5 \times 17 - 7 \times 12$

$= 5 \times 17 - 7(29 - 17) = 17(12) + 29(-7)$

ដូចនេះ គូចម្លើយពិសេសមួយគឺ $(x_0, y_0) = (12, -7)$ ។

(ចំណាំ ៖ ចម្លើយទូទៅក្នុង $\mathbb{Z}^2$ គឺ $x = 12+29k$ និង $y = -7-17k$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$)

៥.៣ ពហុគុណរួមតូចបំផុត (PPCM / LCM) និងតាពសមមូល

៥.៣.១ ពហុគុណរួម តូចបំផុត (PPCM / LCM) និង ទំនាក់ទំនង ជាមួយ PGCD

និយមន័យ ៥.២០ (ពហុគុណរួមតូចបំផុត)៖
ពហុគុណរួមតូចបំផុត (PPCM / LCM) នៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ a និង b គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិវិជ្ជមានតូចបំផុត ដែលចែកដាច់នឹង a ផង និងចែកដាច់នឹង b ផង តាងដោយ $\operatorname{lcm}(a,b)$ ឬ $\operatorname{PPCM}(a,b)$[cite: 1, 3] ។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.២១ (លក្ខណៈនៃ $\operatorname{lcm}(a,b)$ និងទំនាក់ទំនងជាមួយ $\gcd(a,b)$)៖
ចំពោះគ្រប់ $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ និង d ជាតួចែករួមនៃ a និង b គេបាន ៖

1. $\operatorname{lcm}(a,b) = \operatorname{lcm}(b,a), \quad \operatorname{lcm}(a,a) = a, \quad \operatorname{lcm}(1,a) = a$[cite: 1, 3]
2. $\operatorname{lcm}(a, na) = na$ និង $\operatorname{lcm}(na, nb) = n \cdot \operatorname{lcm}(a,b)$[cite: 1, 3]
3. $\operatorname{lcm}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{\operatorname{lcm}(a,b)}{d}$[cite: 1, 3]

4. បើ $\gcd(a,b)=1$ (ចំនួនបឋមរវាងគ្នា) នោះ $\text{lcm}(a,b)=a\cdot b$[cite: 3] ។
5. ចំនាក់ចំនងគ្រឹះ ៖ ចំពោះគ្រប់ $a,b\in\mathbb{N}^*$ គេបាន[cite: 1, 3] ៖

ឧទាហរណ៍ ៤.២ ក រក $\gcd(90,105)$ និង $\text{lcm}(90,105)$ ដោយប្រើការបំបែកជាកត្តាបឋម[cite: 1] ។ $\gcd(a,b)\cdot\text{lcm}(a,b)=a\cdot b[cite:1,3]$

ខ ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{N}^2$[cite: 3] ៖

$$\begin{cases}\gcd(x,y)=28\\ \text{lcm}(x,y)=420\end{cases}\quad[cite:3]$$

ចម្លើយ ៖

ក បំបែក 90 និង 105 ជាផលគុណកត្តាបឋម ៖ $90=2\cdot3^2\cdot5$ និង $105=3\cdot5\cdot7$[cite: 1] ។

- $\gcd(90,105)=3\cdot5=15$ (យកកត្តាបឋមរួម ដែលមាននិទស្សន្តតូចបំផុត)[cite: 1]
- $\text{lcm}(90,105)=2\cdot3^2\cdot5\cdot7=630$ (យកកត្តាបឋមរួម និងមិនរួម ដែលមាននិទស្សន្តធំបំផុត)[cite: 1]

ខ ដោយ $\gcd(x,y)=28$ នោះមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ ដែល $\gcd(\alpha,\beta)=1$ និង $x=28\alpha,\ y=28\beta$[cite: 3] ។
តាមទំនាក់ទំនង $\gcd(x,y)\cdot\text{lcm}(x,y)=xy$ គេបាន ៖

$$(28\alpha)(28\beta)=28\times420$$

$$\alpha\beta=\frac{420}{28}=15$$

ដោយ $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\beta=15$ និង $\gcd(\alpha,\beta)=1$ នោះ $(\alpha,\beta)\in\{(1,15),(3,5),(5,3),(15,1)\}$ ។
ជំនួសរក $(x,y)=(28\alpha,28\beta)$ គេបាន ៖

$$(x,y)\in\{(28,420),\ (84,140),\ (140,84),\ (420,28)\}$$

៥.៣.២ តាពសមមូល (Modular Arithmetic / Congruence)

និយមន័យ ៥.២៣ (តាពសមមូលម៉ូឌុលឡ m)៖
ឱ្យ $a, b \in \mathbb{Z}$ និង $m \in \mathbb{N}^*$ ($m \geq 2$) ។ គេថា a **សមមូលនឹង** b ម៉ូឌុលឡ m កាលណា $m \mid (a-b)$ (ឬ a និង b ចែកនឹង m មានសំណល់ដូចគ្នា) ហើយសរសេរ[cite: 1, 3] ៖

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = mk+b [cite: 1, 3]$$

ទ្រឹស្តីបទ ៥.២៤ (លក្ខណៈគ្រឹះនៃតាពសមមូល)៖
ចំពោះគ្រប់ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ និង $k \in \mathbb{N}^*$ បើ $a \equiv b \pmod{m}$ និង $c \equiv d \pmod{m}$ នោះគេបាន ៖

1. លក្ខណៈឆ្លុះ ស៊ីមេទ្រី និងឆ្លង ៖ $a \equiv a \pmod{m}$; បើ $a \equiv b \pmod{m}$ នោះ $b \equiv a \pmod{m}$; និងបើ $b \equiv c \pmod{m}$ នោះ $a \equiv c \pmod{m}$[cite: 1] ។
2. ផលបូក និងផលដក ៖ $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$[cite: 3]
3. ផលគុណ ៖ $ac \equiv bd \pmod{m}$ (ជាពិសេស $ka \equiv kb \pmod{m}$)[cite: 3]
4. ស្វ័យគុណ ៖ $a^k \equiv b^k \pmod{m}$[cite: 3]
5. ទ្រឹស្តីបទតូច Fermat (Fermat's Little Theorem) ៖ បើ p ជាចំនួនបឋម ហើយ $p \nmid a$ (ពោលគឺ $\gcd(a, p) = 1$) នោះ[cite: 1] ៖

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} [cite: 1]$$

ឧទាហរណ៍ ៥.២ (ក) ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod{5}$[cite: 1, 3] ។

(ខ) ចូររកសំណល់នៃវិធីចែក 7^{100} នឹង 100 (ឬរកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 7^{100})[cite: 1] ។

ចម្លើយ ៖

(ក) $$\begin{aligned} 2^{2n+1} + 3^{2n+1} &= 2 \cdot (2^2)^n + 3 \cdot (3^2)^n \\ &= 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n \end{aligned}$$

ដោយ $4 \equiv -1 \pmod 5$ និង $9 \equiv -1 \pmod 5$ គេបាន ៖
$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n &\equiv 2(-1)^n + 3(-1)^n \pmod 5 \\ &\equiv 5(-1)^n \equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$
ដូចនេះ $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod 5$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$[cite: 1, 3] ។

ខ) សង្កេតឃើញថា $7^4 = 2401 = 24 \times 100 + 1 \equiv 1 \pmod{100}$ ។
លើកអង្គទាំងពីរជាស្វ័យគុណ 25 គេបាន ៖
$$\begin{aligned} 7^{100} = (7^4)^{25} &\equiv 1^{25} \pmod{100} \\ &\equiv 1 \pmod{100} \end{aligned}$$
ដូចនេះ សំណល់នៃវិធីចែក 7^{100} នឹង 100 គឺ 1 (លេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយគឺ 01) ។

៥.៨ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises)

លំហាត់ ៥.២៦៖
ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

a. គ្រប់ការេនៃចំនួនគត់សេសដក 1 តែងតែជាពហុគុណនៃ 8[cite: 2] ។

b. កន្សោម $m^3n - mn^3$ ជាពហុគុណនៃ 6 ជានិច្ច[cite: 2] ។

លំហាត់ ៥.២៧៖
ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីប $n \in \mathbb{Z}$ ដើម្បីឱ្យ ៖

ក) $(n-1) \mid (2n+5)$

ខ) $(2n+1) \mid (6n+11)$

លំហាត់ ៥.២៨៖
ចូររកផលចែក q និងសំណល់ r ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ a នឹង b ខាងក្រោម ៖

a. $a = 347$ និង $b = 15$

b. $a = -245$ និង $b = 13$

លំហាត់ ៥.២៩៖
ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រអនុមានរួមគណិតវិទ្យា (Mathematical Induction) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ចំនួន $A_n = 4^n + 6n - 1$ ចែកជាច់នឹង 9 ជានិច្ច[cite: 2] ។

លំហាត់ ៥.៣៦ ក ចូរបំបែកចំនួន 504 និង 600 ជាផលគុណកត្តាបឋម រួចរកចំនួនគួរចែកវិជ្ជមានសរុបរបស់ចំនួននីមួយៗ[cite: 2] ។

ខ ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ដើម្បីឱ្យ $24\times p$ ជាការេនៃចំនួនគត់មួយ[cite: 2] ។

លំហាត់ ៥.៣៧៖
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក បើ $p>3$ ជាចំនួនបឋម នោះ p^2-1 ចែកជាប់នឹង 24 ជានិច្ច[cite: 2] ។

ខ បើ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល a^2-b^2 ជាចំនួនបឋម នោះ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិតគ្នា ហើយ $a^2-b^2=a+b$[cite: 2] ។

លំហាត់ ៥.៣៨ ក ចូររក $\gcd(780,210)$ តាមអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត ។

ខ ចូររកគូចំនួនគត់ $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ មួយគូដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $780u+210v=\gcd(780,210)$ ។

លំហាត់ ៥.៣៣៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ចំនួន $a=15n+4$ និង $b=10n+3$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ($\gcd(a,b)=1$) ។

លំហាត់ ៥.៣៤៖
ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមក្នុង $\mathbb{N}^2$ ៖

ក $\begin{cases}\gcd(x,y)=12\\ \operatorname{lcm}(x,y)=360\end{cases}$ ខ $\begin{cases}x+y=276\\ \gcd(x,y)=23\end{cases}$ [cite: 2]

លំហាត់ ៥.៣៥៖
គេមាន $2m+3d=78$ ដែល $d=\gcd(a,b)$ និង $m=\operatorname{lcm}(a,b)$ នៃពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a<b$ ។ ចូររកគូ (a,b) ទាំងអស់ ដោយដឹងថា a មិនមែនជាតួចែកនៃ b[cite: 2] ។

លំហាត់ ៥.៣៦៖
ដោយប្រើភាពសមមូល ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

a. $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}$[cite: 2]

b. $5555^{2222} + 2222^{5555}$ ចែកដាច់នឹង 7[cite: 2]

លំហាត់ ៥.៣៧៖
ចូររកលេខខ្ទង់រាយ (លេខចុងក្រោយ) នៃចំនួន 3^{2026} ។

៥.៥ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions)

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

a. តាងចំនួនគត់សេសគឺ $2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ។ គេបាន[cite: 2] ៖
$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1$$
$$= 4k(k+1)$$
ដោយ $k(k+1)$ ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់តគ្នា នោះ $k(k+1) = 2t$ ($t \in \mathbb{Z}$)[cite: 2] ។
គេបាន $(2k+1)^2 - 1 = 4(2t) = 8t$ ដែលជាពហុគុណនៃ 8[cite: 2] ។

b. $m^3n - mn^3 = mn(m^2 - n^2)$
$$= mn(m-n)(m+n)$$
- ភាពចែកដាច់នឹង 2 ៖ បើ m ឬ n ជាចំនួនគូ នោះផលគុណចែកដាច់នឹង 2 ។ បើ m និង n សុទ្ធតែជាចំនួនសេស នោះ $m-n$ ជាចំនួនគូ នាំឱ្យផលគុណចែកដាច់នឹង 2 ។
- ភាពចែកដាច់នឹង 3 ៖ បើ $3 \mid m$ ឬ $3 \mid n$ នោះពិត ។ បើ $3 \nmid m$ និង $3 \nmid n$ នោះ m, n ចែកនឹង 3 សល់សំណល់ 1 ឬ 2 ។ បើសំណល់ដូចគ្នា នោះ $3 \mid (m-n)$; បើសំណល់ខុសគ្នា (1 និង 2) នោះ $3 \mid (m+n)$ ។

ដោយ $\gcd(2,3) = 1$ នោះ $m^3n - mn^3$ ចែកដាច់នឹង $2 \times 3 = 6$ ជានិច្ច[cite: 2] ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

a. គេមាន $(n-1) \mid (2n+5)$ និង $(n-1) \mid 2(n-1) = (2n-2)$ ។

យកផលដក គេបាន $(n-1) \mid \big[(2n+5)-(2n-2)\big] \implies (n-1) \mid 7$ ។
ដោយតួចែកក្នុង $\mathbb{Z}$ នៃ 7 គឺ $\{\pm 1, \pm 7\}$ គេបាន ៖

$$n-1 \in \{-7,-1,1,7\} \implies n \in \{-6,0,2,8\}$$

b. គេមាន $(2n+1) \mid (6n+11)$ និង $(2n+1) \mid 3(2n+1) = (6n+3)$ ។
យកផលដក គេបាន $(2n+1) \mid \big[(6n+11)-(6n+3)\big] \implies (2n+1) \mid 8$ ។
ដោយ $2n+1$ ជាចំនួនគត់សេស នោះយើងយកតែតួចែកសេសនៃ 8 គឺ $\{\pm 1\}$ ៖

$$2n+1 \in \{-1,1\} \implies n \in \{-1,0\}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ អនុវត្តរូបមន្ត $a = bq + r$ ដែល $0 \le r < b$ ៖

a. $347 = 15 \times 23 + 2$ $(0 \le 2 < 15) \implies q = 23$ និង $r = 2$ ។
b. $-245 = 13 \times (-19) + 2$ $(0 \le 2 < 13) \implies q = -19$ និង $r = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៥.៣៨៖
តាងសំណើ $P(n)$ ៖ «$9 \mid (4^n + 6n - 1)$» ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$[cite: 2] ។

- ជំហានមូលដ្ឋាន ($n = 1$) ៖ $A_1 = 4^1 + 6(1) - 1 = 9$ ចែកដាច់នឹង 9 (ពិត) [cite: 2] ។
- ជំហានកំណើន ៖ សន្មតថា $P(k)$ ពិតចំពោះ $k \ge 1$ ពោលគឺ $4^k + 6k - 1 = 9m$ ($m \in \mathbb{Z}$) ។
  ចំពោះ $n = k+1$ គេបាន ៖
  $$\begin{aligned} A_{k+1} &= 4^{k+1} + 6(k+1) - 1 \\ &= 4 \cdot 4^k + 6k + 5 \\ &= 4(4^k + 6k - 1) - 18k + 9 \\ &= 4(9m) - 9(2k-1) \\ &= 9(4m - 2k + 1) \end{aligned}$$
  ដោយ $4m - 2k + 1 \in \mathbb{Z}$ នោះ $9 \mid A_{k+1}$ ពោលគឺ $P(k+1)$ ពិត ។

តាមវិចារ្យកំណើន សំណើ $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

a. បំបែកជាផលគុណកត្តាបឋម ៖
   - $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7^1 \implies d(504) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$ គូ ។
   - $600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \implies d(600) = (3+1)(1+1)(2+1) = 24$ គូ ។

b. គេមាន $24 \times p = (2^3 \times 3) \times p = (2^2 \times 6) \times p$ ។
   ដើម្បីឱ្យ $24 \times p$ ជាការេនៃចំនួនគត់មួយ និទស្សន្តនៃកត្តាបឋមនីមួយៗត្រូវតែជាចំនួនគូ ។
   ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាគឺ $p = 2 \times 3 = 6$ (ដែល $24 \times 6 = 144 = 12^2$)[cite: 2] ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៥.៣ ក ដោយ $p > 3$ ជាចំនួនបឋម នោះ p ជាចំនួនសេស ហើយ $3 \nmid p$ ។

- $p-1$ និង $p+1$ ជាពីរចំនួនគត់គូតគ្នា ដូច្នេះមួយចែកជាច់នឹង 2 និងមួយទៀតចែកជាច់នឹង $4 \implies 8 \mid (p-1)(p+1) = p^2 - 1$ ។
- ក្នុងបីចំនួនគត់តគ្នា $p-1, p, p+1$ ត្រូវមានមួយចែកជាច់នឹង 3 ។ ដោយ $3 \nmid p$ នោះ $3 \mid (p-1)(p+1) = p^2 - 1$ ។

ដោយ $\gcd(8,3) = 1$ នោះ $24 \mid (p^2 - 1)$[cite: 2] ។

ខ គេមាន $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = p$ ជាចំនួនបឋម ។
ដោយ $a, b \in \mathbb{N}$ និង $a + b > a - b \geq 1$ នោះកត្តាតូចត្រូវតែស្មើ 1 ៖

$$a - b = 1 \implies a = b + 1$$

ដូចនេះ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិតគ្នា ហើយ $a^2 - b^2 = 1 \cdot (a+b) = a+b$[cite: 2] ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

a. អនុវត្តអាល់ហ្គរីតអឺគ្លីត ៖

$$780 = 210 \times 3 + 150$$
$$210 = 150 \times 1 + 60$$
$$150 = 60 \times 2 + \mathbf{30}$$
$$60 = 30 \times 2 + 0$$

ដូចនេះ $\gcd(780, 210) = 30$ ។

b. ជំនួសបកក្រោយពីដំហានខាងលើ ៖

$$\begin{aligned} 30 &= 150 - 60 \times 2 \\ &= 150 - (210 - 150 \times 1) \times 2 = 150 \times 3 - 210 \times 2 \\ &= (780 - 210 \times 3) \times 3 - 210 \times 2 \\ &= 780(3) + 210(-11) \end{aligned}$$

ដូចនេះ គូចំនួនគត់មួយគឺ $(u, v) = (3, -11)$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៥.៨០៖
យើងរកបន្សំលីនេអ៊ែរដើម្បីបំបាត់ n ៖

$$2(15n + 4) - 3(10n + 3) = 30n + 8 - 30n - 9 = -1$$

ឬសរសេរជា $(15n + 4)(-2) + (10n + 3)(3) = 1$ ។
តាមទ្រឹស្តីបទ Bézout គេបាន $\gcd(15n + 4,\ 10n + 3) = 1$ ។
ដូចនេះ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

a. តាង $x = 12\alpha$ និង $y = 12\beta$ ដែល $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ និង $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $\gcd(x,y)\cdot\operatorname{lcm}(x,y)=xy$ គេបាន ៖

$$(12\alpha)(12\beta)=12\times 360 \implies \alpha\beta=30$$

គូ (α,β) ដែល $\alpha\beta=30$ និង $\gcd(\alpha,\beta)=1$ គឺ $(1,30),(2,15),(3,10),(5,6)$ និងចម្លើយឆ្លាស់ ។
ដូចនេះ $(x,y)\in\{(12,360),(24,180),(36,120),(60,72),(72,60),(120,36),(180,2$ ។

b. តាង $x=23\alpha$ និង $y=23\beta$ ដែល $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ និង $\gcd(\alpha,\beta)=1$[cite: 2] ។
ជំនួសក្នុង $x+y=276$ គេបាន $23(\alpha+\beta)=276 \implies \alpha+\beta=12$[cite: 2] ។
គូ (α,β) ដែល $\alpha+\beta=12$ និង $\gcd(\alpha,\beta)=1$ គឺ $(1,11),(5,7),(7,5),(11,1)$ ។
ដូចនេះ $(x,y)\in\{(23,253),\ (115,161),\ (161,115),\ (253,23)\}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ តាង $a=d\alpha$ និង $b=d\beta$ ដែល $\gcd(\alpha,\beta)=1$ ។ ដោយ $a<b$ និង $a\nmid b$ នោះ $1<\alpha<\beta$[cite: 2] ។
ម្យ៉ាងទៀត $m=\operatorname{lcm}(a,b)=d\alpha\beta$ ។ ជំនួសក្នុង $2m+3d=78$ គេបាន[cite: 2] ៖

$$2d\alpha\beta+3d=78 \implies d(2\alpha\beta+3)=78$$

ដោយ $\alpha\geq 2$ និង $\beta\geq 3$ នោះ $\alpha\beta\geq 6 \implies 2\alpha\beta+3\geq 15$ ។
តួចែកនៃ 78 ដែលធំជាង ឬស្មើ 15 គឺ $26,39,78$ ៖

- បើ $2\alpha\beta+3=26 \implies 2\alpha\beta=23$ (គ្មានចម្លើយគត់) ។
- បើ $2\alpha\beta+3=39 \implies \alpha\beta=18$ និង $d=2$ ។ ដោយ $1<\alpha<\beta$ និង $\gcd(\alpha,\beta)=1$ គេបាន $(\alpha,\beta)=(2,9) \implies (a,b)=(4,18)$ ។
- បើ $2\alpha\beta+3=78 \implies 2\alpha\beta=75$ (គ្មានចម្លើយគត់) ។

ដូចនេះ គូចំនួនគត់ដែលត្រូវរកគឺ $(a,b)=(4,18)$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៥.៨ ក $3^{n+3}-4^{4n+2}=27\cdot 3^n-16\cdot(4^4)^n$
$=27\cdot 3^n-16\cdot 256^n$
ដោយ $27\equiv 5\pmod{11}$, $16\equiv 5\pmod{11}$ និង $256=11\times 23+3\equiv 3$

$(\text{mod } 11)$ គេបាន[cite: 2] ៖

$$\begin{aligned} 3^{n+3} - 4^{4n+2} &\equiv 5 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^n \pmod{11} \\ &\equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

ខ ដោយ $5555 = 7 \times 793 + 4 \equiv 4 \pmod 7$ និង $2222 = 7 \times 317 + 3 \equiv 3 \pmod 7$ នោះ ៖

$$5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + 3^{5555} \pmod 7$$

សង្កេតឃើញថា $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$ និង $3^6 = 729 \equiv 1 \pmod 7$ (ឬ $3^3 = 27 \equiv -1 \pmod 7$) ។

ដោយ $2222 = 3 \times 740 + 2$ និង $5555 = 6 \times 925 + 5$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} 4^{2222} + 3^{5555} &\equiv (4^3)^{740} \cdot 4^2 + (3^6)^{925} \cdot 3^5 \pmod 7 \\ &\equiv 1^{740} \cdot 16 + 1^{925} \cdot 243 \pmod 7 \\ &\equiv 2 + 5 = 7 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $5555^{2222} + 2222^{5555}$ ចែកដាច់នឹង 7[cite: 2] ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ ការរកលេខខ្ទង់រាយនៃ 3^{2026} គឺជាការរកសំណល់នៃវិធីចែក 3^{2026} នឹង 10 (ម៉ូឌុលទី្ប 10) ។

ដោយ $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ និង $2026 = 4 \times 506 + 2$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} 3^{2026} &= (3^4)^{506} \cdot 3^2 \\ &\equiv 1^{506} \cdot 9 \pmod{10} \\ &\equiv 9 \pmod{10} \end{aligned}$$

ដូចនេះ លេខខ្ទង់រាយនៃចំនួន 3^{2026} គឺ 9 ។

៤.៦ ទ្រឹស្តីបទ Euler ចំនួន Mersenne និងចំនួន Perfect

៤.៦.១ អនុគមន៍ Euler និងទ្រឹស្តីបទ Euler (Euler's Theorem)

និយមន័យ ៤.៤២ (អនុគមន៍ Euler $\varphi(n)$)៖
ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \in \mathbb{N}^*$ អនុគមន៍ Euler តាងដោយ $\varphi(n)$ គឺជាចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ដែល $1 \le k \le n$ ហើយ k បឋមរវាងគ្នានឹង n ពោលគឺ $\gcd(k,n)=1$[cite: 1]៖

$$\varphi(n) = \left|\{k \in \mathbb{N}^* \mid 1 \le k \le n \text{ និង } \gcd(k,n)=1\}\right|$$

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤៣ (លក្ខណៈ និងរូបមន្តគណនាអនុគមន៍ Euler) ① $\varphi(1)=1$[cite: 1]

② បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\varphi(p)=p-1$[cite: 1]

③ បើ p ជាចំនួនបឋម និង $\alpha \in \mathbb{N}^*$ នោះ $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$[cite: 1]

④ លក្ខណៈគុណ ៖ បើ $\gcd(a,b)=1$ នោះ $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$[cite: 1]

⑤ រូបមន្តទូទៅ ៖ បើ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ ជាការបំបែកជាកត្តាបឋមនៃ $n>1$ នោះ[cite: 1]៖

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\ [cite:1]$$

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤៤ (ទ្រឹស្តីបទ Euler (Euler's Theorem))៖
ឱ្យ $a \in \mathbb{Z}$ និង $m \in \mathbb{N}^*$ $(m \ge 2)$ ដែល $\gcd(a,m)=1$ នោះគេបាន[cite: 1]៖

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m [cite:1]$$

(ចំណាំ ៖ ករណីពិសេសពេល $m=p$ ជាចំនួនបឋម គេបាន $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ ដែលជាទ្រឹស្តីបទតូច Fermat)

ឧទាហរណ៍ ៤.៤ ក ចូរគណនា $\varphi(36)$ និង $\varphi(100)$ ។

ខ) ចូររកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន 7^{100}[cite: 1] ។

ចម្លើយ ៖

ក) គណនា $\varphi(36)$ និង $\varphi(100)$ ៖

- ដោយ $36 = 2^2 \times 3^2$ គេបាន ៖
$$\varphi(36) = 36\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 12$$
- ដោយ $100 = 2^2 \times 5^2$ គេបាន[cite: 1] ៖
$$\varphi(100) = 100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$
$$= 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 40$$

ខ) រកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 7^{100} (គណនាម៉ូឌុលទ្បូ 100) ៖

ដោយ $\gcd(7, 100) = 1$ និង $\varphi(100) = 40$ តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន[cite: 1] ៖

$$7^{40} \equiv 1 \pmod{100} [cite: 1]$$

ដោយ $100 = 40 \times 2 + 20$ គេបាន ៖
$7^{100} = (7^{40})^2 \cdot 7^{20}$
$\equiv 1^2 \cdot 7^{20} \pmod{100}$
គណនា $7^{20} \pmod{100}$ ៖ ដោយ $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ នោះ ៖
$7^{20} = (7^4)^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \pmod{100}$
ដូចនេះ $7^{100} \equiv 1 \pmod{100}$ ពោលគឺលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 7^{100} គឺ 01 ។

៤.៦.២ ចំនួន Mersenne និងចំនួន Perfect

និយមន័យ ៤.៤៦ (ចំនួន Mersenne (Mersenne Numbers))៖
ចំនួនដែលមានទម្រង់ $M_n = 2^n - 1$ ដែល $n \in \mathbb{N}^*$ ហៅថា ចំនួន Mersenne ។
បើ $M_n = 2^n - 1$ ជាចំនួនបឋម គេហៅវាថា ចំនួនបឋម Mersenne (Mersenne Prime) ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤៧ (លក្ខណៈចាំបាច់នៃចំនួនបឋម Mersenne)៖
បើ $2^n - 1$ ជាចំនួនបឋម នោះ n ត្រូវតែជា ចំនួនបឋម ។
*(ចំណាំ ៖ ច្រាសមកវិញមិនពិតជានិច្ចទេ ឧទាហរណ៍ ៖ $n = 11$ ជាចំនួនបឋម ប៉ុន្តែ $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ មិនមែនជាចំនួនបឋមឡើយ) *

និយមន័យ ៤.៤៨ (ចំនួន Perfect (Perfect Numbers))៖
ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \in \mathbb{N}^*$ ហៅថា ចំនួន Perfect (ចំនួនឥតខ្ចោះ) កាលណា ផលបូកនៃគ្រប់តួចែកវិជ្ជមានសុទ្ធរបស់វា (តួចែកទាំងអស់លើកលែងខ្លួនវា) ស្មើនឹងខ្លួនវាផ្ទាល់ ពោលគឺ $\sigma(n) = 2n$ ។
*(ឧទាហរណ៍ ៖ $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, 496) *

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤៩ (ទ្រឹស្តីបទ Euclid–Euler)៖
ចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន n ជា ចំនួន Perfect លុះត្រាតែវាមានទម្រង់ ៖

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

ដែល $2^p - 1$ ជា ចំនួនបឋម Mersenne ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៥០៖
ចូររកចំនួន Perfect គូបីដំបូងគេ ដោយអនុវត្តទ្រឹស្តីបទ Euclid–Euler ។

ចម្លើយ ៖

- ចំពោះ $p = 2$ ៖ $2^2 - 1 = 3$ ជាចំនួនបឋម $\implies n_1 = 2^{2-1}(2^2 - 1) = 2 \times 3 = 6$ ។
- ចំពោះ $p = 3$ ៖ $2^3 - 1 = 7$ ជាចំនួនបឋម $\implies n_2 = 2^{3-1}(2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$ ។
- ចំពោះ $p = 5$ ៖ $2^5 - 1 = 31$ ជាចំនួនបឋម $\implies n_3 = 2^{5-1}(2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496$ ។

ដូចនេះ ចំនួន Perfect គូបីដំបូងគឺ $6, 28, 496$ ។

៤.៦.៣ សមីការ Diophantine លីនេអ៊ែរ $ax + by = c$

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤១ (លក្ខខណ្ឌមានចម្លើយ និងចម្លើយទូទៅ)៖
ឱ្យ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ដែល a, b មិនសូន្យព្រមគ្នា និង $d = \gcd(a, b)$ ។

1. សមីការ Diophantine លីនេអ៊ែរ $ax + by = c$ មានចម្លើយក្នុង $\mathbb{Z}^2$ លុះត្រាតែ $d \mid c$ ។
2. បើ (x_0, y_0) ជាគូចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ នោះសំណុំចម្លើយទូទៅក្នុង $\mathbb{Z}^2$ គឺ ៖

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}k \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

ឧទាហរណ៍ ៤.៤២៖
ចូរដោះស្រាយសមីការ Diophantine ក្នុង $\mathbb{Z}^2$ ៖ $15x + 21y = 33$ ។

ចម្លើយ ៖ រក $\gcd(15, 21) = 3$ ។ ដោយ $3 \mid 33$ សមីការមានចម្លើយក្នុង $\mathbb{Z}^2$ ។
ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 3 គេបានសមីការសមមូល ៖

$$5x + 7y = 11$$

រកចម្លើយពិសេស ៖ សង្កេតឃើញថា $5(-2) + 7(3) = -10 + 21 = 11$ ដូច្នេះ $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ ។
តាមរូបមន្តចម្លើយទូទៅ (ដែល $\gcd(5, 7) = 1$) គេបាន ៖

$$\begin{cases} x = -2 + 7k \\ y = 3 - 5k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

លំហាត់ ៤.៨ ក ចូររកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន 3^{1000} ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ Euler[cite: 1] ។

ខ ចូរដោះស្រាយសមីការ Diophantine $14x + 19y = 100$ ក្នុង $\mathbb{N}^2$ (រកចម្លើយគត់វិជ្ជមាន) ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក) រកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 3^{1000} ៖
ដោយ $\gcd(3,100)=1$ និង $\varphi(100)=40$ តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន[cite: 1] ៖

$$3^{40}\equiv 1 \pmod{100}[cite:1]$$

ដោយ $1000=40\times 25$ គេបាន ៖
$3^{1000}=(3^{40})^{25}$
$\equiv 1^{25}\equiv 1 \pmod{100}[cite:1]$
ដូចនេះ លេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 3^{1000} គឺ 01[cite: 1] ។

ខ) ដោះស្រាយ $14x+19y=100$ ក្នុង $\mathbb{N}^2$ ៖
ដោយ $\gcd(14,19)=1$ យើងរកចម្លើយពិសេសនៃ $14u+19v=1$ ៖
សង្កេតឃើញថា $14(-4)+19(3)=-56+57=1$ ។
គុណអង្គទាំងពីរនឹង 100 គេបាន $14(-400)+19(300)=100$ ។
ចម្លើយទូទៅក្នុង $\mathbb{Z}^2$ គឺ ៖

$$\begin{cases} x=-400+19k \\ y=300-14k \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

ដោយតម្រូវឱ្យ $x,y\in\mathbb{N}$ ($x\geq 0$ និង $y\geq 0$) គេបាន ៖

$$\begin{cases} -400+19k\geq 0 \implies k\geq \dfrac{400}{19}\approx 21.05 \\ 300-14k\geq 0 \implies k\leq \dfrac{300}{14}\approx 21.42 \end{cases}$$

ដោយ $k\in\mathbb{Z}$ នោះមានតម្លៃតែមួយគត់គឺ $k=21$ ។
ជំនួស $k=21$ គេបាន $x=-400+19(21)=-1$ (អរិជ្ជមាន មិនយក! ប្រសិនបើ $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ នោះ $x=-1\notin\mathbb{N}$) ។
ដូចនេះ សមីការគ្មានចម្លើយក្នុង $\mathbb{N}^2$ ឡើយ ។

មេរៀនទី ៦ ទំនាក់ទំនង និងអនុគមន៍ (Relations and Functions)

៦.១ ផលគុណដេកាត និងទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ

៦.១.១ គូលំដាប់ និងផលគុណដេកាតនៃពីរសំណុំ

និយមន័យ ៦.១ (គូលំដាប់ (Ordered Pair))៖
គូលំដាប់ (a,b) គឺជាបណ្តុំនៃធាតុពីរដែលគិតពីលំដាប់មុនក្រោយ ដែល a ហៅថា កូអរដោនេទី ១ និង b ហៅថា កូអរដោនេទី ២ ។
ពីរគូលំដាប់ (a,b) និង (c,d) ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a=c$ និង $b=d$ ៖

$$(a,b)=(c,d) \iff (a=c \wedge b=d)$$

និយមន័យ ៦.២ (ផលគុណដេកាត (Cartesian Product))៖
ឱ្យ A និង B ជាពីរសំណុំមិនទទេ ។ ផលគុណដេកាតនៃ A និង B តាងដោយ $A\times B$ គឺជាសំណុំនៃគ្រប់គូលំដាប់ (a,b) ដែល $a\in A$ និង $b\in B$ ៖

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \wedge b\in B\}$$

ចំណាំ ៦.៣ (លក្ខណៈនៃផលគុណដេកាត)
១ ជាទូទៅ $A\times B\neq B\times A$ (លើកលែងតែ $A=B$ ឬ $A=\emptyset$ ឬ $B=\emptyset$) ។
២ បើ $A=\emptyset$ ឬ $B=\emptyset$ នោះ $A\times B=\emptyset$ ។
៣ ចំនួនធាតុ (កាឌីណាល់) ៖ បើ $n(A)=p$ និង $n(B)=q$ នោះ $n(A\times B)=p\times q$ ។
៤ $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ និង $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៤៖
គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2\}$ និង $B=\{a,b,c\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំ $A\times B$, $B\times A$ និង

$A^2 = A \times A$ ព្រមទាំងរកចំនួនជាតុរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ តាមនិយមន័យផលគុណដេកាត គេបាន ៖

- $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$ ដែលមាន $n(A \times B) = 2 \times 3 = 6$ ។
- $B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$ ដែលមាន $n(B \times A) = 3 \times 2 = 6$ ។
- $A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ ដែលមាន $n(A^2) = 2 \times 2 = 4$ ។

៦.១.២ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ដែនកំណត់ និងដែនតម្លៃ

និយមន័យ ៦.៥ (ទំនាក់ទំនង (Binary Relation))៖
ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B គឺជាសំណុំរងណាមួយនៃផលគុណដេកាត $A \times B$ ($\mathcal{R} \subseteq A \times B$) ។
បើ $(x,y) \in \mathcal{R}$ គេសរសេរ $x\mathcal{R}y$ ហើយអានថា «x មានទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ ជាមួយ y» ។

- ដែនកំណត់ (Domain) ៖ $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$
- ដែនតម្លៃ (Range) ៖ $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$
- ទំនាក់ទំនងច្រាស (Inverse Relation) ៖ $\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in \mathcal{R}\}$

ឧទាហរណ៍ ៦.៦៖
គេឱ្យ $A = \{1,2,3,4\}$ និង $B = \{2,4,6,8\}$ ។ កំណត់ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ ពី A ទៅ B ដោយ $x\mathcal{R}y \iff y = 2x$ ។ ចូរសរសេរ $\mathcal{R}$ ជារាយធាតុ និងរក $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}, \mathrm{Im}(\mathcal{R}), \mathcal{R}^{-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $y = 2x$ ចំពោះ $x \in A$ និង $y \in B$ គេបាន ៖

- $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$
- $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{1,2,3,4\} = A$ និង $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{2,4,6,8\} = B$

- $\mathcal{R}^{-1} = \{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4)\}$

៦.១.៣ ទំនាក់ទំនងសមមូល និងទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ A

និយមន័យ ៦.៧ (លក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងលើសំណុំ A)៖
ឱ្យ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងនៅលើសំណុំ A ($\mathcal{R} \subseteq A \times A$) ។ គេថា $\mathcal{R}$ មានលក្ខណៈ ៖

១ លក្ខណៈឆ្លុះ (Reflexive) ៖ $\forall x \in A,\ x\mathcal{R}x$ ។

២ លក្ខណៈស៊ីមេទ្រី (Symmetric) ៖ $\forall x, y \in A,\ (x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$ ។

៣ លក្ខណៈប្រឆាំងស៊ីមេទ្រី (Antisymmetric) ៖ $\forall x, y \in A,\ \big((x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \implies x = y\big)$ ។

៤ លក្ខណៈឆ្លង (Transitive) ៖ $\forall x, y, z \in A,\ \big((x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z\big)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៦.៨ (ទំនាក់ទំនងសមមូល និងទំនាក់ទំនងលំដាប់)៖

- ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ លើសំណុំ A ហៅថា ទំនាក់ទំនងសមមូល (Equivalence Relation) កាលណាវាមានលក្ខណៈ ឆ្លុះ ស៊ីមេទ្រី និងឆ្លង ព្រមគ្នា ។
- ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ លើសំណុំ A ហៅថា ទំនាក់ទំនងលំដាប់ (Partial Order Relation) កាលណាវាមានលក្ខណៈ ឆ្លុះ ប្រឆាំងស៊ីមេទ្រី និងឆ្លង ព្រមគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៩៖
កំណត់ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ នៅលើ $\mathbb{Z}$ ដោយ $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod 5$ (ពោលគឺ $5 \mid (x-y)$) ។ ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៦.១០៖
ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈទាំង ៣ នៃទំនាក់ទំនងសមមូល ៖

១ លក្ខណៈឆ្លុះ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{Z}$ គេមាន $x - x = 0 = 5 \times 0 \implies 5 \mid (x-x)$ ។ ដូចនេះ $x\mathcal{R}x$ ។

២ លក្ខណៈស៊ីមេទ្រី ៖ បើ $x\mathcal{R}y$ នោះ $x - y = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ។ គេបាន $y - x = 5(-k)$ ដែល $-k \in \mathbb{Z} \implies y\mathcal{R}x$ ។

៣ លក្ខណៈឆ្លង ៖ បើ $x\mathcal{R}y$ និង $y\mathcal{R}z$ នោះ $x-y = 5k_1$ និង $y-z = 5k_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$)

។
បូកអង្គទាំងពីរ គេបាន $x-z=(x-y)+(y-z)=5(k_1+k_2) \implies x\mathcal{R}z$ ។
ដូចនេះ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលនៅលើ $\mathbb{Z}$ ។

■

៦.២ អនុគមន៍ និងប្រភេទនៃអនុគមន៍

៦.២.១ និយមន័យអនុគមន៍ ប្រភេទអនុគមន៍ និងបណ្តុំអនុគមន៍

និយមន័យ ៦.១១ (អនុគមន៍ (Function))៖
អនុគមន៍ f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B (សរសេរ $f:A\to B$) គឺជាទំនាក់ទំនងពិសេសមួយដែលភ្ជាប់ជាតុនីមួយៗ $x\in A$ ទៅនឹងជាតុ $y\in B$ តែមួយគត់ ហើយសរសេរ $y=f(x)$ ។

- A ហៅថា សំណុំដើម (Domain) និង B ហៅថា សំណុំចុង (Codomain) ។
- $y=f(x)$ ហៅថា រូបភាព នៃ x តាម f ហើយ x ហៅថា បុព្វរូប នៃ y ។
- សំណុំរូបភាពនៃ f គឺ $\mathrm{Im}(f)=\{f(x)\mid x\in A\}\subseteq B$ ។

និយមន័យ ៦.១២ (ប្រភេទនៃអនុគមន៍ (Injective, Surjective, Bijective))៖
ឱ្យអនុគមន៍ $f:A\to B$ ។ គេថា f ជា ៖

១ អនុគមន៍ប្រកាន់ (Injective / One-to-One) ៖ ជាតុផ្សេងគ្នាក្នុង A មានរូបភាពផ្សេងគ្នាក្នុង B ៖

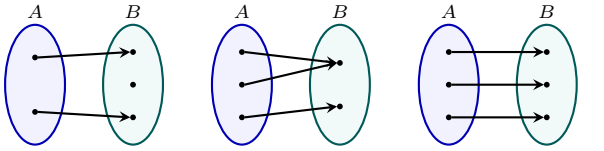
$$\forall x_1,x_2\in A,\quad f(x_1)=f(x_2)\implies x_1=x_2$$

២ អនុគមន៍ពេញ (Surjective / Onto) ៖ គ្រប់ជាតុ $y\in B$ សុទ្ធតែមានបុព្វរូបយ៉ាងតិចមួយក្នុង A ពោលគឺ $\mathrm{Im}(f)=B$ ៖

$$\forall y\in B,\quad \exists x\in A \text{ ដែល } f(x)=y$$

៣ អនុគមន៍មួយទល់មួយ (Bijective) ៖ f ជាអនុគមន៍ប្រកាន់ផង និងពេញផង ។ ក្នុងករណីនេះ f មាន អនុគមន៍ច្រាស (Inverse Function) $f^{-1}:B\to A$ កំណត់

ដោយ $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$ ។



១. ប្រកាន់ (Injective) ២. ពេញ (Surjective) ៣. មួយទល់មួយ (Bijective)

និយមន័យ ៦.១៣ (បណ្តុំអនុគមន៍ (Composition of Functions))៖
ឱ្យអនុគមន៍ $f : A \to B$ និង $g : B \to C$ ។ បណ្តុំអនុគមន៍នៃ g និង f តាងដោយ $g \circ f : A \to C$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in A$ ដោយ ៖

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

ឧទាហរណ៍ ៦.១៤៖
កំណត់អនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ ។

ក) ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ (Bijective) ។
ខ) ចូររកបម្រែនៃអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក) បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ប្រកាន់ ៖
ឱ្យ $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ដែល $f(x_1) = f(x_2)$ ៖

$$\frac{2x_1+3}{x_1-1} = \frac{2x_2+3}{x_2-1} \iff (2x_1+3)(x_2-1) = (2x_2+3)(x_1-1)$$
$$\iff 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 3 = 2x_1x_2 - 2x_2 + 3x_1 - 3$$
$$\iff 5x_2 = 5x_1 \implies x_1 = x_2$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ប្រកាន់ ។
បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ពេញ ៖
ឱ្យ $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ណាមួយ ដោះស្រាយសមីការ $f(x) = y$ រក x ៖

$$\frac{2x+3}{x-1} = y \iff 2x+3 = xy-y$$
$$\iff x(y-2) = y+3 \implies x = \frac{y+3}{y-2}$$

ពិនិត្យលក្ខខណ្ឌ $x \neq 1$ ៖ បើ $\frac{y+3}{y-2} = 1 \implies y+3 = y-2 \implies 3 = -2$ (មិនពិត) ។

ដូចនេះ $x = \frac{y+3}{y-2} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ មានជានិច្ច នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ពេញ ។ សរុបមក f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

ខ តាមការគណនាខាងលើ អនុគមន៍ច្រាស $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

៦.៣ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises)

លំហាត់ ៦.១៥៖
គេឱ្យសំណុំ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$ និង $C = \{4,6\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោម ៖

ក $A \times (B \cap C)$
ខ $(A \times B) \cap (A \times C)$
គ $A \times (B \cup C)$
ឃ $(A \setminus B) \times C$

លំហាត់ ៦.១៦៖
កំណត់ទំនាក់ទំនង $\mathcal{R}$ នៅលើសំណុំ $E = \{1,2,3,4,6,12\}$ ដោយ $x\mathcal{R}y \iff x \mid y$ (x ចែកដាច់ y) ។ ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់នៅលើ E ។

លំហាត់ ៦.១៧៖
គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = 3x-2$ និង $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x) = x^2+1$ ។

ក ចូរគណនា $(g \circ f)(x)$ និង $(f \circ g)(x)$ ។
ខ ចូររកតម្លៃ $x \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ។

លំហាត់ ៦.១៨៖
ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $f:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^2+1$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ (Bijective) រួចរកអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ ។

៦.៤ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions)

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ ដោយ $B\cap C=\{4\}$ និង $B\cup C=\{2,4,6\}$ គេបាន ៖

ក $A\times(B\cap C)=\{1,3,5\}\times\{4\}=\{(1,4),(3,4),(5,4)\}$ ។

ខ $(A\times B)\cap(A\times C)=\{(1,4),(3,4),(5,4)\}$ ។

គ $A\times(B\cup C)=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$ ។

ឃ ដោយ $A\backslash B=\{1,3,5\}$ នោះ $(A\backslash B)\times C=\{(1,4),(1,6),(3,4),(3,6),(5,4),(5,6)\}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៦.១៩៖
ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈទាំង ៣ នៃទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ E ៖

១ លក្ខណៈឆ្លុះ ៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in E$ យើងមាន $x\mid x\implies x\mathcal{R}x$ ។

២ លក្ខណៈប្រឆាំងស៊ីមេទ្រី ៖ ចំពោះ $x,y\in E$ បើ $x\mid y$ និង $y\mid x$ ដោយ $x,y>0$ នោះ $x=y$ ។

៣ លក្ខណៈឆ្លង ៖ បើ $x\mid y$ និង $y\mid z$ នោះ $y=k_1x$ និង $z=k_2y\implies z=(k_1k_2)x\implies x\mid z$ ។

ដូចនេះ $\mathcal{R}$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់នៅលើ E ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=(3x-2)^2+1=9x^2-12x+5$

$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=3(x^2+1)-2=3x^2+1$

ខ $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)\iff 9x^2-12x+5=3x^2+1$

$\iff 6x^2-12x+4=0$

$\iff 3x^2-6x+2=0$

គណនា $\Delta'=(-3)^2-3(2)=9-6=3>0\implies x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

- ប្រកាន់ ៖ ឱ្យ $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ ដែល $f(x_1)=f(x_2)\implies x_1^2+1=x_2^2+1\implies x_1^2=x_2^2$ ។ ដោយ $x_1,x_2\geq 0$ នោះ $x_1=x_2$ ។
- ពេញ ៖ ឱ្យ $y\in[1,+\infty)$ ដោះស្រាយ $x^2+1=y\implies x^2=y-1\geq 0\implies x=\sqrt{y-1}\in[0,+\infty)$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ហើយអនុគមន៍ច្រាសគឺ $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$ ។

មេរៀនទី ៧ វិសមភាព គ្រឹះ និង ការអនុវត្ត ន៍
(Classical Inequalities)

៧.១ វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និងមធ្យមធរណីមាត្រ (AM–GM)

៧.១.១ លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិសមភាពក្នុង $\mathbb{R}$

ទ្រឹស្តីបទ ៧.១ (លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិសមភាព)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ គេបាន ៖

១ $a > b \iff a - b > 0$

២ បើ $a > b$ និង $b > c$ នោះ $a > c$ ។

៣ បើ $a > b$ នោះ $a + c > b + c$ ។

៤ បើ $a > b$ និង $c > d$ នោះ $a + c > b + d$ ។

៥ បើ $a > b$ និង $c > 0$ នោះ $ac > bc$; បើ $a > b$ និង $c < 0$ នោះ $ac < bc$ ។

៦ បើ $a > b > 0$ និង $c > d > 0$ នោះ $ac > bd$ ។

៧ បើ $a > b > 0$ នោះ $a^n > b^n$ និង $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

៨ វិសមភាពការ៉េ ៖ ចំពោះគ្រប់ $a \in \mathbb{R}$ គេបាន $a^2 \geq 0$ ហើយសមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៧.២៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b, c \in \mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

តើសមភាពកើតឡើងនៅពេលណា ?

សម្រាយបញ្ជាក់ ៧.៣៖
ពិនិត្យផលដកវាងអង្គទាំងពីរ រួចគុណនឹង 2 គេបាន ៖

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\\ &= (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0\end{aligned}$$

ដោយ $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ និង $(c-a)^2 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $a,b,c \in \mathbb{R}$ នោះ ៖

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0 \iff a=b=c$ ។

■

៧.១.២ វិសមតាព AM–GM (Arithmetic Mean – Geometric Mean)

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៨ (វិសមតាព AM–GM ចំពោះ ២ ចំនួន និង ៣ ចំនួន) **១** ចំពោះ ២ ចំនួន ៖ ឱ្យ $a,b \geq 0$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ គេបាន ៖

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{ឬ} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b$ ។

២ ចំពោះ ៣ ចំនួន ៖ ឱ្យ $a,b,c \geq 0$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ គេបាន ៖

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \text{ឬ} \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b=c$ ។

៣ ទម្រង់ទូទៅ (n ចំនួន) ៖ ចំពោះគ្រប់ $a_1,a_2,\ldots,a_n \geq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ។

ចំណាំ ៧.៥ (ផ្លូវវិជ្ជាកសំខាន់ៗនៃវិសមតាព AM–GM)៖

- ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$ (សមភាពពេល $x=1$) ។

- ចំពោះគ្រប់ $a, b > 0$ គេបាន $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ និង $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ ។

ឧទាហរណ៍ ៧. (ក) ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ។

(ខ) រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x) = x + \frac{9}{x-2}$ ចំពោះ $x > 2$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

(ក) អនុវត្តវិសមភាព AM–GM ចំពោះពីរចំនួនវិជ្ជមាននីមួយៗ គេបាន ៖

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc} > 0, \quad c + a \geq 2\sqrt{ca} > 0$$

គុណវិសមភាពវិជ្ជមានទាំងបីអង្គនឹងអង្គ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca}) \\ &= 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc\end{aligned}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a = b = c$ ។

(ខ) ដោយ $x > 2 \implies x - 2 > 0$ យើងបំបែក $f(x)$ ដើម្បីប្រើវិសមភាព AM–GM ៖

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-2) + \frac{9}{x-2} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{9}{x-2}} + 2 \\ &= 2\sqrt{9} + 2 = 6 + 2 = 8\end{aligned}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $x - 2 = \frac{9}{x-2} \iff (x-2)^2 = 9 \iff x - 2 = 3 \iff x = 5$ (ព្រោះ $x > 2$) ។

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x)$ គឺ $\min f(x) = 8$ ត្រង់ $x = 5$ ។

៧.២ វិសមភាព Cauchy–Schwarz និងការអនុវត្តន៍

៧.២.១ វិសមភាព Cauchy–Schwarz និង វិច្ឆាក Engel (Titu's Lemma)

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៧ (វិសមភាព Cauchy–Schwarz)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots, a_n$ និង $b_1, b_2, \ldots, b_n$ គេបាន ៖

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

- ករណី $n = 2$ ៖ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
- ករណី $n = 3$ ៖ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ (ករណីភាគបែងខុសពីសូន្យ) ។

ខ្ទបសម្ព័ន្ធ ៧.៨ (វិសមភាព Cauchy–Schwarz ទម្រង់ប្រភាគ / Titu's Lemma)៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ និងចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ គេបាន ៖

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៧. (ក) ឱ្យ $x, y, z \in \mathbb{R}$ ដែល $x + 2y + 3z = 14$ ។ ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ $P = x^2 + y^2 + z^2$ ។

(ខ) (វិសមភាព Nesbitt) ចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

(ក) អនុវត្តវិសមភាព Cauchy–Schwarz ចំពោះ $(1, 2, 3)$ និង (x, y, z) គេបាន ៖

$$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z)^2$$
$$(1+4+9)P \geq 14^2$$
$$14P \geq 196 \implies P \geq 14$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ និង $x+2y+3z=14 \implies x=1, y=2, z=3$ ។
ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ P គឺ $\min P=14$ ។

ខ) សរសេរអង្គទី ១ ជាទម្រង់ Titu's Lemma ដោយគុណភាគយក និងភាគបែងនឹង a,b,c រៀងគ្នា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}$$
$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

ម្យ៉ាងទៀត យើងដឹងថា $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$ (ព្រោះ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$) ។
ដូចនេះ ៖

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b=c$ ។

៧.៣ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises)

លំហាត់ ៧.១០៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $a,b>0$ គេបាន ៖

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq a+b$$

លំហាត់ ៧.១១៖
ឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64$$

លំហាត់ ៧.១២៖
ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ នៅលើចន្លោះ $[1,5]$ ។

លំហាត់ ៧.១៣៖
ឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a + b + c = 3$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$$

៧.៤ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions)

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៧.១៨៖
អនុវត្តវិសមភាព AM–GM ចំពោះពីរចំនួនវិជ្ជមាន $\frac{a^2}{b}$ និង b គេបាន ៖

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} = 2a \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $\frac{b^2}{a}$ និង a គេបាន ៖

$$\frac{b^2}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{a} \cdot a} = 2b \quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គ គេបាន ៖
$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + a + b \geq 2a + 2b$
$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$
សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a = b$ ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៧.១៥៖
ដោយ $1 = a+b+c$ យើងជំនួស 1 នៅក្នុងកន្លាតីមួយៗ រួចប្រើវិសមភាព AM–GM ចំពោះ ៣ ចំនួន ៖

$$1+\frac{1}{a} = 1+\frac{a+b+c}{a} = 2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a} = 1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a} \geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$$

$$1+\frac{1}{b} = 1+1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \geq 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}}$$

$$1+\frac{1}{c} = 1+1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \geq 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}}$$

គុណវិសមភាពទាំងបីអង្គនឹងអង្គ គេបាន ៖

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{ac}{b^2}\cdot\frac{ab}{c^2}} = 64\sqrt[4]{1} = 64$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ អនុវត្តវិសមភាព Cauchy–Schwarz ចំពោះ $(1,1)$ និង $(\sqrt{x-1},\sqrt{5-x})$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}\left(1\cdot\sqrt{x-1}+1\cdot\sqrt{5-x}\right)^2 &\leq (1^2+1^2)\big((x-1)+(5-x)\big)\\ \big(g(x)\big)^2 &\leq 2\times 4 = 8\\ g(x) &\leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\sqrt{x-1}=\sqrt{5-x} \iff x-1=5-x \iff x=3\in[1,5]$ ។
ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ $g(x)$ គឺ $\max g(x)=2\sqrt{2}$ ត្រង់ $x=3$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៧.១៦៖
អនុវត្តវិសមភាព Titu's Lemma (ឬ Cauchy–Schwarz) គេបាន ៖

$$\begin{aligned}\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{1^2}{c} &\geq \frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}\\ &= \frac{9}{3} = 3\end{aligned}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b=c=1$ ។

■

មេរៀនទី ៨ ពហុធា និងទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton (Polynomials & Binomial Theorem)

៨.១ សញ្ញាណគ្រឹះនៃពហុធា និងប្រមាណវិធី

៨.១.១ និយមន័យពហុធា ដឺក្រេ និងឫសនៃពហុធា

និយមន័យ ៨.១ (ពហុធាមួយអថេរ (Polynomial))៖
ពហុធាមួយអថេរ x ដែលមានមេគុណក្នុង $\mathbb{R}$ គឺជាកន្សោមពិជគណិតដែលមានទម្រង់ ៖

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ដែល $n \in \mathbb{N}$ និង $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ហៅថា មេគុណ នៃពហុធា ។

- បើ $a_n \neq 0$ នោះ n ហៅថា ដឺក្រេ នៃពហុធា $P(x)$ តាងដោយ $\deg(P) = n$ ។
- ចំនួនពិត $\alpha \in \mathbb{R}$ ហៅថា ឫស (Root / Zero) នៃពហុធា $P(x)$ កាលណា $P(\alpha) = 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៨.២ (ទ្រឹស្តីបទសំណល់ និងទ្រឹស្តីបទកត្តា (Remainder & Factor Theorems))៖
ឱ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេ $n \geq 1$ និង $\alpha \in \mathbb{R}$ ៖

១ ទ្រឹស្តីបទសំណល់ ៖ សំណល់នៃវិធីចែកពហុធា $P(x)$ នឹង $(x - \alpha)$ គឺស្មើនឹង $P(\alpha)$ ។

២ ទ្រឹស្តីបទកត្តា ៖ ពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x - \alpha)$ លុះត្រាតែ $P(\alpha) = 0$ (ពោលគឺ α ជាឫសនៃ $P(x)$) ។

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៣ (សមតាពពីរសេសនៃពហុធា)៖

ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}$ និង $n \in \mathbb{N}^*$ គេបាន ៖

$$a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$$

និងចំពោះ n ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន គេបាន ៖

$$a^n + b^n = (a+b)\big(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$$

ឧទាហរណ៍ ៨.៨៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ចំនួន $E_n = 831^n - 743^n + 709^n - 610^n$ ចែកជាប់នឹង 187 ជានិច្ច ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៨.៨៖
ដោយ $187 = 11 \times 17$ និង $\gcd(11, 17) = 1$ យើងបង្ហាញថា $11 \mid E_n$ និង $17 \mid E_n$ ៖

- ភាពចែកជាប់នឹង 11 ៖ ផ្ដុំតួជាពីរក្រុម រួចអនុវត្តរូបមន្ត $a^n - b^n$ ៖
$$\begin{aligned} E_n &= (831^n - 743^n) + (709^n - 610^n) \\ &= (831 - 743)p + (709 - 610)q \quad (p, q \in \mathbb{N}^*) \\ &= 88p + 99q = 11(8p + 9q) \implies 11 \mid E_n \end{aligned}$$
- ភាពចែកជាប់នឹង 17 ៖ ផ្ដុំតួតាមរបៀបមួយទៀត គេបាន ៖
$$\begin{aligned} E_n &= (831^n - 610^n) + (709^n - 743^n) \\ &= (831 - 610)m + (709 - 743)r \quad (m, r \in \mathbb{N}^*) \\ &= 221m - 34r = 17(13m - 2r) \implies 17 \mid E_n \end{aligned}$$

ដូចនេះ E_n ចែកជាប់នឹង $11 \times 17 = 187$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

■

៨.២ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton (Newton's Binomial Theorem)

៨.២.១ បន្សុំ និងត្រីកោណ Pascal

និយមន័យ ៨.៦ (ហ្វាក់តូរីយែល និងមេគុណាទ្វេធា) **១** ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$ គេកំណត់ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ និង $0! = 1$ ។

២ មេគុណាទ្វេធា (Binomial Coefficient / Combination) ៖ ចំពោះ $0 \leq k \leq n$ កំណត់ដោយ ៖

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

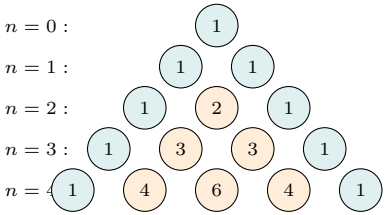
ទ្រឹស្តីបទ ៨.៧ (លក្ខណៈសំខាន់ៗនៃមេគុណាទ្វេធា និងរូបមន្ត Pascal)៖
ចំពោះគ្រប់ $n, k \in \mathbb{N}$ ដែល $0 \leq k \leq n$ គេបាន ៖

១ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ និង $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

២ លក្ខណៈស៊ីមេទ្រី ៖ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

៣ រូបមន្ត Pascal (Pascal's Identity) ៖ ចំពោះ $1 \leq k \leq n$ គេបាន ៖

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$



៨.២.២ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton និងសម្រាយបញ្ជាក់

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៨ (ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton (Newton's Binomial Theorem))៖
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b \in \mathbb{R}$ និងគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \in \mathbb{N}^*$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

- តួទូទៅទី $k+1$ ក្នុងពន្លាត ៖ $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ (0 \leq k \leq n)$
- ករណីផលដក $(a-b)^n$ ៖ $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៨.៩ (សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton តាមវិចារ្យកំណើនគណិតវិទ្យា)៖
តាងសំណើ $P(n)$ ៖ «$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$» ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

១ ជំហានមូលដ្ឋាន ($n = 1$) ៖
អង្គទី ១ ៖ $(a+b)^1 = a+b$ ។
អង្គទី ២ ៖ $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$ ។
ដូចនេះ $P(1)$ ពិត ។

២ ជំហានកំណើន ៖ សន្មតថា $P(m)$ ពិតចំពោះ $m \geq 1$ ពោលគឺ ៖

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

យើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(m+1)$ ពិត ។ គេមាន ៖

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m = (a+b) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}\end{aligned}$$

ប្តូរសន្ទស្សន៍ក្នុងផលបូកទី ២ ដោយតាង $j = k+1 \implies k = j-1$ (ពេល k ពី $0 \to m$, j ពី $1 \to m+1$) រួចប្តូរអក្សរ j មកជា k វិញ ៖

$$(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0}a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}a^{m+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}a^{m+1-k}b^k + \binom{m}{m}b^{m+1}$$

$$= \binom{m+1}{0}a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right]a^{m+1-k}b^k + \binom{m+1}{m+1}b^{m+1}$$

អនុវត្តរូបមន្ត Pascal $\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$ គេបាន ៖

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k$$

នាំឱ្យ $P(m+1)$ ពិត ។ តាមវិចារ្យកំណើន សំណើ $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

■

ខួបសម្ព័ន្ធ ៨.១០ (ផលវិបាកសំខាន់ៗនៃទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton) ❶ យក $a = 1, b = 1$ គេបានផលបូកគ្រប់មេគុណទ្វេធា (និងជាចំនួនសំណុំរងសរុបនៃសំណុំមាន n ធាតុ) ៖

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

❷ យក $a = 1, b = -1$ គេបាន ៖

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

❸ ការអនុវត្តន៍ក្នុងនព្វន្ត ៖ $(a+b)^n \equiv b^n \pmod a$ និង $(a+1)^n \equiv 1+na \pmod{a^2}$ ។

ខួទាហរណ៍ ៨.១ ក ចូររកមេគុណនៃតួដែលមាន x^4 ក្នុងពន្លាតនៃ $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ ។

ខ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton ចូរបង្ហាញថា $11^{10} - 1$ ចែកដាច់នឹង 100 ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក តួទូទៅទី $k+1$ ក្នុងពន្លាតនៃ $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8$ គឺ ៖

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=\binom{8}{k}(2x^2)^{8-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k\\&=\binom{8}{k}2^{8-k}(-1)^k x^{16-2k-k}\\&=(-1)^k\binom{8}{k}2^{8-k}x^{16-3k}\end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យតួមាន x^4 យើងតម្រូវឱ្យនិទស្សន្ត $16-3k=4 \implies 3k=12 \implies k=4$ ។

មេគុណនៃ x^4 គឺ ៖

$$(-1)^4\binom{8}{4}2^{8-4}=1\times\frac{8\times7\times6\times5}{24}\times16=70\times16=1120$$

ខ សរសេរ $11^{10}=(10+1)^{10}$ រួចពន្លាតតាមទ្រឹស្តីបទទ្វេជា Newton គេបាន ៖

$$\begin{aligned}11^{10}-1&=\left[\binom{10}{0}10^{10}+\binom{10}{1}10^9+\cdots+\binom{10}{8}10^2+\binom{10}{9}10^1+\binom{10}{10}1\right]-1\\&=10^2\left[10^8+\binom{10}{1}10^7+\cdots+\binom{10}{8}\right]+10\times10+1-1\\&=100\left[10^8+\binom{10}{1}10^7+\cdots+\binom{10}{8}+1\right]\end{aligned}$$

ដោយកន្សោមក្នុងវង់ក្រចកជាចំនួនគត់ នោះ $11^{10}-1$ ចែកដាច់នឹង 100 ។

៨.៣ លំហាត់អនុវត្តន៍ (Exercises)

លំហាត់ ៨.១២៖
ចូររកតួដែលមិនអាស្រ័យនឹង x (តួថេរ) ក្នុងពន្លាតនៃ $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ ។

លំហាត់ ៨.១៣៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ ចំនួន 9^n-8n-1 ចែកដាច់នឹង 64 ជានិច្ច (ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេជា Newton) ។

៨.៨ ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍ (Solutions)

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ តួទូទៅទី $k+1$ ក្នុងពន្លាតនៃ $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ គឺ ៖

$$\begin{aligned}T_{k+1} &= \binom{10}{k}(x^3)^{10-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k \\ &= \binom{10}{k}2^k x^{30-3k-2k} = \binom{10}{k}2^k x^{30-5k}\end{aligned}$$

តួថេរមិនអាស្រ័យនឹង x កាលណានិទស្សន្តនៃ x ស្មើ 0 ៖

$$30-5k=0 \implies k=6$$

ដូចនេះ តួថេរគឺ $T_7=\binom{10}{6}2^6=210\times 64=13440$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៨.១៨៖

សរសេរ $9^n=(8+1)^n$ រួចពន្លាតតាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton គេបាន ៖

$$\begin{aligned}9^n-8n-1 &= \left[\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}8^{n-k}+\binom{n}{n-1}8^1+\binom{n}{n}1\right]-8n-1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}8^{n-k}+8n+1-8n-1 \\ &= 64\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}8^{n-k-2}\end{aligned}$$

ដោយ $n-k-2\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $0\leq k\leq n-2$ នោះផលបូកជាចំនួនគត់ ។ ដូចនេះ $64\mid(9^n-8n-1)$ ។

■

មេរៀនទី ៩ លំហាត់ ស្រាវជ្រាវ និង វិញ្ញាសាប្រឡងសាកល្បង

៩.១ វិញ្ញាសា ប្រឡង សាកល្បង ទី ១ (កម្រិតមធ្យម និង ត្រៀមអាហារូបករណ៍)

លំហាត់ ៩.១ (តក្កវិទ្យា និងសម្រាយបញ្ជាក់) ក ដោយ ប្រើ តារាងតម្លៃ ភាព ពិត ឬ ច្បាប់សមមូលតក្កវិទ្យា ចូរបង្ហាញថាសំណើធ្យូ $(p \implies q) \iff (\bar{q} \implies \bar{p})$ ជាតួតូឡូជី (សំណើពិតជានិច្ច) ។

ខ ចូរស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារ្យកំណើនគណិតវិទ្យាថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ គេបាន ៖

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

លំហាត់ ៩.២ (សំណុំ និងការអនុវត្តន៍ជាក់ស្តែង)៖
ក្នុងការស្ទង់មតិលើសិស្សថ្នាក់ទី ១០ ចំនួន 120 នាក់ អំពីការចូលចិត្តមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ គេទទួលបានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម ៖

- មានសិស្ស 65 នាក់ ចូលចិត្តគណិតវិទ្យា (M) ។
- មានសិស្ស 55 នាក់ ចូលចិត្តរូបវិទ្យា (P) ។
- មានសិស្ស 45 នាក់ ចូលចិត្តគីមីវិទ្យា (C) ។
- មានសិស្ស 25 នាក់ ចូលចិត្តគណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា ។
- មានសិស្ស 20 នាក់ ចូលចិត្តគណិតវិទ្យា និងគីមីវិទ្យា ។
- មានសិស្ស 15 នាក់ ចូលចិត្តរូបវិទ្យា និងគីមីវិទ្យា ។
- មានសិស្ស 10 នាក់ មិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាទាំងបីនេះសោះ ។

ចូររកចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តមុខវិជ្ជាទាំងបីព្រមគ្នា និងចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តតែមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាមួយមុខគត់ ។

លំហាត់ ៩.៣ (កន្សោមរ៉ាឌីកាល់ និងតម្លៃដាច់ខាត) ក) ចូរគណនាតម្លៃពិតប្រាកដនៃកន្សោម $A = \sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ ។

ខ) ចូរដោះស្រាយសមីការ $|2x-3| + |x+1| = 6$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ ៩.៤ (ទ្រឹស្តីចំនួន / នព្វន្ត) ក) ចូររកគូចំនួនគត់វិជ្ជមាន $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ទាំងអស់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\begin{cases} x + y = 168 \\ \gcd(x,y) = 24 \end{cases}$$

ខ) ចូររកសំណល់នៃវិធីចែកចំនួន $2^{2026} + 3^{2026}$ នឹង 5 ។

លំហាត់ ៩.៥ (អនុគមន៍វិសមតាព និងទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton) ក) ឱ្យ $a, b > 0$ ដែល $a + b = 4$ ។ ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $S = \dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b}$ ។

ខ) ចូររកមេគុណនៃតួដែលមាន x^5 ក្នុងពន្លាតនៃ $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^7$ ។

៩.២ វិញ្ញាសាប្រឡងសាកល្បងទី ២ (កម្រិតសិស្សពូកែ និងស្រាវជ្រាវ)

លំហាត់ ៩.៦ (សម្រាយបញ្ជាក់ និងទ្រឹស្តីចំនួន)៖
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 1$ ចំនួន $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ តែងតែចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច ។

លំហាត់ ៩.៧ (នព្វន្តកម្រិតខ្ពស់) ក) ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឹឡាទីប $n \in \mathbb{Z}$ ដើម្បីឱ្យប្រភាគ $\dfrac{n^2+3n+5}{n+1}$ មានតម្លៃជាចំនួនគត់ ។

ខ) ចូររកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន $B = 9^{9^9}$ ។

លំហាត់ ៩.៨ (សមីការ Diophantine មិនលីនេអ៊ែរ)៖

ចូររកគ្រប់គូចំនួនគត់ $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $xy-2x-3y=1$ ។

លំហាត់ ៩.៩ (វិសមភាព Olympiad)៖
ឱ្យ $a,b,c>0$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

លំហាត់ ៩.១០ (ពហុធា និងសមភាពចន្សាំ)៖
ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

៩.៣ ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃវិញ្ញាសាទី ១

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក) ប្រើច្បាប់សមមូលតក្កវិទ្យា $P\implies Q\equiv\bar{P}\vee Q$ គេបាន ៖
$\bar{q}\implies\bar{p}\equiv\overline{(\bar{q})}\vee\bar{p}$
$\equiv q\vee\bar{p}$
$\equiv\bar{p}\vee q\equiv(p\implies q)$
ដោយអង្គទាំងពីរសមមូលគ្នាគ្រប់ករណី នោះ $(p\implies q)\iff(\bar{q}\implies\bar{p})$ ជាតួតូឡូជី ។

ខ) តាងសំណើ $P(n)$ ៖ «$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$» ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ ។

- ជំហានមូលដ្ឋាន ($n=1$) ៖ អង្គទី ១ $=1^3=1$ និងអង្គទី ២ $=\left[\frac{1(2)}{2}\right]^2=1$ ។ ដូចនេះ $P(1)$ ពិត ។
- ជំហានកំណើន ៖ សន្មតថា $P(k)$ ពិតចំពោះ $k\geq1$ ។ ចំពោះ $n=k+1$ គេបាន ៖

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$
$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]$$
$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]$$
$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

ដូចនេះ $P(k+1)$ ពិត ។ តាមវិចារ្យកំណើន $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ តាង U ជាសំណុំសិស្សសរុប ដែល $n(U)=120$ ។
ដោយមានសិស្ស 10 នាក់ មិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាទាំងបីសោះ នោះចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តយ៉ាងតិចមួយមុខវិជ្ជាគឺ ៖

$$n(M\cup P\cup C)=120-10=110$$

តាង $x=n(M\cap P\cap C)$ ជាចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តមុខវិជ្ជាទាំងបីព្រមគ្នា ។ តាមរូបមន្តកាឌីណាល់ ៣ សំណុំ គេបាន ៖

$$n(M\cup P\cup C)=n(M)+n(P)+n(C)-n(M\cap P)-n(M\cap C)-n(P\cap C)+x$$
$$110=65+55+45-25-20-15+x$$
$$110=105+x\implies x=5$$

ដូចនេះ មានសិស្ស 5 នាក់ ចូលចិត្តមុខវិជ្ជាទាំងបីព្រមគ្នា ។
ចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តតែមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាមួយមុខគត់គឺ ៖

$$65-(25-5)-(20-5)-5=65-20-15-5=25 \text{ នាក់}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក ដោយ $14=9+5=3^2+(\sqrt{5})^2$ និង $6\sqrt{5}=2\cdot3\cdot\sqrt{5}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\ &= |3+\sqrt{5}| - |3-\sqrt{5}| \\ &= (3+\sqrt{5}) - (3-\sqrt{5}) \quad (\text{ព្រោះ } 3 > \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

ខ) បុសនៃកន្សោមក្នុងតម្លៃដាច់ខាតគឺ $x=-1$ និង $x=\dfrac{3}{2}$ ។ បែងចែកជា ៣ ករណី ៖

- ករណី $x<-1$ ៖ $-(2x-3)-(x+1)=6 \implies -3x+2=6 \implies x=-\dfrac{4}{3}$ (យក ព្រោះ $-\dfrac{4}{3}<-1$) ។
- ករណី $-1\le x\le\dfrac{3}{2}$ ៖ $-(2x-3)+(x+1)=6 \implies -x+4=6 \implies x=-2$ (មិនយក ព្រោះ $-2\notin[-1,\frac{3}{2}]$) ។
- ករណី $x>\dfrac{3}{2}$ ៖ $(2x-3)+(x+1)=6 \implies 3x-2=6 \implies x=\dfrac{8}{3}$ (យក ព្រោះ $\dfrac{8}{3}>\dfrac{3}{2}$) ។

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S=\left\{-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}\right\}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក) តាង $x=24\alpha$ និង $y=24\beta$ ដែល $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ និង $\gcd(\alpha,\beta)=1$ ។
ជំនួសក្នុង $x+y=168$ គេបាន $24(\alpha+\beta)=168 \implies \alpha+\beta=7$ ។
គូ (α,β) ដែលបបំមរវាងគ្នាគឺ $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ ។
ដូចនេះ $(x,y)\in\{(24,144),(48,120),(72,96),(96,72),(120,48),(144,24)\}$ ។

ខ) ដោយ $2^2=4\equiv-1\pmod 5$ និង $3^2=9\equiv-1\pmod 5$ ហើយ $2026=2\times1013$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}2^{2026}+3^{2026} &= (2^2)^{1013}+(3^2)^{1013} \\ &\equiv (-1)^{1013}+(-1)^{1013} \pmod 5 \\ &\equiv -1-1=-2\equiv 3 \pmod 5\end{aligned}$$

ដូចនេះ សំណល់នៃវិធីចែកគឺ 3 ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក អនុវត្តវិសមភាព Cauchy–Schwarz (Titu's Lemma) គេបាន ៖

$$S = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{b} \geq \frac{(1+2)^2}{a+b} = \frac{9}{4}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{1}{a} = \frac{2}{b}$ និង $a+b=4 \implies a = \frac{4}{3}, b = \frac{8}{3}$ ។

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ S គឺ $\min S = \frac{9}{4}$ ។

ខ តួទូទៅទី $k+1$ ក្នុងពន្លាតគឺ ៖

$$T_{k+1} = \binom{7}{k}(x^2)^{7-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = (-2)^k\binom{7}{k}x^{14-3k}$$

តម្រូវឱ្យ $14-3k=5 \implies 3k=9 \implies k=3$ ។

មេគុណនៃ x^5 គឺ $(-2)^3\binom{7}{3} = -8 \times 35 = -280$ ។

៩.៨ ដំណោះស្រាយលម្អិតនៃវិញ្ញាសាទី ២

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៩.១១៖

បំប្លែងកន្សោម B_n ដោយប្រើភាពសមមូល ៖

$$B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$
$$= 3 \cdot (3^2)^n + 4 \cdot 2^n$$
$$= 3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n$$

ដោយ $9 \equiv 2 \pmod 7 \implies 9^n \equiv 2^n \pmod 7$ គេបាន ៖

$$B_n \equiv 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n \pmod 7$$
$$\equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$$

ដូចនេះ B_n ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖

ក) ធ្វើវិធីចែកពហុធា (n^2+3n+5) នឹង $(n+1)$ គេបាន ៖

$$\frac{n^2+3n+5}{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)+3}{n+1} = n+2+\frac{3}{n+1}$$

ដើម្បីឱ្យប្រភាគជាចំនួនគត់ លុះត្រាតែ $(n+1) \mid 3 \implies n+1 \in \{-3,-1,1,3\}$ ។

ដូចនេះ $n \in \{-4,-2,0,2\}$ ។

ខ) រកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ $B = 9^{9^9}$ គឺរកសំណល់នៃ B ម៉ូឌុលឡូ 100[cite: 5] ។

ដោយ $\gcd(9,100) = 1$ និង $\varphi(100) = 40$ តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន $9^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ ។

ឥឡូវ យើងរកសំណល់នៃនិទស្សន្ត 9^9 ចែកនឹង 40 ៖

ដោយ $9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{40}$ នោះ $9^9 = (9^2)^4 \cdot 9 \equiv 1^4 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{40}$ ។

ដូច្នេះ $9^9 = 40k+9$ $(k \in \mathbb{N})$ ។ គេបាន ៖

$B = 9^{40k+9} = (9^{40})^k \cdot 9^9 \equiv 1^k \cdot 9^9 \pmod{100}$

គណនា $9^9 \pmod{100}$ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton ៖

$$9^9 = (10-1)^9 = \sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{9}{k}10^{9-k} + (-1)^8\binom{9}{8}10^1 + (-1)^9\binom{9}{9}1$$

$$\equiv 90 - 1 = 89 \pmod{100}$$

ដូចនេះ លេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ $B = 9^{9^9}$ គឺ 89[cite: 5] ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ បំបែកសមីការ $xy-2x-3y = 1$ ជាផលគុណកត្តា ៖

$$xy-2x-3y+6 = 1+6$$

$$x(y-2)-3(y-2) = 7$$

$$(x-3)(y-2) = 7$$

ដោយ $x,y \in \mathbb{Z}$ នោះ $(x-3)$ និង $(y-2)$ ជាតួចែកនៃ 7 គឺ $\{\pm 1, \pm 7\}$ ៖

- $\begin{cases} x-3=1 \\ y-2=7 \end{cases} \implies (x,y)=(4,9)$
- $\begin{cases} x-3=7 \\ y-2=1 \end{cases} \implies (x,y)=(10,3)$
- $\begin{cases} x-3=-1 \\ y-2=-7 \end{cases} \implies (x,y)=(2,-5)$
- $\begin{cases} x-3=-7 \\ y-2=-1 \end{cases} \implies (x,y)=(-4,1)$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $S=\{(4,9),\ (10,3),\ (2,-5),\ (-4,1)\}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

សម្រាយបញ្ជាក់ ៩.១២៖

ដោយ $abc=1 \implies a=\dfrac{1}{bc},\ b=\dfrac{1}{ca},\ c=\dfrac{1}{ab}$ ។ សរសេរអង្គទី ១ ឡើងវិញ ៖

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{(bc)^2}{a(b+c)}+\frac{(ca)^2}{b(c+a)}+\frac{(ab)^2}{c(a+b)}$$

អនុវត្តវិសមភាព Titu's Lemma (Cauchy–Schwarz) គេបាន ៖

$$\begin{aligned}\frac{(bc)^2}{ab+ac}+\frac{(ca)^2}{bc+ba}+\frac{(ab)^2}{ca+cb} &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{2}\end{aligned}$$

តាមវិសមភាព AM–GM ចំពោះ ៣ ចំនួនវិជ្ជមាន ab, bc, ca គេបាន ៖

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}=3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{1}=3$$

ដូចនេះ $\dfrac{ab+bc+ca}{2} \geq \dfrac{3}{2}$ (សមភាពកើតឡើងពេល $a=b=c=1$) ។

■

ដំណោះស្រាយ ៖

ចម្លើយ ៖ តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា Newton ចំពោះ $(1+x)^n$ គេមាន ៖

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

ជំនួស $x = 2$ ចូលក្នុងសមភាពខាងលើ គេបាន ៖

$$(1+2)^n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

ដូចនេះ ផលបូក $S = 3^n$ ។

ឯកសារយោង

[1] ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា, សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១០ ភាគ ១, បោះពុម្ពផ្សាយឆ្នាំ ២០១៨[cite: 5] ។

[2] ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា, សៀវភៅសិក្សាគោល គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ កម្រិតខ្ពស់, បោះពុម្ពលើកទី ៥ ឆ្នាំ ២០១៣[cite: 5] ។

[3] ក្រុមសាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងលោក តាកាហាស៊ី កាហ្ស៊ូអុ (ទីប្រឹក្សាអប់រំគណិតវិទ្យា), សៀវភៅលំហាត់សម្រាប់គ្រូ និងសិស្សមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (១៥ ភាគ)[cite: 5] ។

[4] លោកគ្រូ ឈឹម ម៉េង, សៀវភៅពិជគណិតទូទៅ[cite: 5] ។

[5] Richard Hammack, *Book of Proof*, Richmond, Virginia, May 25, 2015[cite: 1, 5] ។

[6] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th Edition, McGraw-Hill Education, 2019[cite: 1] ។

[7] Daniel J. Velleman, *How to Prove It: A Structured Approach*, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2019[cite: 1] ។

[8] David M. Burton, *Elementary Number Theory*, 7th Edition, McGraw-Hill, 2011 ។